

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-151

フラッタ解析法の再検討

(フラッタ解析法の研究 その1)

市川輝雄

1968年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 資 料

TM-106	動安定微係数測定用風洞天秤について	1967年5月	高島一明, 柳原盛三 原亘利, 北出大三 金成正好
TM-107	プロペラ後流偏向型STOL機の風洞試験(II)	1967年6月	犬丸矩夫, 岡部祐二郎 北村清美, 川幡長勝 高橋 侔, 木村友昭
TM-108	インダクタンス型小型圧力変換器の試作とその応用	1967年7月	長洲秀夫, 柳沢三憲
TM-109	ロケットの飛しょう径路計算のためのプログラム	1967年7月	戸川隼人, 石黒登美子
TM-110	二次元スラットおよびスロテッドフラップの実験的研究(I)	1967年8月	犬丸矩夫, 北村清美 川幡長勝
TM-111	リフトジェットVTOL機の離陸径路に関する近似解	1967年8月	西村博史
TM-112	極超音速風洞用ペブル加熱器の特性	1967年8月	橋爪 宏, 橋本 登
TM-113	リフトジェットエンジン試験設備(II)	1967年9月	森田光男, 岩部柱相 関根静雄, 武田克己
TM-114	五段遷音速軸流圧縮機の空力設計	1967年9月	藤井昭一, 松木正勝 五味光男
TM-115	燃料蒸発管に関する研究(I)	1967年9月	大塚貞吉, 鈴木邦男 田丸 卓, 乙幡安雄
TM-116	高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて(I)	1967年9月	鈴木邦男, 相波哲朗
TM-117	ロケット用テレメータ機上装置の集積回路化	1967年9月	新田慶治, 松崎良継
TM-118	操縦桿レート信号によるアイアンバード制御の安定効果とパイロットのモデルについて	1967年9月	村上 力, 真柳光美
TM-119	ベーン型気流方向検出器の特性	1967年11月	田畑浄治, 松島弘一 成田健一, 塚本憲男
TM-120	円錐管レンズの設計とその応用	1967年11月	山中龍夫, 奥 嶋 澄 男
TM-121	大きなマトリクスの逆行列計算および連立一次方程式の計算のためのプログラミング技術	1967年11月	戸川隼人, 戸川保子
TM-122	NAL-7-P ロケットの強度および燃焼試験結果	1967年11月	竹中幸彦, 古田敏康 小川欽一, 朝田洋雄 豊原恒彦, 五代富文 湯沢克宜, 伊藤 克 弥 西村 久 男
TM-123	“NAL-16・31” および “NAL-25・31” 二段ロケットの振動試験	1967年11月	中井 一, 古 関 昌 次 田寺 俊, 高 木 俊 朗 安藤 泰, 森 高 木 甫 峯岸 正, 森 高 木 孝 太田 幹, 雄 雄 菊 地 男
TM-124	吹出式超音速風洞の集合胴圧力制御について	1967年12月	外立政隆, 近藤洋史 原 亘 利
TM-125	航技研 1m×1m吹出式超音速風洞におけるハーフモデル試験について	1968年2月	石原久蔵, 原 亘 利 柳原盛三, 関 根 英 夫
TM-127	2024-T3アルミニウム合金の3-bay有孔補強平板の軸荷重による疲労特性	1968年4月	飯田宗四郎, 猿本光明 斎藤信一郎
TM-130	リフトエンジンの自然吸込みについて	1968年4月	近藤 博, 大城章一郎
TM-131	遷音速タービン翼列二次元試験(III)	1968年5月	近藤 博, 養田光弘 山崎紀雄, 古川 昇
TM-132	行列の最小固有値の一計算法	1968年5月	戸川隼人, 戸川保子
TM-133	フィラメント・ワインディング円筒の強度特性に関する研究	1968年5月	竹中幸彦, 斉藤浩一 古田敏康, 川島矩一郎 三本木茂夫, 小川欽一 越出慎一, 朝田洋彦 態倉郁夫, 大竹 邦 彦

# フラッタ解析法の再検討\*

(フラッタ解析法の研究 その1)

市川輝雄\*\*

## Reconsideration of methods for flutter analysis

Teruo ICHIKAWA

Three different types of fundamental equations of flutter, that is, the differential equation, the integral equation, and the energy principle are formulated for a cantilever wing, and their relationship is clarified. Equations of various approximate methods derived from the fundamental equations are all written in matrix forms by which it is made possible to find interrelations of the approximate equations and to discuss their merits and demerits from the standpoint of using a digital computer. Convergence of approximate solutions when increasing the number of degrees of freedom is examined by numerical calculations.

記号			
$C^{zz}$	曲げの影響関数	$V$	コンプリメンタリ・エネルギー
$C^{\theta\theta}$	捩りの影響関数	$\delta W$	仮想仕事
$EI$	曲げ剛性	$\delta W_C$	補仮想仕事
$GJ$	捩り剛性	$w$	上下変位
$I_y$	単位翼幅の慣性能率	$\theta$	捩れ角
$K$	運動のエネルギー	$\omega$	円振動数
$L$	単位翼幅の揚力	$[A]$	空力係数のマトリックス
$L_w, L_\theta$	揚力の係数	$[C]$	影響係数のマトリックス
$l$	翼幅 (付根から翼端までの長さ)	$[F]$	モード関数のマトリックス
$M$	曲げモーメント	$[F_d]$	モード関数の微分のマトリックス
$M_y$	単位翼幅の空気力モーメント	$[K]$	剛性マトリックス
$M_w, M_\theta$	空気力モーメントの係数	$\{L\}$	空気力のベクトル
$m$	単位翼幅の質量	$[M]$	質量マトリックス
$N$	分割数	$\{q\}$	一般座標のベクトル
$S_y$	単位翼幅の静的不平衡	$[U]$	$= [M] + [A]$
$T$	トルク	$\{w\}$	変位ベクトル
$t$	時間	$\{w_d\}$	変位の微分のベクトル
$U$	歪エネルギー, 速度		

### 1. ま え が き

最近の航空機の大型化と高速化に伴ってフラッタ解析もますます精密さが要求され、電子計算機を用いた大規模な計算が行なわれるようになって来た。すな

\* 昭和43年11月25日受付

\*\* 機体第一部

わち構造の面では最近目覚ましい進歩を遂げつつある有限要素法、また空気力の面では非定常揚力面理論の積分方程式を数値的に解く方法などが設計の段階の実用的な計算に取り入れられている<sup>1)</sup>。

我が国でも最近相ついで新しい航空機の開発が始まり、信頼できる解析法を早急に確立する必要がある。本報はその為の努力の第一段階として、縦横比の大きい片持翼に問題を限定し、フラッタの運動方程式を導びく種々の方法を統一的な観点から整理し、電子計算機を使用する立場でそれらの優劣を再検討する。

従来の解析法の主流はいうまでもなくレーリー・リッツ法である。主翼の曲げ捩りフラッタを例にとると、多くの場合、それぞれ1個の曲げのモードと捩りのモードを仮定し、従ってフラッタ行列式の根は2次方程式を解く事によって求められ、この事が電子計算機のない時代には絶対的に有利な条件であった。翼に集中質量のような構造的不連続があると、この有利さが失われて大きい誤差を生ずることは相当以前からわかっている<sup>2)</sup>。これはもちろん多くの自由度をとれば改善される筈で、現在では少しもむずかしい事ではない。かくしてフラッタ解析におけるレーリー・リッツ法の地位は少しも低下していないように見える<sup>1)</sup>。

レーリー・リッツ法が連続的な変形を仮定するのに反し、振動解析の分野では構造を有限個の要素に分割して、そのおのおのに独立な自由度を与える離散質量法 (discrete mass あるいは lumped mass method) の考えは古くからあり、現在では最も有力な方法となっている<sup>1), 3), 4)</sup>。この考えをフラッタに応用することは既に1940年代に試みられたが<sup>5)</sup>、比較的多くの自由度を必要とするので、計算の困難から実用にならなかった。その後 van de Vooren は積分方程式から出発して事実上同様な方法を提案し<sup>6)</sup>、オランダでは現在実用的な解析法になっているといわれる<sup>7)</sup>。しかしこの方法に関する報告は甚だ少なく、その他ではわずかに Rodden の仕事<sup>8)</sup>が目に留まるに過ぎない。本報は従来あまり知られていなかったこの方法を広く紹介する意図をも含んでいる。

電子計算機による演算にはマトリックスが便利であることはいうまでもない。離散質量法は運動方程式をマトリックスで書くのに最も適しているが、レーリー・リッツ法といえどもその例にもれる訳ではない。本報では近似解法のフラッタの運動方程式はすべてマトリックスで書く。

剛体としての胴体の自由度、あるいは胴体、尾翼の変形の自由度等は本報では考慮しない。これらは非定

常揚力面理論による空気力の計算と共に本研究の今後の課題である。

## 2. 基礎方程式

簡単の為にモデルとして縦横比の大きい片持翼を考え、通常行なわれるように次の仮定をする：

- (1) 捩りに対しては St. Venant の解に従う。
- (2) 曲げに対しては工学的梁理論に従い、剪断力の影響を省略する。
- (3) 真直ぐな弾性軸が存在する。
- (4) 曲げ振動に対して回転慣性を省略する。
- (5) 空気力は strip theory を適用する。

以上の仮定の下でこのモデルの運動を厳密に記述する方程式はいろいろの形に書く事ができる。

### 2.1 微分方程式

調和振動を仮定して上下変位  $w(y, t)$  と捩れ角  $\theta(y, t)$  を

$$\begin{aligned} w(y, t) &= \bar{w}(y) e^{i\omega t} \\ \theta(y, t) &= \bar{\theta}(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1)$$

で表わすと、フラッタの運動方程式は微分方程式の形で

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \left\{ EI(y) \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} \right\} &= \omega^2 \{ u_1(y) \bar{w}(y) + u_2(y) \bar{\theta}(y) \} \\ \frac{d}{dy} \left\{ GJ(y) \frac{d \bar{\theta}}{dy} \right\} &= -\omega^2 \{ v_1(y) \bar{w}(y) + v_2(y) \bar{\theta}(y) \} \end{aligned} \quad (2)$$

と書くことができる。境界条件は

$$y=0 \text{ で } \bar{w} = \bar{w}' = \bar{\theta} = 0 \quad (3a)$$

$$y=l \text{ で } E I \bar{w}'' = (E I \bar{w}')' = G J \bar{\theta}' = 0 \quad (3b)$$

(2)式において

$$\begin{aligned} u_1(y) &= m(y) + L_w(y) \\ u_2(y) &= -S_y(y) + L_\theta(y) \\ v_1(y) &= -S_y(y) + M_w(y) \\ v_2(y) &= I_y(y) + M_\theta(y) \end{aligned} \quad (4)$$

