UDC 512.8
518.6

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-132

行列の最小固有値の一計算法

戸川隼人・戸川保子

1968年5月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既　刊　資　料

TM-87	極小型超音速機用姿勢制御装置の特性解析	1966年8月	池谷光栄, 畑山茂樹
TM-88	プロペラ後流偏向型 STOL 機の風胴試験（I）	1966年9月	犬丸矩夫, 岡部祐二郎, 北村清美, 川幡長勝, 木村友昭
TM-89	有孔板の振動について	1966年9月	川井忠彦, 泉 日出夫
TM-90	地上付近の横風の影響による小型ロケットの方位角変化	1966年9月	戸川隼人, 石黒登美子
TM-91	高速タービン翼列二次元試験	1966年10月	近藤 博, 蓑田光弘, 山崎紀雄
TM-92	リフトジェットエンジン試験設備（I）―台上運転設備―	1966年10月	大山耕一, 吉田 晃, 中山 晋, 菅原 昇, 五味光男
TM-94	J-3ジェットエンジン用タービン動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫, 宮地敏雄, 星谷昌二
TM-95	超軽量軸流圧縮機動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫, 宮地敏雄, 星谷昌二
TM-96	2024-T4および7075-T6有孔平板の曲げ疲労試験と2024-T4平滑丸棒の軸荷重疲労試験	1966年11月	佐野政明, 菰岡一洋
TM-97	高マッハ数風胴について（II）	1967年1月	吉永 崇, 井上建二, 広田正行, 楯 篤志
TM-98	40kWプラズマ発生装置の諸特性	1967年1月	野村茂昭, 相原康彦
TM-99	搭載機器用環境試験装置の特性	1967年2月	大月正男, 鈴木孝雄, 田畑浄治, 円居繁治
TM-100	二連型リフトエンジンの吸込み抵抗	1967年3月	近藤 博, 大城章一郎
TM-101	低圧環境下における固体ロケットモータの性能	1967年3月	望月 昌, 斎藤 信, 五代富文, 伊藤克彌, 湯沢克宜
TM-102	弾性支持片持板の振動	1967年3月	塙 武敏, 築地恒夫, 越出慎一, 林 洋一
TM-103	結合梁の振動について	1967年3月	築地恒夫, 林 洋一
TM-104	平板翼模型の固有振動モードの測定	1967年4月	中井暎一, 森田甫之
TM-105	非定常境界層方程式を含む放物型微積分方程式の数値解法	1967年4月	関口清子
TM-106	動安定微係数測定用風胴天秤について	1967年5月	高島一明, 榊原盛三, 原 亘利, 北出大三, 金成正好
TM-107	プロペラ後流偏向型STOL機の風胴試験（II）	1967年6月	犬丸矩夫, 岡部祐二郎, 北村清美, 川幡長勝, 高橋 侔, 木村友昭
TM-108	インダクタンス型小型圧力変換器の試作とその応用	1967年7月	長洲秀夫, 柳沢三憲
TM-109	ロケットの飛しょう径路計算のためのプログラム	1967年7月	戸川隼人, 石黒登美子
TM-110	二次元スラットおよびスロッテッドフラップの実験的研究（I）	1967年8月	犬丸矩夫, 北村清美, 川幡長勝
TM-111	リフトジェットVTOL 機の離陸径路に関する近似解	1967年8月	西村博史
TM-112	極超音速風胴ペブル加熱器の特性	1967年8月	橋爪 宏, 橋本 登
TM-113	リフトジェットエンジン試験設備（II）	1967年9月	森田光男, 岩部柱相, 関根静雄, 武田克巳
TM-114	五段遷音速軸流圧縮機の空力設計	1967年9月	藤井昭一, 松木正勝, 五味光男
TM-115	燃料蒸発管に関する研究（I）	1967年9月	大塚貞吉, 鈴木邦男, 田丸 卓, 乙幡安雄

行列の最小固有値の一計算法*

戸 川 隼 人**・戸 川 保 子**

行列の最小固有値の新しい計算法を考案し，実際問題に適用してみて満足すべき結果が得られたので報告する。この方法は，零要素の多い大きな行列を扱う場合に有利で，たとえば有限要素法による座屈解析や振動解析に応用することができる。また，工学上重要な

$$Ax = \lambda Bx$$

の形の固有値問題にも適用可能で，特に行列Aが対称で正値の場合に，その性質を利用して計算時間を短縮できるという利点がある。

1. 従 来 の 解 法

本論との関係が深いので，従来の解法について簡単な説明を加えておく。最小固有値*** の計算法としては，これまで主として，つぎのような方法が使用されてきた。

(解法１) 逆行列法[1]

