

UDC 531.36 :
629. 783. 017. 2

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-207

対称スピン衛星用ニューテーション・ダンパの解析

村上 力 狼 嘉 彰

1971 年 9 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 資 料

TM-170	JR エンジン燃焼器に起きた振動燃焼	1970年2月	鈴木邦男, 石井浅五郎 山中国雍
TM-171	缶形燃焼器(低圧低温系)試験設備による航空計器の氷結(着氷)試験	1970年3月	鈴木邦男, 相波哲朗 本間幸吉, 服部宣夫
TM-172	自動追尾型風向風速測定器	1970年3月	川幡長勝, 中谷輝臣
TM-173	FA-200改機の動安定微係数	1970年3月	遠藤浩, 林良生 海老沼幸成, 中谷輝臣
TM-174	遷音速風洞動安定測定装置の構造と作動	1970年4月	小橋安次郎, 河野長正文 西武徳, 宮沢政文
TM-175	NAL-16・31D型ロケットの研究試作	1970年5月	五代富文, 近藤洋史 中井映一, 田畑浄治
TM-176	非対称自由流線の一計算法	1970年5月	高橋 侖
TM-177	小型固体ロケットモータの振動燃焼実験 —パルス法による中周波振動燃焼の研究—	1970年5月	五代富文, 伊藤克弥 西村久男, 湯沢克宜 柴藤羊二
TM-178	大型低速風洞動安定微係数測定装置	1970年5月	広岡貫一, 遠藤浩 戸田亘洋, 岡部祐二郎
TM-179	風洞天秤の試作	1970年5月	金成正好, 北出大三
TM-180	ジェットエンジン燃焼器出口ガス流の乱れの測定(II) —レーザーのドップラ効果を利用する方法—	1970年5月	相波哲朗
TM-181	航空機の乗り心地について	1970年6月	幸尾治朗
TM-182	排気系障害板の模型実験	1970年9月	田辺義一
TM-183	ロケット模型の大型低速風洞試験	1970年9月	近藤洋史, 高橋 宏 桑野尚明
TM-184	金属線へ衝突する液滴の現象	1970年9月	田丸 卓, 乙幡安雄
TM-185	推進エンジン用空気取入口の予備実験	1970年9月	近藤 博, 石賀保正
TM-186	NAL-25・31型ロケットの試作と飛しょう試験	1970年11月	宇宙研究グループ
TM-187	推力300kg ジンバル液体ロケットエンジンの揺動特性(I)	1970年11月	檜崎哲二, 中野富雄 橋本亮平, 竹花真一郎
TM-188	自由飛行模型 FFM-10の空力微係数におよぼす機体弾性変形の影響について	1970年11月	河崎俊夫, 河本 巖 戸田 勲
TM-189	燃料蒸発管に関する研究(III) —管内の燃料・空気二相流への熱伝達—	1970年12月	田丸 卓, 乙幡安雄 鈴木邦男
TM-191	大型電子計算機プログラム・ライブラリ	1970年12月	戸川隼人, 磯部俊夫
TM-192	極超音速風洞M9ノズル較正試験	1971年1月	長洲秀夫, 橋本 登 穂積弘一, 松崎貴至
TM-194	航空機のSTOL性に関する一考察	1971年1月	田辺義一
TM-195	曲面壁上の噴流に対する噴出孔形状, 配列の効果について	1971年1月	西村英明, 臼井 弘 井上重雄, 三村富嗣雄
TM-196	NAL-16H型ロケットの研究試作	1971年1月	宇宙研究グループ
TM-197	二次元煙風洞について	1971年1月	高橋 宏, 戸田亘洋 白井正孝,
TM-198	等高線を描かせるプログラム	1971年2月	磯部俊夫
TM-199	航空機用ヒーターの燃焼器の開発実験	1971年2月	堀内正司, 本間幸吉 矢荻 恵一
TM-202	単発STOL実験機に関する研究 —テレメータ実験局の電界強度測定—	1971年6月	幸尾治朗, 小野孝次 矢沢健司, 塚野雄吉

対称スピン衛星用ニューテーション・ダンパの解析

村上 力** 狼 嘉彰**

1. ま え が き

スピン安定化法 (Spin Stabilization) は人工衛星の姿勢制御の一方式として、広く利用されている。この制御方式は、外力が加わらない限りスピン軸が慣性空間内で一定の方向をとりつづけるという性質を応用するものである。したがって、とくに制御装置を必要としないため、制御装置の重量は原理的に考慮する必要がないこと、衛星の寿命が長くまた信頼性が高いことなどの利点を有する。しかしながら、この方式はあくまで受動的な安定化法であって、方向の変更 (orientation manoeuvre) がそれ自身では出来ないこと、外乱トルクの影響によるスピン軸のずれを修正が出来ないため精度に限りがあることなどの欠点を有し、これを補うために、たとえばガス・ジェット装置を併用することが多い。このほかに、スピン安定化法で必ず問題となるのは、ニューテーション運動である。これは、軌道投入時の切り離しにおける姿勢制御の不完全さや外乱トルクの影響をうけて生ずるもので、初期のスピン衛星においても観測されていたし¹⁾、現用の衛星、さらに将来の宇宙ステーションにおいても必ず考慮すべき問題である⁶⁾。ニューテーションを減衰させるために、通常、受動的なダンパ (passive damper) を衛星に搭載し、スピン軸方向以外の角速度に関連した運動エネルギーを散逸する方法がとられる²⁾。このような受動ダンパとして、これまでに多くのタイプ**のものが提案され、姿勢運動の安定性と関連して解析されてきた。これらの解析は、特定のダンパを衛星の特定の位置に搭載することを想定し、ダンパの重量と大きさに一定の制限を加えた上で、最も効果的なニューテーション・ダンピングを与えるようなダンパ・パラメータを決定することに主眼がおかれている。解析法としては、角運動量ベクトルの時間微分を求めて衛星