$m, S_y, I_y$  はそれぞれ単位翼幅の質量、静的不平衡、

慣性能率である。また  $L_w, L_\theta, M_w, M_\theta$  は単位翼幅の揚力とモーメントを

$$\begin{aligned} L &= \omega^2 (L_w \bar{w} + L_\theta \bar{\theta}) e^{i\omega t} \\ M_y &= \omega^2 (M_w \bar{w} + M_\theta \bar{\theta}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

と書いたときの係数で、複素数値をとる。

微分方程式(2)と境界条件(3)とは  $\omega^2$  を固有値とする固有値問題を形成する。しかし付録1に示すように、フラッタの問題は保存系の自由振動の問題などとは異なり、いわゆる非自己共役 (nonself-adjoint) な固有値問題で、その為固有値は一般には複素数となる。

## 2.2 積分方程式

微分方程式(2)の左辺の微分演算子は(3)の境界条件の下でそれぞれ対称なグリーン関数(影響関数)

$$\begin{aligned} C^{zz}(y, \eta) &= \int_0^{<y, \eta} \frac{(y-\lambda)(\eta-\lambda)}{EI(\lambda)} d\lambda \\ C^{\theta\theta}(y, \eta) &= \int_0^{<y, \eta} \frac{d\lambda}{GJ(\lambda)} \end{aligned} \quad (6)$$

を持つことが知られている。ここに積分限界の  $<y, \eta$  は  $y$  と  $\eta$  の中どちらか小さい方を表わすものとする。これらを用いると、微分方程式(2)と境界条件(3)とから成る問題は、これと全く同値な積分方程式

$$\begin{aligned} \bar{w}(y) &= \omega^2 \int_0^l C^{zz}(y, \eta) \\ &\quad \times \{u_1(\eta) \bar{w}(\eta) + u_2(\eta) \bar{\theta}(\eta)\} d\eta \\ \bar{\theta}(y) &= \omega^2 \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \\ &\quad \times \{v_1(\eta) \bar{w}(\eta) + v_2(\eta) \bar{\theta}(\eta)\} d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

に帰着する。グリーン関数が対称であることは、付録1の(A.5)が成立することに関連している。

## 2.3 エネルギーの原理

### 2.3.1 ハミルトンの原理

最も広く動力学の方程式の基礎をなしているのはハミルトンの原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \delta(K-U) + \delta W \} dt = 0 \quad (8)$$

である。ここに  $K$  は運動のエネルギー、 $U$  は歪エネルギー、 $\delta W$  は外力による仮想仕事、 $t_0$  と  $t_1$  は任意に選んだ時刻である。さらに変位が幾何学的境界条件を満足すること、 $t_0$  および  $t_1$  において変位の変分

が0となることが要求される。

当面のモデルに対しては

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l (m\dot{w}^2 - 2S_y \dot{w}\dot{\theta} + I_y \dot{\theta}^2) dy \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \{ EI(w'')^2 + GJ(\theta')^2 \} dy \quad (10)$$

$$\delta W = \int_0^l (L\delta w + M_y \delta \theta) dy \quad (11)$$

である。幾何学的境界条件

$$y = 0 \text{ で } w = w' = \theta = 0 \quad (12)$$

と

$$\delta w(t_0) = \delta w(t_1) = \delta \theta(t_0) = \delta \theta(t_1) = 0 \quad (13)$$

とを考慮して、 $w$  と  $\theta$  について変分を行なうと、オイラーの方程式として

$$m\ddot{w} - S_y \ddot{\theta} + (EIw'')'' - L = 0 \quad (14)$$

$$S_y \ddot{w} - I_y \ddot{\theta} + (GJ\theta')' + M_y = 0$$

自然境界条件として

$$y = l \text{ で } EIw'' = (EIw'')' = GJ\theta' = 0 \quad (15)$$

を得る。(1)と(5)を用いると(14)は(2)の微分方程式に帰着する。(12)と(15)はそれぞれ(3a)と(3b)に他ならない。従って当面のモデルに対するハミルトンの原理(8)―(13)と(1)、(5)を合わせたものは、微分方程式(2)と境界条件(3)とを合わせたものと全く同値である。

### 2.3.2 コンプリメンタリ・エネルギーの原理

ハミルトンの原理は静力学の最小ポテンシャル・エネルギーの原理に対応する。これに対し、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理に対応する動力学の原理を、付録2に示すようにハミルトンの原理からFriedrichs変換によって導びく事ができる。

これは

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta V - \delta W_C) dt = 0 \quad (16)$$

の形に書かれ、当面のモデルに対して

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GJ} \right) dy \quad (17)$$

$$\delta W_c = \int_0^l (w \delta M'' + \theta \delta T') dy \quad (18)$$

である。変分を受ける量は  $M$ ,  $T$  で、これらは付帯条件

$$M'' + m\ddot{w} - S_y \dot{\theta} - L = 0 \quad (19)$$

$$T' - S_y \dot{w} + I_y \ddot{\theta} - M_y = 0$$

および (力学的) 境界条件

$$y = l \text{ で } M = M' = T = 0 \quad (20)$$

を満足する。(17)で定義される  $V$  はコンプリメンタリ・エネルギーと呼ばれ、この場合のように線型な系では(10)で与えられる  $U$  と同じ値を取る。 $M$  および  $T$  なる量の物理的意味はそれぞれ曲げモーメントとトルクである。

(16) - (18) と (20) からオイラーの方程式として

$$\begin{aligned} M/EI - w'' &= 0 \\ T/GJ + \theta' &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

また自然境界条件として (12) を得る。(21) を (19) と (20) に代入するとそれぞれ(14) と (15) が得られ、従って(1) と (5) を用いると再び微分方程式(2) と境界条件(3) に帰着する。

(17) のコンプリメンタリ・エネルギーはまた(6) の影響関数を用いて

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \{ C^{zz}(y, \eta) M''(y) M''(\eta) \\ + C^{\theta\theta}(y, \eta) T'(y) T'(\eta) \} d\eta dy \end{aligned} \quad (22)$$

と書くことができる(付録3)。(17)の代わりに(22)を用い、変分を受ける量として  $M''$  と  $T'$  を取ると、(16)のオイラーの方程式は

$$\begin{aligned} w(y) - \int_0^l C^{zz}(y, \eta) M''(\eta) d\eta &= 0 \\ \theta(y) - \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) T'(\eta) d\eta &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

(19) と (1), (5) を用いると(7)の積分方程式が得られる。

以上三種類の基礎方程式(微分方程式, 積分方程式, エネルギーの原理; エネルギーの原理は上に記した二つの形他種々の形に云い表わすことができるが、これらを一種類とみなす)は一から他が得られる意味で全く同値である。従ってこれらを厳密に解く事ができれば、おのおのの解は互に一致する筈である。

実際には極く特殊な場合<sup>9)</sup>を除いて厳密解は得られず、有限自由度の仮定や、積分を和で置き換える等の近似によって解く。従って異なった基礎方程式から出発した近似解は相互に多少異なるであろうが、自由度や積分の代表点の数を増して近似度を高めてゆくに従って同一の値に近づく事が期待される。

### 3. 近似解法

#### 3.1 レーリー・リッツ法

ハミルトンの原理に基礎を置く。(9), (10), (11)式において変位  $w$ ,  $\theta$  を有限個の既知関数  $f_i(y)$ ,  $g_i(y)$  の一次結合

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(y) q_i(t) \quad (24)$$

$$\theta(y, t) = \sum_{i=1}^n g_i(y) q_i(t)$$

で近似する。モード関数  $f_i$ ,  $g_i$  は幾何学的境界条件

$$y = 0 \text{ で } f_i = f_i' = g_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

を満足するものとする。モード関数として曲げと捩りの連成したモードを選ぶときは、 $f_i$  と  $g_i$  は常に対をなしており、同じ係数  $q_i$  を持つ ( $f_i$  と  $g_i$  を別々に正規化することは許されない)。また非連成のモードを選ぶときは、例えば  $m$  を  $1 < m < n$  なる或る整数として

$$\begin{aligned} f_i &= 0 & i > m \\ g_i &= 0 & i \leq m \end{aligned} \quad (26)$$

のようにする。(8)において変分を受ける量として  $q_i(t)$  を取ると、(13)によって

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0 \quad (27)$$

でなければならないから、オイラーの方程式として、よく知られたラグランジュの運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} &= Q_i \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (28)$$

を得る。ここに  $Q_i$  は

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (29)$$

の係数である。

以上の有限自由度の仮定の外, (9), (10), (11)の積分の評価が問題となる。これらの積分は特殊な場合を除いて解析的に行なう事はできないから和の形で近似する。その為にはマトリックスを用いるのが便利である。区間  $0 \leq y \leq l$  を  $d_1, d_2, \dots, d_N$  の小区間に分割し, それらの中点を  $y_1, y_2, \dots, y_N$  として次のマトリックスを定義する。

$$[M] = \begin{bmatrix} d_1 m(y_1) & 0 & -d_1 S_y(y_1) & 0 \\ 0 & d_N m(y_N) & 0 & -d_N S_y(y_N) \\ \hline -d_1 S_y(y_1) & 0 & d_1 I_y(y_1) & 0 \\ 0 & -d_N S_y(y_N) & 0 & d_N I_y(y_N) \end{bmatrix} \quad (30 a)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} d_1 L_w(y_1) & 0 & d_1 L_\theta(y_1) & 0 \\ 0 & d_N L_w(y_N) & 0 & d_N L_\theta(y_N) \\ \hline d_1 M_w(y_1) & 0 & d_1 M_\theta(y_1) & 0 \\ 0 & d_N M_w(y_N) & 0 & d_N M_\theta(y_N) \end{bmatrix} \quad (30 b)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} d_1 EI(y_1) & 0 & & \\ 0 & d_N EI(y_N) & & \\ \hline & & d_1 GJ(y_1) & 0 \\ 0 & & 0 & d_N GJ(y_N) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1(y_1) & \dots & f_n(y_1) \\ f_1(y_N) & \dots & f_n(y_N) \\ \hline g_1(y_1) & \dots & g_n(y_1) \\ g_1(y_N) & \dots & g_n(y_N) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[F_d] = \begin{bmatrix} f_1''(y_1) & \dots & f_n''(y_1) \\ f_1''(y_N) & \dots & f_n''(y_N) \\ \hline g_1'(y_1) & \dots & g_n'(y_1) \\ g_1'(y_N) & \dots & g_n'(y_N) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\{L\} = \begin{bmatrix} d_1 L(y_1) \\ \vdots \\ d_N L(y_N) \\ \hline d_1 M_y(y_1) \\ \vdots \\ d_N M_y(y_N) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\{w\} = \begin{bmatrix} w(y_1) \\ \vdots \\ w(y_N) \\ \hline \theta(y_1) \\ \vdots \\ \theta(y_N) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\{w_d\} = \begin{bmatrix} w''(y_1) \\ \vdots \\ w''(y_N) \\ \hline \theta'(y_1) \\ \vdots \\ \theta'(y_N) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

