NAL TM-53

UDC 518.1

航空宇宙技術研究所資料

TM-53

ベクトルのノルムと行列のノルム

——数値解法の収束条件その他への応用——

板 垣 芳 雄

1965年 5 月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所

既　刊　資　料

TM-1	高マッハ数風胴について（I）	1961年11月	平木　一，清水福寿 橋本　登
TM-2	航空技術研究所計数型電子計算機設備プログラムライブラリー（I）	1962年2月	樋口一雄，戸川隼人 三好　甫，高橋利之 能美　力，板垣芳雄 鳥海良三，佐藤保子
TM-4	18 cm×20 cm超音速風胴について	1962年5月	長洲秀夫，伝田幸雄
TM-5	遷音速流の線型理論	1962年8月	細川　巌
TM-6	18 cm × 18 cm 遷音速風胴整備試験	1962年8月	橋本　登，井上政一
TM-7	慣性力形疲労試験機	1962年8月	竹内和之，山根皓三郎
TM-8	アルミ合金の前歴が疲れ寿命におよぼす実験的研究	1962年9月	池田為治，坂元思無邪
TM-9	方向性次元解析と相似解に関する覚書	1963年2月	甲藤好郎，小出　勉
TM-10	DATATRON 205 用 ALGOL 58 使用法について	1963年2月	高橋利之
TM-11	光弾性による高速車盤の縞模様	1963年2月	永井文雄
TM-12	コーティングの断熱効果に関する実験	1963年3月	竹中幸彦，小川鉱一 林　洋一
TM-13	遷音速における 45° 後退角翼の予備的フラッタ実験	1963年3月	中井暎一，小原　瑛
TM-14	変断面片持梁固有振動数の一計算方法について	1963年3月	中井暎一，小原　瑛 鳥海良三，安藤泰勝
TM-16	フラッタ試験設備測定部交換ノズルの予備試験	1963年4月	中井暎一，橋爪　宏 高木俊朗，橋本　登
TM-17	VTOL 機用 Jet Lift Engine に関する一考察	1963年5月	鳥崎忠雄，松木正勝 山中竜夫，藤井昭一
TM-18	ヘリコプター振動のパワースペクトル解析	1963年6月	小野幸一
TM-19	吹出式超音速風胴による実験データの処理方式について（I）	1963年6月	新井　忠，原　亘利
TM-20	1 m×1m 吹出式超音速風胴における AGARD 標準模型 B の三分力試験	1963年7月	高木廣治，谷　喬 斎藤秀夫，新井　忠
TM-21	国産中型輸送機 YS-11 主翼疲労試験（第1報）	1963年9月	竹内和之，飯田宗四郎 北谷虔勇，中井治夫
TM-24	円輪と薄肉円筒の回転強度の関係	1963年11月	永井文雄
TM-25	DATATRON 205用ALGOL 58 の Procedures ライブラリー	1964年1月	高橋利之
TM-26	吹出式風胴の圧力制御（フラッタ試験設備の場合）	1964年1月	橋爪　宏，中井暎一
TM-28	一段式観測ロケットの超音速風胴試験	1964年1月	谷　喬，原　亘利 榊原盛三，外立政隆
TM-29	遷音速フラッタ試験設備の改造および整備試験	1964年2月	中井暎一，橋爪　宏 安藤泰勝，高木俊朗
TM-30	二段式ロケット飛しょう体の揚力および圧力中心推定法	1964年3月	小橋安次郎，宮沢政文
TM-31	亜音速ジェット輸送機の遷音速風胴における試験	1964年3月	河崎俊夫，竹内　理
TM-32	遷音速風胴の防音	1964年4月	牛田健二，高橋　宏
TM-33	非定常境界層の遷移の研究に使用された定温度型熱線風速計について	1964年4月	榎並敬之，山本稀義
TM-34	極超音速風胴ノズルの境界層補正について	1964年5月	長洲秀夫
TM-37	気体の不完全性を考慮した極超音速風胴ノズルの設計計算法	1964年5月	毛利　浩
TM-38	AGARD—A 標準模型の超音速三分力試験	1964年6月	高木廣治，斎藤秀夫 石原久蔵
TM-39	相似極超音速流中におかれた半球面上の境界層の遷移に及ぼす粗さと冷却の結合影響	1964年7月	石井孝雄
TM-40	国産中型輸送機 YS-11 胴体疲労試験（I）	1964年9月	竹内和之，川島矩郎
TM-41	抵抗線歪ゲージのゲージ率測定	1964年10月	田畑浄治，大坪孔治 滝沢　実
TM-42	実在着氷条件の測定について	1964年10月	古関昌次，田寺木一 泉日出夫
TM-44	高負荷燃焼器（アニュラ模型）の実験結果	1964年12月	大塚貞吉，鈴木邦男 松本　宏，石井浅五郎 広木　強，山中国雍

目　　次

ベクトルのノルムと行列のノルム*

―数値解法の収束条件その他への応用―

板 垣 芳 雄**

は じ め に

昭和 38 年度の研究課題「偏微分方程式の数値解法の研究」から分岐した 39 年度の課題「線型方程式の数値解法の研究」のもとに，調査，研究した結果をまとめたのがこれである。「連立一次方程式の condition について」および「Projection methods in numerical analysis」という標題で，日本数学会の講演会で発表した内容を中心にしている。そのほかに，関連した研究の最近発表された新しい成果なども含めた。前半で基礎事項を解説したのは，利用者がいちいち文献を参照する不便がないようにとの考えからである。ノルム概念を中心にした数値解析の書が少ないことでもあり（日本語のはない），資料の題名を「ベクトルのノルムと行列のノルム」としたのもそれを強調してのことである。

後半の第 5 章以下は，それぞれがほぼ独立した内容を持っている。いくつかの定理の証明は付録にまわした。付録では本文と関連する参考書についても紹介しておいた。そのほとんどが当所図書室に備えつけてある。

本論を理解するうえに必要な事項は第 1 章にまとめておいたが，実数列の極限，集合，対応などの概念は仮定した。仮定したことのうち一番大きいものは行列の分解定理であろう。

訳語の定まっていないもの，人名などは，アルファベットで書くのを原則としたが，「norm」と書いたり「ノルム」と書いて使ったりしている。記号では,「max, lub, sup」などを混用している。また，同じ n を，行列の次数，計算反復の回数，他の所では，近似関係の個数などとして用いている。しかし，いずれもそれなりの理由があって十分注意して使用したつもりで，そのために混乱することはないと考える。

第 8 章にふれた無限次元連立一次方程式については，依頼もあって，IBM 7090 電子計算機によってかなりの数値実験を行なった。ただ，近似解の誤差評価などについてはまだ検討が不十分であり，実験結果だけでは今回の資料の目的からはずれるので，発表は省略した。

内容のある部分については，計算研究室のかたがた，特に，三好，鳥海両技官にふだんからいろいろと議論していただいた。

---

* 昭和 40 年 3 月 31 日受付

** 計測部

1. 線型ノルム空間

1.1 距離空間

代数方程式の根，連立一次方程式の解，微分方程式の答などを直接得ることができないとき，われわれは，各種の数値解法を用いて近似解を計算する。ここで，計算した値が，真の解である一つの実数，n 次元ベクトルあるいは関数に近い解であるというとき，それらおのおのの集合の各要素の間に，ある距離を考えて，その距離に関して近いといっていることになる。近さの測度ともいえる距離の概念は，数値解析をつらぬく重要な抽象的概念であるといえよう。最初のこの節でも，距離の定義を出発点とし，それにともなって後に用いられる基本事項を説明する。

（1） 集合 X の任意の二つの元（要素，点）x, y に対し，実数 $\rho(x, y)$ が一つ対応し，ρ が次の条件を満たすとき，X は**距離空間** (metric space) であるという。

（i） $\rho(x, y) \geqq 0$，ただし $\rho(x, y)=0$ は $x=y$，すなわち x と y は同じ元のときに限る。

（ii） $\rho(x, y)=\rho(y, x)$

（iii） $\rho(x, y)+\rho(y, z) \geqq \rho(x, z)$

このとき，$\rho(x, y)$ を x と y の**距離**という。また，（i）のかわりに

（i）′ $\rho(x, y) \geqq 0$

としたとき，この ρ は準距離を定義するという。

（2） 距離空間 X の部分集合 Y に対し，X のある元 x とある定数 M があって，Y の任意の元 y は常に$\rho(x, y) \leqq M$ を満足するとき，Y は**有界** (bounded) であるという。

X の点列 $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \cdots\cdot, x_n, \cdots\cdot$ があって，$\rho(x, x_n)$ が 0 に収束するような点 x が存在するとき，x_n は距離 ρ の意味で x に**収束する** (converge) という。収束点列の部分列は同じ**極限点** (limit) x に収束する。部分集合 Y からとったすべての収束する点列の極限がまだ Y の点であるとき，Y は X の**閉部分集合** (closed subset) であるという。

（3） 二重数列 $\rho(x_n, x_m)$ が 0 に収束するとき，$\{x_n\}$ は**基本列** (fundamental sequence) であるという。収束点列は基本列である。その逆は必ずしも成立しない。逆が必ず成立するような空間，すなわち，任意の基本列は常に X に極限点を持つような距離空間を，**完備距離空間** (complete metric space) という。距離空間は，必要なら，新しい元をつけ加えることにより，常に完備化することができる。たとえば，有理数全体は，二つの元の差をそれらの距離として距離空間であるが，完備ではない。しかし，それに無理数を加えれば完備な実数空間となる。

実数空間の中で有理数からなる部分集合を含む最小の閉集合：**閉苞** (closure) は実数空間に一致する。一般に，距離空間 X の部分集合 Y の閉苞が X に一致するとき，Y は X で（いたるところ）**稠密** (dense) であるという。

（4） 距離空間 X, Y があって，X の部分集合 Z の元の Y の元への一意な対応を，X からあるいは Z 全体から Y への **写像** (mapping) という。Z を写像の**定義域** (domain)，Y を**値域** (range) という。写像による Z の像全体が Y と一致するとき，Y の**上への**写像ということにする。Z の異なる二元が Y の同じ元に対応することがないとき，写像は一対一 (one-to-one) であるという。Z から Y への**連続作用素** (continuous operator) あるいは連続写像とは，Z の任意の収束点列を Y の収束点列に写す作用素である。また，値域が実数あるいは複素数の空間であるような作用素を，特に，**汎関数** (functional) あるいは複素数値汎関数と呼ぶ。

（5） 完備距離空間 X から同じ空間 X への写像 A: $x \to A(x)$ があって，X の任意の元 x, y に対し次の条件を満足するとする。

$$\rho(A(x),\ A(y)) < M\rho(x,y),\ 0<M<1$$

このとき A を縮小写像といい，次の重要な定理がなりたつ (証明は**付録 1**)。

「$x=A(x)$ なる元 x が一つだけ存在し，明らかに A は連続でしかも，任意の x_0 から始めて，次々に $x_1=A(x_0)$，$x_2=A(x_1)$，$\cdots\cdot$ なるように作った点列 $\{x_n\}$ は，その x に収束する。」

この定理は，各種反復計算法が収束するための十分条件を与えるものであるが，また，常微分方程式の初期値問題の解の存在定理の Picard による証明法の抽象化にもなっている。

例 1 代数方程式 $f(x)=0$ をそれと同じ解を持つ $x=g(x)$ の形の方程式にし，反復計算

$$x_{n+1}=g(x_n),\quad n=0, 1, 2, \cdots\cdot$$

を行なうとする。定理の X は実数空間とし

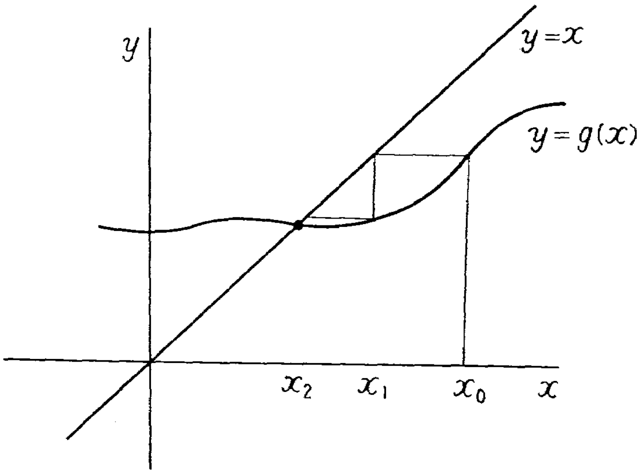

図 1

$$|g(x)-g(y)|<M|x-y|,\quad 0<M<1$$

が常になりたつとすると，勝手な x_0 に対し，$\{x_n\}$ は一意な解 x に収束する。また $|g(x)-g(y)|/|x-y|<M$ から，$g(x)$ の微係数: $g'(x)$ が解の近傍で 1 より小さく，その近傍内の適当な点 x_0 を出発値にとれば，解への収束列が得られることも簡単にわかる。

例 2 連立一次方程式 $Ax=y$ の近似解を,「**例 1**」のように, 反復法

$$x_{n+1}=(I-A)x_n+y$$

によって求めるとする。ここで, A,I は n 行 n 列の行列で, I は単位行列とする。

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= (I-A)(x_n-x_{n-1}) \\ &\cdots\cdots \\ &= (I-A)^n(x_1-x_0) \end{aligned}$$

いま, $n\times n$ 行列の間にある距離を考え, その距離について $(I-A)^n\to 0$ とする。ただし, 0 は零行列であり, このとき, $(I-A)^n$ の各要素が実数列として 0 に収束すると仮定するのは自然であろう。そうすれば, $Ax=y$ なる解 x が存在し, $x_n\to x$ なることがわかる。縮小写像の定理に基づいて収束性について考えるには, まず n 次元ベクトルの全体に距離を定義しなければならないが, ここでは, 一見, その必要なしに収束するための十分条件を得た。それは空間の各元の間の和や差が計算できたからであり, 詳細は次節以下で明らかにされる。

例 3 n 次正方行列 A に対し, I を単位行列とし, 行列 X_0 から次の反復計算によって $\{X_n\}$ を作るとする。

$$X_{n+1}=X_n(2I-AX_{n-1})$$

ある距離について X_n が X に収束したとすると,

$$X=X(2I-AX) \text{ より } X=A^{-1}$$

この方法によって A の逆行列 A^{-1} が計算できるためには, もちろん, 縮小写像の定理における **Lipschitz 定数** M が 1 より小さければよい。一方

$$\begin{aligned} I-AX_{n+1} &= (I-AX_n)^2 \\ &= (I-AX_0)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

と変形することにより, $(I-AX_0)^{2^n}\to 0$ であればよいこともわかる。行列からなる空間のある種の距離について考察することがこの報告の一つの主題でもあり, ベキ行列の収束条件も後に明らかにされる。

(6) 距離空間 X の部分集合 Y が (点列) **コンパクト** (compact) であるとは, Y の任意の無限点列が, 常に, Y の点に収束する無限の異なる元からなる部分列を含む場合にいう。Y の任意の無限点列が, 常に, X の点に収束する無限部分列を含む場合に, Y は X に対し**相対コンパクト**であるという。それに対し, 先のコンパクトを特に自己コンパクトと呼ぶことがある。

連続な実汎関数は, コンパクト集合の上で, 有界で最大値, 最小値をとる。

(7) X から Y への作用素 A が, X の有界集合を, 常に, Y の相対コンパクト集合に写すとき, **完全連続作用素** (completely continuous operator または compact operator) と呼ばれる。完全連続なら連続である。

1.2 バナッハ空間

すでにみたように，一般的な距離の概念だけでもいろいろな議論ができるが，数値解析にあらわれる空間は，そのほかにも大切な性質を内包している。たとえば，実変数実数値関数の集合について考えてみると，それら関数の間には順序のような関係も考えられる。また，二つの関数に対し，その結果も関数になるような演算：和や積も考えられるし，そのほかにも，関数相互の関係としていろいろなものが抽出されよう。ここでは，ある種の和と，数との積の定義された線型空間を考える。初めに一般的な定義をのべ，続いて例を記す。さらに，各元にその元の大きさともいうべき実数：ノルムが対応づけられているような線型空間：線型ノルム空間を考える。これは距離空間でもある。線型ノルム空間とともに楯の両面をなすともいえる線型汎関数の概念も導入する。

（1） 集合 X の任意の元 x, y, z, 実数（あるいは複素数）α, β に対し，やはり X の元である，実数積 αx, 和 $x+y$ が一意的に定まり，次の条件を満たすとき，X は**実（複素）係数線型空間** (real linear space) であるという。

（i） $x+y=y+x$

（ii） $(x+y)+z=x+(y+z)$

（iii） ある元（零元）0 があって

$x+0=x$

（iv） 常に次のような元（逆元）x^{-1} が存在する。

$x+x^{-1}=0$

（v） $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

（vi） $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \cdot \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

（vii） $1x=x$

仮定から，零元，逆元は一意に定まることが示される。また

$$0x=0$$

ただし，左辺の 0 は実数（複素数）の 0 で，右辺の 0 は線型空間の零元である。

$$\alpha x=0 \text{ で } x\neq 0 \text{ なら } \alpha=0$$

X の部分集合 Y が X の演算に関して線型空間をなすとき，Y は X の**線型集合** (linear manifold) であるという。Y が X の線型集合であるためには，Y の勝手な二元 x, y とともに，$x+y$, y^{-1} がまた Y に含まれれば十分である。$(-1)y=y^{-1}$ であるから，y の逆元を $-y$ と書き，$x+(-1)y=x+(-y)$ は習慣上 $x-y$ と書く。

（2） $\alpha x+\beta y+\cdots\cdot+\gamma z=0$ なら常に $\alpha=\beta=\cdots\cdot\gamma=0$ となるとき，$x, y, \cdots\cdot, z$ は**一次独立** (linearly independent) であるという。一次独立な元がたかだか n 個あり，X のすべての元がこれら n 個の元の一次結合で表わされるとき，これらの元は X の**基** (base) をなすといい，X の

次元は n であるという。X の元の基の一次結合による表現は一意であり，次元は基のとり方によって変わることはない。

n 次元線型空間 X で基を固定すれば，X の元は，n 個の順序づけられた実数（あるいは複素数）の組によって一意に表現される。よって，n 次ベクトル空間は n 次元線型空間の表現であるといえる。一般に線型空間の元を**ベクトル** (vector) というが，以下ベクトルといえば n 個の実数（複素数）の組をいう場合が多く，そのとき次数 n は固定して考えることにする。ベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の実数積（複素数積），和は次のように定義される。

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

零元は $(0, 0, \cdots, 0)$，x の逆元は $(-x, -x_2 \cdots, -x_n)$ である。この空間を l^n で表わす。

（3） 各元 x に x の**ノルム** (norm) とよぶ次の条件を満たす実数 $\|x\|$ が対応づけられている線型空間 X を**線型ノルム空間** (normed linear space) という（**付録 2** 参照）。

（i） $\|x\| \geqq 0$，ただし $\|x\|=0$ は $x=0$ なるときに限る。

（ii） $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

（iii） $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$

線型ノルム空間は，$\rho(x, y)=\|x-y\|$ を距離とする距離空間と考えることができる。よって，距離空間に導入された極限，連続などの概念はそのまま適用される。また

$$\|x-y\| \geqq |\|x\|-\|y\||$$

より，ノルムは元の連続関数である。係数積，和も係数と元に関して連続である。X が距離 ρ に関して完備であるとき，特に**バナッハ空間** (Banach space) とよばれる。線型ノルム空間の，閉集合であるような線型集合を，この空間の部分空間 (subspace) という。

（4） l^n の各元 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に $p \geqq 1$ として実数 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}$ を対応させると，l^n は $\|x\|_p$ を x のノルムとするノルム空間となる。この場合の三角不等式 (iii) は **Minkowski の不等式**とよばれる。この空間を $l_p{}^n$ で表わすことにする。数値解析上特に重要なのは $l_\infty{}^n$, $l_2{}^n$, $l_1{}^n$ で，それぞれ次の式によってノルムが与えられた空間である。

$$\|x\|_\infty=\max_i |x_i|$$

$$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

l^n の各種ノルムおよびその性質の研究が第 2 章の中心課題である。無限次元の空間: l_p も同様に考えられるが，この場合は空間の元として $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ が有限の値に収束するようなものだけをとる。

（5） 区間 $[0, 1]$ で連続な実数値関数 $f(x), g(x)$ の集合は

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

を実数積，和として線型空間をなし

$$\|f(x)\|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)|$$

とすれば，$\|f(x)\|$ を $f(x)$ のノルムとするノルム空間となる。この線型ノルム空間を $C[0,1]$ で表わす。$C[0,1]$ は完備である。

連続関数からなる線型空間に

$$\int_0^1|f(x)|dx \quad \text{あるいは} \quad \int_0^1|f(x)|^2dx$$

によってノルムを導入することもできる。しかし，このノルムによっては空間は完備でない。それにしてもどちらのノルムも有用であり，また完備性が解析学において演ずる重要な役割からして，しばしばこれらを完備化したバナッハ空間 $L_1(0,1)$，$L_2(0,1)$ を考える。しかし，空間の元としては，**ほとんどいたるところ**一致する関数の集合としてとらえられ，積分はルベックの意味によるものとされる。

積分区間は自然に拡張され，たとえば $L_1(-\infty,+\infty)$ は積分値 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ が存在するような関数からなる空間を表わす。さらに，実数積，和のほかに関数どうしの積も

$$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

によって定義されるし（存在は仮定），あるいは

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt$$

によってもよい。

（6） 線型ノルム空間 X のある線型集合全体から線型ノルム空間 Y への作用素 A が

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

を満足するとき**線型**であるという。線型作用素 A が，ある定数 M があって

$$\|Ax\|\leqq M\|x\|$$

を常に満たすとき，有界であるという。同じ記号を用いているが，右辺の $\|\cdot\|$ は定義域の，左辺は値域空間のノルムを表わすことに注意する。有界な線型作用素は連続で，逆にある一点で連続な線型作用素が有界であることも，容易に証明される。有界な線型作用素全体は，それぞれの元 A に，$\|Ax\|\leqq M\|x\|$ を成立させる M の下限

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

を対応させると，

$$(\alpha A)x=\alpha Ax \quad (A+B)x=Ax+Bx$$

を係数積，和として線型ノルム空間となる。この空間は，値域空間 Y がバナッハ空間であれば，バナッハ空間となる。完全連続作用素全体はこの空間の部分空間である。X から Y の上への有界

