

UDC 533.69.01:  
533.692.3

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-176

非対称自由流線の一計算法

高橋 伴

1970年5月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 資 料

TM-140	二次元スラットおよびスロテッドフラップの実験的研究(Ⅱ)	1968年7月	犬丸 矩夫, 北村 清美
TM-141	超音速二次元翼列予備実験風洞について	1968年7月	近 藤 博, 坂 口 一 八 山 優, 高 森 晋
TM-142	二次元スラットおよびスロテッドフラップの実験的研究(Ⅲ)	1968年7月	犬丸 矩夫, 高 橋 侔
TM-143	端面一体巻きフィラメント・ワインディング容器の静圧強度および疲れ強度	1968年8月	竹 中 幸 彦, 朝 田 洋 雄 野 口 義 男
TM-144	真ひずみ計の試作	1968年8月	竹 中 幸 彦, 朝 田 洋 雄 野 口 義 男
TM-145	スピンを伴うロケットの運動を計算するプログラム	1968年8月	戸 川 隼 人, 石 黒 登 美 子 山 本 浩 通
TM-146	双発 STOL 機の飛行試験 — 実用運用包囲線および離着陸特性 —	1968年8月	幸 尾 治 朗, 岡 遠 一 塚 野 雄 吉, 鎌 田 幸 男 小 野 孝 次
TM-147	浮動振子型加速度計の試作	1968年9月	大 月 正 男, 鈴 木 孝 雄 円 居 繁 治
TM-148	吹出しフラップ翼の高揚力特性	1968年9月	小 橋 安 次 郎, 宮 沢 政 文 西 武 徳
TM-149	NAL-16-TR ロケットの研究試作	1968年10月	ロケット性能研究室
TM-150	リフトジェット VTOL 機の着陸における水平方向の減速について	1968年11月	西 村 博 史
TM-151	フラッタ解析法の再検討 — フラッタ解析法の研究 その1 —	1968年12月	市 川 輝 雄
TM-152	ノズル内の突起物によるロケットエンジンの側分力	1969年1月	檜 崎 哲 二, 中 野 富 雄
TM-153	FA-200 改機の風洞試験 (Ⅰ) プロペラ付き	1969年2月	広 末 健 一, 坂 井 紀 穂 高 橋 宏, 綿 貫 忠 晴
TM-154	FA-200 改機の風洞試験 (Ⅱ) 高揚力装置付き	1969年2月	広 末 健 一, 木 村 友 昭 高 橋 宏, 綿 貫 忠 晴
TM-155	極超音速風洞 M7ノズル較正試験	1969年2月	橋 本 登, 吉 沢 昭 穂 積 弘 一
TM-156	自動制御系の動特性を計数型電子計算機により模擬するための汎用プログラム	1969年3月	戸 川 隼 人, 丸 山 治 雄
TM-157	機上用超小形エンコーダの研究	1969年3月	中 正 夫, 山 本 芳 樹 大 石 晃
TM-159	可動アイアンバードによる姿勢制御の実験	1969年5月	西 村 博 史, 藤 枝 郭 俊
TM-160	極超音速風洞計測装置について	1969年7月	長 洲 秀 夫, 吉 沢 昭 松 崎 貴 至
TM-161	燃料蒸発管に関する研究(Ⅱ) — 加熱蒸発管の燃料未蒸発分捕集 —	1969年8月	鈴 木 邦 男, 田 丸 卓 乙 幡 安 雄
TM-162	境界層内圧力変動および板の振動変位の測定(Ⅰ)	1969年9月	藤 森 義 典, 山 崎 浩
TM-163	ある双発プロペラ STOL 機の動安定風洞実験	1969年9月	別 府 護 郎, 鈴 木 友 昭
TM-164	ブレードのフラッピング運動をバネで拘束したロータのピッチダンピングについて	1969年10月	別 府 護 郎, 岡 遠 一
TM-165	フェノール系複合材の環境試験結果	1969年11月	古 田 敏 康, 野 口 義 男

# 非対称自由流線の一計算法\*

高橋 俣\*\*

## On a Method of Computing Asymmetric Free Streamlines past a Circular Arc

by Hitoshi TAKAHASHI

A general free streamline theory for curved obstacles was first given by Levi-Civita. The solutions for the symmetric flow field around circular arcs were presented by many authors. In this report, an extension of the theory from the symmetric flow field around circular arcs to the asymmetric flow field is presented, and a method of computation is developed using an electronic computer. The stagnation point and the points where the flow separates from the surface of the circular arcs are prescribed, and the flow direction at infinity is determined iteratively in the course of calculation. The expressions for pressure distributions around circular arcs and shapes of free streamlines are presented and several examples are worked out. By means of this method, an extension of the theory to the flow field around airfoils may be expected.

### 1. ま え が き

自由流線理論は古くは Helmholtz, Kirchhoff により始められ, 以後, 種々の方法で研究が進められてきた<sup>1)~3)</sup>。Kirchhoff の解は平板に対するものであり, 一般的な Curved obstacle に対しては不適當である。Curved obstacle を過ぎる自由流線の取扱いを一般化したのは Levi-Civita である。

いま, Curved obstacle として円弧を考える。従来の円弧を過ぎる自由流線の計算はすべて対称の場合に限られ, 最初に Brodetsky により数値計算された<sup>2)</sup>。その後, Birkhoff らはこの問題を解くため, ベキ級数を導入して大がかりな計算を行なった<sup>1)</sup>。ここではこの Birkhoff らの方法を非対称の場合に拡張して計算を行なった。この問題は物体の形と自由流線上の速度は前もってわかっているが, 物体上の速度と自由流線の形がわかっていない混合した境界を持つ流れの場を等角写像を用いて解くことである。この場合, 写像関数をベキ級数展開の形に仮定し, 境界条件を満足させるように係数を決定する。境界条件として物体の形, 自由流線上の速度, 物体上の点—よどみ点 1 個, はく離

点 2 個—を与える。対称の場合は係数の偶数項が対称性から 0 となるが, 非対称の場合は 0 とならず全項が未知になる。また, よどみ点に向かう一様流の方向は対称の場合は物体の対称軸の方向と一致し既知であるが, 非対称の場合は一般に未知であるため, はく離点における流れの条件を満足させるように逐次一様流の方向を変えて計算を進める必要がある。このような非対称の場合の数値計算法をここで示した。

なお, L. C. Woods も Levi-Civita の方法より出発して, 同様な計算を行なった<sup>5)</sup>。この方法には背圧と圧縮性の効果が入っており, 本論文で用いた級数展開の代りに, 解析的関数を用いている。計算には, 物体の形, 実験により得られた背圧とはく離点を与える。

さらに, 物体上の速度と, 非対称の場合には未知数 1 個を任意に仮定して与え, これが変化しなくなるまで, 逐次近似を行なう。しかし, この Woods の方法は複雑な解析関数を用いており, 計算機を用いて系統的に計算を行なうのに不適當に思われる。Woods は対称の場合についてのみ実例計算を行なっている。

