

航空技術研究所資料

TM-5

遷音速流の線型理論

細川巖

1962年8月

航空技術研究所

遷音速流の線型理論

細川 巖*

高速度の航空機がマッハ1を越える前後で、その周りに、(粘性を無視しても)空気力学的に非常にとり扱いにくい流れが作られることが知られている。これが遷音速流とよばれ、今まで多くの人の挑戦を受けながら、しかも今なお実用的に一般的な解決をみることができていない非粘性圧縮流体力学の一分野である。問題の困難は、方程式の混合・非線型にあるといわれている。遷音速流の特別な場合、この困難を避けるいくつかの試みもあった。(たとえば、細長い物体の近似(Mank-Jones) また、ホドグラフ法は、特別な二次元流について有力な武器として使われた)。しかし、より一般的なものを調べるためには、この困難の本質的な面に触れる可能性を求めていくのが、自然の道であろう。このためになされた最近のいくつかの解析的な試みを、統一的な観点から整理してみたいと思う。これらの試みは Oswatitsch によって先鞭をつけられたもので、問題の取り扱いを積分方程式化するか、微分方程式のままで行なうかによって、便宜上、二つの流れに分けることができる。そして、これらはそれぞれ密接な関係があるのであるが、その関係は始めから必ずしも意識されていたことではない。このような関連付けは、著者の私見によるところが大きいことを断っておきたい。標題は、線型理論となっているが、これは非線型の理論を調べるための合理的な数学的手段として、線型理論を使うという意味に解釈されたい。

1. 基礎方程式

航空機が空を飛んでいる時のように、薄いまたは細い物体の周りの流れでは、無限遠一様流からの速度や圧力のずれは流れの各部で一般に小さいと考えられるので、非粘性圧縮流体の基礎方程式は、微小攪乱の方法で簡単化して扱うことができる。遷音速流の場合に特に合理的なように簡単化されたのが遷音速流微小攪乱理論 (the small disturbance theory of transonic flow) で、その基礎方程式は、定常流では、Oswatitsch & Wiegardt, von Kármán, Spreiter⁽¹⁾ らによつて

$$(1-M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = (\gamma+1)M_\infty^2 \phi_x \phi_{xx} + G(x, y, z) \quad (1.1)$$

と与えられている。ここで γ は気体の比熱比、 M_∞, U_∞ は無限遠一様流のマッハ数と速度、 ϕ は流れの微小攪乱の速度ポテンシャルを U_∞ で割ったもので、気流は x の正の方向に流れるも

* 航空技術研究所空気力学第1部

のとする。(添字 x, y, z は偏微分を示す。) $G(x, y, z)$ は流れ場の中では常に 0 であるが(普通はそう考える), 函数場を全空間に拡張した場合, つまり (1.1) を超函数と見た場合には, 境界条件によって決まってくる特異函数となる。(超函数で扱う時には, 境界条件は G の中に既に入っている。4. 節参照) そしてその境界条件は, 従来の亜音速および超音速の線型理論 (Prandtl-Glauert; Ackeret) と同じもの(線型化されたもの)がそのまま適用される。したがって, 従来の線型理論は,

$$|1 - M_\infty^2| \gg (\gamma + 1) M_\infty^2 |\Phi_x| \quad (1.2)$$

となって (1.1) の非線型項が無視される極限に相当しているわけである。 Φ は速度場 V と

$$V = U_\infty \text{grad}(x + \Phi) \quad (1.3)$$

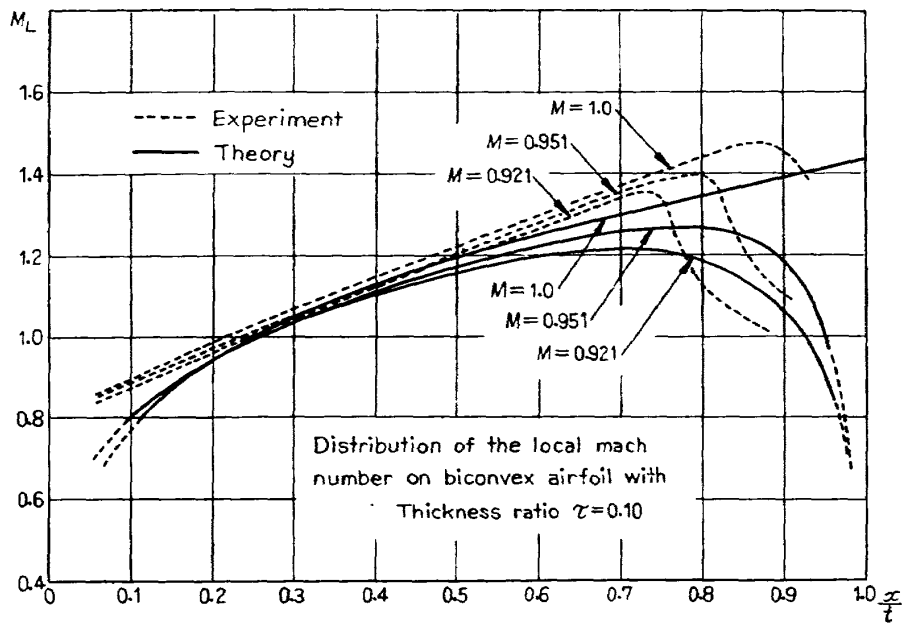
のように関連し, これから Bernoulli の定理によって, 圧力の公式

$$C_p = (p - p_\infty) / (1/2) \rho_\infty U_\infty^2 = -2\Phi_x - (\Phi_y^2 + \Phi_z^2) \quad (1.4)$$

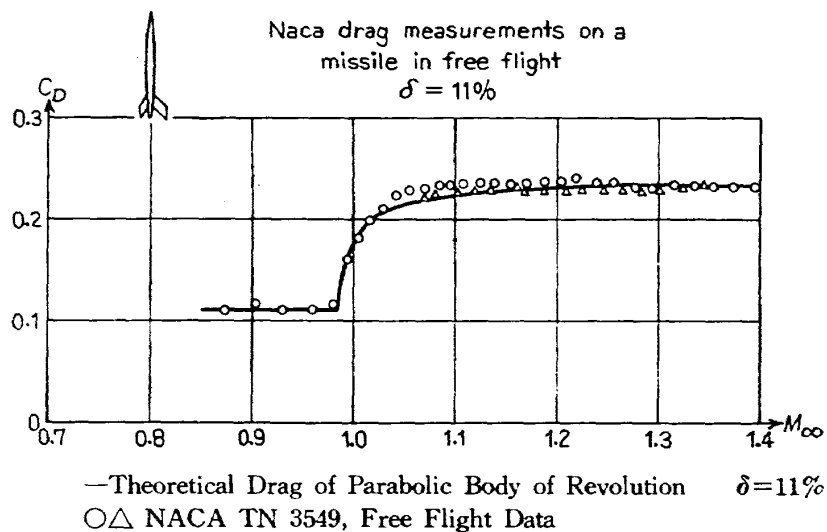
が得られる。 C_p は圧力係数, $(p - p_\infty)$ は無限遠からの圧力差, ρ_∞ は無限遠気流の密度である。この第2項は, 細長い物体の場合にのみ大きくなるが, 普通は高次の微小量と考えてよい。二次元流の場合は, (1.1) で Φ_{yy} を落して考えればよいが, あるいは三次元流の場合の一般結果から二次元流の場合を導き出すこともできるはずである。

(1.1) の混合・非線型に対処する手段には, まず数値的方法 (Emmons: Relaxation Method⁽²⁾) とホドグラフ変換の方法とがあった。ホドグラフ変換というのは, 独立変数をホドグラフ変数(速度ベクトル, あるいはそれに似たもの)に変換することで, これによって (1.1) は線型化され, 解の発見は容易になる。しかし, これは二次元流の場合に限られ, 物理面で与えられた境界条件から解を一般に公式化できない, という欠陥をもっている。(ただし, 正確には二次元流のホドグラフ変換法は次のようにいわなければならない。元来, 二次元流のホドグラフ方程式の理論は, (1.1) の近似(微小攪乱)とは無関係に, 非粘性圧縮流の厳密な基礎方程式から展開することができる。しかし, 線型化はされても, 式の中に, 断熱気流の密度と速度の関係から決まる複雑な函数が入っているので, 簡単に扱えるためにはこの函数の簡単化が行なわれなければならない。この簡単化の度合によって, Kármán-Tsien, Frankl'-Tricomi, Tomotika-Tamada の諸近似が出てくるわけである⁽²³⁾。さらに Imai⁽³⁾ は, 独立変数の巧みな変換と精度の良い函数近似によって, 高度な厳密性を期待させる二次元遷音速流の線型方程式を導いている。(1.1) は, これらの中で, Frankl'-Tricomi の近似(音に近い近似)に対応すると考えられる。(1.1) をホドグラフ法で解いた典型的な例は, Guderley & Yoshihara, Cole, Vincenti & Wagoner による楔型翼の周りの二次元流である。しかし, (1.1) の航空力学における重要性は, 一般に三次元流を包んでいて, 遷音速相似法則 (von Kármán; Spreiter⁽¹⁾) や遷音速等価法則 (Oswatitsch; Heaslet & Spreiter⁽⁴⁾) の誘導に寄与したということにある。

その後、Oswatitsch の積分方程式法⁽⁵⁾が現われ、次に 1955 年、遷音速線型理論の思想が出てくる⁽⁶⁾。これらは、数学的な厳密性を多少ギセイにしても近似解の公式化を完遂しようとするもので、従来の常識からみれば理論的方法の大きな転換であった。積分方程式法というのは、(1.1) を積分方程式に変換し、それから簡単化の技巧を凝らす方法であり、遷音速線型理論というのは、(1.1) の非線型項で Φ_{xx} を定数と見て解析を始め、後で適当にこれを処理する仕方である。遷音速線型理論 (linearized transonic flow theory) の最も一般的な形は、Maeder & Thommen⁽⁷⁾ によって与えられた。(この理論の元の思想は Oswatitsch & Keune⁽⁶⁾ によっているが、考え方には Maeder & Thommen と比べてかなりの差がある。Oswatitsch & Keune は、 $M_\infty \cong 1$ の



第1図 (Ref. 11 より引用, 対称角円弧翼, 実験は Michel, Marchand, LeGallo (ONERA) による。)