行列 A の最小固有値 λ_{min} は，A の逆行列 A^{-1} の最大固有値 μ_{max} の逆数である。

$$\lambda_{min} = 1/\mu_{max}$$

逆行列 A^{-1} は掃出法などにより計算でき[2]，最大固有値は乗ベキ法などによって計算できるから[2]，その逆数をとって最小固有値 λ_{min} が求められることになる。

この方法は，あまり大きくない行列に関しては良好な結果が得られるが，大きな行列の場合には逆行列の計算に時間的および精度的な困難があり，逆行列の精度が良くないと最小固有値の精度も悪くなるので，最後に検算して精度不十分と判定された場合，逆行列計算の最初から（高精度計算などを用いて）やりなおさなければならない点も不便である。

(解法２) ノイマンの方法[3]

一般に，行列 A の固有値を λ とすると，

$$M = cI - A$$

で作られる行列 M の固有値 μ は，

$$\mu = c - \lambda$$

である。ただし，c はスカラ，I は単位行列。

説明を簡単にするため，固有値は全部正とする（固有値が全部負ならば符号だけ逆にすれば以下の議論がそのまま成立する。定符号でない行列の絶対値最小の固有値を求めることは，この方法では不可能である)。c として，A の最大固有値より少し大きい数（これの推定法はいろいろある。付録１参照）をとれば，M の固有値はすべて正で，その大きさの順序は対応する λ の順序の逆になる。したがって A の最小固有値は，

$$\lambda_{min} = c - \mu_{max}$$

により計算できる。ただし μ_{max} は M の最大固有値で乗ベキ法などによって求める。

この方法も行列が小さい場合には良いが，行列が大きくなると，一般的傾向として最大固有値と最小固有値のひらきが大きくなるため，非常に大きな値の c と μ_{max} の差として非常に小さな λ_{min} を求めるということになり，良い精度を得ることが困難になる。その反対に，最大固有値と最小固有値の差が小さい場合には上のような桁落ちの心配がないかわりに，隣接固有値の分離に苦労することになり，いずれにしても簡単には良い結果は得られない。

Kincaid の方法[4],[5] は，，ノイマンの方法の拡張であるが，最小固有値だけを求める場合には，ノイマンの方法より有利な公式を簡単に導くことができるとは考えられない。

2. 新しい解法の基本公式

提案する新しい解法の基本的な手順は次のとおりである。

i） 任意のベクトル x_0 をとり，出発値とする。

* 昭和43年４月４日受付

** 計 測 部

*** 本文中，特にことわりのない限り，「最小固有値」とは「絶対値が最小の固有値」を意味するものとし（最大についても同様），これらは重根でないと仮定する。

ii) x_0 を右辺に置き，x_1 を未知数として連立一次方程式

$$A\,x_1 = x_0$$

を解く。

iii) 上で得られた x_1 を右辺に移し，x_2 を未知数として

$$A\,x_2 = x_1$$

を解く。

iv) 以下同様に，一般に x_k が求められたらこれを右辺に置いて連立一次方程式

$$A\,x_{k+1} = x_k$$

を解いて x_{k+1} を求める。

v) 上記 iv の反復は，このまま多数回くりかえすと，x_k の絶対値が異常に増大（または減少）してしまうことがあるので，適当に調整を行なう。たとえば，反復数回ごとにノーマライズして長さを1にする。

vi) 上記 iv，v の反復で作られるベクトル列 $\{x_k\}$ は最小固有値に対応する固有ベクトルに収束するから，適当なところで反復を打ち切り，固有値を求める（近似的な固有ベクトルから固有値を求める方法はいろいろあるが，たとえば付録2参照)。