作用素 A, Y から一般的にはさらに別の線型ノルム空間 Z への有界作用素を B とし，積 AB を

$$(AB)x=A(Bx)$$

によって定義すると，

$$\|AB\|\leqq\|A\|\|B\|$$

任意の二元に対し積が考えられる線型ノルム空間でこの性質を満たすノルムは，**multiplicative** であるといわれる。

例 1 「**1.1** (5) **例 2, 3**」でベキ行列 A^m の要素が $m\to\infty$ のときすべて0に収束するための条件が必要であった。実は，そのためには，後にのべるように，A^m のノルムが 0 に収束すれば十分である。multiplicative なノルムについては $\|A^m\|\leqq\|A\|^m$。ゆえに，このときは，行列のノルムが 1 より小であれば先の計算法が適用できる。ある自然数Mがあって $\|A^M\|<1$ であるだけでもよい。いま，A を $l_p{}^n$ から $l_{p'}{}^n$ への作用素と考えて，A のノルム $\mathrm{lub}\,(A)_{p,p'}$ を上にしたように

$$\mathrm{lub}(A)_{p\ p'}=\sup_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_{p'}$$

で導入すると，$\mathrm{lub}(A)<1$ であれば上の条件は満足される。

（7） (以下に考える数は実数とする。) l^n の上の線型汎関数 $x^*(x)$ を求めてみる。そのために，第 i 番めの要素が 1 で他はすべて 0 である元を e_i で表わす。

$$\begin{aligned}x^*(x)&=x^*(x_1e_1+x_2e_2+\cdots\cdots+x_ne_n)\\&=x_1x^*(e_1)+x_2x^*(e_2)+\cdots\cdots+x_nx^*(e_n)\end{aligned}$$

これから，$x^*(x)$ はある l^n の元 $(x^*(e_1),x^*(e_2),\cdots\cdots,x^*(e_n))$ を定めることがわかる。逆に，l^n の元は，上のような線型結合によって，ある線型汎関数を定めるといえる。「**1.2 (6)**」でのように自然に導入された $l_p{}^n$ の上の線型汎関数のノルムは

$$\|x^*\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x^*(e_i)^q\right)^{1/q},$$

となる。これは，**Holder の不等式**

$$|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i|\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{1/q}\right)^{1/q}\quad ただし\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

からわかる。ただし等号の成立は，ベクトル $x^p=(|x_i|^p)$, $y^q=(|y_i|^q)$ が同方向のときに限る。このとき，x^* は必然的に有界である。

（8） 線型ノルム空間 X の上の有界線型汎関数に「**1.2 (6)**」によるノルムを導入した空間を，**X の共役空間** (conjugate space あるいは dual space) といい，X^* で表わす。実数空間はバナッハ空間であるから，X^* は完備である。X の任意の元 x に，$(X^*)^*=X^{**}$ の元が次のようにして対応づけられる。

$$x^{**}(x^*)=x^*(x)$$

さらに，この標準的な対応によって，X は X^{**} の部分空間とみなすことができる（**付録 3** 参照）。特に $X=X^{**}$ のとき，X は**回帰的** (reflexive) であるという。「**1.2** (7)」から，$l_p{}^n$ は回帰的である。また，$(l_2{}^n)^*$ は $l_2{}^n$ と同じ空間とみなすことができることもわかる。

X から Y への有界作用素 A に対し，

$$y^*(y)=y^*(Ax)=(y^*A)x$$

によって，Y^* から X^* への作用素が対応づけられる。これを A の**共役作用素** (adjoint operator) といい，A^* で表わす。

1. 3 有限次元ノルム空間

線型ノルム空間で，しかも次元が有限であるものについて，その性質をここにまとめておく。あるものは，有限次元ノルム空間の特別な $l_p{}^n$ に関する性質として，すでにのべたものである。

（1） 有限次元線型ノルム空間は完備であり，よってバナッハ空間である。

（2） 有限次元線型ノルム空間の上の線型作用素は連続である。

（3） 線型ノルム空間が有限次元であるための必要十分条件は，有界閉集合が常にコンパクトであることである（必要性: Weierstrass の集積点定理)。よって，有限次元線型ノルム空間の上の有界線型作用素は，常に完全連続である。

（4） 有限次元線型ノルム空間は回帰的である。これは $l_p{}^n$ の場合については，すでに「**1.2** (8)」で調べた。

（5） n 次元線型ノルム空間のノルムはたがいに同値である（**付録 4**)。ここで，ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$，$\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ が**同値** (equivalent) であるとは，任意の x に対し不等式

$$m\|x\|_{\mathrm{I}} \leqq \|x\|_{\mathrm{II}} \leqq M\|x\|_{\mathrm{I}}$$

をなりたたせる正の定数 m, M が常に存在することをいう。このときは，当然一方のノルムによる収束列は他方のノルムの意味でも収束列である。n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ は n^2 次元線型空間 X の元と考えられる。この空間の各元に $\|A\|=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ を対応させれば，これは，容易にわかるように線型ノルム空間となる。よって，X の点列があるノルムによって 0 に収束すれば，点列をなす行列の各要素も 0 に収束する。(**1.1** (5) **例 2** 参照)

（6） n 次ベクトルあるいは $m\times n$ 行列のなす空間にノルムが定義されたとき，そのノルムをそれぞれベクトルのノルムあるいは行列のノルムという。 n 次正方行列の間には積が定義されるが，さらに，行列のノルムが multiplicative であるとき，ノルムの条件のうち「**1.2** (3) (i)」

$$\|x\|=0 \text{ は } x=0 \text{ なるときに限る}$$

は，他の条件を満たせば自然に満足されることを示すことができる[7),20)]。

1. 4 ヒルベルト空間

ノルム空間のうちでも，内積の定義される線型空間は，任意の三次元部分空間が初等幾何学のい

わゆるユークリッド空間であるような空間で，直交性の概念が考えられ，Fourier 展開などが可能になる。先にあげた l_2^n，l_2，$L_2(0,1)$ などはヒルベルト空間である。

（1） 任意の二元 x, y に**内積** (inner product) とよばれる，次の条件を満足する複素数 (x, y) が定義された，実数（あるいは複素数）を係数とする線型空間 H を実（複素）**ヒルベルト空間** (Hilbert space) という。ただし，z も H の元とする。

(i) $(x, y)=\overline{(y, x)}$

(ii) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$

(iii) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$

(iv) $(x, x)\geqq 0$，ただし $(x, x)=0$ となるのは $x=0$ の場合に限る。

ヒルベルト空間 H は $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ をノルムとする線型ノルム空間である。このとき

$$|(x,\ y)|\leqq\|x\|\|y\|$$

がなりたつ。(**Schwratz の不等式**) よって，内積 $(x,\ y)$ は y を固定すれば，x に関して連続な線型汎関数である。

例 1 最小2乗近似の問題を上の記号を用いてのべてみる。いま，m 分点 x_i で関数値 g_i が与えられているとする。その n 次近似多項式 $(m>n)$

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$$

を最小2乗近似によって求めてみる。

$$g=(g_1, g_2, \cdots\cdots, g_m)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\cdots\cdots x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2\cdots\cdots x_2^n \\ \cdots\cdots & & \\ 1 & x_m & x_m^2\cdots\cdots x_m^n \end{pmatrix}$$

$$u=(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n)$$

とすると，A は l_2^{n+1} から l_2^m への作用素と考えて，問題は $\|g-uA^*\|$ を最小にする u を求めることである。ただし，A^* は A の転置行列を表わす。この答は正規方程式：$A^*Au=A^*g$ を満足する。なお「**7. (1)**」でこれを一般化した公式を示す。

（2） 実線型ノルム空間で，常に三角形の中線定理（平行四辺形の対角線定理といっても同じ）:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

の成立するような空間は，

$$\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

を x と y の内積 (x, y) とすることにより，ヒルベルト空間となる。(**付録 5** 参照)。

（3） $(x, y)=0$ なるような x, y をたがいに**直交** (orthogonal) するといい，$x\perp y$ と書く。全

空間 H の部分集合 X, Y に対し $X \perp Y$ とは X, Y の任意の元 x, y に対し常に $x \perp y$ なることをいう。H の部分空間 X に対し，X に直交する部分空間 $X^{\perp}$ が存在し，H の任意の元 z は X の元 x と $X^{\perp}$ の元との和によって一意に表わされる。すなわち，H は X と $X^{\perp}$（X の直交補空間）との直和である。そのとき，x を z の Xへの**射影**（projection）という。この対応は，H から X の上への線型作用素：**射影作用素**（projection operator）を定める。

部分集合 X の勝手な異なる2元 x, y をとると常に $(x, y)=0, (x, x)=1, (y, y)=1$ となっているとき，X は**正規直交系**（orthonormal system）をなすという。H のどんな正規直交系もそのうちに含むような正規直交系 X は**完全**（complete）であるという。そのような X の濃度を H の次元という。次元は系のとり方によらず，有限次元の場合，線型空間の次元と一致する。

ノルム空間として完備，無限次元しかも可分な複素ヒルベルト空間を特にヒルベルト空間とよぶことがあるが，以下では，無限次元，複素係数とは限定せずに，適宜用いることにする。ここで，**可分**（separable）とは，可算個の稠密集合の存在することである。要素が実数の n 次ベクトルからなるヒルベルト空間を R^n で表わしユークリッド空間とよび，要素が複素数の場合は C^n で表わしてユニタリー空間とよぶ。しかし，「**1.2 (7)**」でもことわったように，ほとんど必要がないので，これからは複素数については考えない。

例 1　ヒルベルト空間の元をある部分空間 X の元で近似しようとする場合など，あらかじめ部分空間の稠密集合が正規直交であるようにしておくと便利である。その一つの方法が次に示す **Gram-Schmidt の直交化法**である。

X の稠密集合から，部分集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を，任意有限個の x_n は一次独立で，x がすべての x_n と直交すれば $x=0$ となるようにえらぶ。これから次の漸化式によって y_n を定めれば $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ は X の完全直交系となり，それを正規化すれば X の完全正規直交系が得られる。

$$y_1 = x_1$$

$$y_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \{(x_n, y_i)/(y_i, y_i)\} y_i$$

（4）　ヒルベルト空間 H の元 x は，完全正規直交系 $Y=\{y_k\}$ によって一意に **Fourier 展開**可能である。すなわち

$$x = \sum_k (x, y_k) y_k$$

ただし，和はノルムの意味での収束をあらわす。展開は y_k の順序によらない。

x の $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の一次結合すなわちこれら $\{y_i\} i=1, 2, \cdots, n$ からなる線型集合の元による，ノルムの意味での最良近似は，上の Fourier 展開の n 項と一致する。それは次の式によってわかる。

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k y_k\|^2$$
$$=\|x\|^2-\sum_{k}|(x,y_k)|^2+\sum_{k}|a_k-(x,y_k)|^2$$

この性質はヒルベルト・ノルムに特有なものである。

例 1 単項式 1, $x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ から生成された線型集合は $C[0,1]$ の稠密集合をなすが，(Weierstrass の多項式近似定理) $C[0,1]$ は $L_2(0,1)$ で稠密であるから，集合は $L_2(0,1)$ の稠密集合でもある。これを Schmidt の方法によって直交化しておけば，$L_2(0,1)$ の任意の元 $f(x)$ の (n 次) Fourier 展開式は，初めの式によって簡単に与えられるが，上の議論からわかるように，直接計算することもできる。すなわち

$$\int_0^1 (f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}x^{k-1})^2 dx$$

を最小にするような (a_{i-1}) を計算すれば，展開式は $\sum_i a_{i-1}x^{i-1}$ によって与えられる。このような (a_{i-1}) は次の連立一次方程式の解である。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & \cdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}$$

ただし
$$g_i=\int_0^1 f(x)x^{i-1}dx$$

なお，その意味を考えればわかるように，Schmidt の直交化法によれば，上の行列の逆行列を陽に (explicitly) 表わすことができる。$L_2(-1,1)$ においてこのようにして作られた（完全）直交系は **Legendre 多項式**とよばれる。

（5） 有限次元の場合にすでに示したように，一般に，ヒルベルト空間 H の上の汎関数 $x^*(x)$ は，常に，H のある元 y によって，，$x^*(x)=(x,y)$ と表わすことができる。(Riesz の定理) さらに，$x^*(x)$ のノルムは $\|y\|$ と一致することが証明でき，Hは自己に共役な空間であることもわかる。

（6）線型空間が 2 種の内積 $(x,y)_{\mathrm{I}}$, $(x,y)_{\mathrm{II}}$ によってヒルベルト空間であるとき，ある空間全体で定義される線型作用素 A があって，$(x,y)_{\mathrm{II}}=(Ax,y)_{\mathrm{I}}$ が成立する。このとき，任意の x に対し $(Ax,x)_{\mathrm{I}}\geqq 0$ で，$(Ax,x)=0$ は $x=0$ の場合に限る。このような線型作用素を 内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{I}}$ について**正値** (positive definite) であるという。しかも

$$(Ax,y)_{\mathrm{I}}=(x,y)_{\mathrm{II}}=\overline{(y,x)}_{\mathrm{II}}=\overline{(Ay,x)}_{\mathrm{I}}=(x,Ay)_{\mathrm{I}}$$

よって A は**対称** (symmetric) でもある。これから A は有界であることも証明できる。(文献 25

pp. 296-297 参照)。このように $A=A^*$ なる作用素を**自己共役作用素** (selfadjoint operator) という。逆に，内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{I}}$ の H_1 の上で定義された正値対称線型作用素 A があるとき，

$$(x,y)_{\mathrm{II}}=(Ax,y)_{\mathrm{I}}$$

を x,yの内積としては，H_{I} またヒルベルト空間 H_{II} となる。

（7） ヒルベルト空間 H の n 個の元 $x,y,\cdots,z$ の組 $(x,y,\cdots,z)$ のなす集合は，実数積，加法，内積をそれぞれ

$$\alpha(x,y,\cdots,z)=(\alpha x,\alpha y,\cdots\alpha z)$$

$$(x,y,\cdots,z)+(x',y',\cdots,z')=(x+x',y,+y,\cdots,z+z')$$

$$((x,y,\cdots,z),(x',y',\cdots,z'))=\{(x,x')^2+(y,y')^2+\cdots+(z,z')^2\}^{1/2}$$

で定義することにより，ヒルベルト空間となる。このようにして作った空間を，H の n **重直積空間** (product space) という。

x,y,z をある線型ノルム空間の元として，そのn重直積集合に，ノルムを，$(\|x\|,\|y\|,\cdots,\|z\|)$ にある l^n 空間のノルムを用いて定義すれば，線型ノルム空間になる。このようにして，m 次ベクトルノルム，n 次ベクトル・ノルムを用いて，m 行 n 列の行列にノルムを導入することができる。

2. ベクトルのノルム

n 個の実数の組からなる線型空間を先に l^n と記した。以下，l^n 上の各種ノルムの性質を述べる。二三の具体的なノルムの名前や記号は本質的ではないが，数値解析関係の論文などを読む場合の便宜を考えて記した。第3章の「行列のノルム」とともに，ノルムの多様性をみるのが目的の一つである。

（1） l^n の元 x の，n 個の各要素の絶対値を要素とする元を $|x|$ で表わすことにする。ベクトル x のすべての要素が負にはならないとき $x\geqq 0$ と書き， $x-y\geqq 0$ のとき，$x\geqq y$ と記すことにする。

$$|x|\geqq|y| \text{ ならば } \|x\|\geqq\|y\|$$

が常になりたつノルムは **monotonic** であるという。また，すべての x に対し

$$\|x\|=\||x|\|$$

が成立するノルムを **absolute norm** という。

「**1.2** (7)」で，l^n の上の線型汎関数を l^n の元と同一視することができることを示したが，このことから，もとの l^n のノルムに対応して，次の式により **dual norm** を定義する

$$\|y\|_D=\max_{x\neq 0}\frac{|(x,y)|}{\|x\|}$$

ただし，(x,y) は，x と y を $l_2{}^n$ 空間のベクトルと考えての内積を表わす。われわれは「**1.2** (8)」

で，このノルムによる空間をもとの空間の共役空間とよんだ。よって $\|y\|_D$ を $\|y^*\|$ と書くこともある（**3.** (2) 参照)。

T 1　「absolute norm から導き出された dual norm は absolute である。」

証明　すべての x, y に対し，次のような $\bar{x}=\bar{x}(x,y)$ が存在する。

$$|\bar{x}|=|x|,\quad (\bar{x},y)=(|x|,|y|)$$

集合を制限することによって，

$$\|y\|_D=\max_{x\neq 0}\frac{|(x,y)|}{\|x\|}\geqq\max_{x\neq 0}\frac{|(\bar{x},y)|}{\|\bar{x}\|}$$

ゆえに　$\|y\|_D\geqq\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{(|x|,|y|)}{\|x\|}$

一方，　$\dfrac{|(x,y)|}{\|x\|}\leqq\dfrac{(|x|,|y|)}{\|x\|}$　であるから，けっきょく

$$\|y\|_D=\max_{x\neq 0}\frac{(|x|,|y|)}{\|x\|}$$

$\|y\|_D$ は $|y|$ にだけ依存する。**証明終**

T 2　「absolute norm は monotonic で，その逆のこともいえる。」

証明　ノルム $\|\cdot\|$ は absolute であるとする。前定理より その dual norm もabsolute であり，有限次元線型ノルム空間の反射性から「**1.3** (4)」，ある $\bar{u}$ が存在して

$$\|x\|=\max_{u\neq 0}\frac{(u,|x|)}{\|u\|_D}=\frac{(|\bar{u}|,|x|)}{\|\bar{u}\|_D}$$

よって $|x|\leqq|y|$ とすると

$$\|x\|\leqq\frac{(|\bar{u}|,|y|)}{\|\bar{u}\|_D}\leqq\max_{u\neq 0}\frac{(u,|y|)}{\|u\|_D}=\|y\|$$

逆に，$\|x\|$ は monotonic であるとする。$y=|x|$ とおくと，確かに　$|x|\leqq|y|$　ゆえに

$$\|x\|\leqq\||x|\|$$

また，$|x|\geqq|y|$ でもあるから

$$\|x\|\geqq\||x|\|\quad \textbf{終}$$

（2）　$l_p{}^n$ 空間のノルムを Hölder norm ともいう。

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p},\quad p\geqq 1$$

$\|x\|_p$ は，p が $-\infty$ から -0 まで変るとき，$\min|x_i|$ から 0 まで単調に減少し，p の $+0$ から $+\infty$ までの区間では，∞ から $\max|x_i|$ まで単調に減少する。また，$p<0$ のとき p の関数として必ずしも凹でないが，$p>0$ のときは凸関数である。[46)]

l_2 norm $\|\cdot\|_2$ は，**Euclid norm** あるいは **Hilbert norm** ともよばれる。

数値計算の上で，計算が簡単であるということもあって，l_∞^n 空間のノルムと l_1^n 空間のノルムが，l_2^n ノルムに次いで重要なノルムであり，それぞれ，**maximum norm, sum norm** とよばれる。前者を，$C[0,1]$ に対応する空間のノルムとみて，一様ノルムとよぶこともある。$\|x\|_\infty$ と書くのは，$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\max_i|x_i|$ による。

対角元が正の実数であるような対角行列 $D=\mathrm{diag}(d_{ii})$ を用いて，$\|Dx\|_\infty$，$\|Dx\|_1$，さらに一般的に，

$$\|Dx\|_p=(\sum_{i=1}^n(d_{ii}x_i)^p)^{1/p}$$

を x のノルムとして使用することもできる。これを Householder の norm とよぶ書もある。

（3） ベクトルの要素の置換に対して不変のノルムを **permutation invariant norm** という。すなわち，勝手な permutation matrix P に対し

$$\|Px\|=\|x\|$$

なるようなノルムである。同じように，勝手なユニタリー変換に関して不変なノルムを unitary invariant norm という。

逆に，あるノルムについて，すべての x に対し $\|Px\|=\|x\|$ なる行列 P を **norm invariant matrix** という。

（4）「**1.2** (7)」で，Hölder の不等式：

$$|(x,y)|\leqq\|x\|_p\|y\|_q,\quad p\geqq 1,\quad 1/p+1/q=1$$

を用いた。特に，$p=q=2$ の場合は，「**1.4** (1)」で Schwarz の不等式とよんだ。dual norm の定義から

$|(x,y)|\leqq\|x\|\|y\|_D$ ($|y^*x|\leqq\|y^*\|\|x\|$ と書いてもよい)。より一般的なこの不等式を，われわれは Hölder の不等式とよぶことにする。そして，不等式で等号がなりたつような $\|x\|\|y\|_D=1$ なる x,y を **dual pair** といい $x\|_d y$ と書く。すべてのベクトル x とともにと dual pair となるような共役空間の元 y が存在する。

T 3 「ノルム $\|\cdot\|$ が absolute (=monotonic) であるための必要十分な条件は，次の Hölder の不等式の強い形がすべてのベクトル x,y の組についてなりたつことである。

$$(|x|,|y|)\leqq\|x\|\|y\|_D$$

証明　$$\|x\|=\max_{y\neq 0}\frac{|(x,y)|}{\|y\|_D}\leqq\max_{y\neq 0}\frac{|(|x|,|y|)|}{\||y|\|_D}$$

また，強い形の Hölder の不等式が成立すれば，

$$\|x\|\geqq\max_{y\neq 0}\frac{(|x|,|y|)}{\|y\|_D}$$

ゆえに

$$\|x\| = \max_{y \neq 0} \frac{(|x|, |y|)}{\|y\|_D}$$

これから $\|x\|$ は $|x|$ にのみ依存し absolute であることが知れる。

逆に，ノルムが absolute であれば，その dual も absolute であるから，すべての x, y について

$$\|x\|\|y\|_D = \||x|\|\||y|\|_D \geqq (|x|, |y|) \quad 終$$

3. 行列のノルム

（1） 行列 $A=(a_{ij})$ を n^2 次元ベクトルとみなせば，第2章で導入したノルムは行列 A のノルムを定義する。たとえば，

$$\|A\|_p = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^p)^{1/p} \quad p \geqq 1$$

また，「**1.4** (8)」によれば，2種のベクトル・ノルムの組合せに対し，転置行列に適用した場合も考えて，それぞれ4種のマトリックス・ノルムが定義できる。たとえば

$$\|A\|_{p,p'} = (\sum_j (\sum_i |a_{ij}|^p)^{p'/p})^{1/p'}, \quad p, p' \geqq 1$$