第2図 (Ref. 11 より引用)

軸対称体の周りの音速点前後の加速流の部分に限り、この線型化を妥当と推論し、そのことを実証したのである。) 第1~2図⁽¹¹⁾は Maeder & Thommen の線型理論の適用例で最も成功した場合である。1957年、Spreiter & Alksne の局所線型化法⁽⁸⁾が現われ、ついで筆者の非線型補正理論⁽⁹⁾が考案されるが、これらは、遷音速線型理論の改善もしくは精密化という線に沿った一連の研究と考えるとよい。特に興味のあるのは、最近、Maeder & Thommen⁽¹⁰⁾が積分方程式法に沿って遷音速線型理論の改善を考察し、非線型補正理論と同じ内容の近似解法を導いたことであつた。

そこで、最近行なわれたこれらの積分方程式法と遷音速線型理論の周辺の諸研究を見通しよく説明するために、歴史的な順序よりも、その数学的関連に重きをおいて議論を進める。

2. 微分方程式による考察

Maeder & Thommen の遷音速線型理論の基礎方程式は、

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=K\varphi_x+G(x,y,z) \quad (2.1)$$

である。境界条件は(1.1)と同じ、したがって G は変わらない。ここで

$$\Phi=\varphi+g \quad (2.2)$$

と置き、(1.1)に代入し、(2.1)の関係を使うと、

$$\begin{aligned} g_{yy}+g_{zz}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\{(M_\infty^2-1)+(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_x\}g_x+\frac{1}{2}(\gamma+1)M_\infty^2g_x^2\right] \\ +\{(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_{xx}-K\}\varphi_x \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる。これは g を決める非線型の方程式で、

$$(M_\infty^2-1)+(\gamma+1)M_\infty^2(\varphi_x+g_x)\cong 0 \quad (2.4)$$

により混合型の性質をもっており、 φ で無視された非線型的な行動を g が荷うべきことを示している。しかし注目すべきことに、(2.3)には G は存在しない。つまり g の攪乱は、 Φ の境界条件に無関係に(2.3)の最後の非斉次項だけが源になって生ずるのである。このことから、

$$g\cong 0, \text{ if } \{(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_{xx}-K\}\varphi_x\cong 0 \quad (2.5)$$

が結論されてもよい。ただし、それは解の存在が一意的であれば、という条件つきである。事実(2.3)が線型方程式ならば、問題なく(2.5)は正しい。そしてそれは g の境界条件(境界上で無攪乱)と等価である。しかし、このことは必ずしも非線型の場合にも成り立つわけではない。もし解が一意的でなければ、(2.5)の条件で $g\neq 0$ という別の解も存在するだろう。しかしこのような解は、たとえあつても物理的に納得できない*、また、線型理論につながるものでもない

* たとえば、今 $G\cong 0$ として一様流の境界条件を与えたとすると、当然 $\varphi\cong 0$ 、次に $g\cong 0$ の解が(2.3)から出れば、われわれは $\Phi=\varphi+g\neq 0$ の攪乱流をもたなければならない。

ので、現実の解はすべて (2.5) を満たすものと考えるのが妥当と思われる。このようにして g を解いた時、もし $\varphi \gg g$ であれば、遷音速線型理論の近似が裏づけられるのであるが、実は一般にそうでない。

(2.3) を直接解くことは難かしいので、物体近傍の解を得ることを試みる。よく知られているように、微小攪乱のパラメータ τ を導入し、

$$\Phi = O(\tau), \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\tau^{1/2}\bar{y}, \quad z = \tau^{1/2}\bar{z} \quad (2.6)$$

(L は物体の縦の長さ, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = O(1)$ 。) によって, (1.1) の両辺は $O(\tau^2)$ である。遷音速流では,

$$(1 - M_\infty^2) / (\gamma + 1) M_\infty^2 = O(\tau) \quad (2.7)$$

したがって, (2.1) の両辺も $O(\tau^2)$ であり,

$$\varphi = O(\tau), \quad \text{及び} \quad K \sim (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_{xx} = O(\tau) \quad (2.8)$$

このことから (2.3) の強制項 (非斉次項) は一般に $O(\tau^2)$ となり, これと矛盾しないために

$$g = O(\tau) \quad (2.9)$$

である。(つまり $\varphi \gg g$ は一般にいけないのである。) さて, g の微分の大きさの程度を物体近傍で調べよう。 $U_\infty \Phi_x = u, U_\infty \Phi_z = w$ とおけば, 近似的に

$$\frac{\Phi_z}{1 + \Phi_x} \cong \varphi_z + g_z, \quad \frac{w}{U_\infty + u} = \frac{w}{U_\infty} - \frac{w}{U_\infty} \cdot \frac{u}{U_\infty} + \dots \quad (2.10)$$

であり,

$$\varphi_z = w / U_\infty \quad (\text{線型境界条件}) \quad (2.11)$$

の結果,

$$\begin{aligned} g_z &= O(w / U_\infty \cdot u / U_\infty) \\ &= O(\tau^{3/2} \cdot \tau) = O(\tau^{5/2}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

が導かれる。同様に

$$g_y = O(\tau^{5/2}) \quad (2.13)$$

(軸対称の時は, $\log \tau = O(1)$ とみなして同じ結論に達する。) 流れが滑かである限りは, (2.12), (2.13) 物体近傍ですっと成立すると考えて, (2.6) より

$$g_{yy} + g_{zz} = O(\tau^3) \quad (2.14)$$

が得られる。(2.3) の右辺は $O(\tau^3)$ であるから, われわれはこれを無視することができる。

[1] 非線型補正理論

(2.3) で右辺を除いたものは容易に積分でき,

$$g_x = -\left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\} \pm \sqrt{\left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_c^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx} \quad (2.15)$$

条件 (2.5) により, 複号は

$$\varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \geq 0 \quad (2.16)$$

にしたがって取られねばならない。さて, g_x は

$$\varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} = 0 \quad (2.17)$$

を満たす点 $x=c^*$ において, 一般に不連続となる。しかし, 流管の中の流れの加速的な不連続は, よく知られているように一般にエントロピー減少をもたらす, 物理的に不可能であるから,

$$g_x(c^*) = 0 \quad (2.18)$$

によってこれを除く。ただし, $x=c^*$ は φ_x の加速流領域にあるとする。これは直ちに

$$c=c^* \quad (2.19)$$

に導く。

次に, (2.18) と (2.2) より

$$\varphi_x(c^*) = \Phi_x(c^*) \quad (2.20)$$

が得られる。これは, (2.4) を考慮して分るように遷音速線型理論によって得られる $x=c^*$ は実際の流れの音速点 (放物点) になることを示している。そこで, (1.1) と (2.1) を $x=c^*$ において比較するならば, $O(\tau^2)$ で $\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}$ であるから

$$\begin{aligned} & \{ -(1 - M_\infty^2) + (\gamma + 1)M_\infty^2 \Phi_x(c^*) \} \Phi_{xx}(c^*) \\ & = -(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx}(c^*) + K \varphi_x(c^*) \end{aligned} \quad (2.21)$$

(2.17) と (2.20) より, この左辺は消え, 正しく

$$K = (\gamma + 1)M_\infty^2 \varphi_{xx}(c^*) \quad (2.22)$$

が誘導される。(2.17) と (2.22) は, 未定々数 c^* と K を同時に決定するに十分である。

こうして物体近くの近傍解は, (2.15) によって $O(\tau)$ において,

$$\Phi_x = \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \pm \sqrt{Y(x)} \quad (2.23)$$

$$Y = \left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_{c^*}^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & = \left\{ \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\}^2 + \varphi_x^2(c^*) - 2 \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \varphi_x(x) \\ & \quad + 2 \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \{ \varphi(x) - \varphi(c^*) \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

と与えられる。複号は (2.16) による。 φ は (2.1) によって一般に解の公式化を行ないうるから, この結果は一般的である。ただ, 純亜音速および純超音速流では本来音速点は存在しないの

で、このままではこの解は遷音速の外に拡張することはできない。しかし、 c^* および K について次のような約束をすると、亜音速臨界流と超音速臨界流において流れの模様を連続的につなぐらしめることができ、 $M_\infty \rightarrow 0$ および ∞ で従来の線型理論に漸近することを保証することができる。すなわち、

“(2.17) の根 c^* がいない場合には、流れの場から音速点が丁度消失する時 (臨界流) の c^* の臨界値に c^* を固定し、かつ (2.22) によって一意的に K を決定する。”

この結果、(2.25) の最後の項は $M_\infty <$ 亜音速臨界マッハ数で消え、あるいは $M_\infty \rightarrow \infty$ で小さくなり、また同時に (1.2) の関係を考慮すると、(2.23) は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \Phi_x = & \varphi_x(x) + \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2(1-M_\infty^2)} \{\varphi_x^2(x) - \varphi_x^2(c^*)\} \\ & - \frac{K}{(1-M_\infty^2)} \{\varphi(x) - \varphi(c^*)\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

もちろん φ そのものは、 $K/(1-M_\infty^2) \rightarrow 0$ とともに従来の線型理論に漸近する。

以上が非線型補正理論の枠組であるが、この理論が垂直衝撃波に相当する速度不連続を誘導するという興味ある事実を述べておかなければならない。(2.17) は、すでに決定された K に対し、 φ_x の減速流領域にもう一つの根 $x=c^{**}$ をもつことがある。(2.23) の複号は $x=c^{**}$ でも逆転し、しかも $\sqrt{Y(c^{**})}$ は有限であるから、生ずる Φ_x の不連続は丁度遷音速の垂直衝撃波の関係を満足する[†]。 M_∞ の変化とともに実際にどういうふうに現われるかは、第 3~4 図⁽¹²⁾に示される。そこで、

$$\bar{u} + \xi_\infty = (M^2 - 1) / \{(\gamma + 1)tM_\infty^2\}^{1/2} \quad (2.27)$$

$$\xi_\infty = (M_\infty^2 - 1) / \{(\gamma + 1)tM_\infty^2\}^{1/2} \quad (2.28)$$