この方法は原理的には従来の解法1の変形で，あらかじめ A^{-1}を計算しておくかわりに，反復1回ごとに連立一次方程式

$$A\,x_{k+1} = x_k$$

を解くことにより

$$x_{k+1} = A^{-1}\,x_k$$

を求めているだけである。したがって解法の妥当性は明らかであるが，念のため証明しておくと，以下のようなことになる。

行列 A の固有値を，絶対値の大きい順に λ_1, λ_2, ……, λ_n とする。これに対応する固有ベクトルを e_1, e_2, ……, e_n とし，これらはノーマライズして

$$|\,e_i\,| = 1 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

になっているとする。λ_i が固有値であるから

$$A\,e_i = \lambda_i\,e_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

また

$$A^{-1}\,e_i = \lambda_i^{-1}\,e_i$$

任意のベクトルは e_1, e_2, ……, e_n の一次結合で書けるから，x_0 をこの形で表現して

$$x_0 = \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\,e_n$$

とする（α_1, α_2, ……, α_n はスカラ)。これに ii)の操作をほどこすと，

$$\begin{aligned} x_1 &= A^{-1}\,x_0 \\ &= \alpha_1\,A^{-1}\,e_1 + \alpha_2\,A^{-1}\,e_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\,A^{-1}\,e_n \\ &= \alpha_1\,\lambda_1^{-1}\,e_1 + \alpha_2\,\lambda_2^{-1}\,e_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\,\lambda_n^{-1}\,e_n \end{aligned}$$

また iii) により

$$\begin{aligned} x_2 &= A^{-1}\,x_1 \\ &= A^{-1}\,(\alpha_1\,\lambda_1^{-1}\,e_1 + \alpha_2\,\lambda_2^{-1}\,e_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\,\lambda_n^{-1}\,e_n) \\ &= \alpha_1\lambda_1^{-1}A^{-1}e_1 + \alpha_2\lambda_2^{-1}A^{-1}e_2 + \cdots + \alpha_n\,\lambda_n^{-1}\,A_n^{-1}e_n \\ &= \alpha_1\lambda_1^{-1}\lambda_1^{-1}e_1 + \alpha_2\,\lambda_2^{-1}\lambda_2^{-1}e_2 + \cdots + \alpha_n\,\lambda_n^{-1}\,\lambda_n^{-1}\,e_n \\ &= \alpha_1\lambda_1^{-2}\,e_1 + \alpha_2\,\lambda_2^{-2}\,e_2 + \cdots\cdots \alpha_n\lambda_n^{-2}\,e_n \end{aligned}$$

同様に iv) の反復の結果，

$$x_k = \alpha_1\lambda_1^{-k}\,e_1 + \alpha_2\,\lambda_2^{-k}\,c_2 + \cdots + \alpha_n\,\lambda_n^{-k}\,c_n$$

これを書きかえると，(λ_n^{-k} でくくると)，

$$x_k = \lambda_n^{-k}\left\{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \alpha_1\,e_1 + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^k \alpha_2\,e_2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^k \alpha_{n-1}\,e_{n-1} + \alpha_n\,e_n\right\}$$

λ_n は最小固有値であるから

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right| < 1,\ \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right| < 1, \cdots,\ \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right| < 1$$

したがって $k\to\infty$ のとき

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \to 0,\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^k \to 0,\ \cdots,\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^k \to 0$$

となり最後の項 $\alpha_n\,e_n$ だけが残る。大かっこ{ }の外側に λ_n^{-k} が掛かっているが，手順 v)で適当に調整されるので，その絶対値はある範囲を出ないとみることができ，ここではベクトルの方向だけを問題にしているのであるから λ_n^{-k} は関係ないといってよい。したがって，常数倍を無視すれば

$$x_k \to e_n \qquad (k\to\infty)$$

なお付録2の妥当性については，その x_k の所に e_n を代入してみることにより容易に証明することができる。

以上の証明から明らかなように，新しい解法の上記手順で解けるための条件は，

1. A が正則であること，すなわち

$$\det|A| \neq 0$$

2. 最小固有値が実数で，重根あるいは絶対値の等しい根がないこと。
3. 出発値の中の e_n 成分が0でないこと，すなわち，$\alpha_n \neq 0$

このうち条件2は一般の乗べキ法の場合と同様に手順 v)を変更してやればある程度解決することができる。すなわち十分に多数回の反復を行なったのち，x_kの中の絶対値の比較的大きな成分を用いて