本体の運動を記述するオイラ方程式とダンパの運動方程式を求める方法¹¹⁾と、系を一般化座標で記述し Lagrange 方程式から出発して系を記述する運動方程式を求める方法⁷⁾とがある。ここで求められた運動方程式は、通常4階またはそれ以上の非線形常微分方程式となり、そのままの形でこれを解き運動を論ずることはきわめて困難である。このため衛星の姿勢運動を考慮した上で、適当な線形化を行ない、特性方程式の特性根を近似的に評価するか^{7), 11)}、あるいは、Energy Sink 近似法^{2), 4), 8)}によってニューテーション減衰率を推定する方法がとられる。

本論文では、対称スピン衛星の特定の位置に、おもり摺動形ダンパ (sliding-mass damper) をとりつけた場合の姿勢運動をベクトル形の運動方程式で表現し特性方程式に基づいてニューテーション減衰率およびダンパの変位を推定する方法を論ずる。とくに、特性方程式の特性根の推定法を詳しく述べ、線形化の条件、近似の程度を明らかにする。また、ダンパの最大変位が制限された場合、最も効果的にニューテーションを減衰させるダンパ・パラメータを等高線図によって選定する一方法を提案する。さらに、具体的な数値例について、非線形方程式を計算機シミュレーションで解き、本論文による解析法と比較した。その結果は十分よく一致し、この解析法の妥当性を裏づけている。

2. 主要な記号

ベクトル記号

F^{10} : 衛星本体からダンパ質量におよぼす力

H : 系の角運動量

注 * 角速度ベクトルがスピン軸以外の方向にゼロでない成分をもつとき、これを (または、free precession, coning motion など) と呼ぶ。

** たとえば、ring damper, ^{3)~6)} pendulum damper, ^{7)~9)} sliding mass damper ^{10), 11)} などが提案されている。

*昭和46年4月10日受付

**宇宙研究グループ

I : 衛星本体のイナーシア・ダイアディク

$$(=I_x i i + I_y j j + I_z k k, I_z = I_y)$$

i, j, k : 衛星本体の重心 O を原点とする本体固定の座標系の単位ベクトル

β : ダンパ質量位置ベクトル(本体の重心から)

σ : 衛星本体の重心の位置ベクトル (空間座標の原点から)

σ_c : ダンパを含めた系全体の重心の位置ベクトル (空間座標の原点から)

ω : 衛星本体の角速度ベクトル ($=p i + q j + r k$)

スカラ記号

c : ダンパの粘性抵抗係数

k : ダンパのバネ定数

I_x, I_y, I_z : それぞれ X, Y, Z 軸まわりの慣性モーメント

l : 中立点におけるダンパの座標原点 O からの距離

m^1, M : それぞれダンパおよび衛星本体の質量

m : 換算質量 ($=m^1 M / (M + m^1)$)

p : スピン速度 (X 軸まわりの角速度)

q, r : それぞれ Y 軸, Z 軸まわりの角速度

s : ラプラス演算子

x, y : ダンパ質量の変位

X, Y, Z : 衛星本体固定の座標軸

α : 慣性モーメント比 ($=m l^2 / I_y$)

γ : 慣性モーメント比 ($=I_x / I_y$)

ε : ニューテーションの減衰率

θ : ニューテーション角

ξ : 規格化したダンパ質量の変位 ($=x/l$ あるいは y/l)

ζ : ダンパの減衰比 ($=c / 2\sqrt{km}$)

ω_n : ダンパの固有振動数 ($=\sqrt{k/m}$)

Ω : ニューテーションの角速度 ($=(\gamma-1)p_0$)