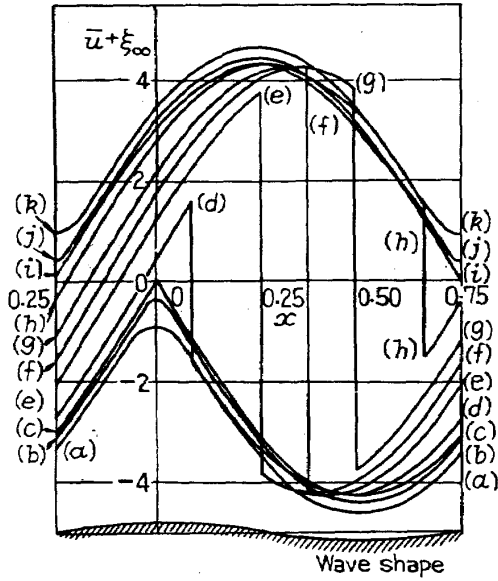
(M は局所マッハ数、 t は二次元物体あるいは境界の厚み比。) は、それぞれ遷音速相似法則による変数で、マッハ数の示標になるものである。 $M \geq 1$ により $\bar{u} + \xi_\infty \geq 0$ 。流れの模様が亜音速型から超音速型へ遷移する様子が興味深く見られる。第 5 図⁽¹²⁾に、対称円弧翼の上の c^* と c^{**} の計算が実験と比較される。Spreiter の理論というのはそこでは積分方程式法である。衝撃波の発生している写真 (Maeder の実験、対称円弧翼 $t=0.1$, 第 6 図) を参考のためにつけ加えた^{††}。臨界流で果してどれ位理論が有効かの実証として、二つの例がある。(第 7⁽⁹⁾~8⁽¹²⁾ 図。) そこで、

$$\bar{C}_p = -2\bar{u} = [(\gamma + 1)M_\infty^2]^{1/2} C_p / t \quad (2.29)$$

である。

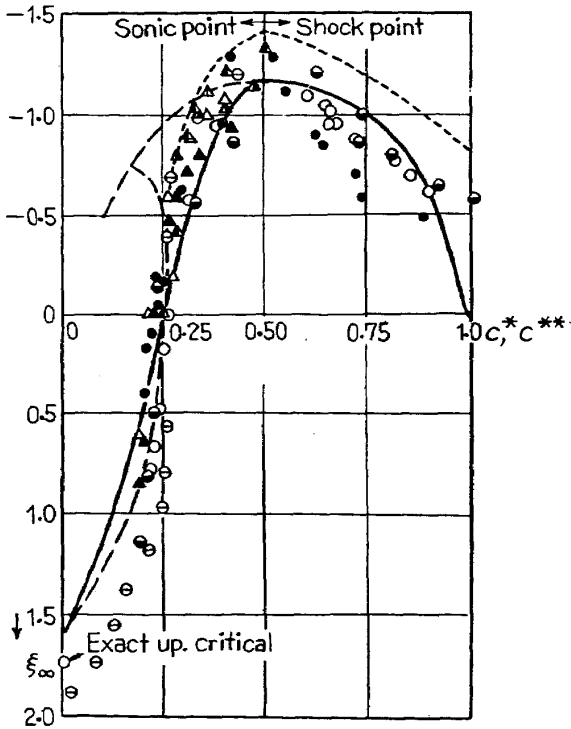
[†] (2.4) からわかるように、 $\Phi_x = (1 - M_\infty^2) / (\gamma + 1)M_\infty^2$ は流れ場の放物点すなわち音速点を示すから、 $x=c^{**}$ の前後の流れの速度は音速から等量だけ隔たっている。

^{††} Emmons は、数値的方法により、曲った壁の上にはほぼ垂直の衝撃波が定在する二、三の例を計算している。しかし、現実の流れでは、境界層との干渉が強くなり起こるので、非粘性の理論どおりにはならない。この点の理論的追求は将来の問題である。



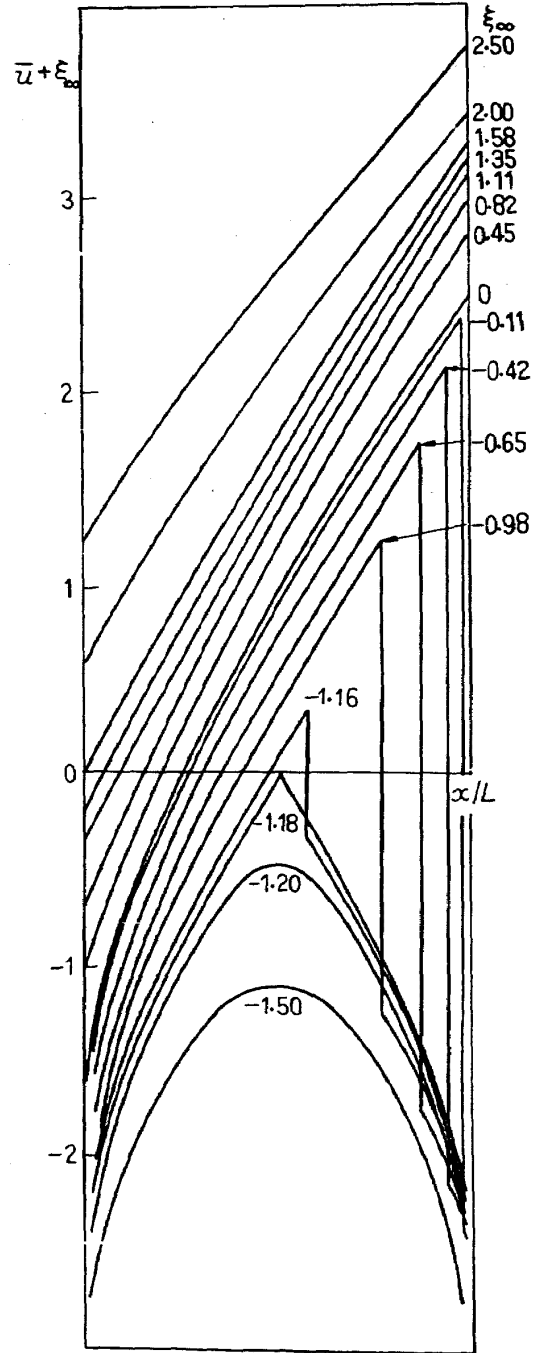
第3図 波状壁の上の速度分布

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| (a) $\xi_\infty = -2.8$ | (g) $\xi_\infty = 1.0$ |
| (b) $= -2.4$ | (h) $= 2.0$ |
| (c) $= -\pi^{2/3}$ | (i) $= \pi^{2/3}$ |
| (d) $= -2.0$ | (j) $= 2.4$ |
| (e) $= -1.0$ | (k) $= 2.8$ |
| (f) $= 0$ | |

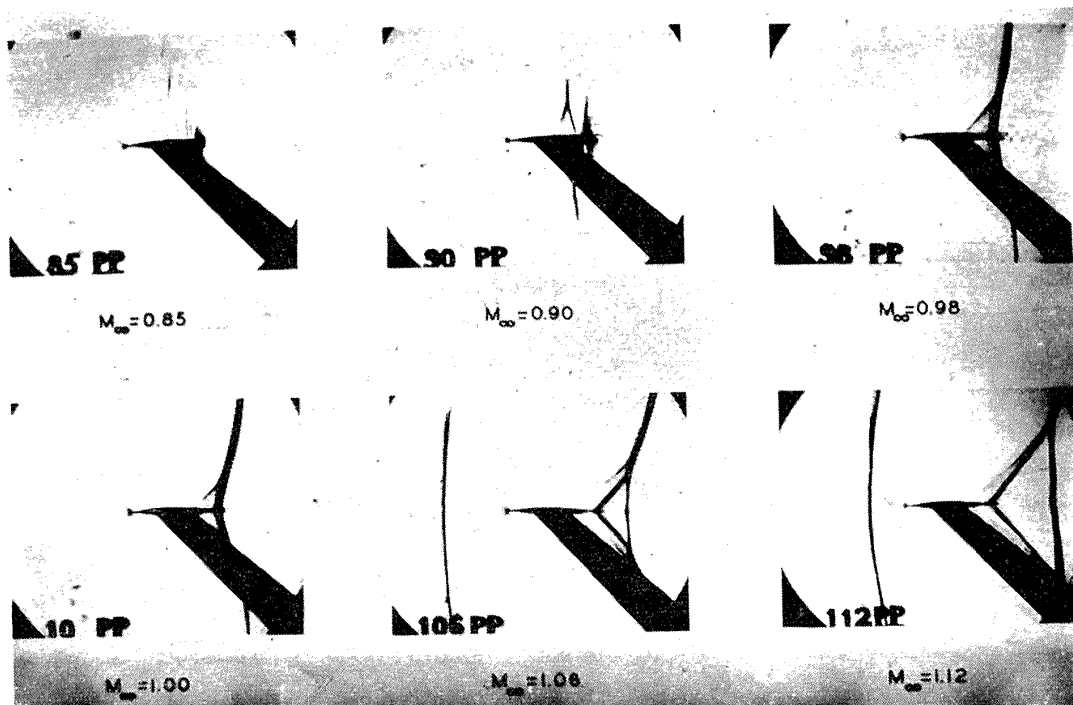


第5図 対称円弧翼上の音速点と衝撃点の ξ_∞ に対する移動

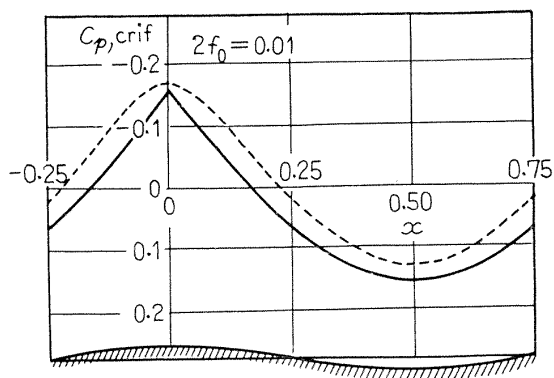
- Theory
- Spreiter
 - Maeder
 - Present
- Experiment, Kawamura and Karashima
- $t=0.10$
 - $t=0.0808$
 - ◐ $t=0.0544$
- Michel et al
- ▲ $t=0.06$
 - △ $t=0.10$
 - △ $t=0.03$
 - ▲ $t=0.12$
- Bryson
- ⊖ $t=0.088$