そうすると(24)によって

$$\{w\} = [F] \{q\} \quad (38)$$

$$\{w_d\} = [F_d] \{q\} \quad (39)$$

と書けるから, (9), (10), (11)の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \{\dot{w}\}' [M] \{\dot{w}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{q}\}' [F]' [M] [F] \{\dot{q}\} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \{w_d\}' [K] \{w_d\} \\ &= \frac{1}{2} \{q\}' [F_d]' [K] [F_d] \{q\} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\delta W = \{\delta q\}' [F]' \{L\} \quad (42)$$

で近似される。これらを(28)に代入し, (29)を用いると

$$[F]' [M] [F] \{\dot{q}\} + [F_d]' [K] [F_d] \{q\} = [F]' \{L\}$$

調和振動を仮定して

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t} \quad (44)$$

と書く、(5)によって

$$\{L\} = \omega^2 [A] [F] \{\bar{q}\} e^{i\omega t} \quad (45)$$

と書けるから、(43)は

$$\begin{aligned} < [F_d]' [K] [F_d] - \omega^2 [F]' ([M] \\ + [A]) [F] > \{\bar{q}\} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C^{zz}(y_1, \eta_1) & \cdots & C^{zz}(y_1, \eta_N) \\ \vdots & & \vdots \\ C^{zz}(y_N, \eta_1) & \cdots & C^{zz}(y_N, \eta_N) \\ \hline & & 0 \end{bmatrix}$$

を定義すると

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \{w\}' [C]^{-1} \{w\} \\ &= \frac{1}{2} \{q\}' [F]' [C]^{-1} [F] \{q\} \end{aligned} \quad (48)$$

と近似でき、これを用いるとレーリー・リッツ法のフラッタの方程式のもう一つの形として

$$\begin{aligned} < [F]' [C]^{-1} [F] - \omega^2 [F]' ([M] \\ + [A]) [F] > \{\bar{q}\} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

を得る。影響関数の対称性によって  $[C]$  は対称行列であり、従って  $[C]^{-1}$  も対称行列である。

マトリックスの理論によれば、対称行列  $[C]^{-1}$  と  $[M]$  に対して  $[F]$  を適当に選ぶことによって、 $[F]' [C]^{-1} [F]$  と  $[F]' [M] [F]$  とが同時に対角行列になるようにすることができる。これは matrix pencil  $[C]^{-1} - \omega^2 [M]$  の固有ベクトルを列とするように  $[F]$  を選ぶことによって達せられる<sup>10)</sup>。すなわち方程式

$$([C]^{-1} - \omega^2 [M]) \{w\} = 0 \quad (50a)$$

あるいは

$$\{w\} = \omega^2 [C] [M] \{w\} \quad (50b)$$

の固有値\* を  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  とし、対応する固有ベクトルを  $\{w\}_1, \{w\}_2, \dots, \{w\}_n$  とする

$$[F] = [\{w\}_1, \{w\}_2, \dots, \{w\}_n] \quad (51)$$

$$[Q] = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) \quad (52)$$

とすると\*\*、 $[F]' [C]^{-1} [F]$  と  $[F]' [M] [F]$  は共に対角行列で

$$[F]' [C]^{-1} [F] = [F]' [M] [F] [Q] \quad (53)$$

となる。これがレーリー・リッツ法によるフラッタの方程式である。

(46)はモード関数の微分のマトリックス  $[F_d]$  を含む不便さがある。これを避ける為  $U$  を(10)式の積分の直接の近似ではなく、離散的な荷重を受けたときの歪エネルギーで近似することができる。すなわち影響係数のマトリックス

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & C^{\theta\theta}(y_1, \eta_1) & \cdots & C^{\theta\theta}(y_1, \eta_N) \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & C^{\theta\theta}(y_N, \eta_1) & \cdots & C^{\theta\theta}(y_N, \eta_N) \end{bmatrix} \quad (47)$$

の関係がある。これを(49)に代入して少しく変形するとレーリー・リッツ法のフラッタの方程式の第3の形として

$$\begin{aligned} \{q\} &= \omega^2 [Q]^{-1} \{I\} \\ &+ ([F]' [M] [F])^{-1} [F]' [A] [F] \{\bar{q}\} \end{aligned} \quad (54)$$

を得る。 $[I]$ は単位行列を表わす。 $([F]' [M] [F])^{-1}$ は対角行列の逆行列であるから極めて容易に求められる。(51), (52)で与えられる  $[F]$  と  $[Q]$  は、(50)を後述する離散質量法によるフラッタの方程式(75)と比較すれば容易に分かるように、それぞれ離散質量法で求めたノーマル・モードと固有振動数のマトリックスに他ならない。

### 3.2 変形レーリー・リッツ法あるいは Grammel の方法

レーリー・リッツ法が静力学の最小ポテンシャル・エネルギーの原理に対応するのと同様の意味において、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理に対応するフラッタの方程式は1949年に E. Reissner によって提案された<sup>11)</sup>。van de Vooren と Greidanus は、自己共役な系に対しては、この方法が1939年に Grammel によって確立された方法と事実上同一であり、得られる振動数は常に厳密値とレーリー・リッツ法による値(厳密値よりわずかに大きい)の間にあることが証明されていることを指摘した<sup>12)</sup>。フラッタの問題のように非自己共役な固有値問題では、このような明確な関係は

\* (50b)では固有値の逆数。 $n$ は  $[C], [M]$  の次数  $2N$  に比べて小さく取る。一般に  $\omega^2$  の小さい方から順番に  $\omega_1, \omega_2, \dots$  とするのがよい。

\*\*  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ は  $d_1, d_2, \dots, d_n$  を対角要素とする対角行列を表わす。



存在しないが、同じモード関数を使った場合、レーリー・リッツ法よりよい精度が得られるであろうと期待される。固有振動の問題に対して Bisplinghoff の教科書<sup>13)</sup>で与えられている名前に従ってここでも変形レーリー・リッツ法 (modified Rayleigh-Ritz method) と呼ぶことにする。

Reissner による方程式の導出には 厳密さにおいて疑問の点があるので、以下では異なった方法を試みる。調和振動を仮定して、(一般化された)変位および力を複素数表示し、

$$w = \bar{w} e^{i\omega t} = w^R + iw^I \text{ 等}$$

のように上添字  $R$  および  $I$  によって実部と虚部に分けて考える。物理的に意味をもつのは実部あるいは虚部である。コンプリメンタリ・エネルギーの原理において、 $V$  は(22)式の形を用いると

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \{C^{zz}(y, \eta) M^{R''}(y) M^{R''}(\eta) + C^{\theta\theta}(y, \eta) T^{R'}(y) T^{R'}(\eta)\} d\eta dy \quad (55)$$

$\delta W_C$  は

$$\delta W_C = \int_0^l (w^R \delta M^{R''} + \theta^R \delta T^{R'}) dy \quad (56)$$

と表わされる。あるいはそれぞれの虚部を用いて表わすこともできる。ここに  $M^{R''}$  と  $T^{R'}$  は(19), (5), (4)を用いると

$$M^{R''} = \omega^2 \operatorname{Re}(u_1 w + u_2 \theta) = \omega^2 (u_1 w^R - u_1^I w^I + u_2^R \theta^R - u_2^I \theta^I) \quad (57)$$

$$T^{R'} = \omega^2 \operatorname{Re}(v_1 w + v_2 \theta) = \omega^2 (v_1^R w^R - v_1^I w^I + v_2^R \theta^R - v_2^I \theta^I)$$

$w, \theta$  を(24)の形に仮定すると

$$\begin{aligned} w^R &= \sum_{i=1}^n f_i(y) q_i^R(t) \\ w^I &= \sum_{i=1}^n f_i(y) q_i^I(t) \\ \theta^R &= \sum_{i=1}^n g_i(y) q_i^R(t) \\ \theta^I &= \sum_{i=1}^n g_i(y) q_i^I(t) \end{aligned} \quad (58)$$

このとき(16)の条件は

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta q_i^R} - P_i &= 0 \\ \frac{\delta V}{\delta q_i^I} - Q_i &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (59)$$

となる。ここに  $P_i, Q_i$  は

$$\delta W_C = \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i^R + Q_i \delta q_i^I) \quad (60)$$

の係数。

これらをマトリックスの形で近似する。(55)は

$$V = \frac{1}{2} \{Z^R\}' [C] \{Z^R\} \quad (61)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{Z^R\} &= \begin{bmatrix} M^{R''}(y_1) \\ \vdots \\ M^{R''}(y_N) \\ \hline T^{R'}(y_1) \\ \vdots \\ T^{R'}(y_N) \end{bmatrix} \\ &= \omega^2 \operatorname{Re}(\{U\} [F] \{q\}) \\ &= \omega^2 (\{U^R\} [F] \{q^R\} - \{U^I\} [F] \{q^I\}) \end{aligned} \quad (62)$$

$$[U] = [M] + [A] \quad (63)$$

(56)は

$$\begin{aligned} \delta W_C &= \{\delta Z^R\}' [F] \{q^R\} \\ &= \omega^2 (\{\delta q^R\}' [F]' [U^R] \\ &\quad - \{\delta q^I\}' [F]' [U^I]) [F] \{q^R\} \end{aligned} \quad (64)$$

(60)は

$$\delta W_C = \{\delta q^R\}' \{P\} + \{\delta q^I\}' \{Q\} \quad (65)$$

ここに

$$\{P\} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (66)$$

これらと(59)とから

$$\begin{aligned} [F]' [U^R]' ([C] \{Z^R\} - [F] \{q^R\}) &= 0 \\ [F]' [U^I]' ([C] \{Z^R\} - [F] \{q^R\}) &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

を得る。ただし  $\{Z^R\}$  は(62)で与えられるものとする。(67)は  $\{q^R\}$  と  $\{q^I\}$  を未知数とするフラッタの

方程式で、係数はすべて実数である。

同様の操作を、(55), (56)において変数の虚部を用いた式から出発して行なうこともできる。そうすると(67)に相当する方程式として

$$\begin{aligned} [F]'[U^I]'([C]\{Z^I\}-[F]\{q^I\}) &= 0 \\ [F]'[U^R]'([C]\{Z^I\}-[F]\{q^I\}) &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} \{Z^I\} &= \omega^2 \text{Im}([U] [F] \{q\}) \\ &= \omega^2 ([U^R][F]\{q^I\} + [U^I][F]\{q^R\}) \end{aligned} \quad (69)$$