その他の記号

$()_0$: $()$ の初期値

$(\dot{\ })$: 衛星本体固定の座標系に関する時間微分

$\frac{d}{dt} ()$: 慣性空間固定の座標系に関する時間微分

$()^*$: 変数 $()$ の Laplace 変換

3. 運動方程式の誘導

Fig. 1 に概略を示すようなスピン安定化衛星を想定し, おもり摺動形ダンパを図のように取りつけた場合の衛星の姿勢運動およびダンパの運動を考察する。

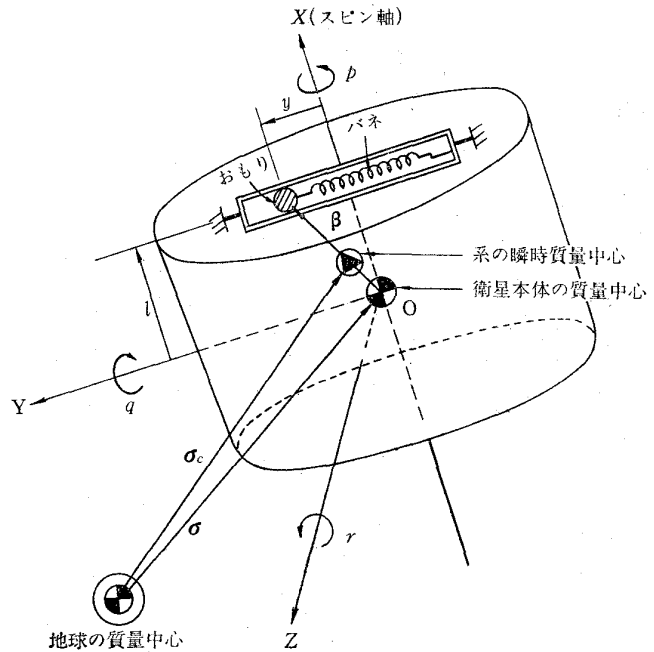


Fig. 1 衛星の概略図と座標系

地球の公転を無視して, 慣性空間固定の座標原点を地球の質量中心にとり, 位置ベクトルおよび角速度ベクトルを図のようにとるものとする (記号表参照)。

このとき, ダンパを含めた衛星* の質量中心 σ_c は次式で表わされる。

$$\sigma_c = \frac{1}{M + m^1} \{ M \sigma + m^1 (\sigma + \beta) \} \quad (1)$$

スピン角速度に比して, 衛星の公転角速度はきわめて小さいから, これを無視すれば,

$$\frac{d^2 \sigma_c}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

ダンパのおもりを質点とみなせば, 系のもつ角運動量は次式となる。

$$H = I \omega + \sigma \times \frac{M d\sigma}{dt} + (\sigma + \beta) \times \frac{m^1 d(\sigma + \beta)}{dt} \quad (3)**$$

外力およびトルクが作用しない場合には, 角運動量が保存されるから,

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (4)$$

また, ダンパ質量の運動方程式は

$$m^1 \frac{d^2(\sigma + \beta)}{dt^2} = F^{10} \quad (5)$$

ここで, F^{10} : 衛星本体がダンパのおもりに及ぼす力となる。

系の運動は(4)(5)式で記述されるが, (1)~(3)

* 以下において, これを '系' と呼ぶ。

** 記号 'o' はダイアディクとベクトルとのスカラ点積を意味するものとする。

式を考慮することによって次のように簡単化できる。

(3)式を微分して

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega + \sigma \times (M d^2 \sigma / dt^2) \\ &\quad + (\sigma + \beta) \times \{m^1 d^2 (\sigma + \beta) / dt^2\} \\ &= I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega + \sigma \times \{d^2 \{M \sigma \\ &\quad + m^1 (\sigma + \beta)\} / dt\} + \beta \times m^1 \{d^2 \sigma / dt^2 \\ &\quad + d^2 \beta / dt^2\} \end{aligned}$$

(1), (2)式から

$$d^2 \{M \sigma + m^1 (\sigma + \beta)\} / dt^2 = (M + m^1) d^2 \sigma / dt^2 = 0 \quad (6)$$

$$d^2 \sigma / dt^2 = - \{m^1 / (M + m^1)\} d^2 \beta / dt^2 \quad (7)^*$$

したがって

$$\begin{aligned} dH/dt &= I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega + \beta \times m^1 \{1 \\ &\quad - m^1 / (M + m^1)\} d^2 \beta / dt^2 \\ &= I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega + \beta \times \{m^1 M / (M + m^1)\} \\ &\quad d^2 \beta / dt^2 \end{aligned} \quad (4')$$

また, (5)式に(7)式を代入すれば

$$\{m^1 M / (M + m^1)\} d^2 \beta / dt^2 = F^{10} \quad (5')$$

ここで換算質量**を

$$m \equiv m^1 M / (M + m^1) \quad (8)$$

で定義し, (4), (5)式に代入すれば

$$\frac{dH}{dt} = I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega + \beta \times \left(m \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 \beta}{dt^2} = F^{10} \quad (10)$$

となり, 本体の回転およびダンパ質量の運動に関しては, ダンパの質量 m^1 の代わりに(8)式で定義された換算質量 m を用いることによって本体の質量中心に固定した座標系で議論することができる¹³⁾。

(4), (9), (10)式から

$$I_0 \dot{\omega} + \omega \times I_0 \omega = -\beta \times F^{10} \quad (11)$$

$$m \frac{d^2 \beta}{dt^2} = F^{10} \quad (12)$$

ただし

$$F^{10} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad F_y = -c\dot{y} - ky \quad (13)^{***}$$

以上の誘導において, 本体からダンパのおもりに働く

力 F^{10} を作用力と考えたので, (11)式はその反作用による見かけ上の外力トルクを受ける衛星本体の Euler 方程式として解釈できる。

3. 2 スカラ方程式およびその無次元化

以下において, 衛星は対称 ($I_y = I_z$) であると仮定し, 機体座標の座標軸を主慣性軸にとれば,

$$I = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} l \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

また, (12)式の慣性空間座標に関する微分を本体固定の座標系で書きなおせば次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= \ddot{\beta} + 2\omega \times \dot{\beta} + \dot{\omega} \times \beta + \omega \times (\omega \times \beta) \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{r}y - 2r\dot{y} + q(py - lq) - lr^2 \\ \ddot{y} + l\ddot{r} - r^2y - p(py - lq) \\ 2p\dot{y} + \dot{p}y - l\dot{q} + prl + qry \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