とすると，$\|A^*\|_{p,p'}$，$\|A\|_{p',p}$，$\|A^*\|_{p',p}$ も一般には別のノルムを定義する。

T 1 「A の固有値の絶対値の最大な値を**固有半径** (spectral radius) といい，λ_A と書くことにする。任意の行列のノルムについて

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \lambda_A」$$

これが行列ノルム $\|\cdot\|_\infty$ について成立することの証明は「**5.** (4)」に記す。有限次元空間のノルムの同値性によって「**1.3** (5)」，任意のノルム $\|\cdot\|$ に対し，n に無関係なある正数 m, M があって，

$$m\|A^n\|_\infty \leqq \|A^n\| \leqq M\|A^n\|_\infty$$

すなわち
$$m^{1/n}\|A^n\|_\infty{}^{1/n} \leqq \|A^n\|^{1/n} \leqq M^{1/n}\|A^n\|_\infty{}^{1/n}$$

よって $n \to \infty$ とすれば，$\|\cdot\|$ についても定理の式のなりたつことがわかる。

（2） ベクトル・ノルムから行列ノルムへ。ある2種のベクトル・ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$，$\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ に対し

$$\mathrm{lub}\,(A)_{\mathrm{I,II}} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathrm{II}}}{\|x\|_{\mathrm{I}}}$$

によって定義されるノルムを **least upper bound norm** あるいは supremum norm belonging to $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$，$\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ などという。特に，$\|\ \|_{\mathrm{I}}$ と $\|\ \|_{\mathrm{II}}$ が一致するとき，subordinate bound norm あるいは supremum norm belonging to the single norm $\|\cdot\|$ などといって，lub(A) で表わす。これを**従属ノルム**とよぶことにする。以後では，簡単のため lub(A) を多く用いるが，たいてい lub$(A)_{\mathrm{I,II}}$ の場合でも同じことが考えられる。

lub$(A)_{\mathrm{I,II}}$ とともに

$$\mathrm{glb}(A)_{\mathrm{I,II}} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathrm{II}}}{\|x\|_{\mathrm{I}}}$$

なる値も一緒に考えて，この二つを matrix bound という。A が正則 (regular) であれば

$$\mathrm{glb}(A)_{\mathrm{I},\mathrm{II}}=1/\mathrm{lub}(A^{-1})_{\mathrm{II},\mathrm{I}}$$

従属ノルムは，x に対すると同じ記号を用いて $\|A\|$ であらわすと，不等式

$$\|Ax\|\leqq\|A\|\|x\|$$

を満たす。一般に，任意の x について

$$\|Ax\|\leqq\|A\|'\|x\|$$

が成立するときは，ノルム $\|\cdot\|'$ は consistent (compatible) with vector norm $\|\cdot\|$ という。

T 2 「上のノルム $\|\cdot\|'$ について

$$\|A\|'\geqq\lambda_A」$$

証明　$Ax=\lambda_i x$, $x\neq 0$ とする。

$$|\lambda_i|\|x\|=\|Ax\|\leqq\|A\|'\|x\|$$

ゆえに　$|\lambda_i|\leqq\|A\|'$ **終**

(3) 各種ベクトル・ノルムに対応する $A=(a_{ij})$ の従属ノルムを記す。左が対応するベクトル $x=(x_i)$ のノルムである。$D=\mathrm{diag}(d_{ii})=(\xi_i)>0$ として，

$$\|Dx\|_\infty=\max_i \xi_i|x_i|,\ \ \mathrm{lub}(A)_{\infty(D)}=\max_i\sum_j\xi_i\xi_j{}^{-1}|a_{ij}|$$

特に，$\|x\|_\infty$ に対しては　$\mathrm{lub}(A)_\infty=\max\limits_i\sum\limits_j|a_{ij}|$ (行和の最大値)

$$\|Dx\|_1=\sum_i\xi_i|x_i|,\quad \mathrm{lub}(A)_{1(D)}=\max_j\sum_i\xi_i\xi_j{}^{-1}|a_{ij}|$$

特に，$\|x\|_1$ に対しては　$\mathrm{lub}(A)_1=\max\limits_j\sum\limits_i|a_{ij}|$　(列和の最大値)

$$\|x\|_2=(\sum_i|x_i|^2)^{1/2},\qquad \mathrm{lub}(A)_2=\max_{(x,x)=1}(A_x,A_x)^{1/2}$$

あるベクトル・ノルム $\|\cdot\|$ と正則行列 G が与えられたとき，$\|G\cdot\|$ によって新しいノルムが定義されることに注意する。後のノルムに対応する行列 A の従属ノルムは，古いノルムによる GAG^{-1} のノルムに等しい。

T 3 「l_2 従属ノルム $\mathrm{lub}(A)_2=\|A\|$ について，常に次の式が成立する。

$$\|A\|=\|A^*\|=\|A^*A\|^{1/2}=\|AA^*\|^{1/2}$$

また，A が正規 (mormal: $A^*A=AA^*$) の場合に限り，$\|A\|=\lambda_A$ が成立する。」

後の定理「**5. T 5**」は次のことをいっている。

T 4 「A の各要素が正のとき，

$$\inf_{D>0}\ (\mathrm{lub}(A)_{\infty(D)})=\lambda_A$$

ただし，$D>0$ は，対角行列 D の対角元が正であることを示す。」

(4) **axis-oriented norm** とは，任意の対角行列 $D=\mathrm{diag}(a_{ii})$ に対し

$$\|D\|=\max_i|d_{ii}|$$

かなりたつノルムをいう。

T 5 「ベクトル・ノルム $\|\cdot\|$ が absolute (=monotonic) であるための必要で十分な条件は，従属ノルムが axis-oriented であることである。」[3)]

証明　必要性。任意の $x_i=(0,\cdots\cdots,x_i,0,\cdots\cdots0)$ について

$$|(Dx)_i|=|Dx_i|\leqq(\max_i|d_{ii}|)|x_i|$$

ゆえに，$\|x\|$ が montonic であれば，すべての x について $\|Dx\|\leqq(\max_i|d_{ii}|)\|x\|$

すなわち $\|D\|\leqq\max_i|d_{ii}|$

一方，D の固有値は d_{ii} であるから，「**T 1**」より

$$\|D\|\geqq\max_i|d_{ii}|$$

よって $\|D\|=\max_i|d_{ii}|$

十分性。任意の x について，ある対角行列 D_x が存在し $x=D_x(x),\ |D_x|=I$

よって，すべての対角行列 D について $\|D\|=\max_i|d_{ii}|$ がなりたつとすれば

$$\|x\|\leqq\|D_x\|\,\||x|\|=\||x|\|$$

$$\||x|\|\leqq\|D_x^{-1}\|\,\|x\|=\|x\|$$

ゆえに $\|x\|=\||x|\|$ **終**

（5） 行列ノルムからベクトル・ノルムへ。n 行 m 列の行列からなる線型ノルム空間が与えられたとき，ある特定の1行あるいはある1列以外の要素が0であるような行列からなる部分空間は，それぞれ m 次または n 次のベクトルからなるノルム空間とみなすことができる。multiplicative な行列ノルム $\|\cdot\|$，たとえば $\|\cdot\|_p$，$1<p\leqq2$「**6. T 7**」があり，それをベクトル・ノルムとしたときの従属ノルムを $\|\cdot\|'$ と書くと，任意の行列 A について関係式：

$$\|A\|\geqq\|A\|'$$

がなりたつ。それは，不等式：

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leqq\frac{\|A\|\|x\|}{\|x\|}=\|A\|$$

の左辺の，x についての maximum が $\|A\|'$ であることからわかる。

また，ベクトル・ノルムと従属ノルムとは，次の関係でたがいに結ばれている[7)]。

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

$$\|x\|=\inf_{Ay=x}\|A\|,\quad y \text{ は } \|y\|=1 \text{ なる任意の固定された元。}$$

2番めの式は，同じ性質の y を用いて次のようにも書ける。

$$\|x\|=\sup_{Ax=y}\frac{1}{\|A\|}\qquad\text{(付録 6)}$$

（6） **比較定理**　**T 6** 「X と Y を線型空間とし（有限次元でなくともよい），$\mu_i,\nu_i,i=1,2$ を

それぞれ X, Y で定義された２種のノルムとする。T は階数１のすべての有界線型作用素を含む X から Y への有界作用素のある集合とし，それらの μ_1, ν_1 に属する (belonging to μ_1, ν_1) supremum norm, μ_2, ν_2 に属する supremum norm をそれぞれ $\sup_1, \sup_2$ で表わすことにする。

$$\sup_1(A)=\sup_{x\in X}\frac{\nu_1(Ax)}{\mu_1(x)} \quad A\in T$$

そのとき

$$\inf_T \frac{\sup_1}{\sup_2}=m_1n_2 \tag{3.1}$$

$$m_1=\inf_X\frac{\mu_2}{\mu_1},\quad m_2=\inf_X\frac{\mu_1}{\mu_2},\quad n_1=\inf_Y\frac{\nu_2}{\nu_1},\quad n_2=\inf_Y\frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{3.2}$$

ただし，m_1, n_2 は 0 でないとする。」[26)]

証明 $A\in T$, $x\in X$ とする。もし $Ax\neq 0$ なら

$$\frac{\nu_1(Ax)}{\mu_1(x)}=\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}\frac{\nu_1(Ax)}{\nu_2(Ax)}\frac{\nu_2(Ax)}{\mu_2(x)}\geqq m_1n_2\frac{\nu_2(Ax)}{\mu_2(x)}$$

また，$Ax=0$ でもこの式は成立し，ゆえに

$$\sup_1/\sup_2\geqq m_1n_2 \tag{3.3}$$

さて，m, n を次の式を満たす任意の正の数とする。 $m_1<m$, $n_2<n$

定理を証明するには，(3.3) より，次式をなりたたせる階数 1（値域の次元が 1）の X から Y への有界作用素 E の存在することをいえばよい。

$$\sup_1(E)/\sup_2(E)\leqq mn \tag{3.4}$$

(2) 式より，ある $u\in X$, $v\in Y$ があって

$$\frac{\mu_2(u)}{\mu_1(u)}\leqq m,\quad \frac{\nu_1(v)}{\nu_2(v)}\leqq n \tag{3.5}$$

u から生成 (generate) される一次元部分空間 $\{u\}$ 上に，次のような線型汎関数 f_0 を定義する。

$$|f_0(x)|=|(x,f_0)|=\mu_1(x)\mu_2(u),\quad x\in\{u\} \tag{3.6}$$

Hahn-Banach の定理 (**付録 3**) から，f_0 を X 上に拡張した f が存在して，すべての $x\in Y$ について

$$|(x,f)|\leqq\mu_1(x)\mu_2(u)$$

ここで，$Ex=(x,f)v$ で E を定義すると，すべての $x\in X$ について

$$\frac{\nu_1(Ex)}{\mu_1(x)}=\frac{|(x,f)|\nu_1(v)}{\mu_1(x)}\leqq\mu_2(u)\nu_1(v)$$

となるから，

$$\sup_1(E)\leqq\mu_2(u)\nu_1(v) \tag{3.7}$$

また，(3.6) 式より

$$\frac{\nu_2(Eu)}{\mu_2(u)}=\frac{|(u,f)|\nu_2(v)}{\mu_2(u)}=\mu_1(u)\nu_2(v)$$

となるから，

$$\sup{}_2(E)\geqq\mu_1(u)\nu_2(v) \tag{3.8}$$

(3.5) (3.7) (3.8) より (3.4) がなりたつ。**終**

行列の２種のノルム，$\mu(\cdot), y(\cdot)$ について

$$P_{\mu\nu}=\max_{A\neq 0}\frac{\mu(A)}{\nu(A)}$$

とおく。そのとき，上に証明した定理から次のことがわかる。

T 7 「μ, ν を２種の，行列の従属ノルムとするとき

$$P_{\nu\mu}=P_{\mu\nu}」$$

証明 これは **T 6** の記号を使えば，

$$X=Y,\ \mu_1=\nu_1,\ \mu_2=\nu_2 \text{ のとき}$$

$$\inf_T\frac{\sup_1}{\sup_2}=\inf_T\frac{\sup_2}{\sup_1} \tag{3.9}$$

と書かれる。そのとき，(3.2) において $m_1=n_1$, $m_2=n_2$ であるから

$$m_1n_2=m_2n_1$$

ところが，**T 6** によれば，(3.9) の左辺の値は m_1n_2 に等しく，右辺は m_2n_1 に等しく，確かに (3.9) 式は成立する。**終**

（７） いく種類かの行列ノルムについて，$P_{\mu\nu}$ の値を表に示す[30]。$P_{\mu\nu}$ は μ 行 ν 列のところに記されている。「**T 7**」から $P_{\nu\mu}\neq P_{\mu\nu}$ であれば，少なくとも ν, μ どちらかの行列ノルムはあるベクトル・ノルムからの従属ノルムではありえない。

表１ $P_{\mu\nu}$

μ \ ν	l_2	l_∞	l_1	$\\|\cdot\\|_2$	$\\|\cdot\\|_\infty$	$\\|\cdot\\|_1$
l_2	1	$n^{1/2}$	$n^{1/2}$	1	n	1
l_∞	$n^{1/2}$	1	n	$n^{1/2}$	n	1
l_1	$n^{1/2}$	n	1	$n^{1/2}$	n	1
$\\|\cdot\\|_2$	$n^{1/2}$	$n^{1/2}$	$n^{1/2}$	1	n	1
$\\|\cdot\\|_\infty$	1	1	1	1	1	1
$\\|\cdot\\|_1$	$n^{3/2}$	n	n	n	n^2	1

l_p は l_p 従属行列ノルムの略

（８） 従属ノルムの性質に関する定理を三つ示す[4]。

T 8 「$\mathrm{lub}\,(xy^*)=\|x\|\|y\|_D$ ただし，xy^* は列ベクトル $x=(x_i)$ と $y=(y_i)$ とから作られた

dyad で

$$(xy^*)=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots\cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots\cdots & x_2y_n \\ \cdots\cdots & & & \\ x_ny_1 & \cdots\cdots & & x_ny_n \end{pmatrix}」$$

証明 $$\mathrm{lub}\,(xy^*)=\max_{u\neq 0}\frac{\|xy^*u\|}{\|u\|}=\max_{u\neq 0}\frac{\|x\||(y,u)|}{\|u\|}=\|x\|\|y\|_D \quad 終$$

(xy^* は，y^* を線型汎関係とみて，$z\to(y^*z)x$ なる対応と考えてもよい。)

T 9 「$\mathrm{lub}(A)=\max\{(y,Ax):\|y\|_D\|x\|=1\}$」

証明 Hölder の不等式と $\mathrm{lub}(A)$ の定義から

$(y,Ax)\leqq\|y\|_D\|Ax\|\leqq\|y\|_D\|x\|\mathrm{lub}(A)$

ゆえに定理の右辺を $n(A)$ とおくと

$$n(A)\leqq\mathrm{lub}(A)$$

一方，$\mathrm{lub}(A)=\|Ax_0\|$, $\|x_0\|=1$ なる x_0 が存在し，Ax_0, y_0 が dual pair なるような y_0, $\|y_0\|_D=1$ をとると

$$(y_0,Ax_0)=\|y_0\|_D\|Ax_0\|=\mathrm{lub}(A)$$

しかも $\|y_0\|_D\|x_0\|=1$ であるから

$$n(A)=\mathrm{lub}(A)$$

がわかる。終

T 10 「λ を $|\lambda|=\lambda_A$ なる A の固有値とする。$\mathrm{lub}(A)=\lambda_A$ がなりたてば，λ に対する A の右固有ベクトル u，左固有ベクトル v は dual pair，$(v,u)=\|v\|\|u\|_D$ である。」

証明 $\lambda=0$ のときは明らかであるので $\lambda\neq 0$ とする。右固有ベクトル v と dual をなす任意の u をとる。

$$|(v,Au)|=|\lambda||(v,u)|=|\lambda|=\mathrm{lub}(A)$$

よって，$\dfrac{Au}{\lambda}$ も v の dual であり

$$v\|d\,\frac{Au}{|\lambda|}$$

ここで，ノルムの斉次性から $|\lambda|$ は λ とおいて考えてよいことに注意する。一方，集合 $D(v)=\{u:v\|_d u\}$ は有界，閉で 凸 であることが簡単に示される。よって，連続な対応

$$u\to\frac{Au}{\lambda}$$

に Brouwer の不動点定理が適用できて (**付録 7**)，あるベクトル $u\in D(v)$ があって

$$u=\frac{Au}{\lambda}\quad 終$$

4. 各種不等式

おもに以下の各章で使用される関係式を6項にわけて説明する。(1), (2) の内容は，後に直接用いることはないが，ノルムの性質を表わす具体例となっている。(3) は第6章の議論をわかり良くするためのもので，証明なしで結果だけ記してある。(4), (5), (6) の不等式は，数値解法の収束性を調べるときに使うが，それだけでも十分興味ある題材であろう。

（1） $A=(a_{ij})$ の固有値の絶対値は「**3. T 2**」から次の値より小さいことがわかる。

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

また，「**3.** (7)」の表によれば次の値よりも小さい。

$$(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$$

このような式はいろいろと拡張可能である。たとえば，A の固有値を $\{\lambda_i\} i=1,2,\cdots,n$ として

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \quad \text{(Schur の不等式)}。$$

次にこれらとは逆方向の不等式を考える。そのために，A はある正則行列 G によって

$$A=GDG^{-1}, \quad D=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \tag{4.1}$$

と変換されるとする。absolute norm から導かれた matrix bounds によって「**3.** (2)」

$$\mathrm{lub}(A) \leqq \mathrm{lub}\,(G)\,\mathrm{lub}\,(G^{-1}) \max_i |\lambda_i|$$

$$\mathrm{glb}\,(A) \geqq \mathrm{glb}\,(G)\,\mathrm{glb}\,(G^{-1}) \min_i |\lambda_i|$$

よって　$\mathrm{cond}\,(G) = \mathrm{lub}\,(G)\,\mathrm{lub}\,(G^{-1})$　とおくと

$$\max |\lambda_i| \geqq \mathrm{lub}\,(A)/\mathrm{cond}\,(G) \tag{4.2}$$

$$\min |\lambda_i| \leqq \mathrm{glb}\,(A)\,\mathrm{cond}\,(G) \tag{4.3}$$

ここで，$\mathrm{lub}\,(G^{-1}) = 1/\mathrm{glb}\,(G)$ であり，$\mathrm{cond}\,(G)$ を G の **condition number** とよぶ。

$$\mathrm{cond}\,(A) \geqq 1$$

$$\mathrm{cond}\,(A^{-1}) = \mathrm{cond}\,(A)$$

$$\mathrm{cond}\,(AB) \leqq \mathrm{cond}\,(A)\,\mathrm{cond}\,(B)$$

(4.1) を満足するすべての G について

$$\nu(A) = \max_G \mathrm{cond}\,(G)$$

を考えると，(4.2), (4.3) は式 $\mathrm{cond}(G)$ を $\nu(A)$ でおきかえても成立する。

$\nu(A) \geqq 1$。もし $\nu(A)=1$ であれば，ある G について，$\mathrm{glb}(G)=\mathrm{lub}(G)$。よってすべての x について，$\|Gx\|=\|x\|$。A が，このような norm-invariant matrix「**2.** (3)」によって (4.1) のよう

に対角化できるとき，このノルムに関して正規 (normal) であるという。

（2） **T 1**「A の固有値はすべて次の集合に含まれる。

z: $|z-a_{ii}| \leqq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $1 \leqq i \leqq n$」 (**Geršgorin circle theorem**) この定理から，すでに前節でものべたが，A の固有半径は，$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ あるいは A^* に適用して $\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ より小さいということも導かれる。

次にノルムを maximum norm, B を A の対角元からなる行列としたときに，Gersgorin の定理となるような，より一般化した形の定理を証明する。

λ を A の固有値，x を対応する固有ベクトルとする。B を他の勝手な行列とすると，λ はまた B の固有値であるかあるいは

$$x = (\lambda I - B)^{-1}(A-B)x$$

後の場合は

$$\|x\| \leqq \mathrm{lub}\,((\lambda I - B)^{-1}(A-B))\|x\|$$

よって次の定理を得る。

T 2 「A の固有値は，すべて，次の集合に含まれる。

z: $\mathrm{lub}^{-1}((zI-B)^{-1}) \leqq \mathrm{lub}\,(A-B)$ または

$\det\,(zI-B)=0$」

もし B がある行列 G によって対角化可能であるとする。

$$B = GDG^{-1}$$

そのとき $\mathrm{cond}(G) = \mathrm{lub}(G)\mathrm{lub}(G^{-1})$ によって上の定理は次のようになる。

T 3 「集合 $\{z$: $\mathrm{lub}^{-1}((zI-D)^{-1}) \leqq \mathrm{cond}\,(G)\,\mathrm{lub}\,(A-B)$ または $\det\,(zI-B)=0\}$ は A のすべての固有値を含む。」

（3） **Perron の定理**。すべての要素が正の行列を**正行列** (positive matrix) とよび，A が正行列なることを $A>0$ と書く。A の固有半径を λ_A として，

T 4「行列 $A>0$ は λ_A を単純な固有値として持ち，λ_A は正で，他の固有値の絶対値はすべて λ_A より小さく，対応する固有ベクトルも正で常数倍を無視すれば一意である。」

後に，$A>0$ のときのこの固有ベクトルをペロン・ベクトルとよび，λ_A を $\pi(A)$ と記す。$\pi(A)$ は次のように特徴づけられる。

T 5 「
$$\pi(A) = \sup_x \left(\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{x_i} \right) = \inf_x \left(\max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{x_i} \right)$$

ただし，$x_i>0$ $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$」

行列 A が$A\geqq 0$，すなわち**非負行列** (nonnegative matrix) の場合にも，ある種の条件をつければ，**T 4** のような定理のなりたつことが証明される。(Frobenius の定理)