$$a\,x_{k+2} + b\,x_{k+1} + c\,x_k = 0$$

を満足するような係数 a, b, c を求めれば

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

により複素根は求められる。条件3は，あらかじめ確認することができないので，収束が悪い場合に x_0 をとりかえて試みるのが普通である。

3. 計算時間を短縮する方法

新しい解法は，上述の基本公式をそのまま適用した場合には，従来の解法より有利な点は少なく，むしろ計算時間が長くなるくらいである。しかし以下に述べる手法を用いることにより計算時間は著しく短縮することができる。

a) 連立方程式は反復法で解く

連立方程式の計算に反復法が有利であることは，先の報告[1]でも強調したが，行列のサイズが大きく零の要素の個数が多い場合にノンゼロテーブル法を用いて反復法で解くことにより計算時間と記憶容量を非常に少なく済ませることができる。

b) 反復は適当に早目に打ち切る。

新しい解法における連立方程式の計算の目的は，その証明から明らかなように，近似ベクトルの中の e_n 成分を増大させ他の成分を消すことである。したがって，この目的がある程度まで達成されるならば，それ以上に精密に方程式を解く必要はないわけで，適当なところで打ち切って次のステップに進む方が有利である。（後に5で示すように，連立方程式に関しては反復公式を1回適用するだけで打ち切ってしまうやりかたも考えられる。ただし，最後に固有値を求める際には十分な回数のくりかえしが必要である。）

c) 初期値のとりかた

新しい解法に現れる連立方程式は

$$A\,x_{k+1} = x_k$$

であるが，その $k \to \infty$ の時を考えてみると

$$A\,x_{k+1} = \lambda_n\,x_{k+1} = x_k$$

すなわち

$$x_{k+1} = x_k/\lambda_n$$

となるはずである。したがって，k が有限の値で，また λ_n が未知であっても，付録2により λ_n の近似値 λ_n を求めて

$$x_{k+1} = x_k/\lambda_n$$

を作り，これを第1近似値として

$$A\,x_{k+1} = x_k$$

を解くのに用いれば，良い結果が早く得られるはずである。

4. $Ax=\lambda Bx$ 型の場合

これまでに述べてきたのは普通の固有値問題

$$A\,x = \lambda\,x$$

の解法であったが，工学上の問題ではこのほか，

$$A\,x = \lambda\,B\,x$$

（いいかえれば

$$(A - \lambda\,B)\,x = 0$$

あるいは

$$\det|A - \lambda\,B| = 0$$

とも書ける）の形の固有値問題がしばしば現れる。新しい解法で，この種の固有値を計算するには，以下のようにする。

i) 任意のベクトル x_0 をとり，出発値とする。

ii) x_0 に B をかけて y_1 とする。

$$B\,x_0 = y_1$$

この y_1 を右辺に置いて，x_1 を未知数とする連立一次方程式

$$A\,x_1 = y_1$$

を解く。

iii) 上で得られた x_1 に B をかけて y_2 とする。

$$B\,x_1 = y_2$$

この y_2 を右辺に置いて，x_2 を未知数として，連立一次方程式

$$A\,x_2 = y_2$$

を解く

iv) 以下同様にして，一般に，既に求められた x_k に B をかけて

$$B\,x_k = y_k$$

により y_n を作り，連立一次方程式

$$A\,x_{k+1} = y_k$$

を解いて x_{k+1} を求める。

v) この反復中，絶対値が異常に増大または減少しないように適当に調整を行なう。

vi) 十分な反復を行なったのち，たとえば[5]

$$\lambda = \frac{(x_k^T\,A\,x_k)}{(x_k^T\,B\,x_k)}$$

により最小固有値を得る。

証明は，普通の場合の証明の A の所に $B^{-1}A$（したがって A^{-1} のかわりに $A^{-1}B$）を置きかえてやれば全く同様である。

5. 収束率に関する一考察

新しい解法の収束率は連立一次方程式の解法とその反復の打切り条件，初期値の選び方などに関係するので，一般的な形で論ずるのは困難である。そこで，最も簡単な方式を用いた場合についての収束率を求めてみる。

基本公式の手順 iv)で，連立一次方程式

$$A\,x_{k+1} = x_k$$

を解くが，これに反復法を用いるとして，第1近似解を $x_{k+1}^{(1)}$，第2近似解を $x_{k+1}^{(2)}$，…，第 m 近似解を $x_{k+1}^{(m)}$ で表わすことにする。反復法の公式としては，簡単なヤコビの方法[7]を用いることにする。すなわち

$$x_{k+1}^{(m+1)} = (I-A)\,x_{k+1}^{(m)} + x_k$$

を m に関して反復適用するのがヤコビの方法の普通の計算法で，$m\to\infty$ のとき真の x_{k+1} に収束するための十分条件としては

$$a_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| < 2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