(67)に(62)を代入した式と、(68)に(69)を代入した式を比較すれば容易に分かるように、(68)は(67)において単に $\{q^R\}$ の代わりに $\{q^I\}$ 、 $\{q^I\}$ の代わりに $-\{q^R\}$ と置けば得られる。従って、当然の事であるが、同じ固有値をもつ。

(67)と(68)を組合わせて一つの複素マトリックス方程式とすることができる。すなわち((67)の第1式)+ $i$ ((67)の第2式)-((68)の第1式)+ $i$ ((68)の第2式)を作り、 $e^{i\omega t}$ を落とすと

$$\begin{aligned} (\omega^2 [F]'[U]'[C][U][F] \\ - [F]'[U]'[F]) \{\bar{q}\} &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

を得る。(70)は(67)あるいは(68)よりも取扱いが容易で、実際の計算にも便利な形である。(70)を変形レーリー・リッツ法によるフラッタの方程式と呼ぶことにする。

### 3.3 Galerkin 法

(2)の微分方程式において、レーリー・リッツ法における同じように $\bar{w}$ 、 $\bar{\theta}$ を有限個の既知関数の一次結合

$$\bar{w}(y) = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i f_i(y) \quad (71)$$

$$\bar{\theta}(y) = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i g_i(y)$$

で近似する。ただし、この場合、 $f_i$ 、 $g_i$ は幾何学的境界条件(25)だけではなく、力学的境界条件

$y = l$ で

$$\begin{aligned} EIf_i'' &= (EIf_i'')' = GJg_i' = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (72)$$

をも満足するものとする。(71)を(2)に代入し、第1式に $f_j$ 、第2式に $g_j$ を掛けて $y$ について0から $l$

まで積分し、両辺の和を取ると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \left\{ \int_0^l f_i (EI f_i'')'' dy + \int_0^l g_i (GJ g_i')' dy \right\} \\ = \omega^2 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \left\{ \int_0^l f_j u_1 f_i dy + \int_0^l f_j u_2 g_i dy \right. \\ \left. + \int_0^l g_j v_1 f_i dy + \int_0^l g_j v_2 g_i dy \right\} \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (73)$$

(25), (72)を考慮して左辺の二つの積分を部分積分すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \left\{ \int_0^l f_j'' EI f_i'' dy + \int_0^l g_j' GJ g_i' dy \right\} \\ = \omega^2 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \left\{ \int_0^l f_j u_1 f_i dy + \int_0^l f_j u_2 g_i dy \right. \\ \left. + \int_0^l g_j v_1 f_i dy + \int_0^l g_j v_2 g_i dy \right\} \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (74)$$

積分を和の形で近似してマトリックスで表わすと(46)を得る。すなわち Galerkin 法によるフラッタの方程式はレーリー・リッツ法の方程式と同じである。しかしモード関数 $f_i$ 、 $g_i$ は力学的境界条件(72)をも満たすと仮定した点がレーリー・リッツ法と異なっている。

### 3.4 離散質量法

積分方程式(7)において、これまでと同じように積分を $y_1, y_2, \dots, y_N$ なる点における関数値の和で近似し、同時に方程式を同じ点で満足させることにすると、ただちに

$$\{\bar{w}\} = \omega^2 [C] ([M] + [A]) \{\bar{w}\} \quad (75)$$

が得られる。ここに

$$\{\bar{w}\} = \{w\} e^{-i\omega t} \quad (76)$$

である。(75)の形の方程式は、振動の問題では、質量(広義の質量、すなわち静的不平衡や慣性性能率を含む)を離散的に分布させたモデルから出発して得られる方程式と一致するので、離散質量法(lumped mass あるいは discrete mass method)の方程式と呼ばれている。フラッタの場合には空気力も加わるので離散荷重法とも呼ぶ方が合理的であろうが(Bisplinghoffの教科書<sup>14)</sup>では lumped parameter method と呼ばれている)、ここでは振動の場合の名前を踏襲して、離散質量法と呼んでおく。

離散質量法では自由度の数は積分点の数  $N$  の2倍に等しいので、レーリー・リッツ法などのエネルギーの原理に基づく方法に比べて多くの自由度を必要とする。

### 3.5 内挿マトリックス法

離散質量法の方程式(75)において、積分点の数をそのままにして自由度の数を減らす工夫をしてみよう。 $\{\bar{w}\}$ の要素の中から適当に選んだ要素から成る次元数の低い変位ベクトルを  $\{\bar{w}_1\}$  とし、 $\{\bar{w}\}$  は内挿マトリックス  $[R]$  によって  $\{\bar{w}_1\}$  から

$$\{\bar{w}\} = [R] \{\bar{w}_1\} \quad (77)$$

のように得られるものとする。次に  $[C]$  から  $\{\bar{w}_1\}$  に対応する行のみを選んだ矩形行列を  $[C_1]$  とすると、(75) からより自由度の少ない方程式

$$\{\bar{w}_1\} = \omega^2 [C_1] ([M] + [A]) [R] \{\bar{w}_1\} \quad (78)$$

を得る。

内挿マトリックス  $[R]$  の作り方としては種々の方法が考えられるが、ここでは最も簡単な影響係数による方法を示す<sup>5)</sup>。 $\{\bar{w}_1\}$  なる変位ベクトルは対応する点に作用する力のベクトル  $\{Z_1\}$  によって生ずるものとする。両者の関係は、 $[C_1]$  から  $\{\bar{w}_1\}$  に対応する列のみを選んだ正方行列を  $[C_2]$  とすると

$$\{\bar{w}_1\} = [C_2] \{Z_1\} \quad (79)$$

で与えられる。一方  $\{\bar{w}\}$  なる変位ベクトルも同じ力のベクトルの作用によって生じたものとする、 $[C]$  の対称性によって

$$\{\bar{w}\} = [C_1]' \{Z_1\} \quad (80)$$

で与えられることがわかる。(79)と(80)から  $\{Z_1\}$  を消去すると、内挿マトリックスとして

$$[R] = [C_1]' [C_2]^{-1} \quad (81)$$

が得られる。

### 3.6 近似解法相互間の関係

以上述べた種々の近似解法は、それぞれの基礎方程式がすべて相互に同値であることから、近似解法相互間にも何らかの関係が存在するであろうことは当然予想される。これは近似解法の方程式をマトリックスで表わした事によって容易に見ることができる。すなわち離散質量法の方程式(75)において

$$\{\bar{w}\} = [F] \{q\} \quad (82)$$

とし、両辺に  $[F]'[C]^{-1}$  を左から掛けると、(49)の形のレーリー・リッツ法の方程式を得る。これはマトリックス方程式に Galerkin 法を適用したと考える事ができ、この場合の  $[F]'[C]^{-1}$  は“重みのマトリックス”と呼ぶ事ができよう。同様に重みのマトリックスとして  $[F]'[U]'$  を選ぶと、変形レーリー・リッツ法の方程式(70)が得られる。

この関係から次の重要な結論が導びかれる。すなわち、レーリー・リッツ法の方程式(49)あるいは(54)、あるいは変形レーリー・リッツ法の方程式(70)の解を離散質量法の解と比較するとき、積分点  $y_1, y_2, \dots, y_N$  を同じに選ぶ限り、いかなる一次独立なモード関数を選んでも、自由度を次第に増して行くと前三者の解は離散質量法の解に次第に近づき、自由度を  $2N$  にした極限において完全に一致する筈である。従って上の条件の下では、エネルギー法の解はいつでも離散質量法の解に対する近似に過ぎないといえることができる。

図1は(1)2節に述べたように、フラクタの基礎方程式としての微分方程式、積分方程式、エネルギーの原理(ハミルトンの原理、コンプリメンタリ・エネルギーの原理)が全く同値で、一から他を導びく事ができ、(2)本節に述べたように種々の近似解法がこれらの基礎方程式から導びかれ、(3)近似解法相互間にも上に述べた形式的な関係がある事を説明する図である。

## 4. 近似解法の比較と計算例

レーリー・リッツ法は古くから用いられている方法で、少ない自由度で比較的よい結果が得られる利点がある。しかし結果がモード関数の選び方に左右されること、ノーマル・モードを使用する場合にはその計算を予め行なっておかなければならない等の不便さがある。

変形レーリー・リッツ法は同じモードを用いた場合、レーリー・リッツ法よりよい精度が期待されるが、実際に計算された例はない。方程式はレーリー・リッツ法より複雑になる。

離散質量法は最も直接的な方法で、方程式も最も簡単である。前節に述べたように、積分点を同じに選んだ場合、偶然を除外すれば常にエネルギー法よりよい精度が得られる筈である。多くの自由度を必要とする、換言すれば固有値を求める際に比較的大きい次数のマトリックスを扱わねばならないが、電子計算機による計算ではこの事は欠点とならない。フラクタ条件において卓越するモードを見出だすのに、 $\{\bar{w}\}$  ベクトルをプロットしなければわからない不便さがある。

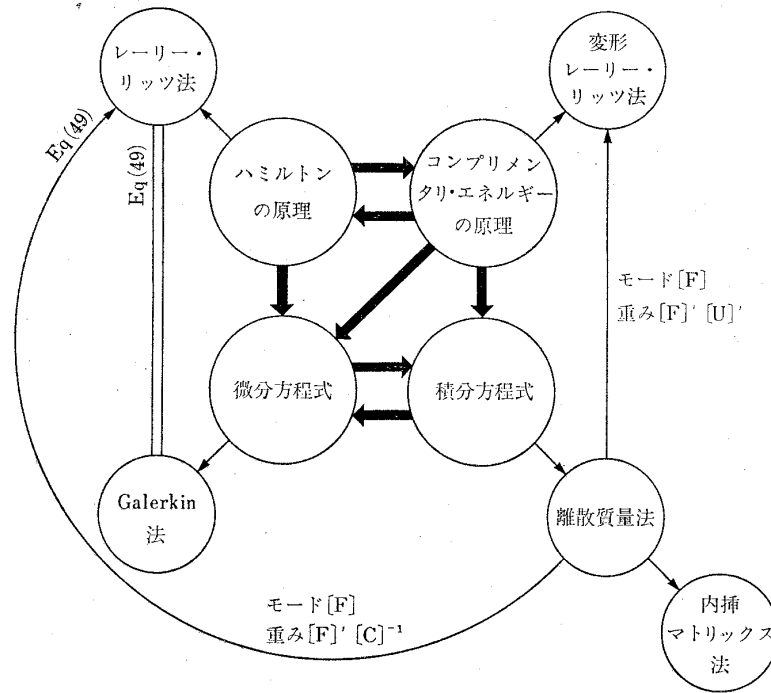


図 1 基礎方程式および近以解法の相互関係

表 1 1個の集中質量をもつ一様断面の片持翼

縦横比	6
弾性軸	43.6%翼弦
重心軸	45.6%翼弦

$$\frac{m}{\pi \rho b^2} = 32$$

$$r^2 = \frac{I_y}{mb^2} = 0.27$$

$$\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} = 0.138 \text{ (集中質量なし)}$$

$$\frac{mc}{ml} = 0.91$$

集中質量位置	翼弦方向	9.1%翼弦
	翼幅方向	変化

(註)  $\rho$ : 空気密度,  $b$ : 半翼弦長,  $\omega_h$ : 曲げの固有円振動数,  $\omega_\alpha$ : 捩りの固有円振動数,  $mc$ : 集中質量の質量