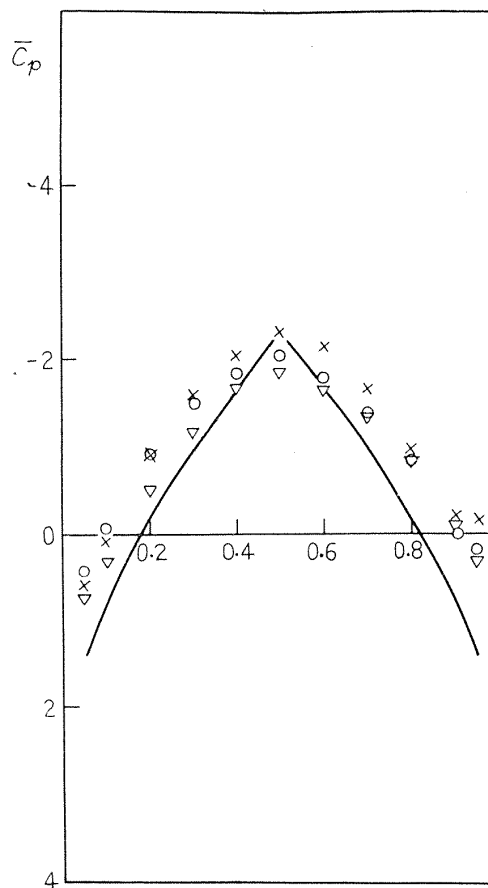
第4図 対称円弧翼の上の流れのマッハ数 ($\bar{u} + \xi_\infty$) 分布



第6図 (Ref. 11 より引用)

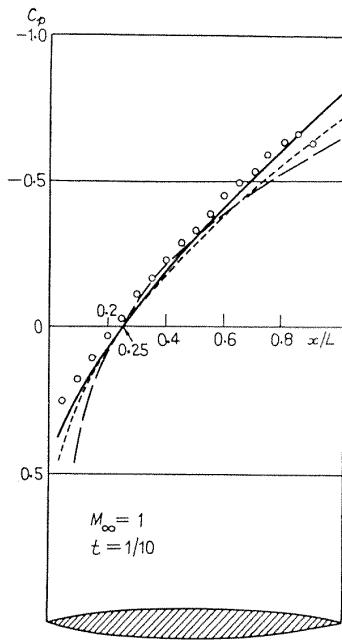


第7図 亜音速臨界流における波状壁の上の圧力分布。Kaplan の計算との比較
 ----- Kaplan ———— 現在の理論



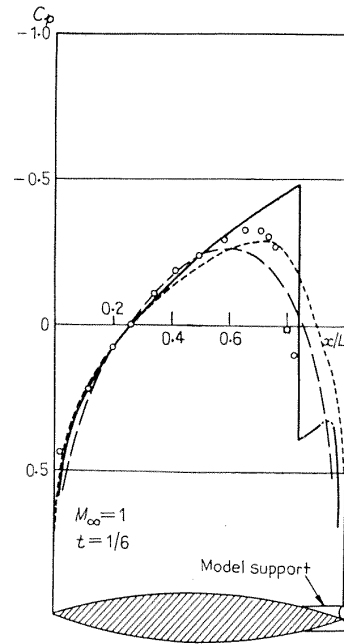
第8図 亜音速臨界流における対称円弧翼の上の圧力分布

Theory — Present ($\xi_\infty = -1.745$)
 Experiment, Michel et al
 ○ $M_\infty = 0.770, t = 0.12 (\xi_\infty = -1.3226)$
 × $M_\infty = 0.835, t = 0.08 (\xi_\infty = -1.1567)$
 ▽ $M_\infty = 0.870, t = 0.06 (\xi_\infty = -1.0653)$



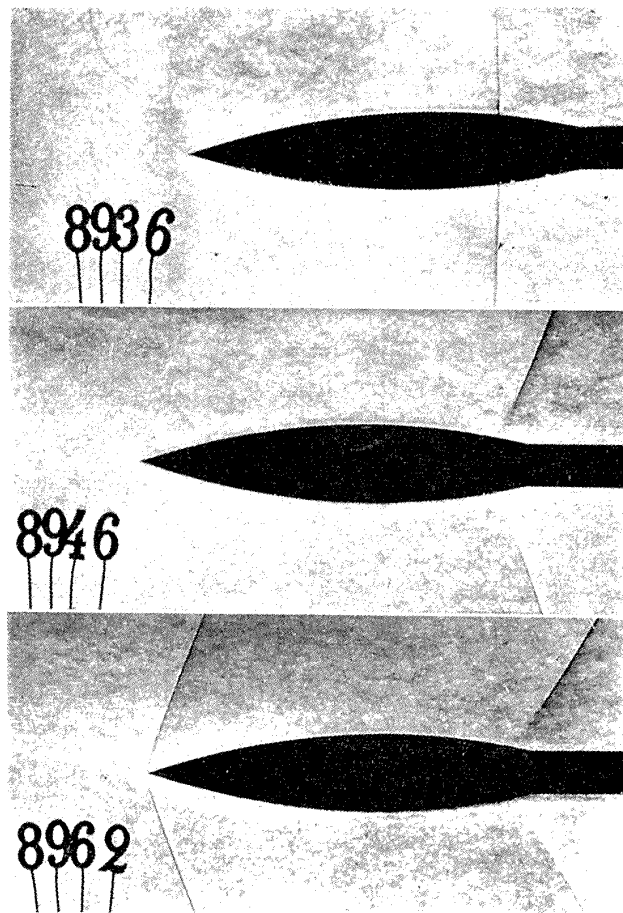
第9図 対称円弧翼の上の C_p

Experiment ○ by Michel, Marchaud and Le Gallo
 Theory — by the present method
 - - - by Maeder
 - · - · by Spreiter (the local linearization method)



第10図 円弧型回転体の C_p

Experiment ○ by Drougge
 Theory — by the present method
 - - - by Maeder
 - · - · by Spreiter (the local linearization method)



第11図 $M_\infty=0.95, 1.00, 1.15$ における $t=1/6$ の円弧型回転体のシュリーレン写真 (Drougge 15)

第 9~10 図に、 $M_\infty=1$ の円弧型断面の対称翼と回転体について、実験との比較がされる。回転体の場合に、 $M_\infty=1$ で衝撃波が表面上に導かれることは注目される。第 11 図はその実験写真である。

[2] 局所線型化法

Spreiter & Alksne⁽⁸⁾ はいささか便宜的な観点から局所線型化法を作り出しているが、補正理論の立場からその正当化を試みる事が可能である。

双曲型局所線型化法

いま、(2.2) を微分し、 $\Phi_x = \varphi_x + g_x$ とし、この表現をそのまま形式的に借りて、 K の変数化を試み、

$$\Phi_x = \varphi_x \{x, y, z; K(x)\} + g_x \quad (2.30)$$

と置いてみる。こうすると当然、(2.3) はこれに応じて変更を被るが、特に強制項は

$$F \equiv \{(M_\infty^2 - 1)K' \varphi_{xK} + (\gamma + 1)M_\infty^2 \varphi_x (\varphi_{xx} + K' \varphi_{xK}) - K \varphi_x\} \quad (2.31)$$

(' は微分) と変えられる。条件 (2.5) はそのまま使うことができるから、もし $F \equiv 0$ であれば $g \equiv 0$ となり、 $\Phi_x \equiv \varphi_x$ がいえる。しかし、 K は一変数函数としているので、これは一般に期待できない。そこで y, z は特に物体上に指定し、 $F=0$ を x の常微分方程式とみなして $K=K(x)$ を解くことにする。こうしても、 g は一般に 0 とならず、 φ_x は Φ_x に対して誤差をもっと考えられるが、物体近傍に着目する限り、(2.15) に見られるように、 $g_x=0$ を $O(\tau)$ において結論することができるであろう。特別に $M_\infty=1$ とすると、 $F=0$ は (2.31) から、

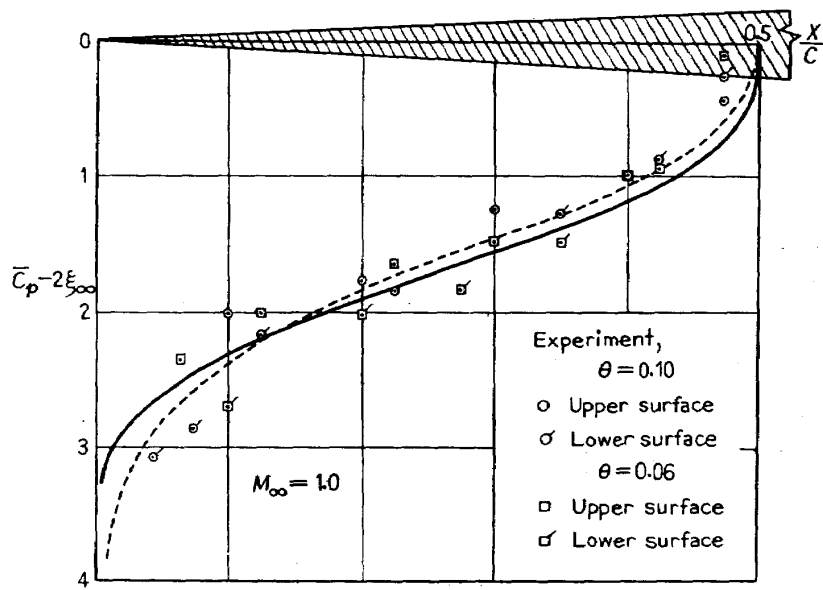
$$d/dx \cdot \varphi_x(x; K(x)) - K(\gamma + 1) = 0 \quad (2.32)$$