（4） A. Ostrowski[20] による不等式を証明を付して引用する。記号は前に導入したものによるが，念のために再記すると

$$\|A\|_p=(\sum_{ij}|a_{ij}|^p)^{1/p}$$

$$\|A\|_{p,p'}=(\sum_j(\sum_i|a_{ij}|^p)^{p'/p})^{1/p'},\quad p,p'\geqq 1$$

$$\|A\|_{p,p}=\|A\|_p$$

A を1行 n 列の行列とすると，$\|A\|_{p,p'}=\|A\|_{p'}$，m 行1列とすると，$\|A\|_{p,p'}=\|A\|_p$

さらに，$x=(x_i)$，$y=(y_i)$ として Hölder の不等式:

$$|(x,y)|\leqq\|x\|_p\|y\|_q,\ 1/p+1/q=1,\ p\geqq 1 \tag{4.4}$$

および，$p\leqq 2$ なら $q\geqq 2$ となるから

$$\|x\|_q\leqq\|x\|_p,\ p\leqq 2\leqq q \tag{4.5}$$

がなりたつことを思い出しておく「**2.** (2)」。

また，(4.4)，(4.5) より

$$|(x,y)|\leqq\|x\|_p\|y\|_p,\ 1\leqq p\leqq 2 \tag{4.6}$$

以下，ことわりなしの p,q は (4.4) の関係を満たすものとし，行列 A,B について AB と書いたとき，それが意味を持つ場合について考えているものとする。

T 6 「

$$\|AB\|_{q,p}\leqq\|A\|_q\|B\|_p \tag{4.7}$$

$$\|A\|_{q,p}\leqq\|A\|_q,\ p\geqq 2 \tag{4.8}$$

」

証明 $A=(a_{ij})$ を $l\times m$，$B=(b_{ij})$ を $m\times n$ 行列とする。

$$AB=C=(C_{ij}),\quad C_{ij}=\sum_j a_{ij}b_{jk}$$

(4.4) より

$$|C_{ik}|^q\leqq(\sum_j|a_{ij}|^q)(\sum_j b_{jk}{}^p)^{q/p}$$

i についての和をとれば，

$$\sum_i|C_{ik}|^q\leqq\|A\|_q{}^q(\sum_j|b_{jk}|^p)^{q/p}$$

ゆえに

$$(\sum|C_{ij}|^q)^{p/q}\leqq\|A\|_q{}^p\sum|b_{ik}|^p$$

k についての和をとれば

$$\|AB\|^p{}_{q,p}\leqq\|A\|_q{}^p\|B\|_p{}^p$$

次に (4.8) を証明する。 $x_j=(\sum_i|a_{ij}|^q)^{1/q}$ と書くと，

$$\|A\|_{q,p}=(\sum_j x_j{}^p)^{1/p}$$

$p\geqq 2$ とすると $2\geqq q$ となり，(4.5) より上式は

$$\leqq (\sum_j x_j{}^q)^{1/q}=(\sum_{i,j}|a_{ij}|^q)^{1/q}=\|A\|_q \quad \text{終}$$

T 7 「

$$\|AB\|_p\leqq\|A\|_p\|B\|_p,\quad 1\leqq p\leqq 2 \tag{4.9}$$

$p>2$, のときは，一般には，A が1列，B が1行からなるときにのみ成立する。」

証明　前と同じ記号で，$C_{ik}=\sum_j a_{ij}b_{jk}$ に (4.6) を適用して

$$|C_{ik}|^p\leqq\sum_j|a_{ij}|^p\sum_j|b_{jk}|^p,\quad 2\geqq p\geqq 1$$

i,k についての和を作れば

$$\|C\|_p{}^p\leqq\|A\|_p{}^p\|B\|_p{}^p$$

次に $p>2$ とする。A,B をすべての要素が1である行列とする。　$C_{ik}=m$

$$\|A\|_p=(lm)^{1/p},\quad \|B\|_p=(mn)^{1/p},\quad \|C\|_p=m(ln)^{1/p}$$

このとき (4.9) は

$$m(ln)^{1/p}\leqq m^{2/p}(ln)^{1/p}$$

$m>1$ ではこの不等式は成立しない。$m=1$ のときは，(4.9) は等号で成立する。終

T 8 「$p\geqq 2$ のとき

$$\|AB\|_p\leqq\|A\|_p\|B\|_q \tag{4.10}$$

$$\|AB\|_p\leqq\|A\|_q\|B\|_p \tag{4.11}$$

$1\leqq p\leqq 2$ のとき (4.10) は，一般には，B が1列からなるときに限り成立する。一方，このとき (4.11) は，一般には A が1行からなる行列のときに限り成立する。」

証明　準備としてまず二つの不等式を証明する。(4.4) より

$$|C_{ik}|^p\leqq\sum_j|a_{ij}|^p(\sum_j b_{jk}{}^q)^{p/q}$$

i,k についての和をとれば

$$\|AB\|_p{}^p\leqq\|A\|_p{}^p\sum_k(\sum_j|b_{jk}|^q)^{p/q}$$
$$=\|A\|_p{}^p\|B\|^p{}_{q,p}$$

ゆえに

$$\|AB\|_p\leqq\|A\|_p\|B\|_{q,p} \tag{4.12}$$

やはり (4.4) より

$$|C_{ik}|^p\leqq\sum_j|b_{jk}|^p(\sum_j|a_{ij}|^q)^{p/q}$$

i,k についての和をとれば

$$\|AB\|_p{}^p\leqq\|B\|_p{}^p\sum_i(\sum_j|a_{ij}|^q)^{p/q}$$

A の転置行列を A^* とすると，上式を $1/p$ 乗して

$$\|AB\|_p \leqq \|B\|_p \|A^*\|_{q,p} \tag{4.13}$$

さて，$p\geqq 2$ とすると，(4.8), (4.12) より (4.10) のなりたつことがわかる。また，(4.8), (4.13) より

$$\|AB\|_p \leqq \|B\|_p \|A^*\|_q = \|B\|_p \|A\|_q$$

これは (4.11) である。

$p<2$ の場合について調べるために，A, B のすべての要素を 1 とすると (4.10) 式は

$$m(ln)^{1/p} \leqq ml^{1/p}n^{1/q}$$

よって　$n^{1/p} \leqq n^{1/q}$

これから，$n>1$ では一般には成立しない。同様にして，(4.11) も $l>1$ では一般には成立しない。$n=1$ のときは，$\|B\|_{q,p}=\|B\|_q$ となり (4.12) から (4.10) はなりたつ。同様に $l=1$ のときは，$\|A^*\|_{q,p}=\|A^*\|_q=\|A\|_q$ で，(4.13) よりこのとき (4.11) のなりたつことがわかる。終

(5)　$A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 正定値対称行列 (positive-definite symmetrix matrix)，その固有値を $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_n > 0$ とする。そのとき，$p=\lambda_1/\lambda_n$ を A の **p-condition number** という。p の値は $\mathrm{lub}(A)_2\,\mathrm{lub}(A^{-1})_2$ と一致する。一般の行列においては，λ_1 を絶対値最大の固有値，λ_n を最小の固有値としたときの $p=\lambda_1/\lambda_n$ の絶対値を p-condition number という。

いま，$q=4p/(p+1)^2$ とおくと，$\mathrm{tr}\,A$ を A の trace として，不等式:

$$\det(A) \geqq q^{n-1}\left(\frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\right)^n \tag{4.14}$$

の成立することが証明される[16]。等号の成立するのは，A が単位行列の定数倍，すなわち $p=1$ のときに限る。この式を p について解くと

$$M=\det(A)\bigg/\left(\frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\right)^n$$

とおいて，

$$4M^{\frac{1}{1-n}}-3 \leqq p \tag{4.15}$$

左辺は，p の下界を行列式の値と trace によって与えている。なお $M<1$

(4.14) に対応する次の不等式がなりたつ。

T 9　「

$$\det(A) \leqq q\left(\frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\right)^n \tag{4.16}$$

等号は　$\lambda_2=\lambda_3=\cdots\cdots=\lambda_{n-1}=\dfrac{\lambda_1+\lambda_n}{2}$ のときに限り成立する。」

証明　　$q=4p/(p+1)^2$

$$=4\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\bigg/\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+1\right)^2$$

$$=4\lambda_1\lambda_n/(\lambda_1+\lambda_n)^2$$

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\cdot\lambda_n/\lambda_2\lambda_3\cdots\cdot\lambda_{n-1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)$$

相乗平均 $\leqq$ 相加平均より

$$\geqq \lambda_1\lambda_2\cdots\cdot\lambda_n\Bigg/\left(\frac{\lambda_2+\lambda_2+\cdots\cdot+\lambda_{n-1}+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)}{n}\right)^n$$

$$=\det(A)\Bigg/\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdot+\lambda_n}{n}\right)^n$$

$$=\det(A)\Bigg/\left(\frac{\operatorname{tr}A}{n}\right)^n \quad \text{終}$$

(4.16) 式より，簡単な計算によって

$$p<4/M-2 \tag{4.17}$$

右辺は，p の上界を行列式の値と trace によって与えている。

（6） **Kantorovich の不等式**。正値対称行列 A の固有値を $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\cdot\geqq\lambda_n>0$, $p=\lambda_1/\lambda_n$ とすると，次の不等式が成立する。

$$(x,x)^2\leqq(Ax,x)(A^{-1}x,x)\leqq\frac{(p+1)^2}{4p}(x,x)^2 \tag{4.18}$$

より一般的に[27]

T 10 「$\mu_\nu=\mu_\nu(x)=(A^\nu x,x)$ とおくと，

$$1\leqq\mu_{\nu+1}\mu_{\nu-1}/\mu_\nu{}^2\leqq(p^{\frac{1}{2}}+p^{-\frac{1}{2}})^2/4 \tag{4.19}$$」

$\nu=0$ の場合が (4.18) である。

証明　左のほうは，Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned}\mu_\nu{}^2&=(A^\nu x,x)^2=(A^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}x)^2\\&\leqq(A^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}x)\,(A^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}})\\&=(A^{\nu+1}x,\ x)\,(A^{\nu-1}x,\ x)\\&=\mu_{\nu+1}\,\mu_{\nu-1}\end{aligned}$$

なることよりわかる。以下に右の不等式を証明する。

$\gamma_\nu(x)=\mu_\nu(x)/\mu_{\nu-1}(x)$　とおくと

$$\lambda_1\geqq\gamma_\nu(x)\geqq\lambda_n \tag{4.20}$$

$\gamma_\nu(x)=\gamma_\nu(\lambda)=\gamma_\nu(x+\lambda Ax)$　を考えると

$$(\mu_{\nu-1}+2\lambda\mu_\nu+\lambda^2\mu_{\nu+1})\gamma_\nu-(\mu_\nu+2\lambda\mu_{\nu+1}+\lambda^2\mu_{\nu+2})=0$$

よって，$\mu_\nu^2+\mu_{\nu+1}\mu_{\nu-1}\leqq 0$ であり，λ の関数としての γ_ν の最大，最小の値は，次の γ に関する二次方程式の根である。

$$(\mu_\nu-\gamma\mu_{\nu-1})(\mu_{\nu+2}-\gamma\mu_{\nu+1})-(\mu_{\nu+1}-\gamma\mu_\nu)^2=0$$

その2根を γ',γ'' とする。

ところで，関数 $\varphi(\alpha,\beta)=4\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$，$\alpha\beta>0$ は，$\varphi(\alpha,\alpha)=1$ で，$\alpha/\beta>1$ に関し単調に減少する。よって

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma',\gamma'')&=4(\mu_\nu\mu_{\nu+2}-\mu_{\nu+1}{}^2)/(\mu_{\nu-1}\mu_{\nu+2}+\mu_\nu\mu_{\nu+1}-2\mu_\nu\mu_{\nu+1})^2\\&=\frac{4\gamma_\nu(x)}{\gamma_{\nu+1}(x)}\frac{[\gamma_{\nu+1}(x)-\gamma_\nu(x)][\gamma_{\nu+2}(x)-\gamma_{\nu+1}(x)]}{[\gamma_{\nu+2}(x)+\gamma_\nu(x)]^2}\\&=\varphi[\gamma_{\nu+2}(x)-\gamma_{\nu+1}(x),\gamma_{\nu+1}(x)-\gamma_\nu(x)]\gamma_\nu(x)/\gamma_{\nu+1}(x)\\&\leqq\gamma_\nu(x)/\gamma_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

(4.20) と $\varphi(\alpha/\beta)$ の単調性より

$$\varphi(\gamma',\gamma'')\geqq\varphi(\lambda_1,\lambda_n)$$

ゆえに，$\gamma_\nu(x)/\gamma_{\nu+1}(x)\geqq\varphi(\lambda_1,\lambda_n)$

$\mu_\nu(x)$ で書きなおし両辺の逆数をとれば (4.19) の右側の成立が知れる。**終**

以上の証明は次元に関する考察を用いていず，定理が一般のヒルベルト空間で成立することが予想される。実際，一般の作用素に拡張されて，次の形でなりたつことも証明される[31]。

T 11 「A をヒルベルト空間 H の上の有界作用素とし，$\|A\|=M$，$\|A^{-1}\|=m^{-1}$ とすると，すべての H の元 x,y について

$$|(Ax,y)(x,A^{-1}y)|\leqq\frac{(M+m)^2}{4Mm}(x,x)(y,y)$$

上界を与える係数は，可能な最良の値である。」

5. 数値解法の収束条件への応用

ベキ行列が零行列に収束するためには，任意の従属ノルムが1より小であれば十分であった。そのとき行列の固有半径は1より小さい。固有半径が1より小なることがベキ行列収束のための必要十分条件であるという事実がこの章の主定理である。この定理を中心に，関連する問題を考える。(3) では，近似解の連続な真の解への収束条件について，線型常微分方程式の初期値問題を例に考える。いわゆる，関数解析でいう一様有界性の定理を考える意義を理解してもらうための導入部のつもりである。(5) では，非線型方程式の解を反復法で計算する Newton method の収束性について，連立の場合のそれを多変数関数の Taylor 展開を使用して調べる。

(1) $m\to\infty$ のとき $\|A^m\|^{1/m}\to\lambda_A$ なることから，「**3. T 1**」 $\lambda_A<1$ であれば $\|A^m\|\to 0$ であることがわかる。これは，一般化した形で，「**T 4**」でも証明する。その逆が成立することも後に示す

「**T 10**」からわかる。

T 1「ベキ行列 A^m が $m\to\infty$ のとき $\to 0$ なるための必要十分条件は，A の固有半径 λ_A が 1 より小なることである。」

この結果を用いて，等比級数の収束条件に相当する次の定理を証明する。

T 2「行列の和：

$$I+A+A^2+\cdots\cdots+A^m+\cdots\cdots$$

が収束するための必要十分条件は，$m\to\infty$ のとき $A^m\to 0$ なることであり，このとき，和は $(I-A)^{-1}$ に収束する。」

証明　必要性は明らかなので条件の十分なることを証明する。「**T 1**」より，A の固有値は絶対値がすべて1より小さいから

$$\det(I-A)\neq 0$$

よって，$(I-A)^{-1}$ が存在する。恒等式：

$$(I+A+A^2+\cdots\cdots+A^m)(I-A)=1-A^{m+1}$$

の両辺に $(I-A)^{-1}$ を作用させて，

$$I+A+A^2+\cdots\cdots+A^m=(I-A)^{-1}-A^{m+1}(I-A)^{-1}$$

仮定から，$m\to\infty$ とすると，右辺 $\to(I-A)^{-1}$

よって，$I+A+\cdots\cdots+A^m+\cdots\cdots=(I-A)^{-1}$　**終**

（2）行列のノルムは absolute norm の従属ノルムとする。よって axis-oriented である。「**3.** (4)」

$n\times n$ 行列 A は ある行列 S により Jordan 標準形に変換できて（D は対角行列）

$$SAS^{-1}=D+J \tag{5.1}$$

より詳しく，（**T 9** 参照）λ_i を A の固有値とし，

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_m \end{pmatrix}$$

$$U_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

これを用いて次の定理が証明される。

T 3「任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対し，ある行列 S が存在して

$$\lambda_A\leqq \mathrm{lud}(SAS^{-1})\leqq\lambda_A+\varepsilon」$$

証明　左の不等号の成立は，固有値が座標変換によって不変なことと「**3. T 2**」よりわかる。以

下右を示す。

Jordan 変換によって，(5.1) にしたがい

$$S\frac{1}{\varepsilon}AS^{-1}=\frac{1}{\varepsilon}D+J$$

すなわち　$SAS^{-1}=D+\varepsilon J$

となる。S は ε に依存して変わる。

$$\begin{aligned}\mathrm{lub}\,(SAS^{-1})&\leqq \mathrm{lub}\,(D)+\mathrm{lub}\,(\varepsilon J)\\&=\lambda_A+\varepsilon\,\mathrm{lub}(J)\end{aligned}$$

よって，$\varepsilon\,\mathrm{lub}(J)$ をあらためて ε とおけばよい。**終**

これから

$$\inf_{\det(S)\neq 0}\mathrm{lub}\,(SAS^{-1})=\lambda_A$$

なることがわかる。S のかわりに対角行列 D とおいて

$$\inf_{D}\mathrm{lub}\,(DAD^{-1})$$

が λ_A に等しくなるかという問題は，あるノルムで A が正行列の場合は肯定的に解答される「**3. T 4**」。他のある種のノルムについても成立することが「**6. T 5**」で示される。

T 4　「任意の与えられた $\varepsilon>0$ に対し，「**T 3**」によって，次のような S が存在する。

$$\mathrm{lub}(SAS^{-1})\equiv S<\lambda_A+\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

$$\sigma=\mathrm{cond}(S)=\mathrm{lub}(S)\mathrm{lub}(S^{-1}),\quad \eta_1=\varepsilon/2\sigma \tag{5.3}$$

とおくと，

$$\mathrm{lub}(U_\mu)\leqq\eta_1,\quad \mu=1,2,\cdots\cdot$$

なる行列 U_μ に対し

$$\mathrm{lub}\,(\Pi_m)\equiv\mathrm{lub}\,(\prod_{\mu=1}^{m}(A+U_\mu))\leqq\sigma(\lambda_A+\varepsilon)^m,\quad m=1,2,\cdots\cdot$$

よって，特に $\lambda_A<1$ ならば，$m\to\infty$ のとき $\Pi_m\to 0$」

証明　$B=SAS^{-1}$，$V_\mu=SU_\mu S^{-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}S\Pi_m S^{-1}&=[S(A+U_1)S^{-1}]\cdots\cdot[S(A+U_m)S^{-1}]\\&=\prod_{\mu=1}^{m}(B+V_\mu)\end{aligned}$$

一方　　$\mathrm{lub}\,(V_\mu)\leqq\sigma\eta_1=\varepsilon/2$

　　　　$\mathrm{lub}\,(B+V_\mu)\leqq S+\sigma\eta_1<\lambda_A+\varepsilon$

ゆえに　　$\mathrm{lub}\,(\Pi_m)=\mathrm{lub}\,(S^{-1}(S\,\Pi_m S^{-1})S)$

$$\begin{aligned}&\leqq\mathrm{lub}\,(S^{-1})\mathrm{lub}(S)\,\mathrm{lub}\,(S\Pi_m S^{-1})\\&\leqq\sigma(\lambda_A+\varepsilon)^m\end{aligned}$$

終

T 5 「$\lambda_A<1$ とし，$\varepsilon>0$ を $\lambda_A+\varepsilon<1$ なるように任意にとる。σ を (5.3) によるものとし，$\eta_2=\varepsilon/2\sigma^2$ とおく。

$$A_1=A,\ A_{\mu+1}=A_\mu A+W_\mu$$

によって作られる行列の列について，もし

$$\mathrm{lub}(W_\mu)\leqq\eta_2\,\mathrm{lub}(A_\mu),\ \mu=1,2,\cdots$$

であれば，$m\to\infty$ としたとき

$$A_m\to 0 \quad で$$

しかも，
$$\mathrm{lub}(A_m)<\sigma(\lambda_A+\varepsilon)^m,\ m=1,2\cdots \tag{5.4}$$」

定理は，反復計算等において，丸めの誤差 W_μ の大きさが A_μ に比べて小さければ，収束は安定であることを保証している。

証明　$S,\ s,\ B,\ \sigma$ は前定理で定義したものとする。

$$T_\mu=SW_\mu S^{-1},\ B_\mu=SA_\mu S^{-1}\ とおく。B_1=B$$

$$SA_{\mu+1}S^{-1}=SA_\mu S^{-1}SAS^{-1}+SW_\mu S^{-1}$$

よって，
$$B_{\mu+1}=B_\mu B+T_\mu \tag{5.5}$$

一方，$\mathrm{lub}\,(T_\mu)\leqq\mathrm{lub}(S)\,\mathrm{lub}(S^{-1})\,\mathrm{lub}(W_\mu)$ から，仮定より

$$\mathrm{lub}\,(T_\mu)\leqq\sigma\eta_2\,\mathrm{lub}\,(A_\mu) \tag{5.6}$$

ところで，$A_\mu=S^{-1}B_\mu S$ であるから

$$\mathrm{lub}\,(A_\mu)\leqq\sigma\,\mathrm{lub}\,(B_\mu) \tag{5.7}$$

また，$\mathrm{lub}\,(B)=s$ と (5.5), (5.6), (5.7) より

$$\begin{aligned}\mathrm{lub}\,(B_{\mu+1})&\leqq s\,\mathrm{lub}(B_\mu)+\sigma^2\eta_2\,\mathrm{lub}\,(B_\mu)\\&=\mathrm{lub}\,(B_\mu)\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)\\&<(\lambda_A+\varepsilon)\,\mathrm{lub}\,(B_\mu)\\&<(\lambda_A+\varepsilon)\,\mathrm{lub}\,(B_1)\quad\to 0,\ \mu\to\infty\end{aligned}$$

仮定 (5.2), (5.7) より (5.4) の成立することがわかる。**終**

（3） 微分方程式の近似解の収束性を次の定理によって考える。

T 6 「バナッハ空間 X からバナッハ空間 Y への線型有界作用素列 $\{A_n\}$ があって，任意の X の元 x に対し $\{A_n x\}$ が収束するための必要十分条件は

（i） $\{\|A_n\|\}$ が有界で

（ii） X で稠密な集合 Z に属する各 x に対し $\{A_n x\}$ が収束する。

ことである。」

証明　十分性。X の任意の元を x とする。勝手な数 $\varepsilon>0$ に対し，ある $x'\in Z$ があって

$$\|x-x'\|<\varepsilon$$

また，条件から，ある自然数 N より大きいすべての m, n について

$$\|A_nx'-A_mx'\|<\varepsilon$$

よって $\|A_nx-A_mx\| \leqq \|A_nx-A_nx'\|+\|A_nx'-A_mx'\|+\|A_mx'-A_mx\|$

$$\leqq \|A_n\|\varepsilon+\varepsilon+\|A_m\|\varepsilon$$

これから，$\{A_nx\}$ は，空間 Y の基本列であり，ある元に収束する。その元を Ax とおくと，A は，

$$A(\alpha x+\beta y)= \lim A_n(\alpha x+\beta y)$$
$$=\alpha \lim A_nx+\beta \lim A_ny=\alpha Ax+\beta Ay$$