以上を(11), (12)式に代入すれば, 衛星本体およびダンパのおもりに関する運動方程式は次のスカラ形式で書きあらわせる。

$$\left. \begin{aligned} I_x \dot{p} &= -yF_z \\ I_y \dot{q} - (I_y - I_x)r p &= lF_z \\ I_y \dot{r} - (I_x - I_y)p q &= -lF_y + yF_x \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} m \{-\dot{r}y - 2r\dot{y} + q(py - lq) - lr^2\} &= F_x \\ m \{\ddot{y} + l\ddot{r} - r^2y - p(py - lq)\} &= F_y \\ m \{2p\dot{y} + \dot{p}y - l\dot{q} + prl + qry\} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

また(13)式より, ダンパのおもりの運動方程式は,

$$m \{\ddot{y} + l\ddot{r} - r^2y - p(py - lq)\} = -c\dot{y} - ky \quad (17)$$

となる。

次に, 無次元化記号

$$\xi \equiv y/l, \quad \tau \equiv I_x/I_y, \quad \alpha \equiv ml^2/I_y$$

および, ダンパ・パラメータ

$$\omega_n \equiv (k/m)^{1/2}, \quad \zeta \equiv c/(mk)^{1/2}, \quad D \equiv 2\zeta\omega_n$$

を用いて, (14)~(17)式をまとめれば,

$$\left. \begin{aligned} \tau \dot{p} &= -\alpha \xi (2p\dot{\xi} + \dot{p}\xi - \dot{q} + pr + qr\xi) \\ \dot{q} - (1-\tau)r p &= \alpha (2p\dot{\xi} + \dot{p}\xi - \dot{q} + pr + qr\xi) \\ \dot{r} - (\tau-1)p q &= \alpha \{2\zeta\omega_n \dot{\xi} + \omega_n^2 \xi + \xi (-\dot{r}\xi - 2r\dot{\xi} \\ &\quad + qp\xi - q^2 - r^2)\} \\ \ddot{\xi} + D\dot{\xi} + (\omega_n^2 - p^2 - r^2)\xi + pq + \dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(18), (19)式によって, 本体の角速度 p, q, r および

* (7)式は衛星本体の併進運動を表わすが, ここでは考察しない。

** reduced mass, Goldman (12) (吉岡訳) P59の用語による

*** Wadleigh¹¹⁾ らの解析(この結果はGreensite¹⁴⁾もそのまま引用している)では, $F_x = F_z = 0$ としているが, (13)式のように F_x, F_z はともに(11), (12)式を解いて求めるべき量である。

ダンパのおもりに関する微分方程式が導かれた。

3.3 方程式の線形化

実際の対称スピン衛星の構造、動作状況を考慮して次のような仮定をおく。

- (1) 本体の重心 O のまわりの、ダンパのおもりの慣性モーメント ml^2 は、($I_x \sim I_y$) に比して十分小さい。すなわち、
 $0 < \alpha \ll |r-1| < 1^*$
- (2) ニューテーションの振幅はスピン速度に比して十分小さい。すなわち、
 $q^2 + r^2 \ll p^2$ あるいは $|q|, |r| \ll |p|$
- (3) ダンパのおもりの振動振幅 ξ^* は l をこえないすなわち、
 $|\xi| < 1$
- (4) ダンパの固有振動数は十分高い。すなわち、
 $\omega_n \gg |q|, |r|$
- (5) ダンパの減衰比は十分大きい。すなわち、
 $\zeta \gg \sqrt{q^2 + r^2} / \omega_n$

以上の仮定を用いれば(18)、(19)式は次のように線形化される。

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{const.} \\ \dot{q} - (1-r)r\dot{p} &= 2\alpha p\dot{\xi} \\ \dot{r} + (1-r)p\dot{q} &= \alpha(D\dot{\xi} + \omega_n^2 \xi) \\ \ddot{\xi} + D\dot{\xi} + (\omega_n^2 - p^2)\xi + \dot{r} + p\dot{q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\quad (21)$$

p の初期値を p_0 とし、 $(r-1)p_0 \equiv \Omega$ と定義すれば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} + \Omega r &= 2\alpha p_0 \dot{\xi} \\ \dot{r} - \Omega q &= \alpha(D\dot{\xi} + \omega_n^2 \xi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となり、線形化方程式が得られた。

線形化の成立条件に関して、次の点に注意したい。

- (1) の仮定は、衛星内部にダンパを搭載する場合には、ダンパ自身の質量は衛星本体の質量に比して十分小さいから、通常成立すると考えられる。しかし、外部に長いブーム（アンテナ等）を出してダンパ効果をもたせようとする場合¹⁵⁾には必ずしも成立しない。また、 $I_x \sim I_y$ の場合にも $r-1 \gg \alpha$ は成立しない。
- (2) の仮定は、初期ニューテーション角が小さいということであるが、たとえば切り離し時の tip-off-rate が大きい場合などには、この仮定は成立しない。後者の場合については 6. で考察する。

4. ニューテーションの減衰率

4.1 特性方程式と安定条件

任意の初期値に対して(21)、(22)を Laplace 変換すれば、

$$\left. \begin{aligned} q^*s - q_0 &= \Omega r^* + 2\alpha p_0(\xi^*s - \xi_0) \\ r^*s^2 - r_0 &= \Omega q^* + \alpha\{\omega_n^2 \xi + D(\xi^*s - \xi_0)\} \\ \xi^*s^2 - \dot{\xi}_0 - \xi_0s + D(\xi^*s - \xi_0) \\ &+ (\omega_n^2 - p_0^2)\xi^* + r^* - r_0 + p_0q^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