となる。 $\varphi_x(x; K(x)) = u(x)$ と置けば、

$$u = \varphi_x \{x; (\gamma + 1) du/dx\} \quad (2.23)$$

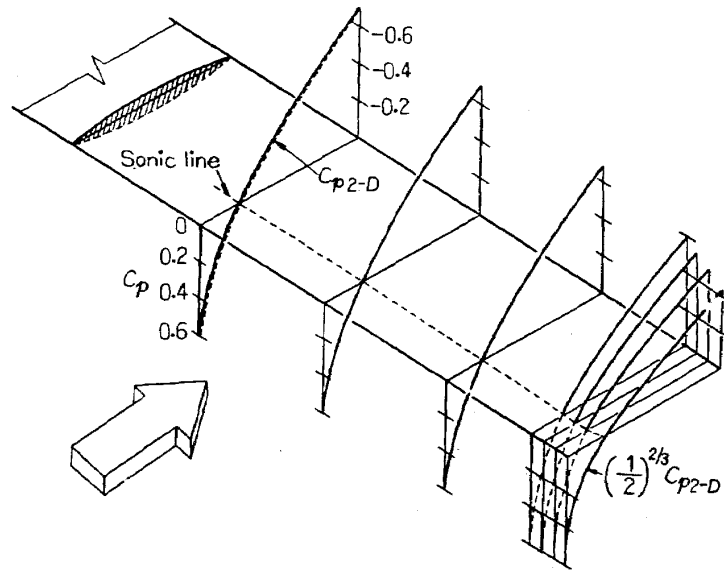
となり、これが Spriter & Alksne の元の表現⁽⁸⁾である。(2.33) の初期条件は、解が特異性をもたないことを要求して、音速点 $x=c^*$ で $u=0$ とされる。 $M_\infty \neq 1$ の時は、(2.31) の第 1 項が利くので、(2.33) のような形の局所線型化法が良い結果を与えることは期待できない。(2.32) で注目されることは、 $K > 0$ の遷音速線型理論の解 φ_x から出発すると、いつでも $du/dx > 0$ で、加速流しか得られないことである。したがって、減速流を含む遷音速流を扱う時には、この方法で一貫した解を得ることはできない。彼らは次に述べる純亜音速および純超音速の局所線型化法を、部分的に併用することを考えている⁽⁸⁾⁽¹³⁾。

この方法で成功した見事な例は、 $M_\infty=1$ の楔型二次元翼の場合 (第 12 図⁽⁸⁾) である。三次元有限翼についても、 y 座標をパラメータとして扱い、結果を出している。第 13 図⁽¹⁴⁾ は断面が対称円弧型の半無限翼の C_p 分布の計算を示す。第 9 図から推して、非線型補正理論によっても、



第 12 図 (Ref. 8 より引用)

----- 局所線型化法 ——— Guderley-Yoshihara の解



第 13 図 (Ref. 14 より引用)

第 13 図とほぼ同じ結果が期待されてもよい。特に翼端で

$$C_p = (1/2)^{2/3} C_{pII} \tag{2.34}$$

(C_{pII} は二次元翼の C_p) となることは非線型補正理論でもいえる。

楕円型・双曲型局所線型化法

次に、純亜音速および純超音速の局所線型化法を導こう。この場合は、基礎となる線型解を変更し、(1.1) の非線型項の中の Φ_x の方を定数 u と置いた式

$$\psi_{yy} + \psi_{zz} = \{(M_\infty^2 - 1) + (\gamma + 1)M_\infty^2 u\} \psi_{xx} \tag{2.35}$$

から出発する。そして ψ_{xx} を解き、この中で形式的に $u \rightarrow u(x)$ としたものを使って、

$$\Phi_{xx} = \psi_{xx}(x, y, z; u(x)) + g_{xx} \quad (2.36)$$

とし、前と同じ補正理論を展開する。この場合は、

$$F \equiv (\gamma + 1)M_\infty^2 \left(\int^x \psi_{xx} dx - u \right) \psi_{xx} \quad (2.37)$$

となり、これは、($F=0$)

$$\psi_{xx}\{x; u(x)\} - du/dx = 0 \quad (2.38)$$

をもたらす。前と同じ理由によって、物体近傍で $\Phi_x = \psi_x\{x; u(x)\}$ を結論することができ、これはまさに Spreiter & Alksne の局所線型化法である。彼らは、

$$u(x) = \psi_x(x; u(x)) \quad (2.39)$$

という物理的に紛らわしい関係を、経験的に忌避したようであるが、上の論法によれば (2.38) しかあり得ない。さて、 ψ は $u \rightarrow (1 - M_\infty^2)/(\gamma + 1)M_\infty^2$ で、楕円型から双曲型、あるいはその逆になり、さらにそこで発散するという困難な事情をもつために、おのずから u がこの点を通らない場合に、理論の適用が制限されなければならない。すなわち、純亜音速および純超音速の流れに限られる曲線である。それぞれは楕円型および双曲型の ψ の解から出発する。(2.38) の初期条件も解の特異性を避けることにより、一意的に与えられる。この解法は、臨界流に近い所で、従来の線型理論を相当改善することが経験的に明らかにされている。

第 10 図⁽¹³⁾ の回転体の例では、減速流の部分で、音速から上は双曲型、下は楕円型でつないだ Spreiter & Alksne の結果が与えられる。つなぎ目が割に滑かなのが面白いが、このような減速流で衝撃波の発生の可能性を検討しない点は幾分片手落ちの感がある。

[3] マッハ数凍結の誘導

マッハ数凍結というのは、 $M_\infty \equiv 1$ で M_∞ が変わっても流れ場の局所マッハ数が停留する現象で ($dM/dM_\infty(M_\infty=1)=0$)、Liepmann & Bryson⁽¹⁶⁾ によって注目されたものである。遷音速相似法則により、これは二次元流で、

$$\bar{C}_p = 2\xi_\infty + \bar{C}_{p(\xi_\infty=0)} \quad (2.40)$$

と表現される。Spreiter & Alksne⁽⁸⁾ は近似的な考察でこれを導いたとしているが、その過程は厳密に信頼できないものである。(1.1) を基礎として厳密に検討してみよう。

いま、

$$\Phi = \{(1 - M_\infty^2)/(\gamma + 1)M_\infty^2\}x + \Psi \quad (2.41)$$

と変換すると、二次元流として (1.1) は

$$\Psi_{zz} = (\gamma + 1)M_\infty^2 \Psi_x \Psi_{xx} \quad (2.42)$$

ここでは流れ場の中だけに注目して $G \equiv 0$ とする。相似変換

$$\begin{aligned}\Psi &= \{t^2/(\gamma+1)M_\infty^2\}^{1/2}\bar{\Psi}, \\ x &= \bar{x}, \quad z = \{(\gamma+1)M_\infty^2 t\}^{1/2}\bar{z}\end{aligned}\tag{2.43}$$

により, (2.42) は

$$\bar{\Psi}_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\Psi}_{\bar{x}} \bar{\Psi}_{\bar{z}\bar{z}}\tag{2.44}$$

に帰着し, M_∞ に関係しない形にすることができる。しかし, 境界条件は M_∞ に関係し, 無限遠で

$$\bar{\Psi}_{\bar{x}} \rightarrow \xi_\infty\tag{2.45}$$

でなければならない。(2.41) と (2.28) を考慮。) したがって, (2.41) を微分し, 相似法則によって書き直すと ((1.4), (2.29) を考慮。),

$$\bar{C}_p = 2\xi_\infty - 2\bar{\Psi}_x(x; \xi_\infty)\tag{2.46}$$

という結果になる。第2項を Taylor 展開して,

$$\bar{C}_p \cong 2\xi_\infty + \bar{C}_{p(\xi_\infty=0)} - 2\xi_\infty (\partial\bar{\Psi}/\partial\xi_\infty)_{\xi_\infty=0}\tag{2.47}$$

この場合, 一般に $(\partial\bar{\Psi}/\partial\xi_\infty)_{\xi_\infty=0} = 0$ をいうことはできそうもない。けれども, もし無限遠境界条件を (2.45) とせず, $\xi_\infty \cong 0$ の時に

$$\bar{\Psi}_x \rightarrow 0\tag{2.48}$$

と停留させるならば, (2.46) の第2項は常に $-2\bar{\Psi}_x(x; 0) = \bar{C}_{p(\xi_\infty=0)}$ となり, (2.46) は (2.40) と一致する。

この結果は非常に教訓的である。マッハ数凍結は, (1.1) を厳密に取り扱わずに, 途中で無限遠境界条件の停留 ($M_\infty \equiv 1$) という別の条件を入れることによって誘導される。!無限遠境界条件の停留というのは, 物理的に考えれば, Liepmann & Bryson が $M_\infty = 1$ の直前直後に無限前方に垂直衝撃波を仮定したことに相当している。

さて, 垂直衝撃波を仮定しないで (2.45) の境界条件だけで, 果して厳密に解が得られるかどうかは問題である。離脱衝撃波を無限遠の垂直衝撃波に近似して得られるマッハ数凍結は, 一種の $M_\infty \cong 1$ での便法の結果であった。しかし, (1.1) を一般的に扱おうとするすべての近似的方法に, このようないまい結論を期待することは困難である。境界条件の停留 (2.48) を仮定せず, (2.45) をそのまま課しながら, 別の種類の近似で, (2.44) あるいは (1.1) を解けば, これは多分, マッハ数凍結を誘導することは偶然によるほかはない。

非線型補正理論では, (2.47) の傾向が現われる。(第5図, 音速点の $\xi_\infty \cong 0$ における移動の仕方に注目。第16図について見ると, このような近似解法でも, 少なくとも対称円弧翼の全抵抗については, $\xi_\infty \cong 0$ の所で実験と比較してさほど大きな隔りがあるとは思われない。

3. 積分方程式による考察

基礎方程式 (1.1) を積分方程式に変換するには普通 Green の定理が使われるが、超函数の概念によるのが遙かに簡明であるので、ここではそれを使ってみよう†。Heaslet & Spreiter⁽⁴⁾ は、積分方程式の変換で、 $M_\infty \leq 1$ の方程式の型の違いのために別々の取り扱いを余儀なくされているが、ここでは統一的な記述が可能である。

まず、基礎解として

$$(1-M_\infty^2)f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=Kf_x+\delta(x,y,z) \quad (3.1)$$

(δ は Dirac のデルタ函数。) を満たす超函数 f を考え、この両辺に G を重畳 (Faltung; * で示す。) すると ((3.8) 参照)

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2)(f * G)_{xx}+(f * G)_{yy}+(f * G)_{zz} \\ =K(f * G)_x+\delta * G \\ =K(f * G)_x+G \end{aligned} \quad (3.2)$$

が得られる。(2.1) との比較により、明らかに

$$\varphi=f * G=G * f \quad (3.3)$$

$$=\iiint_{-\infty}^{\infty} G(\xi,\eta,\zeta)f(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta \quad (3.4)$$