より，線型作用素である。

また，条件（i）より

$$\|A_nx\| \leqq \|A_n\| \|x\|$$

において $n\to\infty$ とすれば，ノルムの連続性より

$$\|Ax\| \leqq \lim\ \sup \|A_n\|\ \|x\|$$

よって作用素 A は有界でもある。

必要性。仮定から（i）の成立することは当然である。（ii）の必要なことの証明は省略する（**付録** 8 参照）。**終**

任意の X の元 x について $\{A_nx\}$ が収束するというかわりに，ノルムの斉次性から，$\varepsilon>0$ を勝手な数として任意の X の $\|x\|<\varepsilon$ なる元 x について収束するといっても同じであることに注意する。また，（ii）の集合 Z は，その線型集合が X で稠密であるような集合としてもよい。

1階常微分方程式の初期値問題

$$y'=f(x, y),\ 初期値:\ y(0) \tag{5.8}$$

の歩一歩数値積分法（step–by–step method）について考える。積分公式：

$$\alpha_k y_{n+k}+\alpha_{k-1}y_{n+k-1}+\cdots\cdots+\alpha_0 y_n=h\{\beta_k f_{n+k}+\beta_{k-1}f_{n+k-1}+\cdots\cdots+\beta_0 f_n\} \quad n=0, 1, 2\cdots\cdots \tag{5.9}$$

ただし，$\alpha k \neq 0$, $|\alpha_0|+|\beta_0|>0$, h は積分間隔，y_i は $x=ih$ に対する $y(x)$ の計算値，$f_i=f(ih, y_i)$。$y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots\cdots y_1, (y_0)$ は出発値で，あらかじめ別の方法によって計算しておく。$\beta_k \neq 0$ のとき (5.9) は closed type，$\beta_k=0$ のとき open type とよぶ。closed type のときは，f_{n+k} は未知の値 y_{n+k} を含むので y_{n+k} の計算は反復法等による。

x を任意に固定し，議論を簡明にするために，$x=nh$ なるように間隔 h をとり，整数 $n\to\infty$ としたとき $y_n\to y(x)$ となるとき，**近似解法は収束する**という。ただし，$y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots\cdots, y_0$ は $n\to\infty$ のときすべて $\to y(0)$ とするが，その近づき方はすべて任意とする。また，収束は，十分多くの適当な問題 (5.8) について考えるとする。

いま，線型常微分方程式

$$y'=f(x)y+g(x) \tag{5.10}$$

の場合について，(5.9) を次のように書く。

$$Y_{n+1}=A_n Y_n+Z_n,\quad n=0,1,2,\cdots\cdot \tag{5.11}$$

ただし，$a_i=\dfrac{-\alpha_{k-i}+h\beta_{k-i}f(x_{n+k-i})}{\alpha_k-h\beta_k f(x_{n+k})}$　として

$$Y_{n+1}=\begin{pmatrix} y_{n+k} \\ y_{n+k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}\quad A_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdot & a_k \\ 1 & 0 & \cdots\cdot & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \cdots\cdot & \cdot\cdot & \\ 0 & & 0\ 1 & 0 \end{pmatrix}\quad Z_n=\begin{pmatrix} h\sum_{i=0}^{k}\beta_i g(x_{n+i}) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

T 7 「(5.11) が収束するためには，λ に関する代数方程式：

$$\alpha_k\lambda^k+\alpha_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots\cdot+\alpha_0=0 \tag{5.12}$$

の根が，すべて絶対値が1より大きくなく，また1であるような根は単根であることが必要である。」

この条件を**安定条件** (stability condition) という (**付録 9** 参照)。

証明　(5.10) で特別な方程式：

$$y'=0,\quad y(0)=0$$

の場合，(5.11) の A_n は

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} & -\dfrac{\alpha_{k-2}}{\alpha_k} & \cdots\cdot & -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_k} \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \cdots\cdot & \\ 0 & & \cdots\cdot & \end{pmatrix}$$

で一定。よってこれを A と書くと，近似解法 (5.11) が収束するためには，「**T 7**」より A^n が n について一様に有界でなければならない。「**T 10**」で示すように，そのためには A の固有値の絶対値がすべて1より小さいか，1に等しいのがあっても固有行列の対応する Jordan 細胞の次数が1であることが，必要にして十分である。固有方程式 $\det(A-\lambda I)=0$ を書きおろしたのが (5.12) である。より正確には，A は (5.12) の多項式 $f(\lambda)$ に随伴する行列であり，固有行列：$A-\lambda I$ の単因子は $f(\lambda)$ と他はすべて1である。このことから定理の成立がわかる。**終**

安定条件は，次の consistency condition とともに収束条件をなし，それぞれ「**T 6**」の (i), (ii) に相当するような意味を持っている。また，h を固定し，n を大に，すなわち近似積分を先に進めたとき途中の丸め誤差が集積しないための条件も，上の安定条件と密接な関係がある。consistency condition は，(5.9) の式が，局所的に，確かに近似式であることを保証する条件ともみなしうる。

T 8 「(5.11) が収束するためには，次の **consistency condition** を満たさなければならない。

$$\alpha_k+\alpha_{k-1}+\cdots\cdot+\alpha_0=0 \tag{5.13}$$

$$k\alpha_k+(k-1)\alpha_{k-1}+\cdots\cdots+\alpha_1=\beta_k+\beta_{k-1}+\cdots\cdots+\beta_0 \tag{5.14}$$」

証明 微分方程式:

$$y'=0,\quad y(0)=1$$

に, (5.11) すなわち (5.9) を用いると

$$\alpha_k y_{n+k}+\alpha_{k-1}y_{n+k-1}+\cdots\cdots+\alpha_0 y_n=0$$

出発値を1として $h\to 0$ としたとき, $y_n\to 1$ ところが, 上の計算において y_n は h によらず, よって $n\to\infty$ として (5.13) を得る。

同じ論法で, $y'=1$, $y(0)=0$ について考える。このとき (5.9) は

$$\alpha_k y_{n+k}+\alpha_{k-1}y_{n+k-1}+\cdots\cdots+\alpha_0 y_n=h(\beta_k+\beta_{k-1}+\cdots\cdots++\beta_0) \tag{5.15}$$

仮定は, $h\to 0$ のとき

$$y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots\cdots, y_0\to 0,\quad y_n\to x$$

「**T 7**」から (5.12) 左辺の $\lambda=1$ での微係数 $k\alpha_k+(k-1)\alpha_{k-1}+\cdots\cdots+\alpha_1=k$ は 0 にならないことに注意して,

$$y_n=\frac{nh}{k}(\beta_k+\beta_{k-1}+\cdots\cdots+\beta_0)$$

は, (5.15) を満足することが確かめられる。すなわちこれが (5.15) の解である。

$$x=\lim_{n\to\infty} y_n=x(\beta_k+\beta_{k-1}+\cdots\cdots+\beta_0)/k$$

ゆえに $(\beta_k+\beta_{k-1}+\cdots\cdots+\beta_0)/k=1$ これは (5.14) である。**終**

収束性をある特定の微分方程式について考えれば, 一般的な収束条件よりもよりゆるい条件が得られることが期待される。それを (5.10) で $y'=cy$ (c は常数) の場合の有界条件でみる。

(5.11) の A_n は h と c によって変るからこれを $A(h,c)$ と書くと, 有界条件は

$$A^n(h,c),\quad nh=x$$

が n について一様に有界であること, となる。A^n が有界のとき

$$\lambda_A{}^n \leqq \|A^n(h,c)\|$$

より

$$\lambda_A \leqq 1+0(h) \tag{5.16}$$

逆に, 近似差分作用素 $A(h,c)$ が有界条件を満たすことを示すには, (5.16) がなりたち, $\|A^n(h,c)\|/\lambda_A{}^n$ が一様に有界であることを証明すれば十分である。後の一様有界性は A が正規であればなりたつ。また, A の絶対値最大の固有値が固有行列の次数1の単純単因子の根で, $h\to 0$ のときもそうでないような根に収束することがなければ成立する[11]。

T 9 「Consistency condition (5.13), (5.14) と「**T 7**」の安定条件とを満たす (5.9) による数値積分は十分多くの問題について収束する。」

十分多くのとは, たとえば, $f(x,y)$ が $a\leqq x\leqq b$, $-\infty<y<\infty$ で連続で, この区間で, Lipschitz

条件:

$$|f(x,y)-f(x,y')| \leqq L|y-y'|$$

を満たすような問題 (5.8) についてならよい。

証明は省略する。

特に, $\alpha_k=\alpha_0=1$, $\alpha_{k-1}=\alpha_{k-2}=\cdots\cdots=\alpha_1=0$ の場合は Newton-Cotes 型数値積分公式に相当するが, この場合 (5.12) 式は

$$\lambda^k+1=0$$

となり, この根は絶対値が1ですべて単根であるから, 安定条件は満足される。

（4） 行列のノルム $\|A\|_\infty=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ について, 次の定理を証明する。有限次元ノルムはすべて比較可能であったから「**1.3** (5)」, この結果によってまだ証明の不完全であった定理:「**3. T 1, 5. T 1, T 7**」はすべて解決されることになる。

T 9 「A の固有行列の単純単因子を

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ \cdots\cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

とする。ただし

$$\lambda_A=|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots\cdots=|\lambda_r|>|\lambda_{r+1}|\geqq\cdots\cdots\geqq|\lambda_k|$$

$$m_1=\cdots\cdots=m_s>m_{s+1}\geqq\cdots\cdots\geqq m_r$$

そのとき, ベキに無関係な正の定数 p_1, p_2 があって

$$p_1<\frac{\|A^n\|_\infty}{n^{m_1-1}\lambda_A{}^n}<p_2$$

がなりたつ。」[20]

証明 A の Jordan 分解を

$$SAS^{-1}=(\lambda_1I_{m_1}+U_{m_1})\dot{+}(\lambda_2I_{m_2}+U_{m_2})\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}(\lambda_kI_{m_k}+U_{m_k})$$

$$I_{m_i}=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1\end{pmatrix},\quad U_{m_i}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix},\quad m_i\times m_i$$

とおく[15]。

$$(\lambda_iI_{m_i}+U_{m_i})^n=\lambda_i^n\left\{I_{m_i}+\binom{n}{1}\lambda_i^{-1}U_{m_i}+\binom{n}{2}\lambda_i^{-2}U_{m_i}{}^2+\cdots\cdots+\binom{n}{m_i-1}\lambda_i^{-m_i+1}U_{m_i}^{m_i-1}\right\}$$

よって, n を十分大きくとれば

$$\|(\lambda_iI_{m_i}+U_{m_i})^n\|_\infty=\binom{n}{m_i-1}|\lambda_i|^{n-m_i+1}$$

これから, n 大なるとき

$$\|(SAS^{-1})^n\|_\infty=\|SA^nS^{-1}\|_\infty=\binom{n}{m_1-1}\lambda_A{}^{n-m_1+1}$$

multiplicative norm については

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(S)}\|SA^nS^{-1}\| \leqq \|A^n\| \leqq \mathrm{cond}\,(S)\|SA^nS^{-1}\|$$

よって $\|SA^nS^{-1}\|_\infty$ の評価式は $\|A^n\|_\infty$ の評価式でもあり，上の式から定理の成立することがわかる。**終**

（**5**）　1変数の方程式：$f(x)=0$ の実根を計算するのに，反復式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=1,2,3\cdots\cdots$$

による方法が Newton method である。たとえば，$1/x-a=0$ については，反復式は $x_{n+1}=x_n\ (2-ax_n)$「**1.1** (5) **例 3**」根に十分近い値 x_1 を出発値とし，それらを含む領域で $f(x)$

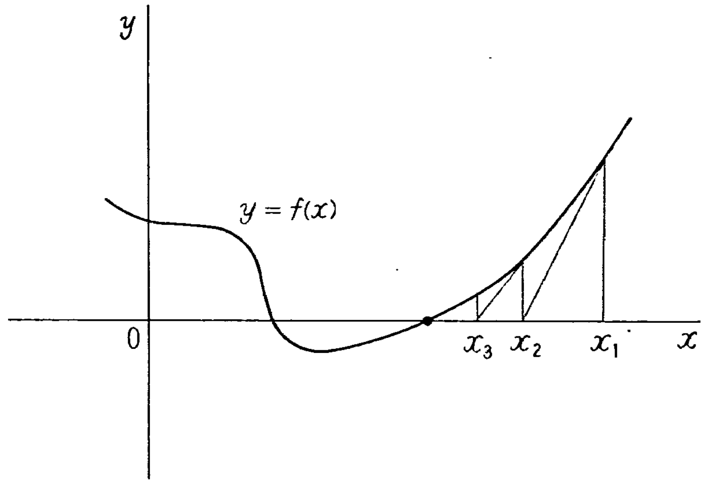

図 2

と $f''(x)$ が同じ一定の符号を持てば，解法は収束する。また，x_1 と根を含む近傍内の x について $|f''(x)(x_1-x)/f'(x_1)|<1$ であってもよい。

この方法を連立の方程式に適用した場合について以下に考える。そのために多変数の場合の Taylor 展開について説明しておく[28)]。

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n) \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n) \end{cases} \tag{5.17}$$

これを $y=F(x)$ と書く。F は l^n から l^n への（非線型）作用素である。f_i の微分可能性は適当に仮定しておく。$F(x)$ の z を中心とする Taylor 展開を2次の項まで記すと

$$F(x)=F(z)+\frac{1}{1!}\,F'(z)(x-z)+R_2(x,z)$$

ただし任意の $e\in l^n$ について，内積

$$(R_2(x,z),e)=\left(\frac{1}{2!}F''(z+\theta_e(x-z))(x-z)^2,e\right)\quad 0<\theta_e<1 \tag{5.18}$$

$$F'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$F''(x)y^2 \in l^n$ の i 番めの要素は

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}y_j y_k$$

である。

(5.18) で $F(x)=0$, $R_2(x,z)=0$ とおいて変形すると

$$x=z-(F'(z))^{-1}F(z)$$

$(F'(z))^{-1}$ は，$n\times n$ 行列 $F'(z)$ の逆行列である。反復法：

$$x_{n+1}=x_n-(F'(x_n))^{-1}F(x_n),\quad n=1,2,\cdots \tag{5.19}$$

が Newton method である。

x_0 を $F(x)=0$ の一つの実根とすると

$$0=F(x_n)+F'(x_n)(x_0-x_n)+R_2(x_0,x_n)$$

$$0=(F'(x_n))^{-1}F(x_n)+(x_0-x_n)+(F'(x_n))^{-1}R_2(x_0,x_n)$$

ゆえに (5.19) より

$$x_{n+1}-x_0=F'(x_n)^{-1}R_2(x_0,x_n) \tag{5.20}$$

また，ベクトル x_n-x_0 の l_2 ノルムは

$$\begin{aligned}\|x_n-x_0\|_2{}^2&=\|-(F'(x_n))^{-1}F(x_n)-(F'(x_n))^{-1}R_2(x_0,x_n)\|^2\\ &=\|(F'(x_n))^{-1}F(x_n)\|^2+\|(F'(x_n))^{-1}R_2(x_0,x_n)\|^2\\ &\quad+2((F'(x_n))^{-1}F(x_n),(F'(x_n))^{-1}R_2(x_0,x_n))\end{aligned}$$

最後の式の第２項は $\|x_{n+1}-x_0\|^2$ であるから，

$$\|x_n-x_0\|^2>\|x_{n-1}-x_0\|^2$$

は次のように書かれる。

$$\|(F'(x_n))^{-1}F(x_n)\|^2+2((F'(x_n))^{-1}F(x_n),(F'(x_n))^{-1}R_2(x_0,x_n))>0 \tag{5.21}$$

これから次のことが結論される。

T 10 「(5.21) が $F(x)=0$ の実根 x_0 の近くの点 x_n について常になりたつとき，その近傍内のベクトルを出発点にとれば，反復法 (5.19) による x_n は x_0 に収束する。」

さきの (5.20) にもどる。

$$\|x_{n+1}-x_0\|_p = \max_{\|e\|_q=1} (F'(x_n)^{-1}R_2(x_0, x_n), e)$$

(5.18) より
$$= \max_{\|e\|_q=1} \left(\frac{1}{2} F'(x_n)^{-1}F''(x_n+\theta e(x_0-x_n))\ (x_0-x_n)^2,\ e)\right)$$

Hölder の不等式から

$$\leqq \sup_{0<\theta<1} \frac{1}{2} \|F'(x_n)^{-1}F''(x_n+\theta(x_0-x_n))(x_0-x_n)^2\|_p$$

「**5. T 8**」より

$$\leqq \sup_{0<\theta<1} \frac{1}{2} \|F'(x_n)^{-1}\|_p\|F''(x_n+\theta(x_0-x_n))\ (x_0-x_n)^2\|_q$$

2番めの因子ベクトルの i 番めの要素:

$$\left((x_0-x_n)_j,\ \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)(x_0-x_n)_k\right)$$

に Hölder の不等式と「**5. T 8**」を使い

$$\leqq \frac{1}{2} \|(F'(x_n))^{-1}\|_p \left(\sup_{\substack{x=x_n+\theta(x_0-x_n)\\0<\theta<1}} \left(\sum_{i,j,k}\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right|^q\right)^{1/q}\right) \|x_n-x_0\|_p{}^2 = M\|x_n-x_0\|_p{}^2$$

T 11 「上の式中の M が根 x_0 の近くの x_n について常に1より小のとき，そのような近傍内で出発点 x_1 を $\|x_1-x_0\|\leqq 1$ なるようにとれば，(5.19) による反復計算は収束する。」

解の存在を仮定して，実際はわからない根 x_0 を用いて収束性を考えたが，定理の係数 M に相当する値に対する条件をもっときつくして，収束性のほかに，解の存在も自然に出るようにすることができる[22]。Ostrowski 文献 22) pp. 29-34, 9) p. 144.

6. 行列の条件数と線型計算

連立一次方程式:

$$Ax = y \tag{6.1}$$

において，解 x が，係数行列 A の変化，常数項 y の変動に対し，比較的大きく変わる場合，問題は **ill-condition** であるという。ill-condition の方程式の解を正確に求めるのはそうでない場合に比べて容易でない。ある意味でその度合を示すのが，A の condition number: cond(A)=lub(A) lub(A^{-1}) である。その理由を (1) で説明する。実際の数値実験例について確かめた結果を次に紹介する。(4) では，計算するのに簡単な変換によって，A の condition がどれだけ改良され得るか考える。

(1) condition number の重要性は，任意の x, y に対し，次の不等式を成立させる最良の係数であるところにある。

$$\frac{1}{\text{cond}\,(A)}\ \frac{\|x\|}{\|y\|} \leqq \frac{\|Ax\|}{\|Ay\|} \leqq \text{cond}\,(A)\ \frac{\|x\|}{\|y\|}$$

これから，(6.1) の近似解 $\tilde{x}$ の相対誤差 (error) $\|A^{-1}y-\tilde{x}\|/\|A^{-1}y\|$ と相対残差 (residual) $\|y-A\tilde{x}\|/\|y\|$ との間には，次の関係式がなりたつ

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\,(A)}\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}\leqq\frac{\|A(x-\tilde{x})\|}{\|Ax\|}=\frac{\|y-A\tilde{x}\|}{\|y\|}\quad \text{より}$$

$$\frac{\|A^{-1}y-\tilde{x}\|}{\|A^{-1}y\|}\leqq \mathrm{cond}\,(A)\,\frac{\|y-A\tilde{x}\|}{\|y\|}$$

この式から，(6.1) は cond (A) の値が大きいほど，ill-condition であるといえる。また cond (A) は係数行列 A の変動に対する解の変動の割合を示すことが，次の式からわかる。

$A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}(B-A)B^{-1}$ より

$$\frac{\mathrm{lub}\,(A^{-1}-B^{-1})}{\mathrm{lub}\,(B^{-1})}\leqq \mathrm{cond}\,(A)\,\frac{\mathrm{lub}\,(B-A)}{\mathrm{lub}\,(A)}$$

A^*A は正値対称行列であり，(4.17) が適用できて，A^*A の p−condition number p について

$$p<\frac{4}{\det\,(A^*A)}\left(\frac{\mathrm{tr}\,A^*A}{n}\right)^n-2$$

A^*A の固有値を $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\cdots\geqq\lambda_n$ として，l_2 従属ノルムで考えると「**3.** (3)」

$$\lambda_1=\mathrm{lub}(A^*A)=\mathrm{lub}^2(A),\quad \lambda_n=\mathrm{lub}(A^{-1}A^{*-1})=\mathrm{lub}^2(A^{-1})$$

ゆえに　　$p^{1/2}=\mathrm{cond}\,(A)$

次に A の行ベクトルを各要素の2乗和が1になるように正規化すると，tr $(A^*A)=n$ よって，$\det(A^*A)=(\det(A))^2$ より

$$\mathrm{cond}\,(A)<\frac{2}{|\det(A)|}$$

これから，行ベクトルを正規化したときの行列式の値が小さいほど，condition は悪い。

（2） 次のような型の，未知数三つを含む方程式を連立した問題を，消去法によって，電子計算機により系統的に計算した結果が発表されている[17),19)]。

$$\begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & \ddots & & \\ & & a & b & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \\ \vdots \\ a+b \end{pmatrix}$$

$x_i=1,\ i=1,2,\cdots\cdots,n$ はこの方程式の解になっている。上の係数行列 A の condition number を直接求めるのはむずかしいので，p-condition number $p(A)$ によって A の condition をみることにする。一般に $p(A)\leqq \mathrm{cond}\,(A)$ で，等号の成立は，A が考えているノルムについて正規な場合に限る。A が正規性から遠ざかるほど，実際の cond(A) は $p(A)$ より大きいと考えられる。

T 1 「$a,b,c>0$ のとき，A の固有値は

$$\lambda_i = b - 2\sqrt{ac}\ \cos\frac{i\pi}{n+1},\ i=1, 2, \cdots, n$$

対応する固有ベクトルは

$$n_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}),\ x_k^{(i)} = \left(-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^{k-1} \sin\frac{ki\pi}{n+1}\qquad 」$$

(付録 10)