### 2. 記 号

$z$  : 物理面

$x, y$  : 物理面の二次元座標

\* 昭和45年2月27日受付

\*\* 新型航空機部

- $f$  : 複素ポテンシャル面
- $\varphi, \psi$  : 速度ポテンシャル, 流れ関数
- $\zeta$  : 単位半円の写像平面
- $s$  :  $\zeta$ 面の極座標表示の角度
- $U$  : 一様流速
- $q$  : 局所速度
- $\theta$  : 流れの方向
- $\omega(\zeta)$  : 補助平面
- $\Omega(\zeta)$  : 級数展開表示による関数
- $\Theta, T$  :  $\Omega(\zeta)$ の実部および虚部
- $s_0, M$  : 写像による未知実定数
- $a_m$  :  $\Omega(\zeta)$ の未知係数
- $\Psi$  : 物体の  $x$  軸に対する傾き
- $l$  : 物体の長さ
- $R$  : 物体の半径
- $\Phi$  :  $\Psi - a_0$
- $K(\Phi)$  : 曲率
- $\lambda$  : パラメータ表示
- $p$  : 局所圧力
- $p_c$  : 無限遠点での圧力
- $X, Y$  : 抵抗, 揚力

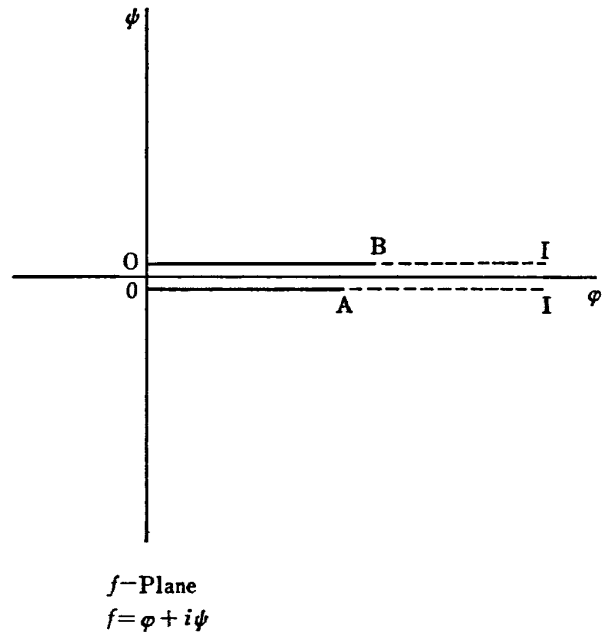


図 1-b 写像関係

3. 一般理論 Levi-Civita の表現 <sup>1), 3), 4)</sup>

Curved obstacle を過ぎる自由流線の基本的な表現方法であるLevi-Civitaの方法を示す。ここではCurved obstacle として円弧を用いることにする。

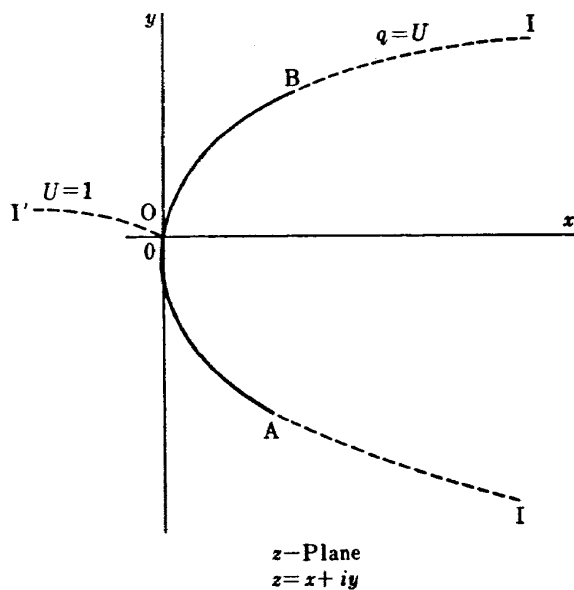


図 1-a 写像関係

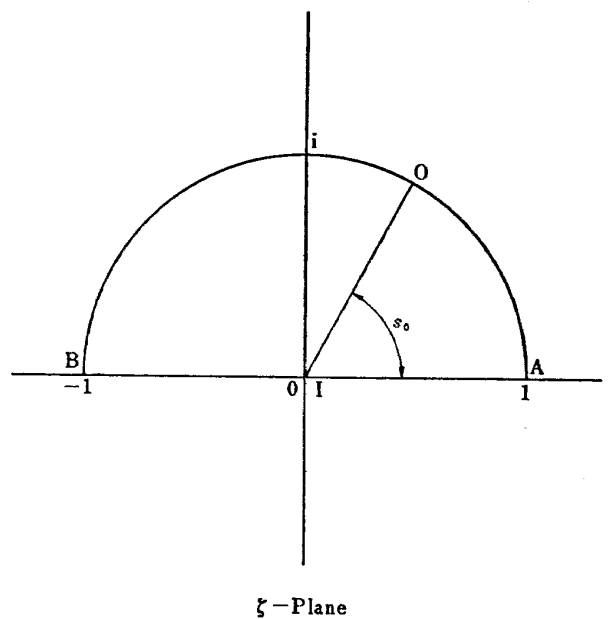


図 1-c 写像関係

図 1-a に与えられた物理面  $z$  面を示す。  $x$  軸はよどみ点  $O$  を通り一様流の方向にとる。  $y$  軸は  $O$  を通り  $x$  軸に直角の方向にとる。 対称の場合は一様流の方向は円弧の対称軸の方向を向く。 非対称の場合は、円弧の形とその上のよどみ点の位置をあらかじめ与えることにすると一様流の方向は未知となる。 そこで、ここでは一応流れの方向を任意に仮定して理論を進める。

流れの状態を次のように設定する。

- (1) 一様流の速度  $U$  を後の便宜のため、1 とする。
- (2) 分割流線は  $I'OA$ ,  $I'OB$  であり、これは流れ関数  $\psi = 0$  に相当するものである。
- (3)  $AI$ ,  $BI$  は自由流線で、これに囲まれた領域は静止領域で、その圧力は無限遠点での圧力に等しいものとおく。したがって、自由流線上での流速は一様流速に等しい。
- (4) 流れの方向は無限遠点にて一様流の方向と一致する。
- (5) 流れは非粘性、非回転、非圧縮である。

図 1-b に複素ポテンシャル面を示す。 流れの複素ポテンシャルが  $O$  点で 0 なる値をもつものとし、分割流線は  $\psi = 0$  であることから図 1-b に示すような形になる。これを図 1-c に示した写像平面  $\zeta$  面の単位半円の内側に写像する。この写像関数は次式で与えられる。

$$f = M [\cos s_0 - (\zeta + 1/\zeta)/2]^2 \quad (1)$$

ここで  $s_0$ ,  $M$  は境界条件により定まる実数定数である。  $z$  面における流れの境界、すなわち円弧に沿う流れは  $\zeta$  面単位半円の円周上の点に対応する。その時よどみ点  $O$  に対する点を  $\zeta_0 = e^{is_0}$ 、はく離点  $A$  に対しては  $\zeta_A = 1$ ,  $B$  では  $\zeta_B = -1$  とおく。円弧の外側の流れは半円の内側に写像され、 $z$  面の無限遠点は  $\zeta$  面の原点に対応する。