これらの方法において、自由度を次第に増して行くときのフラッタ速度の変化、必要な精度を得るために必要な自由度を調べ、また相互の比較を行なうため簡単なモデルについて計算を行なった。これは一個の集中質量をもつ一様断面の片持翼で、要目は表1に示す通りである。計算結果をを図2ないし図7に示す。どの方法においても翼幅を等間隔に分割し、その中点を積分点に選ぶ。空気力係数は数表を使わず、Theodorsenの関数を有理分数で近似して計算した。この近似式を付録4に示す。フラッタ速度の決定は  $U-g$  法により、ラグランジュの補間とニュートン法を組合わせて  $g=0$  となる  $U$  を決定した。固有値の計算はすべて付録5に述べる反復法によった。

図2ないし図4は離散質量法の結果で、それぞれ集中質量のない場合、集中質量が25%翼幅にある場合、同じく50%翼幅にある場合を示す。いずれの場合にも分割数を増して行くと一定のフラッタ速度に近づくことがわかる。集中質量のない場合は4分割で収束値から1%の範囲内に入ることがわかる。集中質量のある場合は、集中質量の位置に無関係な分割を可能にするため、集中質量に独立な自由度を与えてある。集中質量が分割された要素の丁度中央に位置するときには、集中質量をその要素に固定して計算した結果と一致す

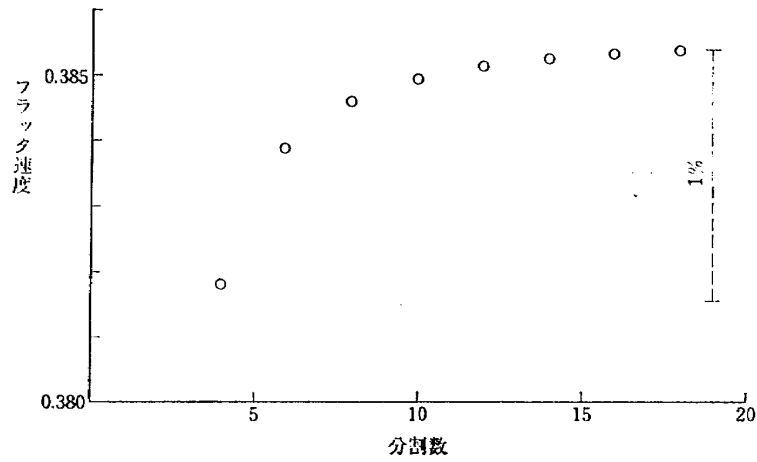


図 2 離散質量法——集中質量なし (第2固有値)

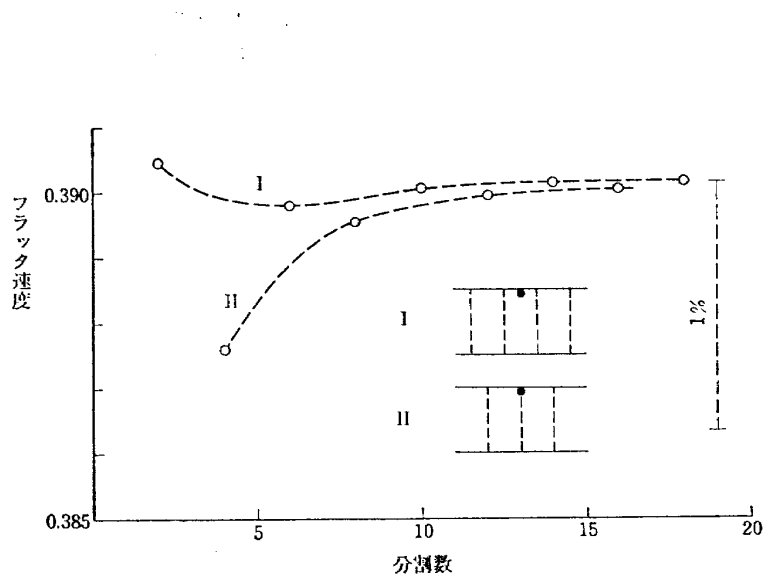


図 3 離散質量法——集中質量25%翼幅 (第2固有値)

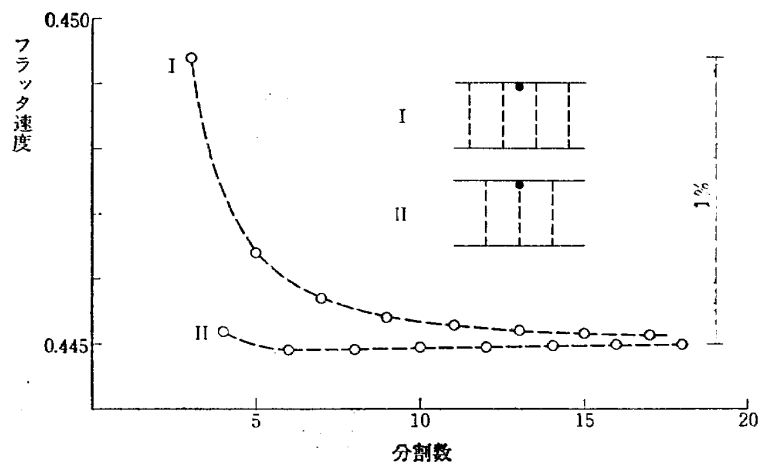


図 4 離散質量法——集中質量50%翼幅 (第3固有値)

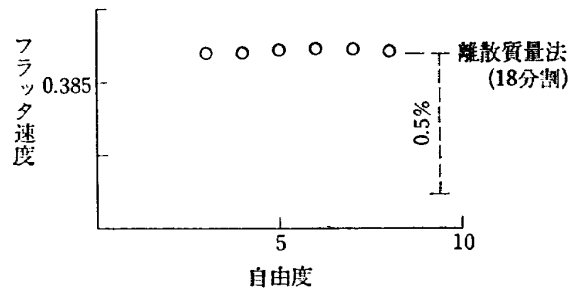


図 5 レーリー・リッツ法——集中質量なし

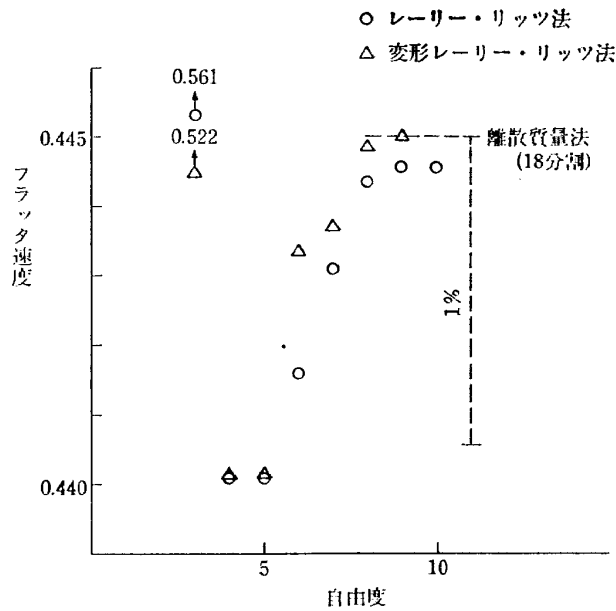


図 6 レーリー・リッツ法と変形レーリー・リッツ法の比較——集中質量50%翼幅

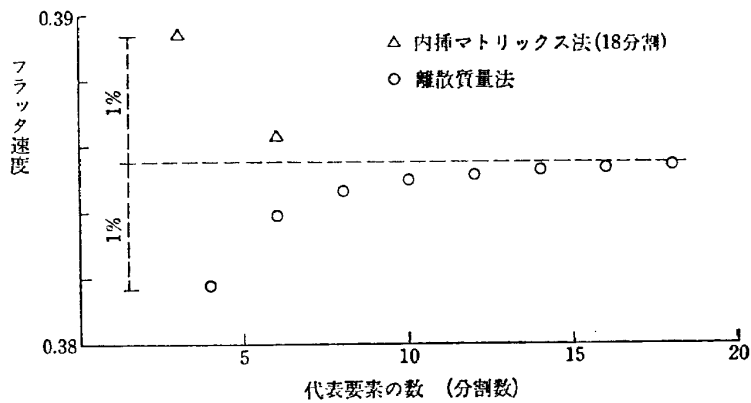


図 7 内挿マトリックス法——集中質量なし

ることを確認してある。集中質量位置が25%翼幅の場合も50%翼幅の場合も、フラッタ速度対分割数のプロットは2本の曲線に乗っているように見える。Iと書いた曲線は集中質量が要素の中央に位置するような分割をした場合、IIと書いた曲線は集中質量が要素の境目に位置するような分割をした場合である。集中質量位置25%翼幅ではIの分割が有利であるが、50%翼幅ではIIの分割が有利になっており、一概にどちらがよいとは云えない。図3、図4で見る限り、同じ分割数に対する精度は集中質量のない場合よりもむしろよくなっている。これは恐らく偶然であろうが、少なくとも集中質量がある為に格段に精度が落ちることは無さそうである。フラッタの方程式の固有値の中、最低のフラッタ速度を与えるのは、集中質量のない場合と25%翼幅の場合は第2(絶対値の大きい方から2番目の)固有値、50%翼幅の場合は第3固有値であった。

図5は集中質量のない場合のレーリー・リッツ法による結果である。(54)の形の方程式を用い、離散質量法で求めた固有振動数とノーマル・モードを使用した。積分点は18点である。固有振動数の小さい方から二つの自由度を取って行なった計算ではフラッタの解が得られなかったが、これは1次のノーマル・モードが1次曲げ、2次が2次曲げに相当することから考えて当然と思われる(3次は1次捩れ)。3自由度以上の計算は18分割の離散質量法の結果と比べて驚ろくべき精度であると云える。