$|\lambda_i|$ の小さい値に着目すれば，$b-2\sqrt{ac}$ が正でなく，次数 n が大きくなればなるほど，$p(A)$ の値は大きい。

$n=50$, $a=3$, $b=3+m$, $c=3+2m$ で，$m=1\sim30$ について実験した結果によれば，$m=19$ までは，1回の消去法による計算結果の誤差が非常に大きく，20 で急に小さくなっている。このとき $b-2\sqrt{ac}=0$ となる m の値を求めてみると，19.0‥‥ であり，$m=19$ は ill-codition の境界であることがわかる。

また，$a=3$, $b=4$, $c=5$ について $n=5\sim200$ のときの実験結果では，n が 51，106，109，124，164 のとき誤差が大きい。これらは，すべて，固有値 λ_i の中に非常に 0 に近いのがある場合であることが，次の計算によってわかる。

$$4-\sqrt{3\times5}\cos\frac{i\pi}{n+1}=0$$

を i について解いて

$$i=\frac{n+1}{\pi}\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{15}} \fallingdotseq 0.327272(n+1)$$

これを上の n について計算してみると，いずれも整数値に近い値になっている。すなわち

51	17.0181
106	35.0181
109	35.9999
124	40.9090
164	53.9999

(3)　係数行列 A の連立一次方程式の各方程式を常数倍することは，それら常数からなる対角行列 D_1 を左から乗じた D_1A を係数行列とする方程式に変えることであり，根相互の比を変える変換をほどこすことは，ある対角行列 D_2 によって方程式の係数行列を AD_2 とすることである。どちらも簡単な操作であり，これによって，行列の性質をいくらかでもよくできないかという疑問が生ずる。その答の一つを次の問について与える。すなわち

$$\inf_{D_1, D_2} \mathrm{cond}\,(D_1AD_2)$$

の値と，それを実現するための D_1, D_2 を求めること。この節では，そのために必要な補助定理と関連事項とをいくつかのべる。そして次節 (4) の結果によれば，A, A^{-1} がともに正行列の場合に

は，Hölder norm について常に上の値が1なるように変換できることがわかる[5)]。

以下，記号 * は，対応する共役空間の元か共役作用素を表わすのに用いることにする。「**2.** (**4**), **3.** (**8**)」では，行ベクトル，列ベクトル，転置行列，dual norm 等の用語に従ったが，そこでの議論から今回の移項の意義が推測されるよう (**2. T 14, T 15, 3. T 19** 参照)。なお $(x, y^*)=y^*(x)$

T 2 「二つの正ベクトル $u>0$ と $v^*>0$ が与えられているとき，

$$D^{-1}u, \quad D^*v^*$$

が Hölder norm に関し dual なるような正対角行列 D がある。」[29)]

証明
$$\|x\|_p=\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1\leqq p\leqq\infty$$

$x=(x_i)$，$y=(y_i)>0$ が上のノルムで dual であるとは，

$$(x_i{}^p)=(y_i{}^q), \quad 1/p+1/q=1$$

ただし $p=1$ のときは，$y_i=1$，$i=1, 2, \cdots, n$ を意味すると考える。よって

$$D=\mathrm{diag}\,(u_i{}^{1/q}/v_i{}^{1/p})$$

とおけば，$D^{-1}u$，D^*v^* は dual pair になる。**終**

T 3 「Hölder norm に関して (ただし $1<p<\infty$) $x\geqq0$ の dual を x^D，$y^*\geqq0$ の dual を $(y^*)^D$ とする。次の方程式：

$$\begin{aligned} Bx&=(y^*)^D \\ B^*y^*&=x^D \end{aligned} \tag{6.2}$$

は，$B>0$ として，常数倍を無視すれば，一意な解をもち，その解について

$$\frac{(Bx, y^*)}{\|x\|\|y^*\|}=\mathrm{lub}\,(B)$$

が成立する。」[29)]

証明

$$\mathrm{lub}\,(B)=\frac{|(Bx, y^*)|}{\|x\|\|y^*\|}=\frac{\|Bx\|}{\|x\|}=\frac{\|B^*y^*\|}{\|y^*\|}$$

なる x, y^* は

$$|(Bx, y^*)|=\|Bx\|\|y^*\|$$
$$|(B^*y^*, x)|=\|x\|\|B^*y^*\|$$

を満たす。x, y は $|x|, |y|$ でおきかえてもよいから，(6.2) の解は確かに存在する。次に一意性の証明。$x=(x_i)$，$x^D=(x_i')$ の関係は，ある常数 $\rho>0$ があってすべての i について

$$x_i{}^p=\rho x_i'^q$$

なることである。これを $x^p=\rho(x^D)^q$ と書く。よって方程式は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} Bx&=\alpha y^{q/p} \\ B^*y&=\beta x^{p/q} \end{aligned} \tag{6.3}$$

(y は本来 y^* と書くべきもの。) $B>0$ より，x, y の各要素は正である。α, β もまた正であるから，適当に常数倍することによって，

$$Bx = \lambda y^{q/p}$$
$$B^* y = x^{p/q}, \quad \lambda > 0 \tag{6.4}$$

とおける。さらに，x, y は $\bar{x} = \rho^q x$, $\bar{y} = \rho^p y$, $\rho > 0$ としても (6.4) は変わらず，λ は ρ に依存しないことから，二つの解 $x>0$, $y>0$, $\lambda>0$, $\bar{x}>0$, $\bar{y}>0$, $\bar{\lambda}>0$ は，次の条件を満足するようにとれる。

$$\lambda \leqq \bar{\lambda}$$
$$z = \lambda y^{q/p} - \bar{\lambda} \bar{y}^{q/p} \geqq 0, \text{ ある } i \text{ について } z_i = 0 \tag{6.5}$$

$y^{q/p} - \bar{y}^{q/p} \geqq 0$ より $0 \leqq y - \bar{y}$, また (6.4) より

$$0 \leqq (B^* y)^{q/p} - (B^* \bar{y})^{q/p} = x - \bar{x}$$

ところが $B>0$ であったから，$B(x-\bar{x}) = z > 0$ かまたは $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$。しかし (6.5) から前の場合は起こり得ず，一意性が証明された。**終**

これらの定理を用いて以前の結果と関連した定理を二つ証明する。

T 4 「$A>0$ の右ペロン・ベクトル u, 左ペロン・ベクトル v^* が Hölder norm について dual であれば

$$\mathrm{lub}\,(A) = \lambda_A \text{」}$$

これは，Hölder norm について「**3. T 10**」の逆になっている。

証明　仮定より

$$\frac{|(Au, v^*)|}{\|u\| \|v^*\|} = \frac{\lambda_A |(u, v^*)|}{\|u\| \|v^*\|} = \lambda_A$$

よって

$$Au = \lambda_A u = (v^*)^D$$
$$A^* v^* = \lambda_A v^* = u^D$$

$1 < p < \infty$ とする。u, v^* は (6.2) で $B = A$ としたときの解であり，「**T 3**」からその解は一意で，しかも

$$\max_{n, v^* \neq 0} \frac{|(Au, v^*)|}{\|u\| \|v^*\|} = \mathrm{lub}\,(A) = \frac{(Au, v^*)}{\|u\| \|v^*\|}$$

を満たしたから

$$\mathrm{lub}(A) = \lambda_A$$

次に $p = \infty$ とする。dual pair をなす l_∞^n のベクトルは $e = (1, 1, \cdots, 1)$ であるから，これがペロン・ベクトルであるとすると，A の行和はすべて等しくなり

$$\mathrm{lub}\,(A) = \max_i \sum_j a_{ij} = \pi(A)$$

$p=1$ のときは，$\mathrm{lub}(A)=\mathrm{lub}(A^*)_*$ よりわかる。終

T 5 「Hölder norm に従属な行列ノルムについて，$A>0$ とすると

$$\lambda_A=\min_{D>0}\mathrm{lub}(D^{-1}AD)」$$

証明 A の右，左ペロン・ベクトルをそれぞれ u, v^* とすると，「**T 2**」よりある $D_0>0$ があって

$$D_0^{-1}u,\ D_0{}^*v^*$$

が dual なるようにできる。$D_0^{-1}u$, $D_0{}^*v^*$ は $D_0^{-1}AD_0$ の右，左ペロンベクトルでもある。よって「**T 4**」より

$$\mathrm{lub}(D_0^{-1}AD_0)=\lambda_A。終\ (3.\ \mathbf{T\ 4}\ 参照)$$

（4） 最初に次の主定理を証明する。考えるノルムは Hölder norm とする。

T 6 「$B>0$, $C>0$ とすると

$$\min_{D_1,D_2}\{\mathrm{lub}(D_1BD_2)\,\mathrm{lub}(D_2^{-1}CD_1^{-1})\}=\pi(BC)」$$

証明 $B>0$, $C>0$ より $BC>0$, $CB>0$

$$\pi(BC)=\pi(D_1BCD_1^{-1})\leqq\mathrm{lub}(D_1BD_2D_2^{-1}CD_1^{-1})$$

$$\leqq\mathrm{lub}(D_1BD_2)\,\mathrm{lub}(D_2^{-1}CD_1^{-1})$$

以下この式で等号の成立する D_1, D_2 のあることを示す。

$y_1{}^*>0$, $x_1>0$ を BC の左，右ペロンベクトルとする。($y_1{}^*$ は $(BC)^*$ のペロンベクトルといってもよい)

$$(BC)^*y_1{}^*=\pi y_1{}^*,\quad BCx_1=\pi x_1,\quad \pi=\pi(BC)>0$$

$x_2=Cx_1$ とおく。$x_2>0$, $Bx_2=\pi x_1$

$\pi y_2{}^*=B^*y_1{}^*$ とおく。$y_2{}^*>0$, $C^*y_2{}^*=y_1{}^*$

また，「**T 2**」よりある $D_1>0$ があって

$$\bar{y}_1=D_1^{-1*}y_1{}^*\ と\ \bar{x}_1=D_1x_1\ は\ \mathrm{dual}$$

同じく，$D_2>0$ があって

$$\bar{y}_2{}^*=D_2{}^*y_2{}^*\ と\ \bar{x}_2=D_2^{-1}x_2\ は\ \mathrm{dual}$$

よって

$$D_1BD_2\bar{x}_2=\pi\bar{x}_1$$

$$(D_1BD_2)^*\bar{y}_1{}^*=\pi\bar{y}_2{}^*$$

同じく

$$D_2^{-1}CD_1^{-1}\bar{x}_1=\bar{x}_2$$

$$(D_2^{-1}CD_1^{-1})^*\bar{y}_2{}^*=\bar{y}_1{}^*$$

よって「**T 3**」より，この D_1, D_2 について

$$\mathrm{lub}(D_1BD_2)=\pi\qquad\mathrm{lub}(D_2^{-1}CD_1^{-1})=1$$

最後の「**T 3**」によった演繹は $p=1,\infty$ の場合にもなりたつ（**T 4** の証明参照）。終

T 7「$|E_1|=|E_2|=I$ なら

$$\mathrm{lub}\,(E_1GE_2)=\mathrm{lub}\,(G)」$$

証明 $\mathrm{lub}\,(E_1GE_2)\leqq \mathrm{lub}(E_1)\mathrm{lub}(G)\mathrm{lub}(E_2)=\mathrm{lub}(G)$

$\mathrm{lub}(G)\leqq \mathrm{lub}(E_1{}^{-1})\,\mathrm{lub}(E_1GE_2)\,\mathrm{lub}(E_2{}^{-1})=\mathrm{lub}(E_1GE_2)$ **終**

T 8 「$\mathrm{lub}(G)\leqq \mathrm{lub}\,(|G|)$ 」

証明 ある x があって，ノルムが monotonic であることから

$$\begin{aligned}\mathrm{lub}(G)\|x\|=\|Gx\|=\||Gx|\|&\leqq\||G||x|\|\\ &\leqq\mathrm{lub}(|G|)\||x|\|\\ &=\mathrm{lub}(|G|)\|x\|\end{aligned}$$ **終**

「**T 7**」より

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(D_1AD_2)&=\mathrm{lub}(D_1AD_2)\mathrm{lub}(D_1{}^{-1}A^{-1}D_2{}^{-1})\\ &=\mathrm{lub}(|D_1|A|D_2|)\mathrm{lub}(|D_1{}^{-1}|A^{-1}|D_2{}^{-1}|)\end{aligned}$$

よって $D_1>0$, $D_2>0$ と仮定してよい。

「**T 8**」より

$$\mathrm{cond}(D_1AD_2)\leqq \mathrm{lub}(D_1|A|D_2)\mathrm{lub}(D_2{}^{-1}|A^{-1}|D_1{}^{-1}) \tag{6.6}$$

以上のことから，

T 9 「$\min\limits_{D_1,D_2}\mathrm{cond}(D_1AD_2)\leqq\pi(|A||A^{-1}|)$ 」

$p=1,\infty$ のときは，(6.6) が等号で成立するから，「**T 9**」が等号で成立する。

T 10 「l_∞ ノルムに従属する行列ノルムについて

$$\min_{D_1,D_2}\mathrm{cond}\,(D_1AD_2)=\pi(|A||A^{-1}|)」$$

左辺の最小値は，,「**T 6**」の証明から，次の D_1, D_2 によって達せられることがわかる。

$e^T=(1,1,\cdots\cdot,1)$ として

$D_1{}^{-1}e$ は $|A||A^{-1}|$ の右ペロンベクトル，$|A|D_2e=\lambda D_1{}^{-1}e$

D_2e は $|A^{-1}||A|$ の右ペロンベクトル，$|A^{-1}|D_1{}^{-1}e=D_2e$

このとき，$D_1|A|D_2\,e=\pi e$, $D_2{}^{-1}|A^{-1}|D_1{}^{-1}e=e$ より，それぞれ $|D_1AD_2|$ と $|D_2{}^{-1}A^{-1}D_1{}^{-1}|$ の各行和は等しい。

7. 射影計算法（Projection methods）

最初に代数的な一つの関係式を示す。これを中心にして考えると (2) から (5) にわたって説明する各種数値解法がせん明に理解されよう。(3) では，対称行列の場合の Gauss-Seidel method の収束性を誤差の単調性を利用して証明する。(1) で話題にした最良近似解の一意存在の問題などとともに数値解析上でも広い研究分野に属することで，この機会にその表面の一部にふれておこうと

いう意図からである。その他は解法の紹介が主で詳しい議論は省略した。

（1） 実ヒルベルト空間 H から H への自己共役作用素を A, A の値域に属する元を g, f_i とすると，次の式が成立する。（A が定義域が H で稠密な対称作用素で，そのうえ有界のとき，より一般的に閉包を持つとき，常に A は自己共役作用素に拡張できる。また，値域が H 全体であるような対称作用素は必然的に自己共役である。）

$$
\begin{aligned}
&(A(g-aY^T),\ (g-aY^T))\\
&\quad=(Ag,g)-(Ag,Y)(AY^TY)^{-1}(Ag,Y)^T\\
&\quad+(a-(Ag,Y)(AY^TY)^{-1})(AY^TY)(a-(Ag,Y)(AY^TY)^{-1})^T
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

ただし記号は，

$$a=(a_1,a_2,\cdots\cdot,a_n)$$

$$Y=(f_1,f_2,\cdots\cdot,f_n)$$

$$aY^T=\sum_{i=1}^{n}a_if_i$$

$$(Ag,Y)=((Ag,f_1),\ (Ag,f_2),\cdots\cdot,(Ag,f_n))$$

$$(AY^TY)=\begin{pmatrix}(Af_1,f_1) & (Af_1,f_2) & \cdots\cdot, & (Af_1,f_n)\\ (Af_2,f_1) & (Af_2,f_2) & \cdots\cdot & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (Af_n,f_1) & \cdots & \cdots & (Af_n,f_n)\end{pmatrix}$$

上で，Y^T は，行列 B に対し B^T は B の転置行列を表わすとしたときの用法を考えればよい。

作業素 A を正値と仮定すると (7.1) の第3項は負にならないから，g の $\{f_i\}$ の一次結合によるノルム $\|x\|_A=(Ax,x)$ の意味での最良近似は，aY^T, ただし $a=(Ag,Y)(AY^TY)^{-1}$ によって与えられる。(Ax,y) を x と y の内積として，aY^T は g の $\{f_i\}$ のはる空間への（正）射影 (projection) である。$A=I$, $\{f_i\}$ を正規直交系にとると，aY^T は g の n 次 Fourier 展開である「**1.4** (1) **例 1**」。

上記ノルム $\|\cdot\|_A$ による最良近似は，確かに存在してしかも一意に定まる。一般の線型ノルム空間の場合，有限次元部分空間の元による最良近似は常に存在するが，一意性は必ずしも成立しない。一意性のなりたつためには，たとえば，線型空間 X のノルムが次の性質を満たしておればよい。零元でない任意の X の二元 x,y に対し，

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$$

が成立するのは，$y=ax$ (a は実数) なる場合に限る 14) pp. 72—。

（2） A を逆作用素をもつとし，方程式

$$Ax=y$$

において，$Ax_k=y_k$, $x-x_k=s_k$, $y-y_k=r_k$ とおく。s_k は x_k の誤差，r_k は x_k の残差である。

反復式を

$$x_{k+1}=x_k+a_kY_k^T,\quad k=0,1,2,\cdots\tag{7.2}$$

とおく。A は正値対称とする。a_k は，$a_kY_k^T$ が s_k の Y_k の元のはる空間への射影になるようにとる。そのとき Y_k として

$$(Ap_k,p_i)=0,\quad i=0,1,\cdots,\quad k-1$$

なる単一の元 p_k をとるのが **conjugate-direction method** である。(7.1) より

$$a_k=(r_k,p_k)/(Ap_k,p_k)$$

$\{p_k\}$ をノルム (Ax,x) の意味で完全系をなすようにとれば，当然，$n\to\infty$ のとき解法は収束する。

(7.2) の Y_k として

$$Y_0=r_0=y-Ax_0,\quad Y_k=A^kr_0$$

ととるのが **conjugate-gradient method** で，計算式は次のようになる。

$$x_{k+1}=x_k+\frac{(r_k,p_k)}{(Ap_k,p_k)}p_k$$

$$r_{k+1}=r_k-\frac{(r_k,p_k)}{(Ap_k,p_k)}Ap_k$$

$$p_k=r_{k+1}-\frac{(r_{k+1},Ap_k)}{(Ap_k,p_k)}p_k$$

$Y_k=r_k$ ととるのが **steepest descent method** である。計算式は

$$x_{k+1}=x_k+\frac{(r_k,r_k)}{(Ar_k,r_k)}r_k$$

$$r_k=y-Ax_k$$

次に，必ずしも A が正値対称でない場合に適用できるような計算式を考える。そのために (7.2) の Y_k を A^*p_k とおき，本来の内積についての反復式を作ると，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(r_k,p_k)}{\|A^*p_k\|^2}A^*p_k\tag{7.3}$$

$$\|s_{k+1}\|^2=\|s_k\|^2-\frac{(As_k,p_k)^2}{\|A^*p_k\|^2}\tag{7.4}$$

(7.4) の右辺第2項について，$As_k=r_k$ より

$$\frac{(As_k,p_k)^2}{\|A^*p_k\|^2}=\left(\frac{\|p_k\|}{\|A^*p_k\|}\right)^2\|As_k\|^2\left(\frac{(r_k,p_k)}{\|r_k\|\|p_k\|}\right)^2$$

3番めの因子を $\cos\theta$ とおくと

$$\geqq\frac{\cos^2\theta}{\|A\|^2\|A^{-1}\|^2}\|s_k\|^2$$

ゆえに

$$\|s_{k+1}\|^2 \leqq \left(1-\cos^2\theta\,\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\right)\|s_k\|^2 \tag{7.5}$$

(7.5) によれば，$\cos^2\theta=0$ すなわち $(r_k, p_k)=0$ のとき射影は無効である。よって steepest descent method にならって $p_k=r_k$ とおけば，$r_k=0$ すなわち $s_k=0$ とならない限り計算は有効で，x_k は真の解に収束する。

$p_k=r_k$ とおいた場合の (7.5) とは別の収束率を算出する。このとき (7.4) は

$$\|s_{k+1}\|^2=\|s_k\|^2-\frac{(As_k, As_k)^2}{(A^*As_k, A^*As_k)}$$

$$=\left(1-\frac{(As_k, As_k)^2}{(A^*As_k, A^*As_k)(s_k, s_k)}\right)\|s_k\|^2$$

$(A^*Ax, x)=[x, x]$ とおけば (A^*A は有界正値自己共役とする。)

$$=\left(1-\frac{[s_k, s_k]^2}{[A^*A\,s_k, s_k][(A^*A)^{-1}s_k, s_k]}\right)\|s_k\|^2$$

Kantorovich の不等式「**IV.** (16)」によれば

$$m^{-1}=\|(A^*A)^{-1}\|_{A^*A},\quad M=\|A^*A\|_{A^*A}$$

$(x\neq0,\ \ 0<m[x, x]\leqq[A^*A\,x, x]\leqq M[x, x])$ として，上式は

$$\leqq\left(1-\frac{4Mm}{(M+m)^2}\right)\|s_k\|^2$$

$$=\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\|s_k\|^2$$

ゆえに

$$\|s_k\|\leqq\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k\|s_0\|$$

(3) A を $n\times n$ 行列とする。上に考えた conjugate direction method で，p_k として，単位ベクトル $e_1=(1, 0, \cdots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots e_n=(0, 0, \cdots, 1)$ をこの順序にくり返し採用すると，これは **Gauss-Seidel method** と同じ計算法となる。

$$x_{k+1}=x_k+(r_k, e_i)e_i/(Ae_i, e_i),\quad k=0, 1, 2, \cdots$$

この意味ずけから次の定理が簡単に証明できる。

T 1 「A が対称でしかも対角元がすべて正のとき，Gauss-Seidel method が任意の出発ベクトルに対し収束するための必要十分条件は，A が正値なることである。」

証明 A が対称であれば，解法の意味から $(As_k, s_k)=0$ とならない限り常に $(As_{k+n}, s_{k+n})>(As_k, s_k)$ であり，s_k は収束し，極限値は 0 ベクトルでなければならず，よって解法は収束する。