補助平面  $\omega$  を図 2 のごとく定義する。

速度関数  $df/dz = u - iv$  ( $u, v$  は速度の  $x, y$  成分) を変換

$$df/dz = e^{-i\omega} \quad (2)$$

よって  $\omega$  面に写像する。  $\tau = \ln q = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\theta$  を速度ベクトルが  $x$  軸となす角  $\tan^{-1}(v/u)$  とすれば、

$$\omega = \theta + i\tau \quad (3)$$

と書ける。よって  $\omega$  を  $\zeta$  の関数として何らかの方法で決定できれば、(1), (2) から

$$\begin{aligned} z &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} (df/d\zeta) d\zeta \\ &= \frac{M}{2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos s_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \quad (4)$$

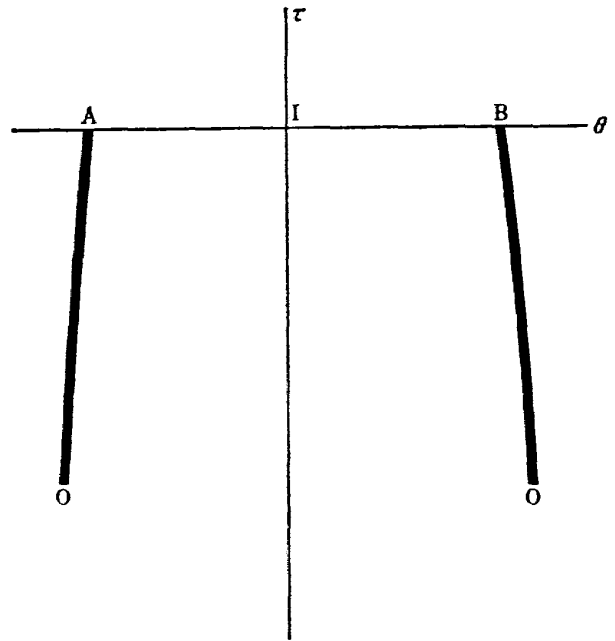


図 2  $\omega$ -plane

となり、 $f$  も  $z$  もともに  $\zeta$  の関数として定まる。これより  $f(\zeta)$  の関係が求められるので、流れのすべての性質が求められる。

(4) から円弧表面に沿っては  $\zeta = e^{is}$  であるから

$$z(s) = -2M \int_{s_0}^s e^{i\omega(e^{is})} (\cos s - \cos s_0) \sin s ds \quad (4')$$

を得る。

#### 4. 関数 $\omega(\zeta)$ を仮定すること<sup>1), 3), 4)</sup>

問題を解くために  $\omega(\zeta)$  を以下に述べる流れの条件を満足するように仮定する。流れの条件はこの問題の設定の条件と同じである。

- (i) よどみ点  $O$  において ;  $q = 0$ , すなわち  $\tau = -\infty$
- (ii) はく離点  $A$  において ;  $q = U = 1$ , すなわち  $\tau = 0$   
 $\theta = \theta_A$  (物体の  $A$  点における接線と  $x$  軸のなす角)  
はく離点  $B$  において ;  $\tau = 0$ ,  $\theta = \theta_B$
- (iii) 自由流線上 ;  $\tau = 0$ ,  
無限遠点 ;  $\tau = 0$ ,  $\theta = 0$

無限遠点は  $\zeta = 0$  に対応するから (iii) により  $\omega(0) = 0$  となる。(i), (iii) を満足させるように Levi-Civita により次のように表現する。

$$\omega_0(\zeta) = i \ln(\zeta - e^{is_0}) / (\zeta e^{is_0} - 1) \quad (5)$$

これは流速に関する条件を満足する。すなわち

- よどみ点において  $\zeta = e^{is_0}$  ;  $Im \omega_0(s_0) = -\infty$   
はく離点  $A$  において  $\zeta = 1$  ;  $Im \omega_0(1) = 0$   
"  $B$  "  $\zeta = -1$  ;  $Im \omega_0(-1) = 0$

自由流線上では  $Im \zeta = 0$  であるから,  $Re \zeta = \xi$  として

$$Re^{i\tau} = (\xi - e^{i\alpha}) / (\xi e^{i\alpha} - 1) \text{ とおけば}$$

$$R = |(\xi - e^{i\alpha}) / (\xi e^{i\alpha} - 1)| = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} Im \omega_0(\zeta) &= Im [i \ln \{ (\zeta - e^{i\alpha}) / (\zeta e^{i\alpha} - 1) \}] \\ &= Im [i \ln Re^{i\tau}] \\ &= \ln R = 0 \end{aligned}$$

よつて自由流線上では  $Im \omega_0(\zeta) = 0$  である。

(ii) を満足させるために,  $\zeta$  のべき級数展開を用いる。これを  $\Omega(\zeta)$  とおき, この実部, 虚部をおのおの  $\theta(\zeta)$ ,  $T(\zeta)$  とすれば,

$$\Omega(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m = \theta(\zeta) + iT(\zeta) \quad (6)$$

$\omega(\zeta)$  を (5), (6) の和で表わすものとすれば,

$$\omega(\zeta) = \theta + i\tau = i \ln(\zeta - e^{is_0}) / (\zeta e^{is_0} - 1) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m \quad (7)$$

(7) を書き換え (6) を用いると

$$\Omega(\zeta) = \theta + iT = \omega(\zeta) - i \ln(\zeta - e^{is_0}) / (\zeta e^{is_0} - 1) \quad (8)$$

無限遠点では  $\omega(0) = 0$  であるから (8) より

$$\begin{aligned} \Omega(0) &= a_0 \\ &= \omega(0) + s_0 = s_0 \end{aligned} \quad (9)$$

よつて未知定数  $s_0$  は未知係数  $a_0$  に等しい。

物体  $AOB$  上では  $\zeta = e^{is}$  であるから (6) より

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{ims} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos ms + i \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin ms \end{aligned}$$

よつて,

$$\theta(s) = a_0 + a_1 \cos s + a_2 \cos 2s + \dots \quad (10)$$

$$T(s) = a_1 \sin s + a_2 \sin 2s + \dots$$

となる。

次に流れの方向と円弧の傾きを結び付ける。円弧表面に沿っての速度のベクトルと  $x$  軸のなす角  $\theta$  は流れの方向を示す。また円弧の  $x$  軸に対する傾きを図3のごとく  $\Psi$  とすれば,

$$\theta = \begin{cases} \Psi - \pi & AO \text{ 間} \\ \Psi & BO \text{ 間} \end{cases} \quad (11)$$

となる。円弧上の流れの方向  $\theta$  は  $\omega(\zeta)$  の実部で, 円弧上では  $\zeta = e^{is}$  であるから (7) にこれを代入し, また

$$Rl \omega_0(e^{is}) = \begin{cases} -\pi & AO \text{ 間} \\ 0 & BO \text{ 間} \end{cases}$$