であればよい。この内の第1の条件はあらかじめ各行を対角要素で割っておけばよい（そのかわり，あとで補正してやる必要があるが）から，非対角要素の行和が対角要素より小ならば（いずれも絶対値で考えて）ヤコビの方法を適用できることになる。

ところで $m\to\infty$ まで反復するのならば新しい解法が添字 k の反復に関して収束することは既に証明済みであるし，その収束率は乗ベキ法で最大固有値を求める場合と同一であるから，計算時間を短縮する方法の b で述べたように小数回の m で打ち切っても収束することを以下で証明し，その収束率を求めてみる。そこで，$m=1$ という場合を考える。すなわち，反復法と称しても実際には反復などはせず，公式を1回だけ適用して

$$x_{k+1}^{(2)} = (I-A)\,x_{k+1}^{(1)} + x_k$$

を答としてしまう場合である。右辺の $x_{k+1}^{(1)}$ は第1近似解で，先に計算時間を短縮する方法の項で述べたように，固有値の近似値 λ を用いて

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k/\lambda$$

とすれば最も良いのであるが，ここでは議論を簡単にするため

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k$$

としてみると反復式は簡単になって

$$x_{k+1} = (I-A)\,x_k + x_k$$

すなわち

$$x_{k+1} = (2I-A)\,x_k$$

を $k=1, 2, \cdots\cdots$ について順に計算してゆけばよいことになる。

ここで基本的な解法の証明の場合と同様に x_0 を固有ベクトル成分に分けて

$$x_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

とすれば

$$x_1 = (2I-A)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(2I-A)\,e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(2-\lambda_i)\,e_i$$

一般に

$$x_k = \sum_{i+1}^{n}\alpha_i\,(2-\lambda_i)^k e_i$$

先に行列 A に付けた条件

$$a_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sum|a_{ij}| < 2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

と付録1から，

$$0 < \lambda_i < 2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

したがって最大固有値は2に近く $(2-\lambda_1)$ は0に近く，反対に最小固有値は0に近く $(2-\lambda_n)$ は2に近く，基本的解法の証明と同様に（適当にスケーリングすれば）$k\to\infty$ のとき

$$x_k \to e_n$$

となることがわかる。収束の目安としては，最小固有値に対応する固有ベクトル e_n と $x_k/\|x_k\|$ の差のノルムをとると，

$$\|e_n-(x_k/\|x_k\|)\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i\,(2-\lambda_i)^k}{l_k} + \left(\frac{\alpha_n(2-\lambda_n)^k}{l_k}-1\right)$$

ただし

$$l_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,(2-\lambda_i)^{2k}}$$

したがって最小固有値 λ_n と他の固有値 λ_i の $(2-\lambda)$ の比，すなわち

$$\frac{2-\lambda_n}{2-\lambda_i}$$

が大きいほど速く収束することがわかる。ただしこれは連立方程式の解法，打切り回数，初期値のとりかたを前記のとおりにした場合であって，新しい解法一般に成立する性質ではない。

連立一次方程式の解法としてはヤコビの方法よりも速いものがいろいろあり[1]，その反復回数も経験によれば1回よりも数回以上の方が良いようであり，第1近似解も右辺をそのまま用いるよりも固有値で割っておく方が有利であるから，新しい解法の収束率は，上に得られた値よりも，かなり改善できるはずである。

6. 従来の解法との比較

先に従来の解法1として述べた方法と本法を比較すると，新しい解法は逆行列を求める必要がないので，精度が十分でないとき反復回数を増すだけで簡単に改良できる点が有利である。計算時間はノンゼロテーブルの使用による効果が大きければ新しい解法が有利となり，それ以外の時は従来の解法の方が有利となる。

参考のため，計算時間実測値の比較例を示すと，$Ax=\lambda Bx$ 型の問題で行列のサイズが $n=66$，零要素個数の割合が88.7%，計算機は HITAC 5020F で