図6は集中質量50%翼幅の場合のレーリー・リッツ法と変形レーク・リッツ法の計算結果である。集中質量のついた状態の固有振動数とノーマル・モードを用いた。集中質量のない場合に比べて格段に精度が落ちていることが分かる。18分割の離散質量法の結果と比べて、3自由度では20%前後も高いフラッタ速度を与えている。4自由度、5自由度ではかなりよくなるが、1%の範囲内に入るのには6自由度以上を要する。変形レーリー・リッツ法はレーリー・リッツ法に比べて確かに幾らかよい精度を与えている。しかし少なくともこの例で見る限り、この程度の改善では方程式の複雑化に見合った改善とは云えない。

図7は集中質量のない場合につき、内挿マトリックス法を同じ自由度の離散質量法と比較してある。積分点は  $y_1, y_2, \dots, y_{18}$  の18点で、代表要素(独立な自由度をもつ要素)として  $y_6, y_{12}, y_{18}$  の3要素を選んだ自由度6の場合と、 $y_3, y_6, y_9, y_{12}, y_{15}, y_{18}$  の6要素を選んだ自由度12の場合とが計算してある。3要素の場合は離散質量法の4分割に、また6要素の場合

は離散質量法の8分割にほぼ匹敵する精度である。

## 5. む す び

フラッタ解析の種々の方法につき、その基礎方程式まで遡って再検討し、近似解法相互間の関係を明らかにしてその優劣を比較し、計算例による確認を行なった。本報で扱ったような比較的簡単な系の解析に関する限り、離散質量法が最も有利であることは疑問の余地がない。しかし航空機全体の変形を考慮した多自由度の解析では、レーリー・リッツ法の援けを借りる必要が起こるかも知れない。これは今後の研究課題である。数値計算にはすべて当所の大型電子計算機を使用した。

### 付録 1. フラッタの固有値問題の非自己共役性

微分方程式(2)はマトリックスの形で

$$[e][f] = \omega^2 [u][f] \quad (A.1)$$

と書くことができる。当面のモデルに対しては

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2}{dy^2} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d}{dy} \right) \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$[f] = \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

van de Vooren<sup>6)</sup>に従って、(A.1)と境界条件とから成る固有値問題は

$$\int_0^l \left( \{t_1^*\}' [e] \{t_2\} - \{t_2\}' [e^*] \{t_1^*\} \right) dy = 0 \quad (A.5)$$

$$\int_0^l \left( \{t_1^*\}' [u] \{t_2\} - \{t_2\}' [u^*] \{t_1^*\} \right) dy = 0 \quad (A.6)$$

が成立するとき自己共役 (self-adjoint) な固有値問題であると定義する。ここに  $\{t_1\}$ ,  $\{t_2\}$  は  $\{f\}$  の形の任意のベクトルで、境界条件を満足するものとする。 $(*)$  は共役複素数値を表わす。

(A.5), (A.6) が成立するとき、或る条件の下で固有値が常に実数であることと、固有関数が直交することは容易に証明される。固有値  $\omega^2$  を  $\lambda$  と書き、任意に選んだ二つの固有値および対応する固有関数のベクトルをそれぞれ  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  および  $\{f_1\}$ ,  $\{f_2\}$  と書くと、(A.1) によって

$$\{f_1^*\}' [e] \{f_2\} = \lambda_2 \{f_1^*\}' [u] \{f_2\} \quad (\text{A.7})$$

$$\{f_2\}' [e^*] \{f_1^*\} = \lambda_1^* \{f_2\}' [u^*] \{f_1^*\}$$

両辺の差を取って積分し、(A.5), (A.6) を用いると

$$(\lambda_2 - \lambda_1^*) \int_0^l \{f_1^*\}' [u] \{f_2\} dy = 0 \quad (\text{A.8})$$

すなわち  $\lambda_2 \neq \lambda_1^*$  ならば  $\{f_1\}$  と  $\{f_2\}$  は

$$\int_0^l \{f_1^*\}' [u] \{f_2\} dy = 0 \quad (\text{A.9})$$

の直交関係を満足する。(A.7) の第1式を用いると、また

$$\int_0^l \{f_1^*\}' [e] \{f_2\} dy = 0 \quad (\text{A.10})$$

の形の直交関係も成立することがわかる。

つぎに (A.8) において  $\lambda_2$ ,  $\{f_2\}$  の代わりに  $\lambda_1$ ,  $\{f_1\}$  と置くと

$$(\lambda_1 - \lambda_1^*) \int_0^l \{f_1^*\}' [u] \{f_1\} dy = 0$$

すなわち

$$\int_0^l \{f_1^*\}' [u] \{f_1\} dy \neq 0 \quad (\text{A.11})$$

ならば  $\lambda_1$  は実数である。(A.11) の条件は振動問題では物理的な観点から保証される。

(A.2) で定義される  $[e]$  について (A.5) の関係が (3) の境界条件の下で実際に成立することは、部分積分によって容易に確かめられる。この場合  $[e]$  の要素を成す微分演算子が自己共役と呼ばれる形である事に注意しておこう。

つぎに (A.6) が成立する為の条件を考えてみよう。

$$\{t_1^*\}' [u] \{t_2\} = \{t_2\}' [u^*] \{t_1^*\}$$

であるから、(A.6) は

$$\int_0^l \{t_2\}' ([u]' - [u^*]) \{t_1^*\} dy = 0$$

$\{t_1\}$ ,  $\{t_2\}$  は任意のベクトルであるから

$$[u]' = [u^*] \quad (\text{A.12})$$

すなわち (A.6) が成立するためには  $[u]$  がエルミット行列であることが必要かつ十分である。

当面のモデルに対しては、(4) から

$$L_\theta = M_w^* \quad (\text{A.13})$$

ならば (A.12) が成立することがわかる。二次元振動翼理論によれば、非圧縮の場合

$$L_\theta = -\pi \rho b^3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{ik} + \frac{2}{ik} \left( 1 + \frac{1}{ik} \right) C(k) - \left( \frac{1}{2} + a \right) \left[ 1 + \frac{2}{ik} C(k) \right] \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$M_w = -\pi \rho b^3 \left\{ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + a \right) \left[ 1 + \frac{2}{ik} C(k) \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

となる。ここに  $\rho$  は空気密度、 $b$  は半翼弦長、 $k$  は無次元振動数、 $C(k)$  は Theodorsen の関数、 $a$  は弾性軸位置によってきまるパラメータである。すなわち (A.13) は成立せず、一般にフラッタの問題は空気力の存在のために非自己共役な固有値問題となる。従って固有値が実数であることは保証されず、このことがフラッタなる発散解の存在を可能にしている。これは定常の空気力を使用する場合のように空気力の係数が実数であり、従って方程式の係数がすべて実数となる場合でも尚且そうであることを注意しておこう。

空気力のない振動の問題では、(4) から  $[u]$  が実対称行列となるので (A.12) が成立し、従って固有値がすべて実数となることは周知の通りである。

## 付録 2. コンプリメンタリ・エネルギーの原理の誘導

動力学のコンプリメンタリ・エネルギーの原理は保存力のみを受ける一般弾性体の場合<sup>13)</sup>と曲げ・捩りフラッタの場合<sup>14)</sup>につき、いずれも調和振動を仮定して



与えられているが、ハミルトンの原理に対応する一般の形は与えられていないようである。特にフラッタの場合の形は変分方程式に複素数が含まれることになり、基礎の厳密さに不安がある。

ここでは当面のモデルに対して、文献(16)の手法に従ってハミルトンの原理から Friedrichs 変換によってこの原理を導びいてみよう。調和振動は仮定しない。非保存力を受ける一般弾性体の場合への拡張は容易である。

(I) まずハミルトンの原理において

$$\begin{aligned} w'' &= \lambda \\ \theta' &= \mu \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

とおき、これを(10)に代入して

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (EI \lambda^2 + GJ \mu^2) dy \quad (\text{A.17})$$

とし、(A.16)を付帯条件として付け加えてもよい。

(II) 次に拘束条件(付帯条件と境界条件)(A.16)と(12)をラグランジュの未定乗数によって変分方程式に組込むと、一般化されたハミルトンの原理として

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta(K - U + \Pi_a) + \delta W \right\} dt = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \Pi_a = \int_0^l \left\{ -(w'' - \lambda)M + (\theta' - \mu)T \right\} dy \\ + Pw(0, t) + Qw'(0, t) + R\theta(0, t) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

を得る。 $U, K, \delta W$ はそれぞれ(A.17), (9), (11)で与えられ、 $M(y, t), T(y, t), P(t), Q(t), R(t)$ は未定乗数である。(13)の条件はそのまま残して置く。

$w, \theta, \lambda, \mu, M, T, P, Q, R$ について変分を行ない、(13)を考慮すると、(A.18)に対する自然条件(オイラーの方程式および自然境界条件)として

$$\left. \begin{aligned} M'' + m \ddot{w} - S_y \ddot{\theta} - L &= 0 \\ T' - S_y \dot{w} + I_y \dot{\theta} - M_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$\left. \begin{aligned} EI \lambda - M &= 0 \\ GJ \mu + T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

$$\left. \begin{aligned} w'' - \lambda &= 0 \\ \theta' - \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.22})$$

$$\left. \begin{aligned} M'(0, t) - P &= 0 \\ M(0, t) + Q &= 0 \\ T(0, t) - R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$\left. \begin{aligned} M'(l, t) &= 0 \\ M(l, t) &= 0 \\ T(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.24})$$

$$\left. \begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w'(0, t) &= 0 \\ \theta(0, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.25})$$

が得られる。この中(A.22)と(A.25)とは(I)の形の変分問題の拘束条件である。

(III) 最後に変分問題(II)にその自然条件(A.20)~(A.25)の中、問題(I)の拘束条件(A.22)と(A.25)とを除いたものを拘束条件として付加してもよい。こうして得られる変分問題(III)は問題(I)と同値で、(I)から(III)を得る変換は Friedrichs 変換といわれる<sup>17)</sup>。(A.21), (A.23)は  $\lambda, \mu, P, Q, R$ を消去するために用い、他の条件を考慮して部分積分を行なうとコンプリメンタリ・エネルギーの原理(16)~(20)が得られる。

### 付録 3. コンプリメンタリ・エネルギーの影響函数による表示

(20)を考慮すると

$$M(y) = \int_y^l (\eta - y) M''(\eta) d\eta \quad (\text{A.26})$$

$$T(y) = - \int_y^l T'(\eta) d\eta$$

と書けるから、(17)において

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dy &= \int_0^l \frac{1}{EI} \left\{ \int_y^l (\eta_1 - y) M''(\eta_1) d\eta_1 \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \int_y^l (\eta_2 - y) M''(\eta_2) d\eta_2 \right\} dy \right\} \\ &= \int_0^l \int_0^l \left\{ \int_0^{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle} \frac{(\eta_1 - y)(\eta_2 - y)}{EI(y)} dy \right\} \\ &\quad \times M''(\eta_1) M''(\eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

$$\int_0^l \frac{T^2}{GJ} dy = \int_0^l \frac{1}{GJ} \left\{ \int_y^l T'(\eta_1) d\eta_1 \right\} \times \left\{ \int_y^l T'(\eta_2) d\eta_2 \right\} dy = \int_0^l \int_0^l \left\{ \int_0^{\min(\eta_1, \eta_2)} \frac{dy}{GJ(y)} \right\} \times T'(\eta_1) T'(\eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \quad (A.28)$$