であるから

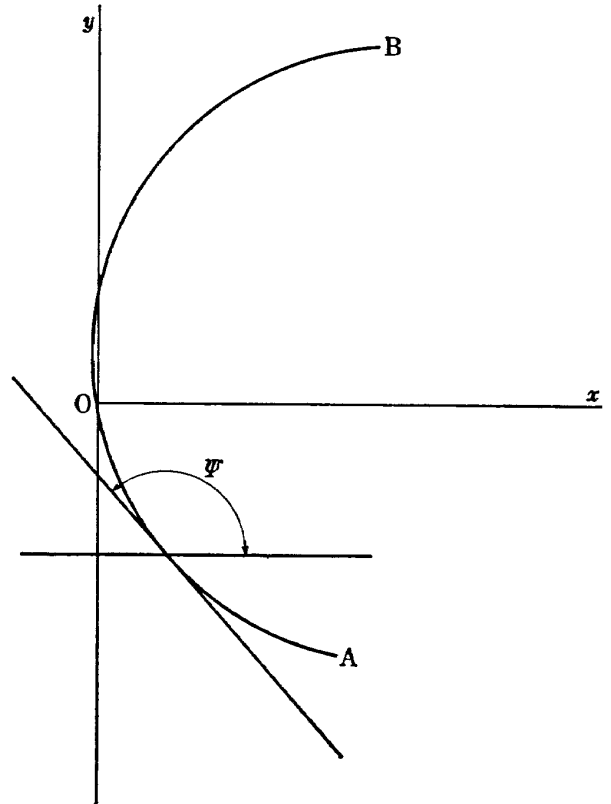


図3 物体の傾き

$$\begin{aligned} \theta(s) &= Rl \omega_0(e^{is}) \\ &= \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos ms - \pi & AO \text{ 間} \\ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos ms & BO \text{ 間} \end{cases} \end{aligned} \quad (11')$$

と表わせる。(11), (11') より,

$$\Psi = \Psi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos ms \quad (12)$$

となり, 円弧上では  $\theta$  も  $\Psi$  も  $s$  の関数となる。いま, 円弧の傾きを便宜上  $\Phi(s) = \Psi(s) - a_0$  で表わすものとすれば,

$$\Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos ms \quad (12')$$

となる。

円弧表面の微小長さ  $dl$  は次式で表される。

$$dl = |dz| = |e^{i\omega(\zeta)}| |df/ds| ds \quad (13)$$

$|e^{i\omega}| = |e^{i(s+s_0)} - 1| e^{-T(e^{is})} / |e^{is} - e^{is_0}|$ ,  $df/ds = (df/d\zeta)(d\zeta/ds) = -M[\cos s_0 - \frac{1}{2}(\zeta + 1/\zeta)](1 - 1/\zeta^2)(d\zeta/ds)$  で, 物体上面では  $\zeta = e^{is}$  であるから  $dl$  の最終的な式は次式で表わされる。

$$dl = 4M \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s e^{-T(e^{is})} ds \quad (14)$$

また,  $A$  から測った表面の長さを  $l(s)$  とすれば,

$$l(s) = 4M \int_0^s e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \, ds \quad (14')$$

と書ける。

微小弧と円弧の傾きで円弧上の任意点における曲率を表わす。これを  $K(\Phi)$  とすれば、

$$K(\Phi) = -d\psi/dl = -d\phi/dl \quad (15)$$

である。円弧の半径を  $R$  とすれば曲率は  $1/R$  で円弧上、いたるところ一定である。

曲率を用いた式を導入するのは便利である。用いた物体は円弧なので、まだ  $z$  面と  $\zeta$  面の写像関係が不明の場合にもいかなる  $\zeta = e^{is}$  の値に対しても、それに対応する  $z$  面の点における曲率は一定であるからである。(13), (14) を用いて曲率を含んだパラメータ  $\lambda(s)$  を導入し、これを次式のように表わす。

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= -d\phi/ds \\ &= -(d\phi/dl)(dl/ds) \\ &= M e^{-T(e^{is})} K(\Phi) \nu(s) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで

$$\nu(s) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \quad (16')$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= -d\phi/ds \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \sin ms \end{aligned} \quad (17)$$

が得られ、Fourier 解析により係数  $a_m$  を求めることができる。

$$a_m = \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ms \, ds \quad (18)$$

$(m = 1, 2, \dots)$

はく離点  $A, B$  での円弧の傾きは  $s=0, s=\pi$  に対応し、これを  $\Psi_A, \Psi_B$  とする。流れは滑らかにはがれて、流線の曲率ははく離点で有限でなければならない。

よって、流れははく離点で物体に接線方向にはがれてゆくものと仮定する。しかる時、流れの方向と円弧の傾きとの関係から  $s_0$  を次式で求めることができる。 $A$  点での傾き角は  $s=0$  であるから、

$$\Psi_A = \Psi(0) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \quad (19)$$

$$a_0 = s_0 = \Psi_A - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \quad (19')$$

また  $M$  は (14') から計算できる。そこで  $\lambda(s)$  が決定できれば、(18) より  $a_m$  が求められる。ここでは  $\lambda(s)$  は未知であるので以下に述べる逐次近似方法を用いる。 $\lambda(s)$  を第1近似として任意に与え、(18) より  $a_m$  を求め、これを用いて (19') から  $s_0$  を、(14') から  $M$  を (この時  $s$  は 0 から  $\pi$  まで積分し、 $l(\pi)$  は円弧  $AOB$  全長である。) 決定、これから (16) で新しい  $\lambda(s)$  を求め

以下逐次繰返して正しい  $a_m$  を求める。しかし非対称の場合、未知定数 2 個に対して、条件は 3 個で 2 条件を満足しても他の一条件を満足しない。

幸いにして、本報告では流れの方向が未知であるので、問題を解く事ができる。以下に述べる方法が従来の方法と異なっている点である。すなわち、流れの方向が未知である事を考慮して条件を作り直す。新しい条件として、円弧の中心を  $O'$  とすれば、点  $A, O, B$  相互の位置関係は不変であることから、(1) 角  $AO'O$  (2) 角  $BO'O$ , (3) 弧長  $AOB$  を与えるという条件がでてくる。よって未知量 3 個、既知量 3 個より問題を解くことができる。その方法を次節の数値解法にて述べる。

## 5. 数 値 解 法

級数の項数を有限個  $N$  で打切る。 $N$  を大きくした方が精度は良くなるが計算時間は長くなる。

4. で述べた手順で (12'), (14'), (16), (18), (19') を用いて逐次近似を行なう<sup>1), 3), 4)</sup>。

いま、第  $i$  番目近似を次のようにして求める。

$$a_m^{(i)} = \begin{cases} \frac{2}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \sin ms_j & m \neq N \\ \frac{1}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \sin ms_j & m = N \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(1)} &= 1.0 \text{ (初期値として)} \\ s_j &= (j - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{N} \quad (j=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

(18) から  $s_0^{(i)}$  を求める。

$$s_0^{(i)} = \Psi_A - \sum_{m=1}^N a_m^{(i)} \quad (21)$$

弧長  $AOB$  を  $L$  とすれば、これは既知であるから、

$$L = l(\pi) - l(0) = M^{(i)} \int_0^{\pi} e^{-D[\lambda_j^{(i)}]} \nu^{(i)}(s) \, ds$$

よって

$$M^{(i)} = L / \int_0^{\pi} e^{-D[\lambda_j^{(i)}]} \nu^{(i)}(s) \, ds \quad (22)$$

ここで

$$D[\lambda^{(i)}] = \sum_1^N a_m^{(i)} \sin ms$$

$$\nu^{(i)}(s) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}(s + s_0^{(i)}) \sin s$$

(16) から曲率を含んだパラメータは

$$\lambda_j^{(i)} = M^{(i)} \nu_j^{(i)}(s) K[\Phi] e^{-D[\lambda_j^{(i)}]} \quad (23)$$