従来の解法1	14秒
新しい解法	6秒

であった。この問題は東京大学生産技術研究所の吉村信敏氏が扱った座屈の計算のデータを使わせて戴いたもので，この種の問題の一つの典型とみられるものである。ただし，この場合は行列の大きさが66×66で比較的小さく，32K語のコアメモリにもそのまま収容できるため，ノンゼロテーブル法の効果はあまり著しく現れていない。もっと大きな問題で普通の方法では行列をコアメモリに収容できなくなり磁気ドラムあるいは磁気テープを用いることになれば，新しい解法の有利さがはっきりと出てくるはずである。

つぎに従来の解法2との比較を考える。先に収束率を論じた時と同じく

$$|a_{ii}|=1 \qquad (i=1,\ 2,\cdots n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|<2 \qquad (i=1,\ 2,\cdots n)$$

の場合，付録1から推定すると最大固有値は

$$|\lambda_{max}|<\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<2$$

そこで解法2の c として $c=2$ とすると

$$M=2I-A$$

となる。この M の最大固有値を乗ベキ法で求めるとすると，その反復式は

$$x_{k+1}=(2I-A)\,x_k$$

となる。ところで，この式は，新しい解法の収束率を論じた時に出て来た式と同一である。すなわち，この場合には新しい解法の一種と従来の解法2とは同じことになる。しかし収束率の所でも述べたように，そこで用いた方法は新しい解法の中の最良のものではなく連立方程式の解法の選択その他により更に収束を速くすることができる。したがって新しい解法は，悪くいっても従来の解法2と同程度，計算時間の短縮に留意すれば，従来よりも良い成績を得ることができるはずである。

文　　献

1) 戸川隼人；固有値問題 $(\sum\lambda^k A_k)\,x=0$ の数値解法，航技研報告TR—45，(1963)
2) 山内二郎，森口繁一，一松　信（共編）；電子計算機のための数値計算法Ⅰ，培風館，(1965)
3) V. Bargmann, D. Montgomery and J. von Neumann; Solution of Linear Systems of High Order, Bureau of Ordnance, NORD-9596
4) W. M. Kincaid; Numerical Methods for Finding Characteristic Roots and Vectors of Matrices Quart. Appl. Math., vol. 5, (1947)
5) 森口繁一，高田　勝；数値計算法，現代応用数学講座B13-Ⅱ，岩波書店 (1958)
6) E. Bodewig; Matrix Calculus, North-Holland Pub., (1959)
7) 板垣芳雄；ベクトルのノルムと行列のノルム，航技研資料TM—53，(1965)
8) J. Todd (ed.); Survey of Numerical Analysis, Mc. Graw-Hill, (1962)

付録 1 最大固有値の上界

「最大固有値より少し大きい数」を求めるための公式を二三挙げる[6]。比較的精密なものから，ごく粗いものまで，内容的に少し重復しているものもあるが，基本的にはいずれも固有値は行列のノルムを越えない，

$$\|A\| \geqq \lambda$$

という定理に含まれる[7]。

$$|\lambda|_{max} \leqq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|\lambda|_{max} \leqq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|\lambda|_{max} \leqq \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

$$|\lambda|_{max} \leqq \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$$

$$|\lambda|_{max} \leqq n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$|\lambda|_{max} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

なお正値行列に関しては以上のほか次式が成立する。

$$\lambda_{max} \leqq \mathrm{Trace}\ (A)$$

付録 2 固有ベクトルの近似値を用いて固有値を求める方法

行列 A の固有ベクトル x の近似値を x_K とする。この x_k から計算される固有値（の近似値）を λ_K で表わすと，

Rayleigh 商による方法

$$\lambda_k = \frac{(A\,x_k,\ x_k)}{(x_k,\ x_k)}$$

Schwarz 商による方法

$$\lambda_k = \frac{(A\,x_k,\ A\,x_n)}{(Ax_k,\ x_k)}$$

絶対値最大の成分の比による方法

$$\lambda_k = \frac{(Ax_k\ \text{の絶対値最大の成分})}{(\text{上記成分に対応する}\ x_k\ \text{の成分})}$$

長さの比による方法

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{(A\,x_k,\ A\,x_k)}{(x_k,\ x_k)}}$$

なお，新しい解法の場合には，上記 $A\,x_k$ のかわりに x_{k-1} を用いることができる。（従来の乗ベキ法の場合には $A\,x_k = x_{k+1}$）