(6)を参照すれば直ちに(22)が得られる。

付録 4. Theodorsen の関数の近似式

電子計算機では関数値を数表で与えるよりも、計算の容易な式を与えて内部で計算するのが便利である。このため Theodorsen の関数

$$C(k) = \frac{J_1(k) - i Y_1(k)}{J_1(k) + Y_0(k) + i [J_0(k) - Y_1(k)]} \quad (A.29)$$

を次の有理分数式で近似した。

$$C(k) \doteq [1 + 1.8104 \times 10^2 (ik) + 4.9766 \times 10^3 (ik)^2 + 3.4146 \times 10^4 (ik)^3 + 7.0273 \times 10^4 (ik)^4 + 3.9533 \times 10^4 (ik)^5] / [1 + 1.8757 \times 10^2 (ik) + 5.7441 \times 10^3 (ik)^2 + 4.7541 \times 10^4 (ik)^3 + 1.2086 \times 10^5 (ik)^4 + 7.9066 \times 10^4 (ik)^5] \quad (A.30)$$

(A.30) は

$$C(0) = 1, \quad C(\infty) = 0.5 \quad (A.31)$$

の関係を満足し、 $k=0.01$  から10の範囲でほぼ最小二乗近似になっている。(A.29), (A.30)両式の値の比較を表2に示す。 $F(k)$ ,  $G(k)$ はそれぞれ  $C(k)$  の実部および虚部, ERROR は  $[APPROX F(k) - F(k)]/F(k)$  等を表わす。

付録 5. 非対称・非エルミット行列の固有値の解法

フラッタの方程式はどの解法による場合も多少の変形をすれば

$$[A] \{x\} = \lambda \{x\} \quad (A.32)$$

$$\lambda = 1/\omega^2$$

の形に帰着させることができる。 $[A]$  は複素非対称・非エルミット行列, すなわち

$$[A]' \neq [A], \quad [\bar{A}]' \neq [A] \quad (A.33)$$

である。固有振動の問題では、運動方程式を (A.32) の形に書くと、 $[A]$  は実対称行列の積となり、少なくともその一方は正の定符号 (positive definite) と考えてよいので、相似変換によって対称行列の固有値問題に帰着させることができる<sup>18)</sup>。しかしフラッタの問題ではこのようなことが不可能で、非対称・非エルミット行列の固有値を求めなければならない。

表 2 Theodorsen の関数の値

K	F(K)	APPROX F(K)	ERROR	G(K)	APPROX G(K)	ERROR
1.000000E-02	9.824215E-01	9.823067E-01	-1.168526E-04	-4.565208E-02	-4.583586E-02	4.025578E-03
2.500000E-02	9.543369E-01	9.551269E-01	8.277999E-04	-8.723862E-02	-8.761187E-02	4.278429E-03
4.000000E-02	9.267018E-01	9.267519E-01	5.402806E-05	-1.160012E-01	-1.166485E-01	5.579654E-03
5.000000E-02	9.090090E-01	9.088213E-01	-2.064176E-04	-1.306444E-01	-1.309852E-01	2.608985E-03
5.999999E-02	8.920398E-01	8.918943E-01	-1.630368E-04	-1.425944E-01	-1.426616E-01	4.715055E-04
8.000000E-02	8.604318E-01	8.605913E-01	1.853744E-04	-1.604021E-01	-1.603600E-01	-2.625320E-04
9.999999E-02	8.319241E-01	8.321804E-01	3.080810E-04	-1.723022E-01	-1.724459E-01	8.340392E-04
1.200000E-01	8.063273E-01	8.064721E-01	1.794806E-04	-1.800727E-01	-1.803511E-01	1.545785E-03
1.600000E-01	7.627720E-01	7.626600E-01	-1.467510E-04	-1.875660E-01	-1.877501E-01	9.816214E-04
2.000000E-01	7.275800E-01	7.274780E-01	-1.400863E-04	-1.886243E-01	-1.886009E-01	-1.240287E-04
2.400000E-01	6.988879E-01	6.989199E-01	4.571275E-05	-1.861940E-01	-1.861022E-01	-4.931467E-04
3.000000E-01	6.649711E-01	6.651239E-01	2.298240E-04	-1.793191E-01	-1.793200E-01	4.819716E-06
3.400000E-01	6.469461E-01	6.470896E-01	2.218546E-04	-1.737580E-01	-1.738392E-01	4.672103E-04
4.000000E-01	6.249763E-01	6.250393E-01	1.009026E-04	-1.649839E-01	-1.651225E-01	8.397849E-04
4.400000E-01	6.129575E-01	6.129628E-01	8.751696E-06	-1.591543E-01	-1.592865E-01	8.304777E-04
5.000000E-01	5.979360E-01	5.978845E-01	-8.612697E-05	-1.507095E-01	-1.507918E-01	5.455833E-04
5.999999E-01	5.857205E-01	5.856555E-01	-1.111251E-04	-1.427682E-01	-1.427858E-01	1.235778E-04
5.999999E-01	5.788016E-01	5.787473E-01	-9.391722E-05	-1.377852E-01	-1.377645E-01	-1.507580E-04
6.000000E-01	5.698898E-01	5.698702E-01	-3.430545E-05	-1.307822E-01	-1.307199E-01	-4.767196E-04
8.000000E-01	5.541465E-01	5.542305E-01	1.514461E-04	-1.165024E-01	-1.164238E-01	-6.752069E-04
1.000000E+00	5.394349E-01	5.396011E-01	3.080589E-04	-1.002729E-01	-1.002815E-01	8.604291E-05
1.200000E+00	5.299559E-01	5.301133E-01	2.971483E-04	-8.770910E-02	-8.781554E-02	1.213546E-03
1.500000E+00	5.210131E-01	5.210862E-01	1.402561E-04	-7.356527E-02	-7.374710E-02	2.471401E-03
2.000000E+00	5.129008E-01	5.129008E-01	-1.055083E-04	-5.769124E-02	-5.786531E-02	3.017233E-03
3.000000E+00	5.062801E-01	5.061524E-01	-2.521789E-04	-4.000393E-02	-4.006871E-02	1.619411E-03
4.000000E+00	5.036709E-01	5.035564E-01	-2.274503E-04	-3.049606E-02	-3.049764E-02	5.155001E-05
6.000000E+00	5.016848E-01	5.016133E-01	-1.425708E-04	-2.059571E-02	-2.055814E-02	-1.824145E-03
1.000000E+01	5.006180E-01	5.005871E-01	-6.167419E-05	-1.244669E-02	-1.240738E-02	-3.158211E-03

本報の計算例ではすべて反復法 (power method) を用いた。反復法は固有値を絶対値の大きい順に求められること、固有ベクトルが同時に得られることの二つの大きい利点があるため、フラッタ解析に特に適している。

第一の点については少しく説明を要するであろう。 $U-g$  法では (A.32) における  $\lambda$  は、構造減衰率と呼ばれる仮想のパラメータ  $g$  を導入して

$$\lambda = \frac{1+ig}{\omega^2} \quad (\text{A.34})$$

の形とする。 $g$  が正になる場合が発散解である。無次元振動数の逆数  $1/k=U/b\omega$  を零から次第に大きくしながら、すべての(自由度の数に等しい)固有値について  $U-g$  プロットしたとしよう。その中幾つかの固有値は或る速度で発散限界を与え、その中の最小速度がフラッタ限界速度を与える。 $1/k$  が小さい間はすべての固有値は安定な解を与える。それは  $1/k$  が小さいと第一に空気力は慣性力に比べて小さく (空気力は  $U^2$ , 慣性力は  $\omega^2$  に比例するから)、第二にその小さい空気力の中でも付加質量の項が卓越するのでその係数のマトリックスが対称に近い形となり、従ってこの二つの理由によってフラッタの方程式が自己共役に近い形となるので発散解を持たないと説明できる。従って絶対値の小さい ( $\omega$  の大きい) 固有値が発散解を与えたとしても、それは大きい速度に対応する筈であり、フラッタ限界速度には寄与しないと思われる。それ故フラッタ限界速度を求めるにはすべての固有値を計算する必要はなく、単に絶対値の大きい方から数個の固有値を計算すればよいことになる。以上は単に定性的な推論に過ぎないが、計算例による経験によればこれが成立することはほとんど疑いの余地がない。このことは特に離散質量法による場合に重要である。

さて、反復法においてはいつも絶対値最大の固有値に収束するので、第2、第3の固有値を求めるにはどうするかという事と、絶対値の近接した固有値があると収束が悪くなるのでこれをどう処理するか二点が問題となる。

第一の点については種々の方法があるが<sup>19), 20)</sup>、本報では比較的よく知られている Hotelling の deflation を用いた。以下では簡単のため、マトリックスあるいはベクトルの括弧を省略して書く。(A.32) において絶対値最大の固有値を  $\lambda_1$ 、これに対応する右および左の固有ベクトルをそれぞれ  $x_1$  および  $y_1$  とする。すなわち

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ y_1' A &= \lambda_1 y_1' \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

を満足する。次のマトリックス

$$H_1 = A - \lambda_1 \frac{x_1 y_1'}{y_1' x_1} \quad (\text{A.36})$$

は  $A$  と同じ固有ベクトル(右および左)を持ち、また  $\lambda_1$  が0で置き換えられるほかは  $A$  と同じ固有値を持つ。従って  $H_1$  について iteration を行なうと、 $A$  の第2固有値(絶対値が大きい方から2番目)および対応する固有ベクトルが得られる。 $H_1$  は  $\lambda_1$  によって deflate されたマトリックスと呼ばれる。この方法の利点は、 $H_1$  を  $A$  と同じ桁数の精度で求めるためには  $\lambda_1$  は  $A$  と同じ桁数、 $x_1$  と  $y_1$  はその半分の桁数の精度でよいことである<sup>21)</sup>。従って iteration は  $x_1$  と  $y_1$  の両方について行なう必要があるが、これらは  $A$  の桁数の半分の精度が得られたところで留め、 $\lambda_1$  をレーリー商

$$\lambda_1 = \frac{y_1' Ax_1}{y_1' x_1} \quad (\text{A.37})$$

によって計算することにすれば、上の要求が満たされて丁度うまく行く。第3、第4、……の固有値も全く同様に deflation を繰返すことによって得られる。

その他、この方法より数値的安定性においてすぐれているといわれる幾つかの方法がある<sup>19)</sup>。それらにおいては deflate されたマトリックスが singular にならないように次数を一つづつ減らして行く。iteration は  $x$  についてのみでよいが、 $A$  と同じ桁数の精度まで行なう必要があるから手数はそれ程減らない。また deflate されたマトリックスの固有ベクトルは  $A$  のそれと異なるという欠点がある。