である。円弧の場合  $s$  のいかなる値に対しても  $K(\Phi)$

は一定であるため、 $\lambda_j^{(i)}$  は決定できる。

次の近似の $\lambda$ を以下のごとくして求める。

$$\Delta\lambda_j^{(i)} = \lambda_j^{(i)} - \lambda_j^{(i-1)} \quad (24)$$

$$\lambda_j^{(i+1)} = \lambda_j^{(i)} + \epsilon \Delta\lambda_j^{(i)} \quad (0 < \epsilon < 1) \quad (24')$$

$\epsilon$  は収束の度合を決める実数である。このようにして(20)以下を繰り返して $a_m$ を求める。以上は一般的手順であったが、本報告のように未知定数2個、条件3個(はく離点2個、よどみ点1個)の場合には(20)~(24')の手順では一条件が決定できない。しかし流れの方向が未知であるという条件を入れると問題は解ける。そこで新しい条件として次の3個を用いる。

- (1) 角  $AO'O$
- (2) 角  $BO'O$
- (3) 弧長  $AOB$

が既知であるという条件である。

最初に図4-aに示すように流れの方向を任意に仮定する。ここでは流れの方向を $OO'$ 方向にとる。この時A点における傾き角 $\Psi_A$ は決定できる。これを従来

の方法で計算すると図4-(b)のようにO点がずれるが、A、B点の傾きは満足する。そこで角 $AO'O''$ 、 $BO'O''$ が与えられた角に等しくなるように、またOが原点にくるように流れの方向を修正する。計算前後のずれ角 $OO'O''$ だけ $O'$ を中心にOが原点に来るように回転させる。O点における物体の傾き角は(12)から $s = s_0$ の時の値で、これを $\gamma$ とおけば、 $\gamma = s_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos ms_0$ である。角 $OO'O''$ は前の近似による $\gamma$ の値と次の値との差であるから、A点の傾き角 $\Psi_A$ のずれ分は次のようにして求められる。

$$\gamma^{(i)} = s_0^{(i)} + \sum_{m=1}^N a_m^{(i)} \cos ms_0^{(i)} \quad (25)$$

A点の傾き修正は

$$\Psi_A^{(i+1)} = \Psi_A^{(i)} + (\gamma^{(i)} - \gamma^{(i-1)}) \quad (26)$$

で与えられる。仮定により初期の流れはO点とO'点を結ぶ方向に向かうとしたので、O点の初期傾き角 $\gamma^{(0)}$ は $\pi/2$ である。よって(20)~(26)の手順で計算すればよい。

近似を早めるために(24)の $\epsilon$ を操作した。本論文の

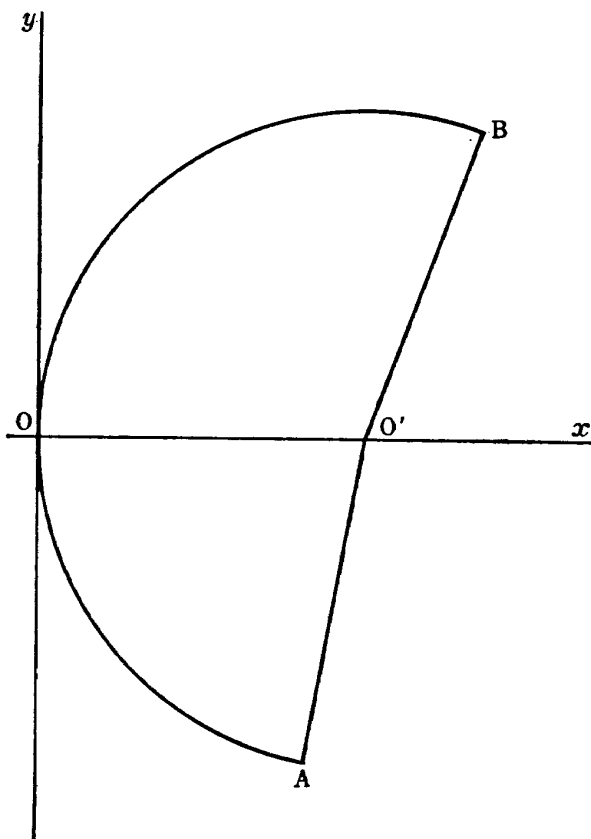


図 4-a

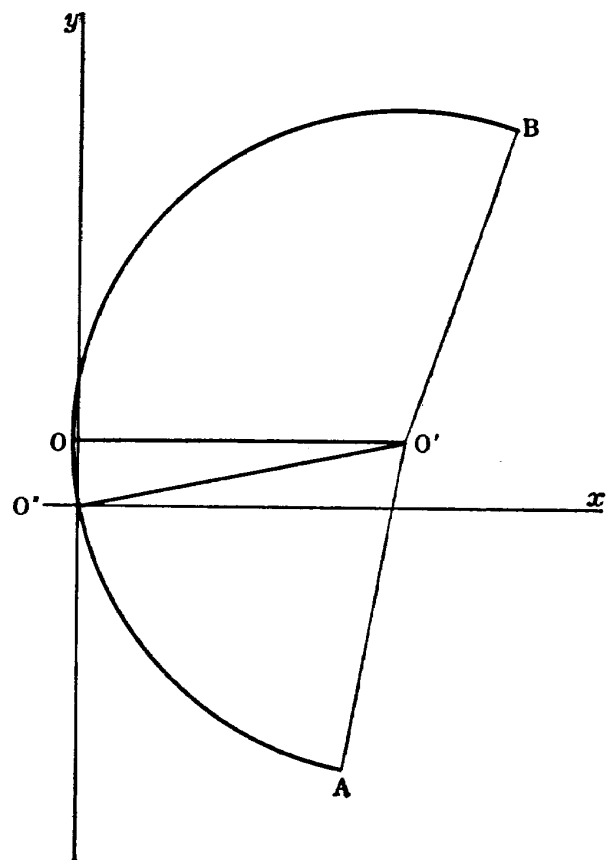


図 4-b



数値例では  $i$  がある値以上で収束が悪くなったので、 $\varepsilon$  の値を途中で変えて計算を行なった。ここでは  $\varepsilon$  を  $i$  の10回目毎に変え、 $\varepsilon$  の値を  $(\frac{1}{2})^n$  とし、 $n = 3$  まで行なった。この時は  $(a_m^{(i+1)} - a_m^{(i)})/a_m^{(i+1)}$  は約 0.01~0.05% 程度であった。実用上は  $n = 2$ ,  $i = 20$  で十分な精度が得られる。また  $N$  が少ないほど、計算時間も少なくなるが、精度は少々落ちる。今回は  $N = 48$  で150~200秒かかった。

以上により  $\omega(\zeta)$  が決定できたので、これを用いて流れの諸性質を決定できる。以下次節に述べる。

## 6. 流れの諸性質の決定

### (1) 物体上の速度とその一様流に対する方向

速度

$$q = e^{r(s)} = \left| \frac{\sin\{(s-s_0)/2\}}{\sin\{(s+s_0)/2\}} \right| e^{\sum_{m=1}^N a_m \sin ms}$$

方向

$$\theta = \begin{cases} a_0 + \sum_{m=1}^N a_m \cos ms - \pi & (AO \text{ 上}) \\ a_0 + \sum_{m=1}^N a_m \cos ms & (BO \text{ 上}) \end{cases} \quad (27)$$