である。次に (1.1) を変形して

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2)\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=K\Phi_x+G(x,y,z) \\ +\{(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}-K\Phi_x\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.1) の両辺に、今度は $G+\{(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}-K\Phi_x\}$ を重畳するならば、同様にして

$$\Phi=f * [G+\{(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}-K\Phi_x\}] \quad (3.6)$$

$$=\varphi+\iiint_{-\infty}^{\infty} \{(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi}-K\Phi_\xi\} f(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta \quad (3.7)$$

とは (3.4) によって解かれているので、(3.7) は Φ に関する積分方程式である。

超函数の定理:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A * B)=\frac{\partial A}{\partial x} * B=A * \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3.8)$$

(部分積分と考えてよい。) を使うと、(3.6)~(3.7) は次のようにも書かれる。

† 超函数については、I. Halperin の “Introduction to the theory of Distributions” (Schwartz の原著: Théorie des distribution, I et II, Paris, (1950-1951) の簡単な紹介。) か、寺沢寛一編 「自然科学者のための数学概論」 応用編第3章を見られるとよい。

$$\begin{aligned}\Phi &= f * \left[G + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_x^2 - K\Phi \right\} \right] \\ &= \varphi + \{ (\gamma+1)M_\infty^2 \Phi_x^2 / 2 - K\Phi \} * f_x \\ &= \varphi + \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_\xi^2 - K\Phi \right\} f_x d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\Phi_x = \varphi_x + \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_\xi^2 - K\Phi \right\} f_{xx} d\xi d\eta d\zeta\quad (3.10)$$

そして (3.9), (3.10) にそれぞれ $-K, (1-M_\infty^2)$ をかけて足し合わせると, (3.1) によって

$$\begin{aligned}(1-M_\infty^2)\Phi_x - (\gamma+1)M_\infty^2 \Phi_x^2 / 2 &= (1-M_\infty^2)\varphi_x \\ -K\varphi - \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_\xi^2 - K\Phi \right\} (f_{yy} + f_{zz}) d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}\quad (3.11)$$

が得られる。

ここで, (3.11) の左辺の物理的意味を探しておこう。いま, 気体の流量密度を考え, 一様流を1とした時のこの微小攪乱ベクトルを $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ($=\rho \text{ grad } \Phi / \rho_\infty$, ρ は流れの局所密度。) とすると, 質量連続の方程式より

$$\text{div } (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0\quad (3.12)$$

ところで, 流量ベクトルと速度ベクトルは第1近似で平行でなければならないから

$$\theta_2 = \Phi_y, \quad \theta_3 = \Phi_z\quad (3.13)$$

これを (3.12) に入れると

$$\partial\theta_1/\partial x = -(\Phi_{yy} + \Phi_{zz})\quad (3.14)$$

となるが, ここで (1.1) を考慮すると

$$\theta_1 = (1-M_\infty^2)\Phi_x - (\gamma+1)M_\infty^2 \Phi_x^2 / 2\quad (3.15)$$

が導かれる。ここで積分定数は, $\Phi_x=0$ で $\theta_1=0$ の条件から決められたが, 流量の絶対値は第1近似で $\rho_\infty U_\infty (1+\theta_1)$ であるから, これは自然である。

こうして (3.11) の右辺は流量の変化 θ_1 を示すが, 物理的に考えて, これが不連続的に変化することはあり得ない。したがって, (3.11) の両辺は常に連続量である。けれども (3.15) は Φ_x の2次式であるから, 同一の θ_1 に対し二つの Φ_x が存在することができる。すなわち,

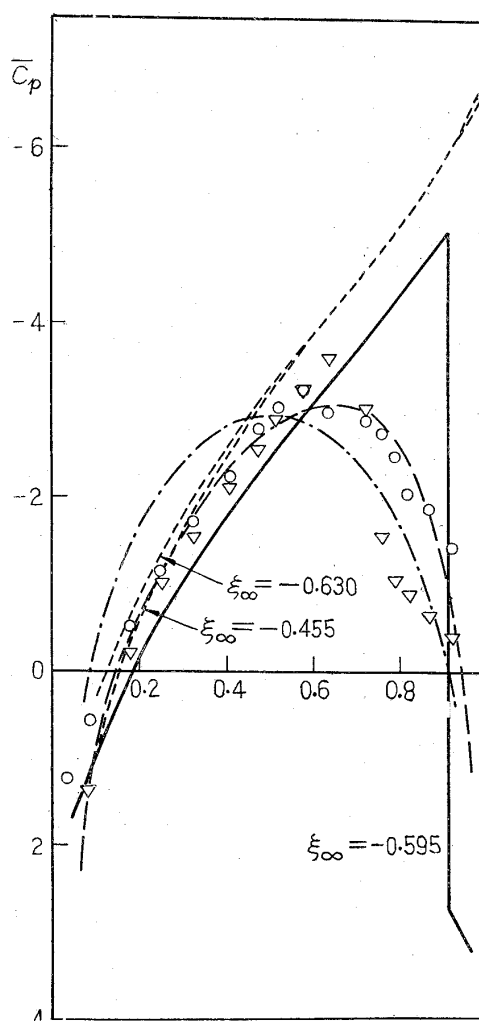
$$\Phi_x = \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\}^2 - \frac{2\theta_1}{(\gamma+1)M_\infty^2}}\quad (3.16)$$

明らかに二つの Φ_x は, 第7ページの(注)†に示すように, 遷音速の垂直衝撃波の前後の速度の条件を満たしている。この事情は, 少なくとも方程式(1.1)が不連続の解をもちうる可能性を示すであろう。

[1] 積分方程式法

いわゆる積分方程式法は、Oswatitsch⁽⁶⁾ が (3.11), (3.16) に着目して、二次元流の近似解法を提唱したことから始まっている。ただし彼は、基礎の線型理論を従来の線型理論にとったので、以上の表現では $K=0$ の特殊化をすれば再現できる。その場合は φ も f も簡単になる。二次元の翼の周りの流れでは、非線型項の影響は翼面の上で最大になり、遠方では急速に弱まるであろう。こう予想すると、(3.11) における空間積分を、 Φ_ξ に適当な減衰性 $b(\eta)$ を仮定して $\Phi_\xi \cong \Phi_\xi(\xi, 0)b(\eta)$ として、本質的に $\Phi_x(x, 0)$ に関する一次元積分方程式を導くように簡単化する便法が考えられる。Gullstrand⁽⁷⁾, Spreiter & Alksne⁽⁸⁾ はこの線に沿って研究を進めた。そして臨界マッハ数を越えてから衝撃波が必ず発生し、それから $M_\infty=1\sim$, あるいはそれ以上に、流れが移っていく様子を定性的に正しく説明している。(実験データとの明快な比較は少ない。) 一例として、Liepmann の高亜音速における実験⁽⁹⁾ との比較を示す。(第14図) Spreiter & Alksne の方法では、この M_∞ では、すでに衝撃波は後縁に後退してしまったことになっている。 $b(\eta)$ の選択に自由度があり、また衝撃波の空間的な形の仮定などにも任意性が残っているので、この積分方程式法は扱う人によっていろいろな変化があり、またそれゆえに一層の改善も期待できるだろう。(一次元積分方程式を解く操作は、高速度計算機の存在によってそれほど難事ではなくなった。)

しかし、三次元軸対称流の場合には、様子は少し変わる。Oswatitsch⁽⁶⁾ の考えでは、この場合は非線型項の影響は物体近傍では比較的小さい。むしろ流れの中の間領域でこの影響は大きくなると考えられる。(遷音速等価法則誘導の根拠。(したがって、空間積分の簡単化は、二次元流の場合と同様にはいかないであろう。彼が軸対称体に対して遷音速線型化を試みた動機はこれであった。)



第14図 高亜音速流における対称円弧翼の上の圧力分布。($\xi_\infty \cong -0.526$)
 Theory ----- Spreiter
 ——— Maeder ($\xi_\infty = -0.526$)
 ——— Present
 - - - Prandtl-Glauert
 Experiment, Liepmann ($\xi_\infty = -0.526$)
 ○ $Re = 8.77 \times 10^5$
 ▽ $Re = 1.75 \times 10^6$

[2] Maeder & Thommen の再考察

非常に技巧的であるが、(3.11) の空間積分を I と置き、音速点 $x=c^*$ における量の値を $*$ で示すことにして次のような計算をする。

$$\begin{aligned} \theta_1^* - \theta_1 = & \{(\gamma+1)M_\infty^2/2\} \{2\Phi_x^*(\varphi_x^* - \varphi_x) - (\varphi_x^{*2} - \varphi_x^2)\} \\ & - \int_{c^*}^x \{(\gamma+1)M_\infty^2 \varphi_{xx} - K\} \varphi_x dx - (I^* - I) \end{aligned} \quad (3.17)$$

(ここで $(\gamma+1)M_\infty^2 \Phi_x^* = (1-M_\infty^2)$ が使われた。) そこで

$$I = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_\xi^2 - K\Phi \right\} f d\xi d\eta d\zeta \quad (3.18)$$

$$I_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \Phi_\xi^2 - K\Phi \right\} f_x d\xi d\eta d\zeta \quad (3.19)$$

(3.9) によって、これは

$$I_x = (\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)(\Phi - \varphi) \quad (3.20)$$

となる。さて、(1.1) からわかるように、音速線の上では $\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$ であるから、(2.1) によって

$$I_x^* = (1-M_\infty^2)\varphi_{xx}^* - K\varphi_x^* \quad (3.21)$$

である。

ここで、音速点では Φ_x と φ_x が十分よく一致すると仮定する。すなわち、

$$\Phi_x^* = \varphi_x^* = (1-M_\infty^2)/(\gamma+1)M_\infty^2 \quad (3.22)$$

次に $(I^* - I)$ を $x=c^*$ の周りに Taylor 展開し、 $I_x^* = 0$ すなわち、

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx}^* - K\varphi_x^* = 0 \quad (3.23)$$

なるように K を決めると、(3.17) は

$$\begin{aligned} \theta^* - \theta \cong & \{(\gamma+1)M_\infty^2/2\}(\varphi_x^* - \varphi_x)^2 \\ & - \int_{c^*}^x \{(\gamma+1)M_\infty^2 \varphi_{xx} - K\} \varphi_x dx + \frac{1}{2} I_{xx}^* (x-c^*)^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