あるいはマトリクス表示により、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} s & \Omega & -2\alpha p_0s \\ -\Omega & s & -\alpha(\omega_n^2 + Ds) \\ p_0 & s & s^2 + Ds + (\omega_n^2 - p_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ r^* \\ \xi^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 - 2\alpha p_0 \xi_0 \\ r_0 - \alpha D \xi_0 \\ r_0 + \dot{\xi}_0 + (s + D)\xi_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

特性方程式は(24)式の q^* , r^* , ξ^* が非ゼロ解をもつ条件として導かれる。すなわち、

$$\Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} s & \Omega & -2\alpha p_0s \\ -\Omega & s & -\alpha(\omega_n^2 + Ds) \\ p_0 & s & s^2 + Ds + (\omega_n^2 - p_0^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Hurwitz の安定判別法により、安定条件を求めれば、

自明な条件を除いて、次の諸式を得る。

$$1 + \alpha / (1-r) > (p_0 / \omega_n)^2 \quad (26)$$

$$r-1 > 0 \quad (27)$$

(26)式は、ダンパの固有振動数をスピン速度に比して大きくとることを要求し、(27)式はスピン軸まわりの本体の慣性モーメントを最大にすることを要求する。これらの条件は 3.3 において設けた仮定と相反するものではない。

4.2 特性根の推定—ニューテーション減衰率の推定

(25)式で与えられる特性多項式を変形して、

$$\Delta(s) = (s^2 + \Omega^2)(s^2 + Ds + \omega_n^2 - p_0^2) + \alpha \cdot g(s)$$

ただし、

$$g(s) \equiv Ds^3 + (\omega_n^2 + 2p_0^2 + 2p_0\Omega)s^2 - Dp_0\Omega s - p_0\omega_n^2\Omega \quad (28)$$

とおく。

まず、 $\alpha \rightarrow 0$ とした時の特性根を考察する。

$$(s^2 + \Omega^2)(s^2 + Ds + \omega_n^2 - p_0^2) = 0 \quad (29)$$

から、次の二組の根を得る。

$$s = \pm j\Omega \quad (30a)$$

$$s = \{-D \pm j\sqrt{4(\omega_n^2 - p_0^2) - D^2}\} / 2 \quad (30b)$$

(30a) で与えられる根は本体が振動数 Ω のニューテーションを持続することを意味し、(30b) の根はダンパのおもり自体の減衰振動を意味する。

次に、 $\alpha \neq 0$ の場合には、安定条件 (26)、(27) を満たす限り、根 (30a) はわずかながら左半平面に入り

* 実現可能な対称体では $0 < r < 2$ である。

** この振幅の最大値を“最大衝程”とよぶ。

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(-\frac{\Omega D \sqrt{4(\omega_n^2 - p_0^2) - D^2/2}}{\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega} \right)$$

$$\xi_2(t) \approx \xi_0 e^{-(D/2)t} \cos(\sqrt{4(\omega_n^2 - p_0^2) - D^2/2} t)$$

$$+ \frac{\{(\xi_0 - \frac{1}{2}) D + \dot{\xi}_0\} e^{-(D/2)t}}{\sqrt{4(\omega_n^2 - p_0^2) - D^2/2}} \sin(\sqrt{4(\omega_n^2 - p_0^2) - D^2/2} t) \quad (35b)$$

($e^{-\varepsilon_x t}$ の項は振幅に α がかかるので省略)

$\xi_1(t)$ の第 2 項および $\xi_2(t)$ は特性根 s_1' に対応して振幅が $\exp[-(D/2)t]$ で減衰する。通常のダンパにおいては、 $D/2 \gg \varepsilon_x$ と考えてよいため、準定常状態ではこれらの項は無視することができる。このことから、ダンパ自身の初期値 ξ_0 、 $\dot{\xi}_0$ は当面の問題から除外できる。以上の考察により、 $\varepsilon_x t \approx 0$ の付近における定常振幅 ($\xi_1(t)$ の第 1 項による) を最大衝程 ξ_{max} とみなすことができるから、

$$\xi_{max} = \frac{r_0(p_0 + \Omega)}{\sqrt{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2}} \quad (36)$$

となる。

5. ダンパ・パラメータの最適化

5.1 等高線図による最適値の選定

ダンパの最大衝程 ξ_{max} が一定値 ξ_m を越えない範囲内でニュートレーション減衰率 ε_x が最大となるようなダ

ンパ・パラメータ D 、 ω_n を選定することが問題となる。4.2 および 4.3 の結果を用いて、問題は次のように定式化される。

$$\xi_{max} = \frac{r_0(p_0 + \Omega)}{\sqrt{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2}} \leq \xi_m \quad (37a)$$

の条件の下で

$$\text{Max}_{D, \omega_n} [\varepsilon_x] = \text{Max}_{D, \omega_n} \left[\frac{(\alpha/2) D \Omega (p_0 + \Omega)^3}{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + D^2 \Omega^2} \right] \quad (37b)$$

を与える ω_n 、 D およびそのときの ε_x を求める。ここで、変数変換

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\equiv (\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2) / p_0^2 = (\Omega_n / p_0)^2 - \{(\gamma - 1)^2 + 1\} \\ x_2 &\equiv D \Omega / p_0^2 = D(\gamma - 1) / p_0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

を行なえば、

$$\xi_{max} = \frac{\gamma(r_0/p_0)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \varepsilon_x = \frac{(\alpha/2) \gamma^3 p_0 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