付録 3 最小固有値の存在範囲

最小固有値は以下に示す公式により概算できる。これを用いて出発値のベクトルを定めれば計算時間の点で非常に有利になる。またこれらの公式は検算その他の参考にもなるであろう。

i) Frobenius の定理[6]

$$|\lambda|_{min} \leqq \min_i \left(|a_{ij}| - \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|\right)$$

ii) A がエルミット行列ならば[8]

$$\lambda_{min} \leqq \min\ a_{ij}$$

iii) Wittmeyer-Wegner の定理[6]

A が正値行列ならば

$$\lambda_{min} \geqq \det\ A \cdot \left(\frac{n-1}{\mathrm{Trace}\,(A) - \lambda_{min}}\right)^{n-1}$$

この式は右辺にも λ_{min} が入っているので，この非線形方程式を反復法で解いて限界を求める。

既　刊　資　料

TM-87	極小型超音速機用姿勢制御装置の特性解析	1966年8月	池谷光栄，畑山茂樹
TM-88	プロペラ後流偏向型 STOL 機の風胴試験（I）	1966年9月	犬丸矩夫，岡部祐二郎 北村清美，川幡長勝 木村友昭
TM-89	有孔板の振動について	1966年9月	川井忠彦，泉　日出夫
TM-90	地上付近の横風の影響による小型ロケットの方位角変化	1966年9月	戸川隼人，石黒登美子
TM-91	高速タービン翼列二次元試験	1966年10月	近藤　博，養田光弘 山崎紀雄
TM-92	リフトジェットエンジン試験設備(I) —台上運転設備—	1966年10月	大山耕一，吉田　晃 中山　晋，菅原　昇 五味光男
TM-94	J-3ジェットエンジン用タービン動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫，宮地敏雄 星谷昌二
TM-95	超軽量軸流圧縮機動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫，宮地敏雄 星谷昌二
TM-96	2024-T4および7075-T6有孔平板の曲げ疲労試験と2024-T4平滑丸棒の軸荷重疲労試験	1966年11月	佐野政明，菰岡一洋
TM-97	高マッハ数風胴について（II）	1967年1月	吉永　崇，井上建二 広田正行，楯　篤志
TM-98	40kWプラズマ発生装置の諸特性	1967年1月	野村茂昭，相原康彦
TM-99	搭載機器用環境試験装置の特性	1967年2月	大月正男，鈴木孝雄 田畑浄治，円居繁治
TM-100	二連型リフトエンジンの吸込み抵抗	1967年3月	近藤　博，大城章一郎
TM-101	低圧環境下における固体ロケットモータの性能	1967年3月	望月　昌，斎藤　信 五代富文，伊藤克彌 湯沢克宜
TM-102	弾性支持片持板の振動	1967年3月	塙　武敏，築地恒夫 越出慎一，林　洋一
TM-103	結合梁の振動について	1967年3月	築地恒夫，林　洋一
TM-104	平板翼模型の固有振動モードの測定	1967年4月	中井暎一，森田甫之
TM-105	非定常境界層方程式を含む放物型微積分方程式の数値解法	1967年4月	関口清子
TM-106	動安定微係数測定用風胴天秤について	1967年5月	高島一明，榊原盛三 原　亘利，北出大三 金成正好
TM-107	プロペラ後流偏向型STOL機の風胴試験（II）	1967年6月	犬丸矩夫，岡部祐二郎 北村清美，川幡長勝 高橋　侔，木村友昭
TM-108	インダクタンス型小型圧力変換器の試作とその応用	1967年7月	長洲秀夫，柳沢三憲
TM-109	ロケットの飛しょう径路計算のためのプログラム	1967年7月	戸川隼人，石黒登美子
TM-110	二次元スラットおよびスロッテッドフラップの実験的研究(I)	1967年8月	犬丸矩夫，北村清美 川幡長勝
TM-111	リフトジェット VTOL 機の離陸径路に関する近似解	1967年8月	西村博史
TM-112	極超音速風胴ペブル加熱器の特性	1967年8月	橋爪　宏，橋本　登
TM-113	リフトジェットエンジン試験設備(II)	1967年9月	森田光男，岩部柱相 関根静雄，武田克巳
TM-114	五段遷音速軸流圧縮機の空力設計	1967年9月	藤井昭一，松木正勝 五味光男
TM-115	燃料蒸発管に関する研究(I)	1967年9月	大塚貞吉，鈴木邦男 田丸　卓，乙幡安雄

Printed in Japan