となる。(3.22) を考慮して (3.24) より Φ_x を計算すると、

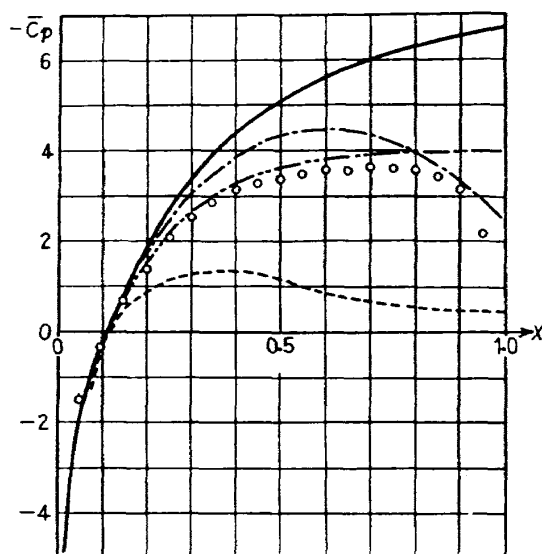
$$\Phi_x = (1-M_\infty^2)/(\gamma+1)M_\infty^2 \pm \sqrt{Y_+(x)} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} Y_+ = & \left\{ \varphi_x - \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_{c^*}^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx \\ & + I_{xx}^* (x-c^*)^2 / (\gamma+1)M_\infty^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

を得る。ここで、

$$I_{xx}^* = (1-M_\infty^2)\varphi_{xxx}^* + (\gamma+1)M_\infty^2(\Phi_{xx}^{*2} - \varphi_{xx}^{*2}) \quad (3.27)$$

(3.22) と (3.23) が c^* と K を決定するが、(3.23) は (2.22) と同じである。



第 15 図 (Ref. 10 より引用)

- - - 非線型補正理論 - - - Maeder & Thommen の修正
 ——— 遷音速線型理論 - · - · Spreiter
 ○ Measurement

以上が, Maeder & Thommen の最近の理論的研究⁽¹⁰⁾である。非線型補正理論の (2.23)~(2.24) と比べて I_{xx}^* の項だけが異なっている。 $M_\infty \cong 1$ の時, 第1項は小さいので, もし $\Phi_{xx} \cong \varphi_{xx}^*$ であれば $I_{xx}^* \cong 0$ として扱うことができる。非線型補正理論が効を示さない場合, この項の考慮によって救われる例が第 15 図に示される。

非線型補正理論とこの理論の関連する部分は (3.20) である。前者では

$$I_x = (\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)g = O(\tau^3) \quad (3.28)$$

が理論の一つの出発点であったが, ここでは I_x の直接評価を試みている。さらに, 重要な相異として, 前者のもう一つの出発点に (2.5) があつたが, ここではそれに相当するものがない。このために (3.22) は経験的仮定であるし, (3.25) の複号を選別する基準が分らない。衝撃波の位置の決定がこれに依存するので問題であるが, Maeder & Thommen は経験的に (2.16) によって決めることにしたように見える。

(3.19), (3.28) に注目しよう。 $K \sim \varphi_{xx}^*$ は流れの中の物体の形によって決まるが, 両式の比較によってわかるように, もし K が異常に大きい場合には (3.28) の大きさ評価は成り立たなくなるだろう。これが非線型補正理論の限界を与える。 K の大きさについては少なくとも (2.8) が守られなければならない。楔型翼や最大厚みが前縁近くにある翼の場合に結果が悪くなるのはこのためである。

4. 遷音速線型理論の解

(2.1) をいろいろな場合に解くことは, これだけで一つのテーマとなるだろう。ここでは二,

三の場合に、(3.4) で与えられた f と G の具体化を記すに止める。

[1] 2次元流

$$f = -(2\pi\beta)^{-1} e^{\alpha x} K_0\{\alpha(x^2 + \beta^2 z^2)^{1/2}\}, \beta^2 \geq 0 \quad (4.1)$$

$$= \begin{cases} -(2m)^{-1} e^{\alpha x} I_0\{\alpha(x^2 - m^2 z^2)^{1/2}\}, & x > m|z| \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \quad \beta^2 \leq 0 \quad (4.2)$$

ここに、 $m^2 = -\beta^2 = M_\infty^2 - 1$, $\alpha = K/2\beta^2$ と略記した。特に $\beta^2 = 0$ の時 ($M_\infty = 1$)

$$f = \begin{cases} -(4\pi K)^{-1/2} \frac{e^{-Kx^2/4x}}{x^{1/2}}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

(これらは三次元流の f から、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy$ のようにして作られる。)

対称翼 (非揚力) の時には

$$G = F'(x)\delta(z) \quad (4.4)$$

$F(x)$ は翼の断面積分布である。

[2] 3次元流

$$f = -(4\pi)^{-1} e^{\alpha x} \frac{\exp\{-\alpha(x^2 + \beta^2 r^2)^{1/2}\}}{(x^2 + \beta^2 r^2)^{1/2}}, \beta^2 \geq 0 \quad (4.5)$$

$$= \begin{cases} -(2\pi)^{-1} e^{\alpha x} \frac{\cosh\{\alpha(x^2 - m^2 r^2)^{1/2}\}}{(x^2 - m^2 r^2)^{1/2}}, & x > mr \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \quad \beta^2 \leq 0 \quad (4.6)$$

ここに $r^2 = y^2 + z^2$ 。特に $\beta^2 = 0$ の時, ($M_\infty = 1$)

$$f = \begin{cases} -(4\pi)^{-1} \frac{e^{-Kr^2/4x}}{x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

回転体 (非揚力) の時には

$$G = F'(x)\delta(r) \quad (4.8)$$

$F(x)$ は回転体の断面積分布である。

有限翼 (非揚力) では

$$G = \partial F(x, y) / \partial x \cdot \delta(z) \quad (4.9)$$

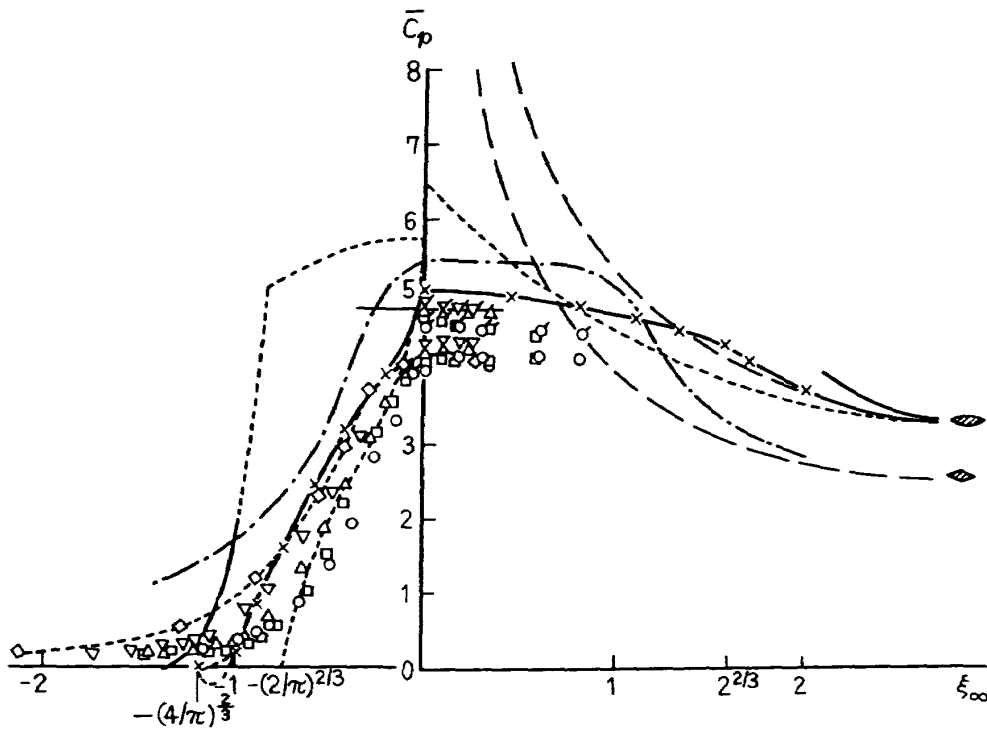
この場合の $F(x, y)$ は翼の厚み分布である。

$G * f$ によって与えられる以上いずれの解も、 $\alpha \rightarrow 0$ の時、従来の線型理論に帰着することは

容易にわかる。揚力のある場合を扱うには、たとえば翼の場合には (4.4), (4.9) にもう一つ $\Delta\varphi(x)\delta'(z)\Delta\varphi(x,y)\delta'(z)$, という項をつけ加えたものが G となる。 $\Delta\varphi$ は翼の上下面における φ の不連続差である。 $\Delta\varphi$ は未知量であって、これを決定するには (翼のキャンバと Kutta-Joukowski の条件が必要であるが) 一般に従来の線型理論におけると同じ困難さがあると考えられてよい。蛇足ながら, (2.1) の一般解は

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) = & \iint_B \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{\alpha(x_1-\xi_1)} f(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3-\xi_3) dS \\ & - \iint_B \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{\alpha(x_1-\xi_1)} \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3-\xi_3) dS \quad (4.10) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし $(x_1, x_2, x_3) = (x, \beta y, \beta z)$ とし, $\iint_B dS$ と $\partial/\partial\nu$ は, この擬ユークリッド空間の中での流れの境界に沿う表面積分と, その面積要素に立てた流れの中へ向けての法線微分である。 f は (4.5) と (4.6) に与えられている。



第 16 図 対称円弧翼の抵抗曲線

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| ———— Spreiter (Integral Eq.) | ----- Spreiter (Local Linearization) |
| ----- Maeder | -x-x-x Present |
| ----- Linear Theory | ----- Diamond Aerofoil |
| Experiment, Michel et al | |
| ○ $t=0.06$ ◊ | } Extrapolated Drag |
| □ $t=0.08$ ◻ | |
| Maeder | △ $t=0.10$ ▽ |
| ...◇... $t=0.1$ (slotted wall) | ▽ $t=0.12$ ▽ |