### (2) 物体の座標

$O$  点を原点に計算により決定した一様流の方向を  $x$  軸に、それに垂直方向に  $y$  軸をとる。

AO 上で

$$x = 4M \int_s^{s_0} \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \cos \theta e^{-\sum_{m=1}^N a_m \sin ms} ds$$

$$y = 4M \int_s^{s_0} \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \sin \theta e^{-\sum_{m=1}^N a_m \sin ms} ds \quad (28)$$

BO 上で

$$x = 4M \int_{s_0}^s \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \cos \theta e^{-\sum_{m=1}^N a_m \sin ms} ds$$

$$y = 4M \int_{s_0}^s \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \sin \theta e^{-\sum_{m=1}^N a_m \sin ms} ds \quad (29)$$

ここで  $\theta$  は (27) より与えられる。

### (3) 自由流線上において

自由流線上では、 $q = 1$ , すなわち  $\tau = 0$  であるから  $\omega(\zeta) = \theta + i\tau = \theta$  である。よって自由流線上の流れの方向は、 $\xi = R\zeta$  ( $-1 \leq \zeta \leq 1$ ) とすれば

$$\theta(\xi) = R\zeta \omega(\zeta) = R\zeta [i \ln(\zeta - e^{i\xi}) / (\zeta e^{i\xi} - 1) + \sum_{m=0}^N a_m \zeta^m] \\ = s_0 + \sum_{m=1}^N a_m \xi^m + \tan^{-1}(\xi^2 \sin s_0 - \sin s_0) / \\ (\xi^2 \cos s_0 - 2\xi + \cos s_0) \quad (30)$$

で与えられる。

自由流線の座標は  $\xi$  を  $\zeta$  面実軸上の値とすれば (自由流線は  $\zeta$  面実軸に対応するから)

$$z(\xi) = \begin{cases} z(A) + \frac{M}{2} \int_1^\xi e^{i\theta(\xi)} (\xi + 1/\xi - 2 \cos s_0) \\ (\xi - 1/\xi) d\xi/\xi \quad (0 \leq \xi \leq 1) \\ z(B) + \frac{M}{2} \int_{-1}^\xi e^{i\theta(\xi)} (\xi + 1/\xi - 2 \cos s_0) \\ (\xi - 1/\xi) d\xi/\xi \quad (-1 \leq \xi \leq 0) \end{cases} \quad (31)$$

で与えられる。ここで  $z(A)$ ,  $z(B)$  おおの  $A$ ,  $B$  点の座標である。

### (4) 円弧にかかる力

円弧にかかる力は円弧表面の圧力分布により決定される。いま、この力を  $\rho U^2 d/2$  で無次元化する。ここで  $d$  は円弧の直径である。一様流の方向、すなわち  $x$  軸の方向に抵抗  $X$ , それに垂直方向に揚力  $Y$  とすれば、

$$X + iY = -i \int_{AOB} (p - p_c) / \frac{1}{2} \rho U^2 d \, dz \\ = -i \int_{AOB} \frac{1 - q^2}{d} \, dz \\ = -i \int_{AOB} \frac{1 - q^2}{d} \, dx + \int_{AOB} \frac{1 - q^2}{d} \, dy$$

よって

$$X = \int_{AOB} (1 - q^2) \, dy/d \\ Y = - \int_{AOB} (1 - q^2) \, dx/d \quad (32)$$

用いた物体は円弧であるので、 $dx$ ,  $dy$  を微小弧  $dl$  で表わすと、 $dx = \cos \theta \, dl$ ,  $dy = \sin \theta \, dl$  であるから、これを (32) に代入すれば

$$X = \int_{AOB} \frac{(1 - q^2) \sin \theta \, dl}{d} \\ Y = - \int_{AOB} \frac{(1 - q^2) \cos \theta \, dl}{d} \quad (33)$$

$dl$  は (14) で、 $q$ ,  $\theta$  は (27) で与えられる。(33) の積分を実行すれば力が求められる。 $X$ ,  $Y$  はおのおの  $d$  で無次元化した抵抗係数  $C_D$ , 揚力係数  $C_L$  を表わしている。計算結果を示した図では  $C_D$ ,  $C_L$  を使っている。

## 7. 計算結果

Birkhoff らの計算は対称の場合についてのみ行なわれているが、彼らは流れの対称性にもとづき初めから

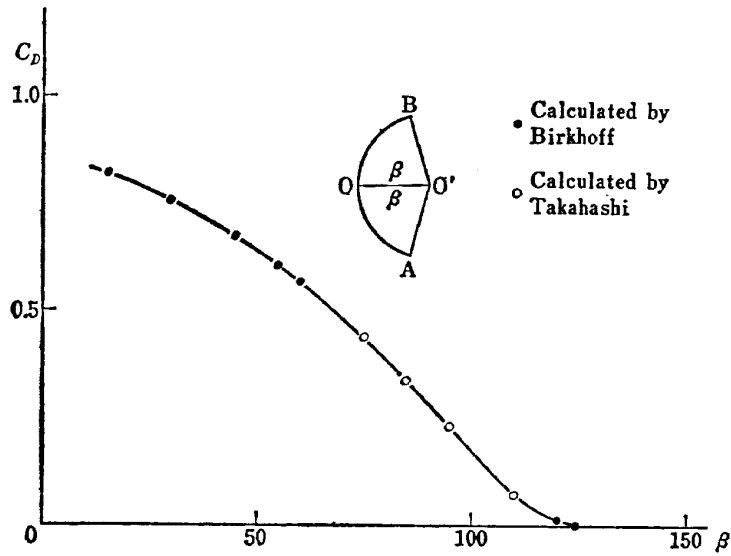
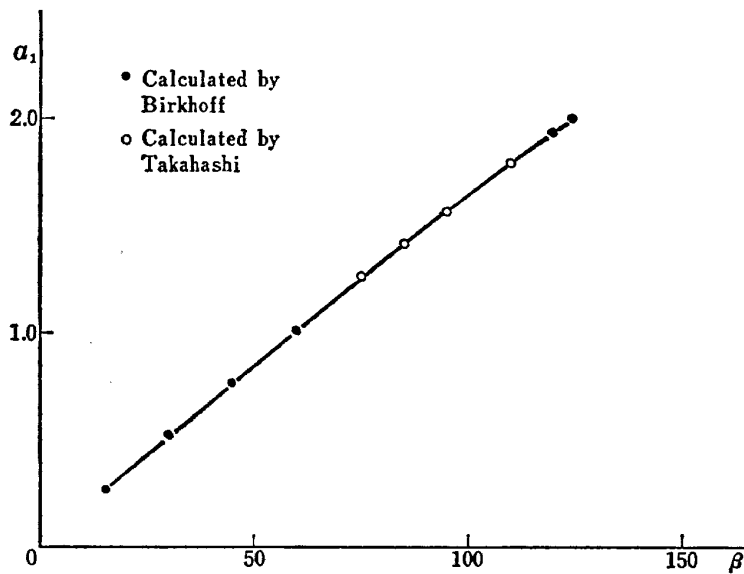


図 5 抵抗係数(対称の場合)