第二の点、すなわち絶対値の近接した固有値がある場合の処理は、フラッタの解析には特に重要で欠くことができない。これにも幾つかの方法があるが<sup>22), 8)</sup>、本報では折角  $x$  と  $y$  の両方の iteration を行なうのであるから、これを有効に利用する方法を考案した。

いま  $|\lambda_1|$  と  $|\lambda_2|$  とがほぼ等しく、 $|\lambda_3|$  はこれに比べて小さいとする。iteration が充分進んだ段階では、 $x$  についての三つの相続く iterated vector を  $r, s, t$  とすると

$$\begin{aligned} r &= x_1 + x_2 \\ s &= Ar = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ t &= As = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

のように書ける<sup>22)</sup>。同様に  $y$  についての二つの相続く iterated vector を  $\rho, \sigma$  とすると

$$\begin{aligned}\rho &= y_1 + y_2 \\ \sigma &= A'\rho = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\end{aligned}\quad (\text{A. 39})$$

と書ける。 $x_i$  と  $y_j$  の bi-orthogonality ( $y_j' x_i = 0, i \neq j$ ) によって(A. 38)と(A. 39)から

$$\begin{aligned}\rho'r &= y_1' x_1 + y_2' x_2 \\ \rho's &= \sigma'r = \lambda_1 y_1' x_1 + \lambda_2 y_2' x_2 \\ \rho't &= \sigma's = \lambda_1^2 y_1' x_1 + \lambda_2^2 y_2' x_2 \\ \sigma't &= \lambda_1^3 y_1' x_1 + \lambda_2^3 y_2' x_2\end{aligned}\quad (\text{A. 40})$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  として, (A. 40)の初めの三つの式から  $y_1' x_1$  と  $y_2' x_2$  を消去すると

$$\rho'r \lambda_1 \lambda_2 - \rho's(\lambda_1 + \lambda_2) + \rho't = 0 \quad (\text{A. 41})$$

同様に(A. 40)の後の三つの式から

$$\sigma'r \lambda_1 \lambda_2 - \sigma's(\lambda_1 + \lambda_2) + \sigma't = 0 \quad (\text{A. 42})$$

(A. 41), (A. 42)と

$$\lambda_1 \lambda_2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda^2 = 0 \quad (\text{A. 43})$$

とから  $\lambda_1 \lambda_2$  と  $\lambda_1 + \lambda_2$  を消去すると

$$\begin{vmatrix} \rho'r & \rho's & \rho't \\ \sigma'r & \sigma's & \sigma't \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A. 44})$$

(A. 44) は  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を与える二次方程式である。対応する固有ベクトルは(A. 38), (A. 39)から

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\lambda_2 r - s}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ x_2 &= \frac{\lambda_1 r - s}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ y_1 &= \frac{\lambda_2 \rho - \sigma}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_2 &= \frac{\lambda_1 \rho - \sigma}{\lambda_1 - \lambda_2}\end{aligned}\quad (\text{A. 45})$$

によって得られる。これらの式で分母は1で置き換えてよい。こうして得られた固有値と固有ベクトルが収束の条件を満たしているかどうかを確認するため、および満たしていない場合にはこれを満たさせるため、(A. 45)を starting vector として更に iteration を行

なうのがよい。

この方法の精度を調べるため、固有値のわかっている多くのマトリックスについて計算を行ない、充分満足すべき結果を得た。ここにその一例を挙げておく。

例

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

このマトリックスは第1固有値に対して starting vector  $\{1, 1, 1, 1\}$  を用いて普通の iteration を行なうと、有効数字3桁の精度を得るのに1200回の iteration を必要とする<sup>23)</sup>。本法による計算結果を表3に示す。収束判定値は  $5 \times 10^{-4}$  とし、これが2回続けて満たされる時収束と見なす。繰返数は  $x$  についての数を示す。 $y$  についての繰返数もほぼ同じ程度である。第1固有値の繰返数が54となっているのは、50回  $x$  および  $y$  の iteration を行なった後、(A. 45)の  $x_1$  と  $y_1$  を starting vector として更に iteration を行ない、 $x$  は4回で収束したことを示す。第2固有値は(A. 45)の  $x_2$  と  $y_2$  を starting vector としているので収束が速い。Bodewigの結果<sup>23)</sup>と比較して有効数字7桁目が1程度異なるに過ぎない。これは計算機の限度である。

表3 固有値の計算例

本 法		Bodewig <sup>23)</sup>
固有値	繰返数	
-8.028578	54	-8.02857835
7.932905	4	7.93290472
5.668863	8	5.66886436
-1.573191	5	-1.57319074

## 文 献

- 1) H. P. Y. Hitch; Modern Methods of Investigating Flutter and Vibration, Jour. Roy. Aero. Soc., Vol. 68, No. 642 (1964/6) pp. 357—373
- 2) D. S. Woolston and H. L. Runyan; Appraisal of Method of Flutter Analysis Based on Chosen Modes by Comparison with Experiment for

- Cases of Large Mass Coupling, NACA TN 1902 (1949)
- 3) I. T. Minhinnick; The Theoretical Determination of Normal Modes and Frequencies of Vibration, A. R. C. R & M. 3039 (1957)
  - 4) G. B. Paddock; Dynamic Stability of Space Vehicles, Volume I — Lateral Vibration Modes, NASA CR—935 (1967)
  - 5) W. P. Jones; Wing-Fuselage Flutter of Large Aeroplanes, A. R. C. R & M. 2656 (1953)
  - 6) A. I. van de Vooren; Theory and Practice of Flutter Calculations for System with Many Degrees of Freedoms, Doctoral Thesis, Technical Institute of Delft, published by Eduard Ijdo, Leiden (1952)
  - 7) A. I. van de Vooren; Flutter Calculation with Many Degrees of Freedom for Modern Aircraft, Aeroelasticity Symposium, Göttingen, April 16—17, 1957, NASA TT F-81 (1963) pp. 51—77
  - 8) W. P. Rodden; A Matrix Approach to Flutter Analysis, S. M. F. Fund Paper No. FF-23, Inst. Aero. Sci. (1959)
  - 9) M. Goland; The Flutter of a Uniform Cantilever Wing, Jour. Appl. Mech., Vol. 12, No. 4 (1945/12) pp. 197—208
  - 10) R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell, and S. Michaelson; The Matrix Analysis of Vibration, Cambridge University Press (1965) p. 62
  - 11) E. Reissner; Complementary Energy Procedure for Flutter Calculations, Jour. Aero. Sci., Vol. 16, No. 5 (Reader's Forum) (1949/5) pp. 316—317
  - 12) A. I. van de Vooren and J. H. Greidanus; Complementary Energy Method in Vibration Analysis, Jour. Aero. Sci., Vol. 17, No. 7 (Reader's Forum) (1950/7) pp. 454—455
  - 13) R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman; Aeroelasticity, Addison-Wesley (1955) p. 136
  - 14) 同上, p. 129
  - 15) E. Reissner; Note on the Method of Complementary Energy, Jour. Math. Phys., Vol. 27, No. 2 (1948/7)
  - 16) K. Washizu; Variational Principles in Continuum Mechanics, Report 62—2, Department of Aeronautical Engineering, College of Engineering, University of Washington (1962)
  - 17) R. クーラン, D. ヒルベルト; 数理解物理学の方法 1, 丸山滋弥訳. 商工出版社 (1959) p. 194
  - 18) J. H. Wilkinson; The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press (1965) p. 35
  - 19) 同上, p. 584
  - 20) E. Bodewig; Matrix Calculus, North-Holland (1959)
  - 21) 文献(6), p. 45
  - 22) 文献(20), p. 292
  - 23) 同上, p. 288

TM-134 AGARD 標準模型 HB-1, HB-2 の超音速風洞試験	1968年5月	齊藤秀夫, 石原久蔵 原 亘利, 野田順一 関根英夫
TM-135 歪ゲージの自己加熱による歪ドリフト	1968年5月	小川 鈺一, 遠藤修司
TM-136 “NAL-16・31” および “NAL-25・31” 二段ロケット結合部の曲げ剛性試験	1968年5月	中井 暎一, 飯田宗四郎 高木俊朗, 安藤泰勝 菊地孝男
TM-137 ロケットの三次元の運動の方程式および HITAC 5020 による軌道計算のためのプログラム	1968年5月	毛利 浩
TM-138 片持板の振動解析に関する考察	1968年6月	塙 武敏, 越出慎一 林 洋一
TM-139 薄板構造の疲れき裂伝ば実験	1968年6月	竹内和之, 野原利雄 飯田宗四郎
TM-140 二次元スラットおよびスロツテッドフラップの実験的研究 (II)	1968年7月	犬丸 矩夫, 北村清美
TM-141 超音速二次元翼列予備実験風洞について	1968年7月	近藤 博, 坂口 一 八山 優, 高森 晋
TM-142 二次元スラットおよびスロツテッドフラップの実験的研究 (III)	1968年7月	犬丸 矩夫, 高橋 侑
TM-143 端面一体巻きフィラメント・ワインディング容器の静圧強度および疲れ強度	1968年8月	竹中幸彦, 朝田洋雄 野口義男
TM-144 真ひずみ計の試作	1968年8月	竹中幸彦, 朝田洋雄 野口義男
TM-145 スピンを伴うロケットの運動を計算するプログラム	1968年8月	戸川隼人, 石黒登美子 山本浩道
TM-146 双発STOL機の飛行試験 (実用運用包囲線および離着陸特性)	1968年8月	幸尾治朗, 岡 遠一 塚野雄吉, 鎌田幸男 小野孝次
TM-147 浮動振子型加速度計の試作	1968年9月	大月正男, 鈴木孝雄 円居繁治
TM-148 吹出しフラップ翼の高揚力特性	1968年9月	小橋安次郎, 宮沢政文 西 武徳
TM-149 NAL-16-TR ロケットの研究試作	1968年10月	ロケット性能研究室
TM-150 リフトジェット VTOL 機の着陸における水平方向の減速について	1968年11月	西村博史

注：欠番は配布先を限定したもの

## 航空宇宙技術研究所資料151号

昭和43年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話 武蔵野三鷹(0422)44-9171 (代表) ☎182

印刷所 一誠社総合印刷株式会社  
東京都武蔵野市御殿山1-6-10