5. む す び

遷音速流の基礎方程式を解く近似的方法として、最初微分方程式による考察を行ない、非線型補正理論と局所線型化法を導き、次に積分方程式による考察を行ない、いわゆる積分方程式法を導き、次にその遷音速線型理論を土台にした延長として、Maeder and Thommen の最新の方法を導いた。これを先述した非線型補正理論が同じ方法を与えていることは容易に見られるところである。二つの流れの考察の接点として、非線型補正理論の方法が位することは非常に興味深いことである。

しかし、方法として、以上にみられたそれぞれのいくつかの近似法は別の長所をもっており、決して優劣を一概にいえぬものがある。局所線型化法が、実験とすばらしい一致を与えていることは周知のことであり、(ただし、衝撃波の伴う現象は説明できない。)積分方程式法が衝撃波の発生を導くことは、非線型補正理論と同様である。

基礎方程式の解の一意性に問題が残っているが、それぞれの近似で亜音速流と超音速流へのつながりが、ますます妥当に与えられる点から、得られた近似解の現実性を期待することは可能であろう。(たとえば、第16図参照)

遷音速における翼の揚力問題*、翼と胴体の干渉、翼列、風胴効果、非定常現象など、多くの実用問題があるが、これらに対する適用はほとんどまだ行なわれていない。その場合、それぞれの境界条件の下で、遷音速線型理論あるいは単なる線型理論の解を求めることが出発点となるが、これらに対してどの程度現実的な結果を与えるかを検討することは興味深いことである。筆者らは最近、非定常遷音速流に理論の拡張を行ない、翼のピッチングと縦振動について Nelson & Berman⁽²²⁾ の線型理論解と比較して興味ある結果を得ている†。

引用文献

- (1) Spreiter, J. R.: Aerodynamics of Wings and Bodies at Transonic Speeds, J. Aero. Sci., Vol. 26, No. 8, (1959/8), p. 465.
- (2) Emmons, H. W.: The Numerical Solution of Compressible Fluid Flow Problems, NACA TN 932 (1944). 続いて TN 1003 (1946), TN 1746 (1948).
- (3) Imai, I.: On a Refinement of the Transonic Approximation Theory, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 9, No. 6, (1954/11-12), p. 1009.
- (4) Heaslet, M. A. and Spreiter, J. R.: Three-Dimensional Transonic Flow Theory Applied to Slender Wings and Bodies, NACA Rep. 1318, (1957).
- (5) Oswatitsch, Klaus: Gas Dynamics, Academic Press, New York, (1956), p. 482.

† Gullstrand⁽²⁰⁾ と Hosokawa⁽²¹⁾ の研究がある。

†† 細川・三好：円弧翼の遷音速非定常振動問題，第20回航空技研所内研究発表（1962年3月20日）。

- (6) Oswatitsch, K. and Keune, F.: The Flow Around Bodies of Revolution at Mach Number 1, Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics, Polytech. Inst. Brooklyn, (1955/1), p. 113.
- (7) Maeder, P. F. and Thommen, H. U.: Some Results of Linearized Transonic Flow About Slender Airfoils and Bodies of Revolution, J. Aero. Sci., Vol. 23, No. 2, (1956/2), p. 187.
- (8) Spreiter, J. R. and Alksne, A. Y.: Thin Airfoil Theory Based on Approximate Solution of the Transonic Flow Equation, NACA TN 3970, (1957/5).
- (9) Hosokawa, I.: 遷音速流小擾乱理論の研究 (I) — 非線型補正理論, 航空技術研究所報告 TR-9, (1961/3).
- (10) Maeder, P. F. and Thommen, H. U.: Linearized Transonic Flow About Slender Bodies at Zero Angle of Attack, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Paper No. 61-APMW-12.
- (11) Maeder, P. F.: Solutions to the Linearized Equation for Transonic Flows and Their Comparison with the Experiment, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Vol. 2, (1957), p. 15.
- (12) Hosokawa, I.: Theoretical Prediction of the Pressure Distribution on a Non-Lifting, Thin Symmetrical Aerofoil at Various Transonic Speeds, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 16, No. 3, (1961/3), p. 546.
- (13) Spreiter, J. R. and Alksne, A. Y.: Slender-Body Theory Based on Approximate Solution of the Transonic Flow Equation, NASA Rep. 2, (1959).
- (14) Alksne, A. Y. and Spreiter, J. R.: Theoretical Pressure Distributions on Wings of Finite Span at Zero Incidence for Mach Numbers near 1, NASA Tech. Rep. R-88, (1961).
- (15) Drougge, G.: An Experimental Investigation of the Interference Between Bodies of Revolution at Transonic Speeds with Special Reference to the Sonic and Supersonic Area Rules, FFA Rep. 83, Stockholm, (1959).
- (16) Liepmann, H. W. and Bryson, A. E.: Transonic Flow Past Wedge Sections, J. Aero. Sci., Vol. 17, No. 12, (1950/12), p. 745.
- (17) Gullstrand, T. R.: The Flow Over Symmetrical Aerofoils Without Incidence in the Lower Transonic Range, KTH-AERO TN 20, Stockholm, (1951). 続いて TN 24, 25.
- (18) Spreiter, J. R. and Alksne, A. Y.: Theoretical Prediction of Pressure Distributions on Non lifting Airfoils at High Subsonic Speeds, NACA Rep. 1217, (1955).
- (19) Liepmann, H. W.: The Interaction Between Boundary Layer and Shock Waves in Transonic Flow, J. Aero. Sci., Vol. 13, No. 12, (1946/12), p. 623.
- (20) Gullstrand, T. R.: The Flow Over Two-Dimensional Aerofoils at Incidence in the Transonic Speed Range, KTH-AERO TN 27, Stockholm, (1952).
- (21) Hosokawa, I.: An Approximate Solution of the Lifting Problem of Thin Airfoils at Sonic Speed, J. Aero. Sci., Vol. 28, No. 7, (1961/7), p. 588.
- (22) Nelson, H. C. and Berman, J. H.: Calculations on the Forces and Moments for an Oscillating Wing-Aileron Combination in Two-dimensional Potential Flow at Sonic Speed, NACA Rep. 1128.
- (23) L. Bers: "Surveys in Applied Mathematics", III, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., (1958), p. 21-29.

<p>NAL TM-5 航空技術研究所 遷音速流の線型理論</p> <p>1962年8月 23頁</p> <p>最近 (1955年以降) 発展した遷音速近似の非線型方程式の近似解法理論をまとめたものである。すべて適用性の一般化のために物理面で方程式を論ずる方法で、これらは大きく分けて、微分方程式のまま扱うものと、積分方程式に変えて扱うものと二種がある。前者には Spreiter & Alksne の局所線型化法と著者の非線型補正理論が入り、後者には Oswatitsch, Gullstrand, Maeder & Thomen の積分方程式法の理論が入る。これらはそれぞれ密接な数学的関連性をもっており、一貫した筋道で系統立てることができる。</p>	<p>I. 細川 巖 II. NAL TM-5 III. 533.6.011.35 : 517.93</p>	<p>NAL TM-5 航空技術研究所 遷音速流の線型理論</p> <p>1962年8月 23頁</p> <p>最近 (1955年以降) 発展した遷音速近似の非線型方程式の近似解法理論をまとめたものである。すべて適用性の一般化のために物理面で方程式を論ずる方法で、これらは大きく分けて、微分方程式のまま扱うものと、積分方程式に変えて扱うものと二種がある。前者には Spreiter & Alksne の局所線型化法と著者の非線型補正理論が入り、後者には Oswatitsch, Gullstrand, Maeder & Thomen の積分方程式法の理論が入る。これらはそれぞれ密接な数学的関連性をもっており、一貫した筋道で系統立てることができる。</p>	<p>I. 細川 巖 II. NAL TM-5 III. 533.6.011.35 : 517.93</p>
<p>NAL TM-5 航空技術研究所 遷音速流の線型理論</p> <p>1962年8月 23頁</p> <p>最近 (1955年以降) 発展した遷音速近似の非線型方程式の近似解法理論をまとめたものである。すべて適用性の一般化のために物理面で方程式を論ずる方法で、これらは大きく分けて、微分方程式のまま扱うものと、積分方程式に変えて扱うものと二種がある。前者には Spreiter & Alksne の局所線型化法と著者の非線型補正理論が入り、後者には Oswatitsch, Gullstrand, Maeder & Thomen の積分方程式法の理論が入る。これらはそれぞれ密接な数学的関連性をもっており、一貫した筋道で系統立てることができる。</p>	<p>I. 細川 巖 II. NAL TM-5 III. 533.6.011.35 : 517.93</p>	<p>NAL TM-5 航空技術研究所 遷音速流の線型理論</p> <p>1962年8月 23頁</p> <p>最近 (1955年以降) 発展した遷音速近似の非線型方程式の近似解法理論をまとめたものである。すべて適用性の一般化のために物理面で方程式を論ずる方法で、これらは大きく分けて、微分方程式のまま扱うものと、積分方程式に変えて扱うものと二種がある。前者には Spreiter & Alksne の局所線型化法と著者の非線型補正理論が入り、後者には Oswatitsch, Gullstrand, Maeder & Thomen の積分方程式法の理論が入る。これらはそれぞれ密接な数学的関連性をもっており、一貫した筋道で系統立てることができる。</p>	<p>I. 細川 巖 II. NAL TM-5 III. 533.6.011.35 : 517.93</p>

既 刊 資 料

TM-1	高マッハ数風洞について (I)	1961年11月	平木 一, 清水福寿 橋本 登
TM-2	航空技術研究所計数型電子計算機設備 プログラムライブラリー I	1962年2月	樋口一雄, 戸川隼人 三好甫, 高橋垣芳 能美力, 板垣保子 鳥海良三, 佐藤藤
TM-3	YS 水平尾翼後桁取付部静荷重試験・ 疲労試験報告書	1962年2月	斎藤浩一, 多田保夫
TM-4	18 cm×20 cm超音速風洞について	1962年5月	長洲秀夫, 伝田幸雄

注：欠番は配布先を限定したものの。

航空技術研究所資料 5号

昭和37年8月発行

発行所 航空技術研究所
東京都三鷹市新川700
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53