必要性。 $(As_{k+1},\ \ s_{k+1})=(As_k, s_k)-(r_k, e_i)^2/(Ae_i, e_i)$

$$\leqq(Ae_i, e_i)$$

いま，A が正値でないとすると A の負なる固有値が存在する（A は正則とする)。s_0 をその固有値に対応する固有ベクトルにとると

$$s_0=x-x_0,\quad (As_0,s_0)<0$$

よってこの場合，上の式から (As_k,s_k) は常に負となり，反復法は収束しない。終

有限次元の場合，(7.3) 式で，p_k のとり方によっていろいろ違った型の計算法が得られる。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(r_k,p_k)}{\|A^Tp_k\|^2}A^Tp_k$$

たとえば，$r_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots\cdot,\xi_n^{(k)})$ に対し

$p_k=(\mathrm{sign}(\xi_1^{(k)}),\ \mathrm{sing}(\xi_2^{(k)}),\cdots\cdot,\mathrm{sing}(\xi_n^{(k)}))$ ととる方法。このとき $(r_k,p_k)=\|r_k\|_1$

$\max\limits_i|\xi_i^{(k)}|=|\xi_j^{(k)}|$ として，$p_k=(0,\cdot\cdot,0,\mathrm{sing}(\xi_j^{(k)}),0,\cdot\cdot,0)$ ととる方法。このとき $(r_k,p_k)=\|r_k\|_\infty$

(4) **Ritz method** あるいは **Gelerkin method** などといわれている解法の導き方の概略をのべる。

ヒルベルト空間 H の上の有界作用素 A を正値対称とし，方程式 $Ax=y$ について考える。新しい内積 $[u,v]=(Au,v)$ に関するヒルベルト空間を H' とする。$\|u\|_A=[u,u]$。$\|x-a_nY_n^T\|_A$ を最小にする $a=(a_i)$ は，次の連立一次方程式の解として与えられる。

$$\sum_{i=1}^{n}[f_i,f_j]a_i=[x,f_j],\quad j=1,2,\cdots\cdot,n$$

ここで $[x,f_j]=(Ax,f_j)=(y,f_j)$

$\{f_i\}_{i=1,2,\cdots\cdot}$ を H' で一次独立な完全系にとれば，上の解は存在して，$a_nY_n^T$ は x へ収束する。ここで数値計算法としての要請から，計算式に解 x が現われないという制約のもとに一般公式 (7.1) が使われていることに注意する。A が k-positive definte (semi-bounded symmetric を拡張した概念）とよばれる作用素の場合も，本質的変更なしに上と同じ方法が適用でき，もとのノルムの意味での真の解への収束性も導かれる。また，あとで証明する，完全連続作用素についてなりたつ事実とあわせて，次の定理が得られる[23]。

T 2 「$A=B+C$, B は正値自己共役，$B^{-1}C$ は H' で完全連続な作用素，$\{f_i\}$ は一次独立な完全系とする。そのとき，次の $a_i^{(n)}$ に関する連立一次方程式は，n が十分大のときは常に解くことができ，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{(n)}f_i$ は H' で方程式の解に収束する。

$$\sum_{i=1}^{n}\{(Bf_i,f_j)+(Cf_i,f_j)\}a_i^{(n)}=(y,f_j),\ j=1,2,\cdots\cdot,n_0\ (Ax=y\ の解の存在は仮定)」$$

(5) 線型常微分方程式 $Ay=f$ の境界値問題で，A が自己共役な次の例をモデルにして，この章の考え方に従い，その近似（差分）方程式を導く。

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\sigma(x)\,y(x)=f(x),\quad a<x<b,\quad \sigma(x)\geqq 0,\quad y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta$$

区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，$h=\dfrac{b-a}{h}$，各分点を x_i とし，一次関数 $t_i(x)$ を図 3 のようにとる。

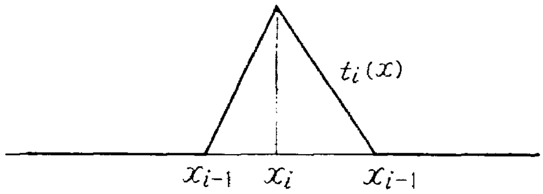

図 3

$$t_i(x_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i,\quad 0\leqq j\leqq n+1\end{cases}$$

$L_2(a,b)$ で考えて，$\sum\limits_{i=0}^{n+1} u_i t_i(x)$ は境界条件を満足するように，すなわち $u_0=\alpha$, $u_{n+1}=\beta$ ととって

$$\begin{aligned}
&\|y-\sum_{j=0}^{n+1} u_i t_i(x)\|_A^2\\
&\quad\equiv\Big(A(y-\sum_{i=0}^{n+1} u_i t_i(x)),\ (y-\sum_{i=0}^{n+1} u_i t_i(x))\Big)\\
&\quad=\Big(\frac{d}{dx}(y-\sum u_i t_i(x)),\ \frac{d}{dx}(y-\sum u_i t_i(x))\Big)\\
&\qquad\qquad+\Big((\sigma(x)(y-\sum u_i t_i(x)),\ (y-\sum u_i t_i(x))\Big)
\end{aligned}$$

この値を最小にする $(u_0, u_1, \cdots, u_{n+1})$ は次の連立一次方程式を解くことによって得られる。

$$\begin{cases}
u_0=\alpha,\quad u_{n+1}=\beta,\\
\Big(-\dfrac{1}{h}+(\sigma t_i,\ t_{i-1})\Big)u_{i-1}+\Big(\dfrac{2}{h}+(\sigma t_i,\ t_i)\Big)u_i+\Big(-\dfrac{1}{h}+(\sigma t_i,\ t_{i+1})\Big)u_{i+1}\\
\qquad=(f, f_i),\qquad\qquad 1\leqq i\leqq n
\end{cases}$$

たとえば $(\sigma t_i, t_j)=\begin{cases}h\sigma(x_i), & j=i\\ 0 & , j\neq i\end{cases}$，$(f, t_i)=hf(x_i)$ とおけば，計算式は最も単純な近似差分方程式と一致する。

$$-\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h_2}+\sigma(x_i)y_i=f(x_i)$$

収束性は，$h\rightarrow 0$ としたときの $\{t_i(x)\}_h$ 全体の張る線型集合は $L_2(a,b)$ の稠密集合をなすことによって保証される。

8. 無限次元連立一次方程式

（1） 無限多変数連立一次方程式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+\cdots\cdots=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n+\cdots\cdots=y_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n+\cdots\cdots=y_n \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{8.1}$$

ここに，a_{ij}, y_i は与えられた数で，x_i は未知とする。$\{x_i\}$ が連立一次方程式 (8.1) の解であるとは，この式の左辺に代入したとき，級数が収束し，すべての等号が成立する場合にいう。

$$a_1=(a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{1n}, \cdots\cdots)$$
$$a_2=(a_{21}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{2n}, \cdots\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ \cdots\cdots)$$

とすると，問題 (8.1) は内積表示で

$$\begin{cases} (a_1, x)=y_1 \\ (a_2, x)=y_2 \\ \quad\vdots \\ (a_n, x)=y_n \\ \quad\vdots \end{cases}$$

となる。a_i を，たとえば l_p の元とみなし，$(\cdot, x)$ は l_p 上の線型汎関数と考えれば，問題はバナッハ空間 X の元 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ をそれぞれ実数 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ に写すような線型汎関数を求めることと読むことができる。そのとき次の定理がなりたつ (**付録 12**)。

T 1 「$\{y_n\}$ を実数の可算集合，$\{x_n\}$ をバナッハ空間 X の元の可算集合とするとき，すべての自然数 n に対し　$x^*(x_n)=y_n$, $\|x^*\|\leqq M$ なる汎関数 $x^*\in X^*$ が存在するための必要十分条件は

$$|\sum_i \alpha_i y_i| \leqq M\|\sum_i \alpha_i x_i\|$$

が，任意の有限個の実数の組 $\{\alpha_i\}$ について成立することである。」

これを問題 (8.1) に適用すると，

T 2 「$a_i\in l_n$ のとき，$x\in l_q$ $(p, q<1, 1/p+1/q=1)$ なる解の存在するための条件は，すべての n と任意の実数列 $\{\alpha_i\}$ に対し

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i| \leqq M\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{ij})^p\right)^{1/p}$$

を成立させる定数 M が存在することである。」

この定理を有限次，$n\times n$ の場合に適用してみる。ノルムは距離としてすべて同値であったから，いま a_i の属する空間は $l_2{}^n$ とする。そのとき解の存在条件は

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right|}{\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ij}\right)^2\right|^{1/2}} \leqq M$$

$A=(a_{ij})$，$A^*=(a_{ji})$，$\alpha=(\alpha_1, a_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ とすると，左辺の分母は $\|A^*\alpha\|$ に等しい。これがすべての $\alpha \neq 0$ ($\|\alpha\|=1$ として十分) に対して0にならなければ解は存在する。

$$\|A^*\alpha\|^2=(A^*\alpha, A^*\alpha)=(AA^*\alpha, \alpha)$$

よって $\min_{\|\alpha\|=1} \|A^*\alpha\|^2$ の値は二次形式 $(AA^*\alpha, \alpha)$ の最小の固有値であり，それが0になるのは行列式 $\det(AA^*)=\det^2(A)=0$ の場合に限る。$\det(A) \neq 0$ の場合 y_i と無関係に常に解は存在する。また $\|A^*\alpha\|=0$, $\alpha \neq 0$ となっても，このような α に対し常に $\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right|=0$ であれば定理の条件式は成立し，解は存在する。

無限次元の場合について同じことを考えてみる。$a_i \in l_2$, $y=(y_1, y_2 \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots,) \in l_2$ とする。

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_j\right|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ij}\right)^2\right)^{1/2}} \leqq M$$

$\|\alpha\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2\right)^{1/2}$ で左辺の分母分子を割れば分子は $\|y\|$ より小さい。よって分母の値が任意の $\|\alpha\|=1$ なる α についてある正の数よりも大であれば，もとの方程式の解は存在する。ところで分母は形式的に $(A^*\alpha, A^*\alpha)=(AA^*\alpha, \alpha)$ に等しい。これから，解 $x \in l_2$ が存在するためには AA^* が正値であれば十分である。

(2)　$A=(a_{ij})$ を l_2 から l_2 への有界作用素とする。(1) の解を求めるのに，初めの n 個の方程式をとって，近似解として

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=y_2 \\ \vdots \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=y_n \end{cases}$$

の解 $x_{(n)}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ を用いる場合の収束性について考える。前のように $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}, \cdots\cdots) \in l_2$, $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots) \in l_2$ とすれば，これは次のようなヒルベルト空間の上の問題にいいなおすことができる。

方程式を

$$Ax=y \tag{8.2}$$

一次独立な完全系を $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ とする。x の n 次近似解：$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ として，方程式

$$\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right), f_j\right)=(y, f_j), \quad j=1,, 2, \cdots\cdots, n \tag{8.3}$$

が成立するものを採用すると，これは真の解に収束するか。

さきの問題は，f_i として i 番めの要素が 1 でほかはすべて 0 なる単位ベクトルとした場合に相当する。

T 3 「ヒルベルト空間 H で $A=I+B$, I は恒等作用素，B は完全連続な線型作用素で，(8.2) は任意の $y\in H$ について解を持つとする。そのとき，上のようにして作った近似方程式 (8.3) は十分大きい n について常に解くことができ，その解 x_n は $n\to\infty$ のとき真の解に収束する。」

証明 $\{f_i\}$ を正規直交関数系にとり (8.3) のかわりに，それと同じ解を持つ次の近似方程式で考える。

$$(I+B_n)x = y_n$$

$$B_n x = \sum_{i,j=1}^{n} (x, f_i)(Bf_i, f_j)f_j \qquad y_n = \sum_{j=1}^{n} (y, f_j)f_j$$

$n\to\infty$ のとき，$\|y-y_n\|\to 0$, $\|B-B_n\|\to 0$ 25) p. 204。

$\varDelta A_n = A-A_n = (I+B)-(I+B_n) = B-B_n$ として，n を十分大きく，$\|\varDelta A_n\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ なるようにとれば，A_n^{-1} が存在し，しかも

$$\|A_n^{-1}-A^{-1}\| \leqq \frac{\|A^{-1}\varDelta A_n\|}{1-\|A^{-1}\varDelta A_n\|}\|A^{-1}\|$$ 14) pp. 91-92。

ゆえに $n\to\infty$ とすれば $\|A_n^{-1}-A^{-1}\|\to 0$ となり定理の成立することがわかる（**付録 14** 参照）。**終**

$A=(a_{ij})$ が完全連続なるための条件は

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqq 1, \quad \|y\| \leqq 1$$

なる x, y に関し，ある N より大なる n, m について一様に

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j\right| < \varepsilon$$

なることである。たとえば，$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$ なら完全連続である。

文　　献

1) F. L. Bauer and C. T. Fike; Norm and exclusion theorems, Num. Math. Vol. 2 (1960) pp. 137—141.

2) F. L. Bauer and A. S. Householder; Absolute norm and characteristic roots, Num. Math. Vol. 3 (1961) pp. 241—246.

3) F. L. Bauer, J. Stoer and C. Witzgall; Absolute and monotonic norm, Num. Math. Vol. 3 (1961) pp. 257—264.

4) F. L. Bauer; On the field of values subordinate to a norm, Num. Math. Vol. 4 (1962)pp. 103—113.

5) F. L. Bauer; Optimally scaled matrices, Num. Math. Vol. 5 (1963) pp. 73—87.

6) N. Dunford and J. T. Schwartz; Linear operators, part I, (1958) Interscience Publishers.

7) T. E. Easterfield; Matrix norm and vector measures, Duke Math. J. Vol. 24(1957) pp. 663—669.
8) W. Greub and W. Rheinboldt; On a generaligation of an inequality of L. V. Kantorovich, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 10 (1959) pp. 407—415.
9) 一松 信; 数値計算, (昭和 38) 至文堂.
10) A. S. Householder and F. L. Bauer; On certain iterative methods for solving linear systems, Num. Math. Vol. 2 (1960) pp. 55—59.
11) T. Kato; Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition, Num. Math. Vol 2 (1960) pp. 22—29.
12) A. Kolmogoroff; Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math. Vol. 5 (1934) pp. 29—33.
13) P. D. Lax and R. D. Richtmyer; Survey of the stability of linear finite difference, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 7 (1956) pp. 267—293.
14) L. A. Liusternik and V. J. Sobolev; Elements of fuctional analysis, (1961) Frederick Ungar Publishing. (原著発行年は 1951).
15) ア・イ・マリツェフ; 線型代数学 I, (昭和 35) 東京図書, (昭和 31).
16) M. Marcus; An inequality connecting the p-condition number and the determinant, Num. Math. Vol. 4 (1962) pp. 350-353.
17) 永坂秀子; ある種の三項方程式における誤差伝播, 情報処理 Vol. 5 (昭和 39) pp. 195—202.
18) J. von Neumann and H. H. Goldstine; Numerical inverting of matrices of high order, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 53 (1947) pp. 1021—1099.
19) 清野 武, 西原 宏; 多段消去法に関する実験 (1), (2), (3), 京都大学電子計算機室ニュース 1, 2 巻 (昭和 38, 39).
20) A. Ostrowski; Über Normen von Matrizen, Math, Zeit. Vol. 63 (1955) pp. 2—18.
21) —— ; Solution of equations and systems of equations, (1960) Academic Press.
22) L. J. Paige and O. Taussky, edit.; Simultaneouns linear equations and the determinations of eigenvalues, N. B. S. Appl. Math. series, Vol. 29, (1953).
23) W. V Petryshyn; Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert Space, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 105 (1962) pp. 136—175.
24) E. Reich; On the convergence of the classical iterative method of solving linear simultaneous equations, Ann. Math. Statist. Vol 20 (1949) pp. 448—451.
25) F. Riesz and B. Sz.-Nagy; Functional Analysis, (1955) Frederick Ungar Publishing. (1952).
26) H. Schneider and W. G. Strang; Comparison theorems for supremum norms. Num. Math. Vol. 4 (1962) pp. 15—20.
27) A. H. Schopf; On the Kantorovich inequality, Num. Math. Vol. 2 (1960) pp. 344—346.
28) 柴垣和三雄; 解析学通論上, (昭和 38) 丸善書店.
29) J. Stoer and C. Witzgall; Transformations by diagonal matrices in a normed space, Num. Math. Vol. 4 (1962) pp. 158—171.
30) B. J. Stone; Best possible ratios of certain matrix norms, Num. Math. Vol. 4 (1962) pp. 114—116.
31) W. G. Strang; On the Kantorovich inequality, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 11 (1960) p. 468.
32) A. M. Turing; Rounding-off errors in matrix processes, Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 1 (1948) pp. 287—308.

付　　録

（I） 連立一次方程式（有限次元）の各種数値解法の総括的分類が数百の文献表とともに 22）に載っている。また，今日の盛んな研究を大いに刺激したと思われる，同著者による次の論文にも131 の文献があげられている。

33） G. E. Forsythe; Solving linear algebraic equations can be interesting, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 59 (1953) pp. 299—329.

以来，その上にさらに新しい研究が重ねられ，行列の固有値，固有ベクトルの数値計算法の研究などもいっしょにしたら，関連文献の数は相当なものになるであろう。

連立一次方程式の数値解法はほとんどの数値解析概説の書で扱われているが，これだけを内容とする書では，

34） V. N. Faddeeva; Computational methods of linear algebra, (1958) Dover Publications.（原著出版年は 1950）.

35） E. Bodewig; Matrix Calculus, rev. ed., (1959) Interscience Publishers.

などがある。最近の書では

36） Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева; Вычислительные методи линейной аргебры, (1963) Физматгиз.

（巻末の文献表は pp. 677-734 にあり 1,200 項ぐらいか。）

37） A. S. Householder; The theory of matrices in numerical analysis, (1964) Blaisdell.（未見）.

この資料の第一章に書いたことは 6), 14), 25) などを参照したが，関数解析の日本語の解説書としては，

38） 加藤敏夫; 函数空間論，（昭和 33）共立出版.

39） コルモゴロフ，フォーミン; 函数解析の基礎，（昭和 37）岩波書店.（昭和 29～35）.

40） スミルノフ; 高等数学教程 V 巻第二分冊，（昭和 37）共立出版.（昭和 34）.

などがある。また，

41） 弥永昌吉; 位相的代数的方法 I－VI，科学 32 巻（昭和 37）.

も参考になろう。数値解析をこの立場で書いた書では，

42） J. Todd.; Svrvey of numerical analysis (1962), MacGraw-Hill. の 14 (pp. 485—517)：
H.A. Antosiewicz and W. C. Rheinboldt; Numerical analysis and functional analysis.

が，簡潔で要を得ており，他に，

43） B. Z. Vulikh; Introduction to functional analysis for scientists and technologists, (1963) Pergamon Press. (1958).

1　縮小写像の原理。(5)　これに関連する問題については 39), 40), 41) それぞれに詳しい解説がある。標題はどうあれ，実質的内容が次の証明と同じであるような記述には，いたるところで出あうであろう。

証明　x_0 を任意にとる。

$$\rho(A^n(x_0), A^{n+1}(x_0)) < M\rho(A^{n+1}(x_0), A^n(x_0))$$
$$\cdots\cdots$$
$$< M^n\rho(x_0, A(x_0))$$

より，$1 \leqq n < m$ として，

$$\rho(A^n(x_0), A^m(x_0)) \leqq \rho(A^n(x_0), A^{n+1}(x_0)) + \cdots\cdots + \rho(A^{m-1}(x_0), A^m(x_0))$$
$$< (M^n + M^{n+1} + \cdots\cdots + M^m)\rho(x_0, A(x_0))$$
$$< \frac{M^n}{1-M}\rho(x_0, A(x_0))$$

ゆえに，$n\to\infty$ のとき $\rho(A^n(x_0), A^m(x_0))\to 0$ 完備性より，ある $x' \in X$ があって $A^n(x_0)\to x'$

$$\rho(x', A(x')) < \rho(x', A_n(x_0)) + \rho(A^n(x^0), A(x'))$$
$$< \rho(x', A^n(x_0)) + M\rho(A^{n-1}(x_0)', x')$$

この式で $n\to\infty$ としたとき，右辺は $\to 0$ ゆえに $x' = A(x')$

この解が一意であることは，解 x, y に対し

$$\rho(x, y) = \rho(A(x), A(y)) < M\rho(x, y)$$

がなりたつことからわかる。**証明終**

状況に応じて，定理の「値域空間全体で縮小関係が満たされる」と，「任意の出発値 x_0 に対して」をゆるめることができる。

2　ノルムと凸集合。「ノルムの条件のうち，「**1.2** (3) (iii)」の三角不等式は，単位球 $S=\{x: \|x\| \leqq 1\}$ が凸集合であることと同値である。」

単位球 S が**凸** (convex) であるとは，x_1, x_2 を S の元とすると，任意の実数 $0 \leqq \lambda \leqq 1$ に対し $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \leqq 1$ なること。

証明　三角不等式がなりたてば，確かに，

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \leqq \|\lambda x_1\| + \|(1-\lambda)x_2\|$$
$$= \lambda\|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\|$$
$$\leqq 1。$$

逆に，凸性がなりたてば，任意の x, y に対し，$\|x\| = \lambda$, $\|y\| = \mu$, $x/\|x\| = x_1$, $y/\|y\| = y_1$ として

$$\|x+y\| = \|\lambda x_1 + \mu y_1\|$$
$$= (\lambda+\mu)\left\|\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y_1\right\|$$
$$\leqq \lambda + \mu$$
$$= \|x\| + \|y\| \quad \text{終}$$

一般的な位相空間でのノルム空間の特徴づけについては，12) にこれに相当する定理と証明がある。

3　Hahn-Banach の拡張定理。「バナッハ空間 X の部分空間 Y の上の線型汎関数 $y^* \in Y^*$ はノルムを変えずに X 全体の上の汎関数 $x^* \in X^*$ に拡張（extension）できる。」証明は省略する。

この定理の直接の結果として，無限次元連立一次方程式の解の存在条件が得られる。(**付録 12**)。

また，「X の任意の点 x_0 に対して，$x^*(x_0)=\|x_0\|, \|x^*\|=1$ なるごときときき $x^* \in X^*$ が存在する。」ことがわかる。この事実を使用して，X が標準写像で X^{**} の部分空間にノルム空間として同型に写されることが証明される。($X \subset X^{**}$)

4　位相同値。「有限次元線型空間 X の任意の 2 種のノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}, \|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ に対し，ある正数 m, M があって，X の任意の元 x について

$$m\|x\|_{\mathrm{I}} \leqq \|x\|_{\mathrm{II}} \leqq M\|x\|_{\mathrm{I}}\text{」}$$

証明　任意のノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ と l_1 ノルム $\|x\|_{\mathrm{I}}=\sum_i |x_i|$ とについて上の式の成立を示す。

三角不等式から，$\{e_i\}$ を単位ベクトルとして，

$$\|x\|_{\mathrm{II}}=\|\sum_i x_i e_i\|_{\mathrm{II}} \leqq \sum_i |x_i|\|e_i\|_{\mathrm{II}}$$

$$\leqq M\sum_i |x_i|=M\|x\|_{\mathrm{I}},\quad M=\max_i \|e_i\|$$

次に左の不等式を証明する。

$$\|x-y\|_{\mathrm{II}} \leqq M\,\|x-y\|_{\mathrm{I}}$$

から，$\|x\|_{\mathrm{II}}$ はノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ による空間 X の上の連続な汎関数である。さらに，$\|x\|_{\mathrm{II}}$ はコンパクト集合 $\{x:\|x\|_{\mathrm{I}}=1\}$ の上で正で，最小値 $m>0$ に達する。ノルムの斉次性「**1.2** (3) (ii)」から

$$\|x\|_{\mathrm{II}} \geqq m\|x\|_{\mathrm{I}}\quad \text{終}$$

5　ノルム空間でヒルベルト空間を特徴づける式

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

は，l_p 空間のノルム $\|\cdot\|_p$ については，次のように不等式で拡張される。

$1<p\leqq 2$ のとき，

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leqq \left(\frac{1}{2}\|x\|_p{}^q+\frac{1}{2}\|y\|_p{}^p\right)^{q/p}$$

$2\leqq p$ のとき，

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leqq \frac{1}{2}\|x\|_p{}^p+\frac{1}{2}\|y\|_p{}^p$$

$p=2$ のときは，両辺は先の等式のそれに一致する。これら不等式は，次の書で $l_p{}^*(L_p{}^*)$ の一般形を定めるのに使用している。

44) S. L. Sobolev; Application of functional analysis in mathematical physics, (1963) Amer. Math. Soc. (1950).