図 6  $a_1 \sim \beta$ 

係数  $a_m$  の偶数項を 0 に、また写像による未知数  $s_0$  を  $\pi/2$  として計算を簡略して行なっている。彼らの結果と本報告での計算のつながりを示すため、図 5、図 6 にこれを示す。図の中の白丸は本報告での計算結果、黒丸は Birkhoff らの結果である。図 5 は抵抗係数  $C_D$  で半開角に対して plot してある。ここで無次元化は流れあたる物体の横断面積を基準にしている。図 6 は級数展開の第 1 項である。

次に非対称の場合について計算した結果を図 7 から図 11 まで示す。

図 7 に  $\theta_2$  をパラメータに、 $\theta_1$  を変化させて計算した  $C_L$ 、 $C_D$  を示す。ここで図 7 右上に示したごとく、 $\theta_2$  は角  $AO'O$ 、 $\theta_1$  は角  $BO'O$  である。この物理的イメージは回転している円柱が部分的にはく離を起こした時に相当し、回転数が増加すると上面はく離点  $B$  が後退し、 $\theta_1$  の増加に対応する。しかる時は  $C_L$  は増加し、また wake の幅が縮小するため、 $C_D$  は減少することになり、計算結果と定性的には一致するように思われる。計算によれば  $\theta_1$  の増加に伴って  $C_D$  は減少するが、 $\theta_1$  のある値の所で  $C_D$  は 0 になる。

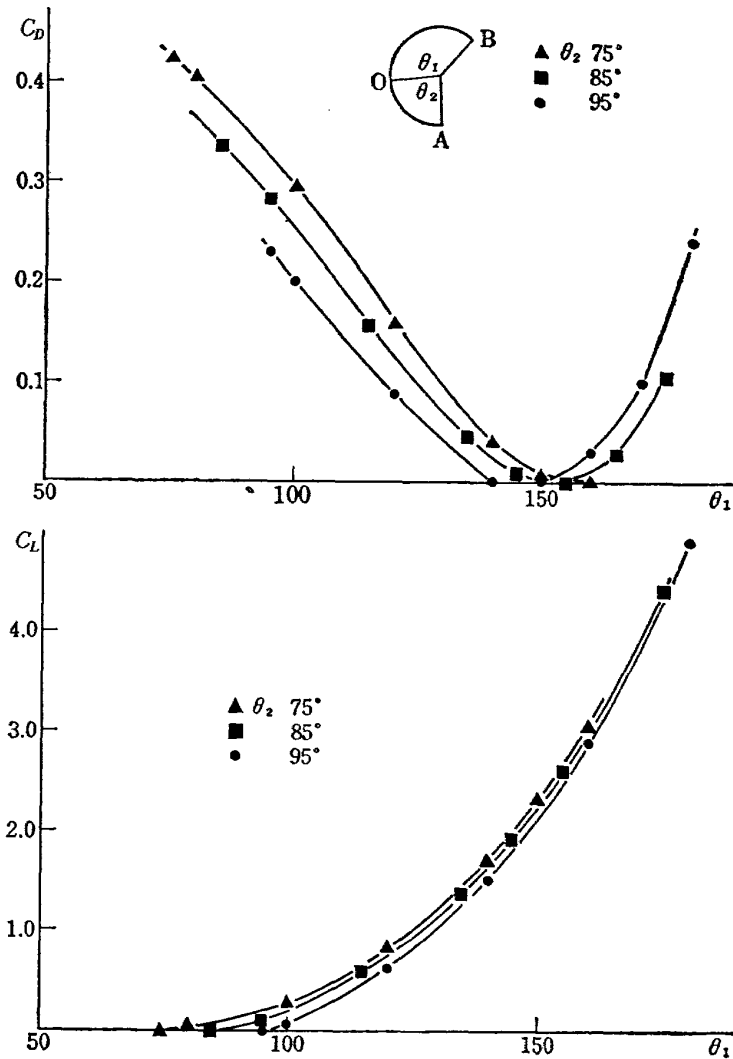


図 7 抵抗係数, 揚力係数

この時は死水域は無遠点にて閉じる。さらに  $\theta_1$  を増加させると、 $C_D$  は逆に増加をし始める。この時は自由流線は交叉する。

図8に計算による物体上面の圧力分布を、図9に計算による物体の形と自由流線の形を示す。自由流線の幅は  $\theta_1$  が増加するにつれて局部的にだんだん狭まっていき、最狭の幅になる位置が後方に移っていくが、無遠点では無限大に漸近する。しかしさらに  $\theta_1$  が増加し、ある値に到達すると2本の流線は接近し無遠点にて幅が0になる。この時の  $\theta_1$  の値は  $\theta_2$  に依存する。すなわち、和  $\theta_1 + \theta_2$  が或る一定値、ここではグラフの読みから  $248.7^\circ$  で wake は閉じる。対称の場合は Birkhoff によれば  $2\beta = 248.41^\circ$  である。和の値が  $248.7^\circ$  を越えると流線は交叉し、2本の流線はそのまま広がっていく。

図10に wake の幅を示す。パラメータは前と同様に

$\theta_2$  である。無遠点では幅は無限大に広がるが、物体の近傍にのみ注目して、図には無次元距離  $X = 4$  を代表として示す。図11に対称の場合で  $\beta = 124^\circ$  の場合の wake の形を示す。

以上は計算結果を物理的現象に結び付けて説明したものであるが、現在のところ、回転している円筒が部分的にはく離を起こした時の圧力分布についての実験値がないのでその可否を検討することはできない。しかしながら、定性的な傾向は回転円筒の実験と一致しているように思える。

### 8. む す び

円弧を過ぎる対称な自由流線の計算は、今まで数多く行なわれている。ここでは非対称の場合に拡張して計算を行ない、物理的解釈を加えた。

対称の場合は未知定数1個、条件1個であるので、

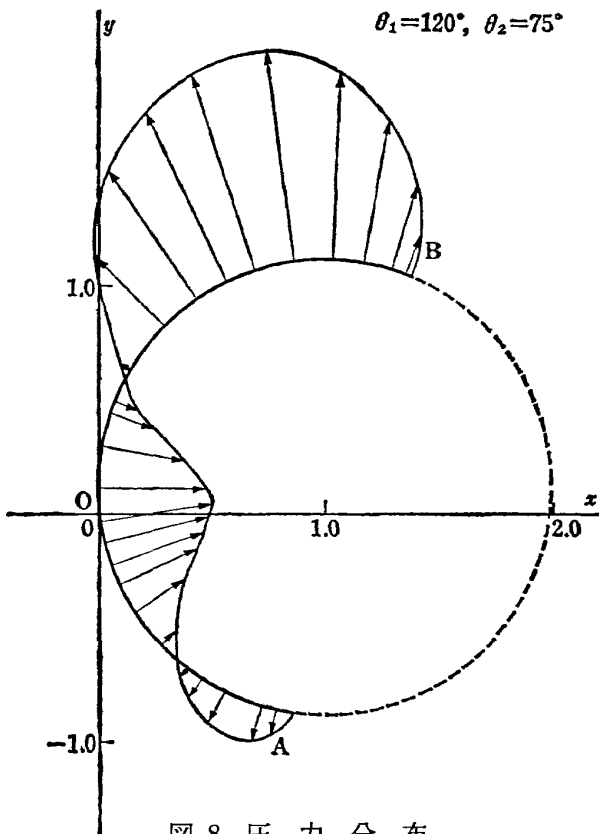


図 8 圧力分布

計算は容易である。しかるに本報告での非対称の場合は未知定数2個, 条件3個となり, 未知定数1個が不足し, 問題の解は定まらない。そこで流れの方向が未知であるという条件を入れ, 物体上の3点(はく離点2個, よどみ点1個)の相互の位置関係は与えられたものとした model を仮定して, その計算法を示した。