となり、(37)式(38)式は次のようになる。

$$x_1^2 + x_2^2 \geq \{\gamma(r_0/p_0) / \xi_m\}^2 \quad (39)$$

$$\{x_1 - \alpha \gamma^3 p_0 / (4\varepsilon_x)\}^2 + x_2^2 = \{\alpha \gamma^3 p_0 / (4\varepsilon_x)\}^2 \quad (40)$$

(39)式であらわされる領域は原点を中心とする半径 $\{\gamma(r_0/p_0) / \xi_m\}$ の円の外側であり、 ξ_m が大きくなる程この半径は小さくなる。一方、(40)式は ε_x の等高線を意味し、 $\{0, \alpha \gamma^3 p_0 / (4\varepsilon_x)\}$ を中心とする半径 $\alpha \gamma^3 p_0 / (4\varepsilon_x)$ の円である。この円の中心の x_2 -座標および半径は ε_x に反比例する。(Fig. 3 参照)

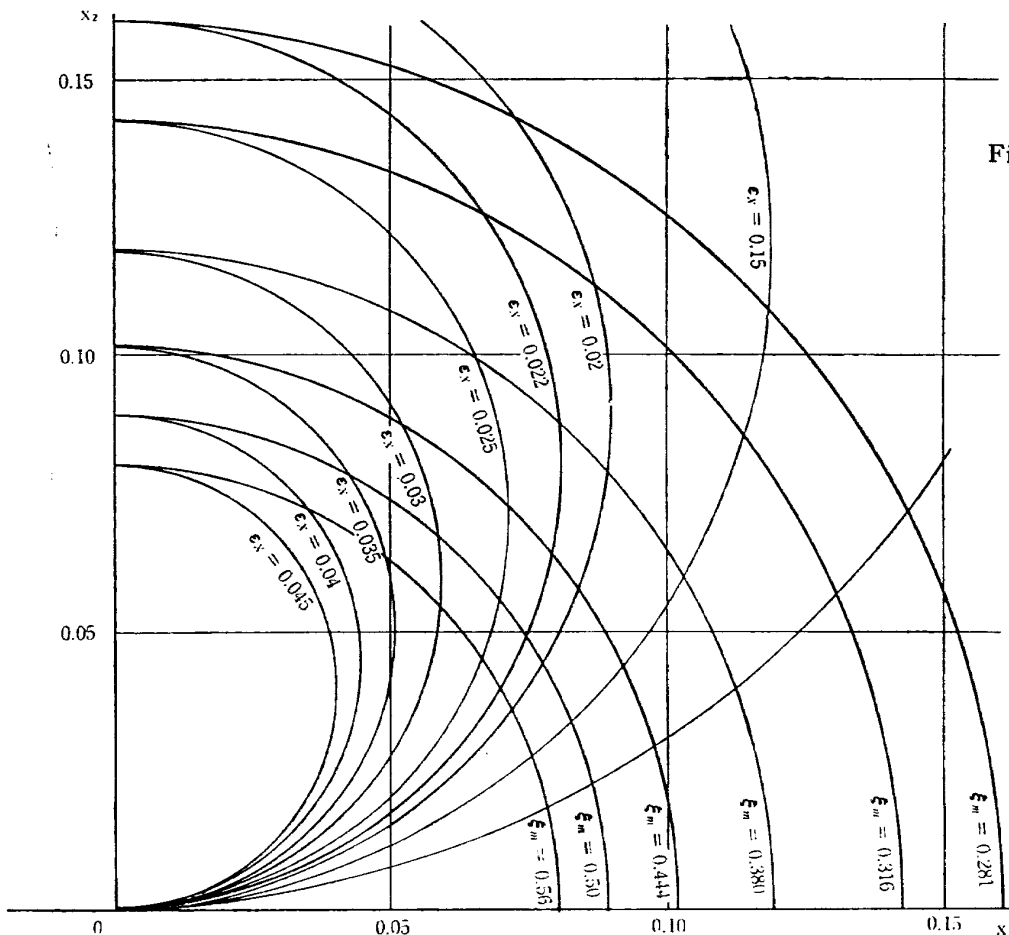


Fig. 3 等 ε_x - および等 ξ_m 曲線

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= 1.36 \\ p_0 &= 8.79 \\ r_0/p_0 &= 1/30 \end{aligned} \right.$$

$$x_1 \equiv (\omega_n/p_0)^2 - \{(\gamma - 1)^2 + 1\}$$

$$x_2 \equiv D\gamma$$

したがって、(39)式の領域内で ε_x を最大にするためには、二つの円の接点を与える (x_1, x_2) を選ばばよいことになる。この点の x_1, x_2 の値

$$x_1=0, x_2=r(r_0/p_0)/\xi_m$$

から、ダンパ・パラメータの最適値は、

$$\omega_n = p_0 \sqrt{1+(r-1)^2} \quad (41)$$

$$D = r p_0 (r_0/p_0) / \{\xi_m (r-1)\} \quad (42)$$

となり、そのときの減衰率は

$$\varepsilon_x = \alpha r^2 p_0 \xi_m / (2r_0/p_0) \quad (43)$$

となる。

(41) はいわゆる tuned damper¹⁸⁾ の式で、ダンパのおもりを見かけ上の外力の振動数に共振させることを意味し、ダンパの固有振動数がスピン速度と慣性モーメント比 r のみで決定させる点が注目される。(42)式はダンパに適当な粘性抵抗係数をもたせて最大衝程を制限することを意味するもので、この場合スピン速度のほかに、ニューテーションのスピン速度に対する比率 (r_0/p_0) に依存することに注意したい。