(II)　Hölder の不等式や l_p ノルム空間の三角不等式（Minkowski の不等式）の証明は，いろ

いろなところで目にすることでもあり，省略した。なお，名著の誉高い次の書には，これら不等式の詳しい記述がみられる。

45) G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya; Inequalities, (1934—1959) Cambridge.

また，「**2. (1)**」や他のところで使用した不等式に関する最近の文献などは次の書に詳しい。

46) E. F. Bekenbach and R. Bellman; Inequalities, (1961) Springer.

(III) 6 ベクトル・ノルムと従属ノルム。$\|y\|=1$ なる任意の n 次ベクトル y に対し，A を n 次正方行列とし，

$$\|x\| = \inf_{Ay=x} \|A\| \tag{1}$$

同じことであるので次の式を証明する。

$$\|x\| = \sup_{y=Ax} \frac{1}{\|A\|} \tag{2}$$

証明 $\|y\|=\|Ax\|\leqq\|A\|\|x\|$ より，

$$\|x\| \geqq 1/\|A\| \tag{3}$$

ところで，$A=(yx^*)/(\|x^*\|\|x\|)$ とおくと，$Ax=y$ で，しかも「**3. T 8**」より $\|A\|=1/\|x\|$。よって，この A について (2) で等号が成立し，(2) は確かに正しい。**終**

A を正方行列としたのは (1) と (2) の対応を考えるためで，証明からすれば，Ax が意味を持ちさえすれば (2) は成立する。A が $1\times n$ の場合は dual norm の定義式になる「**2. (1)**」。

7 Brouwer の不動点定理。縮小写像の原理（**付録 1**）も一種の不動点定理である。

「f を n 次元ユークリッド空間 R^n の単位球: $S=\{x\in R^n:\|x\|\leqq 1\}$ から S への連続写像とすると，S の中に不動点 y: $y=f(y)$ が存在する。」6) pp. 486—.

R^n は有限次ノルム空間，S は有界，閉，凸集合としてもよい。

(IV) 行列の固有値評価の問題についての概観は 42) の 8 (pp. 279-297):

O. Taussky; Eigenvalues of finite matrices.

によられたい。Perron-Frobenius 定理の証明は，文献とともに上記にもあるが，次の書などに詳しい。

47) F. R. Gantmacher; Applications of the theory of matricers, (1959). Interscience Publishers, (1954).

この定理は経済学のための線型代数などでも有効に使われるようで，また，次の書には，差分近似式の計算法への系統的な使用例がみられる。

48) R. S. Varga; Matrix iterative analysis, (1962) Prentice-Hall.

なお，Kantorovich の不等式を証明した文献としてよく引用される 8) の p. 410 (10 b) の下の式は間違いではないかと思われる。

(V) 8 一様有界性の定理は，汎関数については，「**8. (2)**」の用語でいうと，(汎) 弱収束する汎関数列は有界である，となる。さらに，より一般的に表現されたり，いろいろな変形された定理

で使用されたりする。共鳴定理，Banach-Steinhause の定理などといわれるものも同じ系列に属する。証明法は Baire の category 論法といわれるものであるが関数解析の書を参照されたい。

この定理をはっきり表面に出して使用している数値解析の書では 49) がある (14) 参照)。

常微分方程式の数値積分では，一般には，線型近似でないのでそのままでは適用できないが，「**付録 4**」への導入部として，偏微分方程式の初期値問題の差分近似の場合についての 13) の結果と関連ずのけをも念頭において解説をこころみたわけである。常微分方程式自体の解法については，当然，より詳しい考察が展開されており，50), 51) が参考になる。

丸め誤差集積についての安定性については文献 50), 51), 52) 参照。

49) V. I. Krylov; Approximate calculation of integrals, (1962) Macmillan. (1959).
50) P. Henrici; Discrete variable methods in ordinary differential equations, (1962) John Wiley & Sons.
51) 占部 実; 常微分方程式の数値積分における誤差の理論，数理科学総合研究報告 III-15, (昭和 36).
52) F. B. Hildebrand; Introduction to numerical analysis, (1956) McGraw-Hill.

9 安定性。 定常状態を少し乱した場合，乱れが減衰すれば，その物理現象は安定 (stable) であるという。また，定係数の線型同次微分方程式:

$$L(p)z=0,\ \ p=\frac{d}{dt},\ \ z\equiv z(t)$$

の解が $t\to+\infty$ のときに 0 に収束すれば，すなわち多項式 $L(p)=0$ のすべての根が負の実部をもてば，$L(p)$ は安定である，といったりする。

しかし，数値解析上に使用されている安定性という言葉の意味は，現象の多様なことや個別的なせいもあってか，必ずしも上にのべた例のようにきれいには規定しにくいようである。だいたい，計算の精度を上げても（積分区間を小さくするなどして）解の変動がおとなしいとか，計算ステップを数多く重ねても丸め誤差が集積しにくいとかいった解法を，安定な解法といっているが，場合によっては個々の問題自体にも依存し，数学的定義としてはいろいろ異なった表現が用いられたりするので注意を要する。直接的解法に対して誤差の集積しにくい連立一次方程式を condition がよいといったが「**(VI)**」これも一種の stability である。

(VI) condition number の考えはすでに 18) にみられるが，はっきり導入されたのは 32) によるようである。ここに記した以外にも最近は二三の研究があるようであるが，十分良く目を通すにはいたっていない。なお，三項方程式の数値計算については，大阪大学工学部，鳥居達生氏からも研究資料をいただいている。

10 固有値の計算。 (T 1) 初等的ではあるが念のために行列 A の固有値の求め方を示す。そのために，n 次行列 A の行列式の値を k_n とおくと，k_n は次の漸化式を満たすことに注意する。

$$k_n=bk_{n-1}+ack_{n-2}$$

よって $k_n=x^n$, x は 2 次方程式:

$$x^2-bx+ac=0$$

の解である。この方程式の2根を u,v とすると

$$k_n=\alpha u^n+\beta v^n$$

ただし
$$\begin{cases}\alpha u+\beta v=b & (=k_1)\\ \alpha u^2+\beta v^2=b^2-ac & (=k^2)\end{cases}$$

よって
$$\alpha=\frac{b(v-b)+ac}{u(v-u)}$$

$$\beta=\frac{b(u-b)+ac}{v(u-v)}$$

ゆえに

$$k_n=\frac{1}{u-v}\{u^{n-1}(b^2-bv-ac)+v^{n-1}(-b^2+bu+ac)\}$$

$b=u+v$, $ac=uv$ より

$$k_n=\frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v}$$

固有値を求める目的で，$k_n=0$ のときの a,b,c の関係式を求めてみる。

$$u^{n+1}-v^{n+1}=0$$

$$u^{n+1}-\left(\frac{ac}{u}\right)^{n+1}=0$$

ゆえに
$$u^{2n+2}-(ac)^{n+1}=0$$

$i^2=-1$ として $u=\pm\sqrt{ac}\ e^{ik\pi/n+1}$, $k=1,2,\cdots,n$, $k=0$, $n+1$のときの根は $u-v$ の根でもあるから除いた。さきの関係式 (1) より

$$u=b\pm\sqrt{b^2-4ac}\,/2。$$

よって
$$\pm\sqrt{b^2-4ac}=-b+2\sqrt{ac}\ e^{ik\pi/n+1}$$

両辺を2乗して整理すると

$$b=\pm\sqrt{ac}\ (e^{-ik\pi/n+1}+e^{ik\pi/n+1})$$

$$=\pm 2\sqrt{ac}\ \cos\frac{k\pi}{n+1}\ 。$$

以上より定理の固有値が求まる。固有ベクトルも要素の間に成立する漸化式の解を求めることによって得られる。

(VII) projection methods により関数方程式を解く問題についての研究発表は，Mathematical Review (Amer. Math. Soc.) や Computing Review (Association for computing machinary) でみる限りソ連に多い。また，有限次について，で **(付録 2)** のべたことと類似の結果が二，三独立に発表されているようである。ここでは 10) による公式を一般化した **(付録 1)** の式から各種解法

を導き出したわけであるが，非線型連立方程式への適用可能性を主眼とする立場もある。

p_k を (r_k, p_k) が r_k のある種ノルムとなるようにとる，という（**付録 3**）でのべた考え方は，情報処理，Vol. 5 (昭和 39) の文献紹介で教えられたものである。一般空間でのこれら反復計算の最初の考察は，

53) L. V. Kantrovich; Functional analysis and applied mathematics, (1952) National Bureau of Standrds Report 1509. (1948).

にあるようであるが，手に入らずまだ見ていない。

T 1 の従来の証明は，行列の固有値を評価するのが一般的なようである。最初の証明は 24) によるとされているが，これ，または 9) の証明とここでの証明法とを比較されたい。48) にもある。

「付録 **4, 5**」の解法に関する具体的でより詳しいことは次の書に載っている。

54) L. V. Kantorovich and V. I. Krylov; Approximate methods of higher analysis, (1958) Interscience Publishers. (1952).

11 連立一次方程式 $Ax=y$ を $A^*Ax=A^*y$ とし，これに conjugate-direction method を適用すると

$$x_{n+1}=x_n+(r_n, Ap_n)p_n/\|Ap_n\|^2$$

p_n として単位ベクトル $e_1=(1,0,\cdots\cdots,0), e_2=(0,1,0,\cdots\cdots,0),\cdots\cdots, e_n=(0,0,\cdots\cdots,0,1)$ をこの順序にとるのをくり返すとする。計算が簡単であるように，あらかじめ，A の行ベクトル A_i を正規化しておく。2 次元の問題にこの計算法を適用した場合を図 4 に示す。この計算法は **Kacmarz's procedure** ともよばれる[35]。

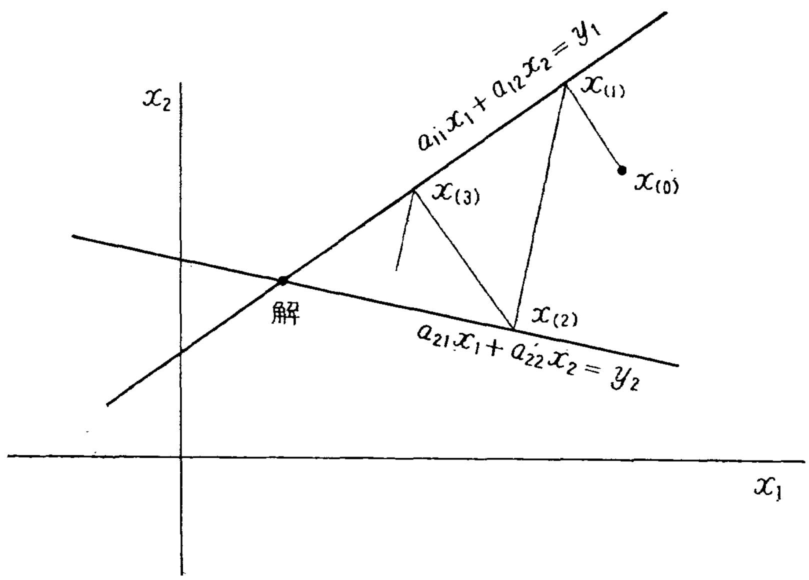

図 4

(VIII) 12 Moment problem。「T 1」必要性はノルム $\|x^*\|$ の定義からわかる。

十分性。任意の自然数 n を固定し，n 個の X の元 $\{x_k\}$ の一次結合全体を Y とする。Y の

任意の元 $\sum_k \alpha_k x_k$ に実数 $\sum_k \alpha_k y_k$ を対応させると，条件から対応は一意で，ある X の上の線型汎関数 y^* を定める。

$$y^*(x_k)=y_k, \quad k=1, 2, \cdots, n$$

y^* は Hahn-Banach の定理によって X^* の元に拡張できる。上の n が任意であったから，もとの方程式の解は確かに存在する。

13 Regular systems。 無限多変数連立一次方程式

$$x_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j+y_i, \quad i=1, 2, 3, \cdots$$

は，$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<1, \quad i=1, 2, 3, \cdots$ なる場合 regular systems といい，$|y_i|\leqq k(1-\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|)$，$k>0$ なるときこの方程式の有界な解 $|x_i|\leqq k$ が存在する。

これは縮小写像の原理によって証明される。54) 証明過程は反復計算としても使用できる。

また，y_i を有界と仮定すれば，すべての j について $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\leqq\delta<1$ であればやはり方程式の解が存在するといえる。これは「**8. T 1**」を使用して証明することもできる。

14 (T 3 の別証明) 任意の $z\in l_2$ に対し $(x_n, z)\to(x, z)$ のとき，x_n は x に弱収束するという。$\|x_n\|\leqq1$ なら $\{x_n\}$ は弱収束に関し相対コンパクトな集合である。14) p. 117. が完全連続な線型作用素とするとき，双線型汎関数 (Bx_n, y_n) は，x_n が x に y_n が y に弱収束すれば (Bx, y) に収束する。25) p. 206.

まず，十分大きい n をとれば常に (3) の解が存在することを示す。そのために，それが成立しないとすると

$$(Ax_n, f_i)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

をなりたたせる x_n が無限に多くの n について存在する。よって $(Ax_{n_k}, x_{n_k})=0$ で $\|x_{n_k}\|=1$ なる弱収束列があって $1=(-Bx_{n_k}, x_{n_k})$。よってその弱極限 x_0 は 0 でない。一方任意の f_j に対し n_k を十分大にとれば

$$\begin{aligned}0\equiv(Ax_{n_k}, f_j)&=(x_{n_k}, f_j)+(Bx_{n_k}, f_j)\\&\to(x_0, f_j)+(Bx_0, f_j)\\&=(Ax_0, f_j)\end{aligned}$$

より $Ax_0=0$ ゆえに $x_0=0$ となり，これは $1=(-Bx_0, x_0)$ に矛盾。

次に $x_n\to x$ ($x_n\neq0, x$ は真の解) を証明するのに

$$\begin{aligned}\|x-x_n\|^2&=(x-x_n, x-x_n)\\&=-(x, x_n)+(x_n, x_n)+(x, x)-(x_n, x)\\&=-(y, x_n)+(Bx, x_n)+(y, x_n)-(Bx_n, x_n)+(x, x)-(x_n, x)\\&=(B(x-x_n), x_n)+(x-x_n, x)\end{aligned}$$

が成立することに注意する。これによれば x_n が x に弱収束することを示せばよい。任意の f_j について (3) から $n \geqq j$ にとれば

$$(Ax_n, f_j) = (x_n, A^*f_j) = (y, f_j)$$

方程式 (2) が任意の $y \in H$ について解けるという仮定から，$\{f_j\}$ が完全系であれば $\{A^*f_j\}$ も完全系である。14) p. 141. よってあとは $\{x_n\}$ の有界性がいえれば目的は達せられる。「**5. T 6**」

$$0 \leqq m\|x_n\|^2 \leqq |(Ax_n, x_n)| = |(y, x_n)| \leqq \|y\|\|x_n\|$$

から　　$m\|x_n\| \leqq \|y\|$ よって $\|x_n\|$ が有界でないとすると，$(Ax_n, x_n)/\|x_n\|^2 \to 0$ から

$$\frac{(Bx_n, x_n)}{\|x_n\|^2} \to 1$$

ゆえに $\{x_n/\|x_n\|\}$ の弱収束部分列 $\{x_{n_k}/\|x_{n_k}\|\}$ をとるとその極限 x_0 は 0 でない。一方任意の f_i について

$$(Ax_0, f_j) = \lim_{n_k \to \infty} \left(A \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|},\ f_j \right)$$

x_n の作り方から

$$= \lim_{n_k \to \infty} \left(\frac{Ax}{\|x_{n_k}\|},\ f_j \right)$$

$\|x_{n_k}\| \to \infty$ としてよいから

$$= 0$$

ゆえに $\{f_j\}$ は完全系であったから $Ax_0=0$，$x_0=0$ これは矛盾。

補遺　行列ノルムのうちで従属ノルムを特徴づける問題について，最近発表された研究論文：

J. Stoer; On the characterization of least upper bound norms in matrix space, Num. Math. Vol. 6 (1964) pp. 302—314.

数値解析研究のために現在最適ではないかと思われる関数解析の入門書として次の書をつけ加えておく。3分の1しかまだ日本語に訳されていないが，目次によれば 53) の内容も包含する解説書のようである。

カントロヴィチ，アキロフ；ノルム空間の函数解析 1，(昭和 39) 東京図書. (昭和 34).

NAL TM-53
航空宇宙技術研究所
ベクトルのノルムと行列のノルム
——数値解法の収束条件その他への応用——

1965 年 5 月　　62 ページ

各種数値解法の収束性をノルムにより考察し，線型ノルム空間の基礎理論を用いて二三の計算過程に統一的観点を与える。そのために必要なベクトルと行列のノルムの性質を整理して提供することを主目的としている。具体的適用例として，連立一次方程式の condition，数値積分公式の安定条件，射影計算法などの問題を扱う。違った方面の計算法を一つの立場から論ずる上で，内容には，小さいとはいえ新しいくふうもかなりほどこしてある。一般空間の問題については説明が十分でなく有限の場合からの類推にたよったところもあるが，使用用語や定理の採録においては self-contained である。

I. 板垣芳雄
II. NAL TM-53
III. 518.1

NAL TM-53
航空宇宙技術研究所
ベクトルのノルムと行列のノルム
——数値解法の収束条件その他への応用——

1965 年 5 月　　62 ページ

各種数値解法の収束性をノルムにより考察し，線型ノルム空間の基礎理論を用いて二三の計算過程に統一的観点を与える。そのために必要なベクトルと行列のノルムの性質を整理して提供することを主目的としている。具体的適用例として，連立一次方程式の condition，数値積分公式の安定条件，射影計算法などの問題を扱う。違った方面の計算法を一つの立場から論ずる上で，内容には，小さいとはいえ新しいくふうもかなりほどこしてある。一般空間の問題については説明が十分でなく有限の場合からの類推にたよったところもあるが，使用用語や定理の採録においては self-contained である。

I. 板垣芳雄
II. NAL TM-53
III. 518.1

NAL TM-53
航空宇宙技術研究所
ベクトルのノルムと行列のノルム
——数値解法の収束条件その他への応用——

1965 年 5 月　　62 ページ

各種数値解法の収束性をノルムにより考察し，線型ノルム空間の基礎理論を用いて二三の計算過程に統一的観点を与える。そのために必要なベクトルと行列のノルムの性質を整理して提供することを主目的としている。具体的適用例として，連立一次方程式の condition，数値積分公式の安定条件，射影計算法などの問題を扱う。違った方面の計算法を一つの立場から論ずる上で，内容には，小さいとはいえ新しいくふうもかなりほどこしてある。一般空間の問題については説明が十分でなく有限の場合からの類推にたよったところもあるが，使用用語や定理の採録においては self-contained である。

I. 板垣芳雄
II. NAL TM-53
III. 518.1

NAL TM-53
航空宇宙技術研究所
ベクトルのノルムと行列のノルム
——数値解法の収束条件その他への応用——

1965 年 5 月　　62 ページ

各種数値解法の収束性をノルムにより考察し，線型ノルム空間の基礎理論を用いて二三の計算過程に統一的観点を与える。そのために必要なベクトルと行列のノルムの性質を整理して提供することを主目的としている。具体的適用例として，連立一次方程式の condition，数値積分公式の安定条件，射影計算法などの問題を扱う。違った方面の計算法を一つの立場から論ずる上で，内容には，小さいとはいえ新しいくふうもかなりほどこしてある。一般空間の問題については説明が十分でなく有限の場合からの類推にたよったところもあるが，使用用語や定理の採録においては self-contained である。

I. 板垣芳雄
II. NAL TM-53
III. 518.1

TM-46	翼胴結合金具の疲労特性	1964年12月	竹内和之, 藤枝郭俊
TM-47	ローター後流中のヘリコプター胴体の抵抗について	1965年1月	幸尾治朗, 岡遠一
TM-48	極超音速風胴用ペブル加熱器の予備実験	1965年2月	平木一, 橋本登, 林二識, 吉永崇
TM-49	Queen-Air 機の失速特性について	1965年2月	幸尾治朗, 岡遠一, 照井祐之, 鎌田幸男
TM-50	LS-A 型ロケットの曲げ剛性および振動試験について	1965年5月	中井暎一, 塙武敏, 泉日出夫
TM-51	超音速風胴空力データ表示記録装置	1965年5月	谷喬, 高島一明, 原亘利, 近藤洋史

注: 欠番は配布先を限定したもの

航空宇宙技術研究所資料53号

昭和40年5月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1,880
電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53