対称の場合と異なり非対称の場合には揚力がでてくる。この揚力の大きさとよどみ点, はく離点の位置の関係は, 回転円筒の揚力とよどみ点, はく離点の位置の関係と定性的に一致した傾向を示している。

この問題は任意の2個の条件を与えて, 残りの条件を Free にして計算する事もできる。たとえば, 流れの方向と物体両端のはく離点を与えて(物体の全長とはく離点における物体の傾き角の2条件), その時のよどみ点がどの位置にくるかを計算できる。

本報告で, 円弧のまわりの非対称な自由流線の計算法を示したが, 今後この方法を用いて翼型への応用が期待できる。

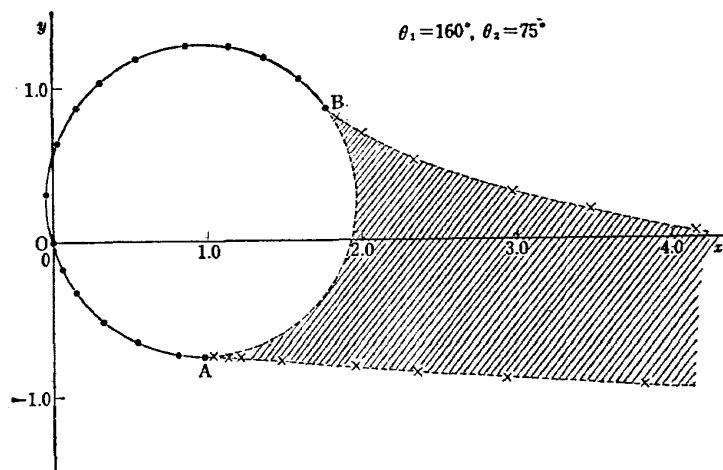


図 9 計算による座標

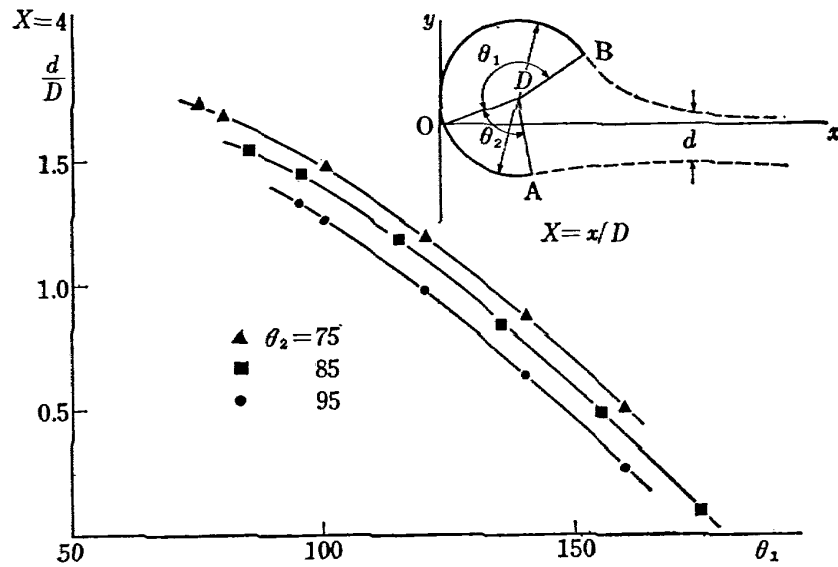


図 10 Wake の幅

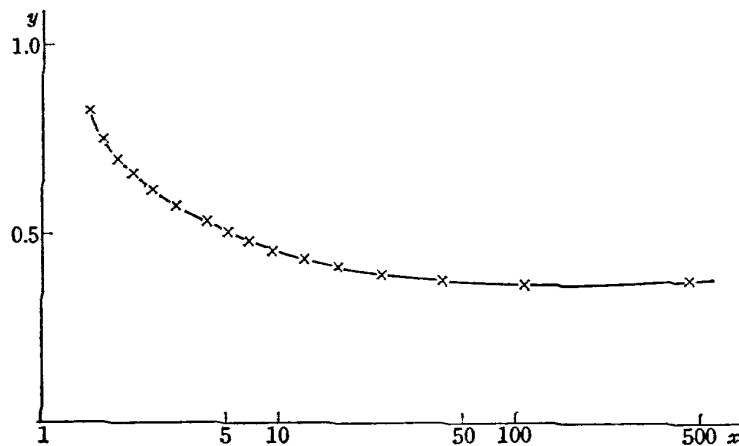


図 11 上面の自由流線 対称  $\beta=124^\circ$

文 献

- 1) G. Birkhoff and E. H. Zarantonello ; *Jets, Wakes and Cavities*, (1957), pp. 130-142  
New York Academic Press
- 2) S. Brodetsky ; Discontinuous fluid motion past circular and elliptic cylinders, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A* 102, (1923)
- 3) D. Gilbarg ; *Jets and Cavities*, *Handbuch der Physik*, 9(1960), pp. 311-445, Springer, Berlin
- 4) Milne-Thomson ; *Theoretical Hydrodynamics*, (1968), pp. 338-346, Macmillan
- 5) L. C. Woods ; Two-dimensional flow of a compressible fluid past given curved obstacles with infinite wakes, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser A* 227, (1954)

TM-166	ガスタービン用缶形燃焼器における燃焼領域のガス組成と燃焼状態	1969年11月	大塚貞吉, 斎藤隆 堀内正司, 本間幸吉 宮坂彰
TM-167	YS-11A-300型輸送機の胴体疲労試験 —中部胴体前方大型貨物口部および 後方乗降口部付近—	1970年1月	竹内和之, 川島矩郎 熊倉郁夫, 松岡陽一
TM-168	ダンピングメータの試作	1970年2月	柳沢三憲
TM-169	ジェットエンジン燃焼器出口ガス流の 乱れの測定 (I)	1970年2月	相波哲朗
TM-170	JRエンジンの燃焼器におきた振動燃焼	1970年2月	鈴木邦男, 石井浅五郎 山中国雍
TM-171	缶形燃焼器 (低圧, 低温系) 試験設備 による航空計器の水結 (着氷試験)	1970年3月	鈴木邦男, 相波哲朗 本間幸吉, 服部宣夫
TM-172	自動追尾型風向風速測定器	1970年3月	川幡長勝, 中谷輝臣
TM-173	FA200改機の動安定微係数	1970年3月	遠藤浩, 林良生 海老沼幸成, 中谷輝臣
TM-174	遷音速風洞動安定測定装置の構造と作 動	1970年4月	小橋安次郎, 河野長正 西武徳, 宮沢政文
TM-175	NAL-16-31D型ロケットの研究試作	1970年5月	五代富文, 近藤洋史 中井暎一, 田畑浄治

注：欠番は配布先を限定したもの

---

## 航空宇宙技術研究所資料176号

昭和45年5月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171 (代表) 182

印刷所 一誠社総合印刷株式会社  
東京都武蔵野市御殿山1-6-10

---