5.2 ダンパの取り付け位置の検討

前節までにおいては、ダンパを Fig.1 のように塔載した場合のみについて考察した。これは、ダンパのおもりが、X 軸（すなわちスピン軸）に垂直方向に変位するような構造を想定したものであるが、この節では Fig.4 に示すようにスピン軸に平行な変位方向をもって Y 軸上にとりつけた場合を考察し、両者を比較しよう。

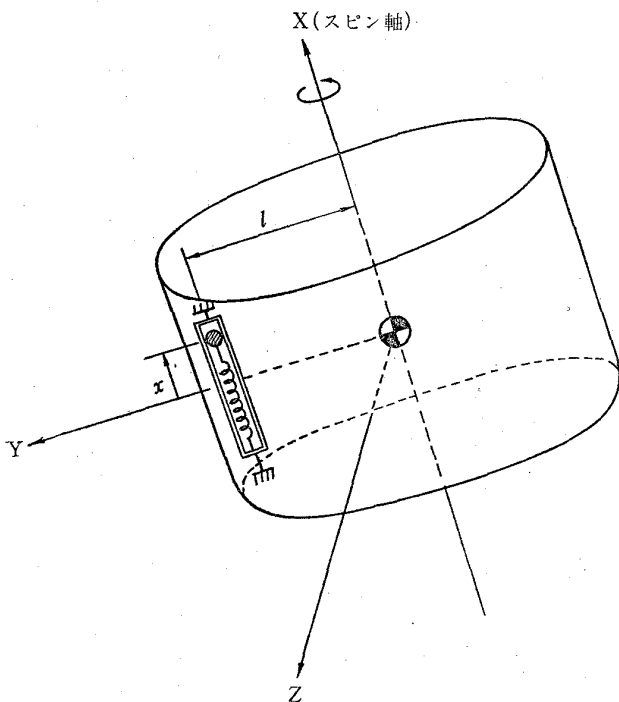


Fig. 4 衛星およびダンパの概略 (Y-軸とりつけ)

Fig.4 の構成の場合、

$$\beta = \begin{bmatrix} x \\ l \\ 0 \end{bmatrix}, F_x = -c\dot{x} - kx \quad (44)$$

であるから、これを、(11)、(12)式に代入し、

$$x/l \equiv \xi \quad (45)$$

として、同様な無次元化記号を用いれば次のスカラ方程式を得る。

本体の運動に関して、

$$\left. \begin{aligned} r\dot{p} &= -\alpha(-2q\dot{\xi} + \dot{p} - \xi\dot{q} + \xi r p + q r) \\ \dot{q} + \Omega r &= \alpha\xi(-2q\dot{\xi} + \dot{p} - \xi\dot{q} + \xi r p + q r) \\ \dot{r} - \Omega r &= \alpha[-D\dot{\xi} - \omega_n^2\xi - \xi(2r\dot{\xi} + \xi\dot{r} - p^2 - r^2 + \xi p q)] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ダンパのおもりの運動に関して、

$$\ddot{\xi} + D\dot{\xi} + (\omega_n^2 - q^2 - r^2)\xi - \dot{r} + p q = 0 \quad (47)$$

また、(20)、(21)式に対応する線形方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= p_0 \\ \dot{q} + \Omega r &= 0 \\ \dot{r} - \Omega r &= -\alpha(D\dot{\xi} + \omega_n^2\xi - p^2\xi) \\ \ddot{\xi} + D\dot{\xi} + \omega_n^2\xi - \dot{r} + p q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

となる。

この場合のニューテーション減衰率を ε_y 、ダンパの最大衝程を ξ'_{max} とすれば、4, 2, 4.3 節と同様な解析から

$$\varepsilon_y = \frac{(\alpha/2)r(2-r)^2(r-1)Dp_0^4}{(\omega_n - \Omega^2)^2 + (D\Omega)^2} \quad (49)$$

$$\xi'_{max} = \frac{(2-r)p_0 r_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (D\Omega)^2}} \quad (50)$$

を得る。ただし、安定条件は $r-1 > 0$ のみである。さらに、変数変換

$$x_1 \equiv (\omega_n/p_0)^2 - (r-1)^2, \quad x_2 \equiv (r-1)D/p_0$$

を行ない、5.1 にしたがって等高線図を描けば $\xi_{max} \leq \xi_m$ 式の制限下における最適パラメータおよび $Max[\varepsilon_y]$ を求めることができる。この結果を 5.1 の結果と共に Table 1 に示す。この表からも明らかのように、最適化した上で二つの取り付け位置に対するダンピング効果の比を求めれば、

$$\varepsilon_y/\varepsilon_x = (2-r)/r \quad (51)$$

となる。一方 $1 < r < 2$ であるから

$$\varepsilon_y/\varepsilon_x < 1$$

すなわち、X 軸に取り付けた方が有効なダンピングを与えることが判明した。

Table. 1 最適パラメータおよび減衰率の比較

	X-軸にとりつけた場合	Y-軸にとりつけた場合
固有振動数 ω_n	$p_0 \sqrt{1 + (\gamma - 1)^2}$	$p_0 (\gamma - 1)$
減衰係数 D	$\gamma \sqrt{q_0^2 + r_0^2} / \xi_m (\gamma - 1)$	$(2 - \gamma) \sqrt{q_0^2 + r_0^2} / \xi'_m (\gamma - 1)$
ニュートーション減衰率 $\varepsilon_{x, y}$	$\alpha \gamma^2 p_0^2 \xi_m / 2 \sqrt{q_0^2 + r_0^2}$	$\alpha \gamma (2 - \gamma) p_0^2 \xi'_m / 2 \sqrt{q_0^2 + r_0^2}$

6. ダンパの不安定領域に関する考察

以上の解析 (3. 3 および 4. 1~4.3) においては、ニュートーション振幅がスピン速度に比して十分小さい、すなわち、 $q^2 + r^2 \ll p^2$ ということ仮定していた。しかしながら、予想以上のニュートーション振幅が生ずる可能性は十分あるから、この仮定の適用範囲を明らかにする必要がある。ここでは Cloutier¹⁸⁾ の解析を述べて、この問題を考察する。

3. 3 での仮定は (2) をのぞいてすべて成立するものとする。このとき、衛星本体の角速度成分は、近似的に

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 \\ q &= r_0 \sin \Omega t \\ r &= -r_0 \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

となる。(52) 式を (19) 式に代入すれば、

$$\ddot{\xi} + D\dot{\xi} + (\omega_n^2 - p_0^2 - r^2 \cos^2 \Omega t)\xi = -(2 - \gamma)r_0 \sin \Omega t \quad (53)$$

ここで

$$\tau = \Omega t, \quad f_n = \sqrt{\omega_n^2 - p_0^2} \quad \text{および} \quad \zeta' = D/2f_n$$

と定義すれば、(53) 式の斉次解を与える方程式は、

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + 2\zeta' \left(\frac{f_n}{dt} \right) \frac{d\xi}{d\tau} + \left[\frac{f_n^2 - r_0^2/2}{\Omega^2} + \frac{r_0^2 \cos^2 \tau}{2\Omega^2} \right] \xi = 0 \quad (54)$$

となり、バネ項の係数が周期的に変化する 2 階線形常微分方程式となる。さらに、

$$\xi = \eta \exp[-\zeta' (f_n/\Omega)\tau] \quad (55)$$

$$2\varepsilon = r_0^2/2\Omega^2$$

$$\delta = (1 - \zeta'^2)(f_n/\Omega)^2 - r_0^2/2\Omega^2$$

と定義すれば、(54) 式は Mathieu 方程式

$$\eta'' + (\delta - 2\varepsilon \cos 2\tau)\eta = 0 \quad (56)$$

に帰着される。この方程式の安定性に関しては、 ε, δ の広い領域にわたって十分研究されていて²⁰⁾、現在

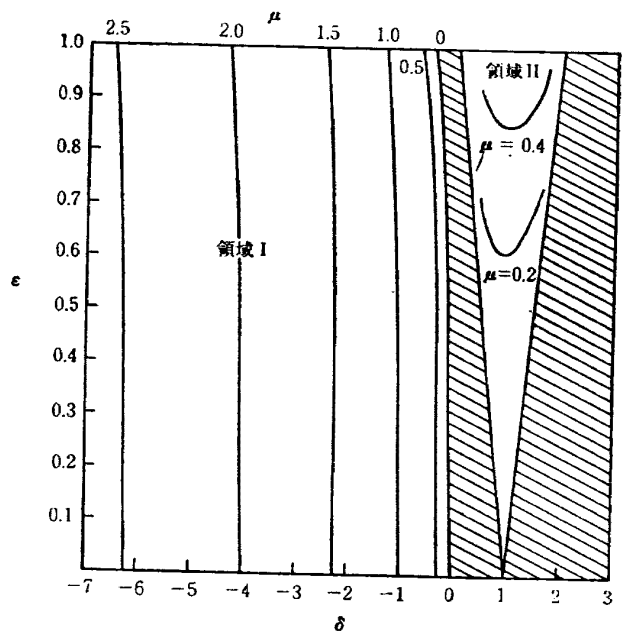


Fig. 5 Mathieu 方程式 ((56)式) の安定線図 (斜線部分が安定領域)

問題としている ε, δ の範囲内における安定領域は、Fig. 5 に示す通りである。

ここで、(56) 式の不安定根が常に

$$\eta(\tau) = F(\tau) \cdot \exp(\mu\tau) \quad (57)$$

ただし、

$F(\tau)$: 周期関数

μ : 特性指数

の形となるから、原方程式の解 ((55)式) の解は、

$$\xi = F(\tau) \exp[(\mu - \zeta' f_n/\Omega)\tau] \quad (58)$$

となる。したがって、安定条件は次式で与えられる。

$$\mu - \zeta' f_n/\Omega \leq 0 \quad (59)$$

Fig. 5 の領域 I において、近似的に

$$\delta \approx -\mu^2$$

と表わせるから、“tuned damper” に対する安定条件は

$$\sin \theta_0 \leq \frac{\sqrt{2}(\gamma-1)}{\gamma} \quad (60)$$

ただし、 θ_0 は初期ニューテーション角で

$$\theta_0 = \tan^{-1}(I_y r_0 / I_x p_0)$$

以上から、"tuned" ダンパをx-軸上に搭載した衛星は、慣性モーメント比のいかに拘わらず、(60)式で与えられる。 θ_0 より大きなニューテーション角を初期値とする姿勢運動に対しては、Fig.5 領域Iの意味で不安定となることが結論される。この不安定性を与える初期値 θ_0 は、 γ 、すなわちスピン軸まわりの慣性モーメントとそれに垂直な軸まわりの慣性モーメントとの比に依存し、この比が1に近づく程、不安定になりやすい。この依存性を Fig.6 に示す。

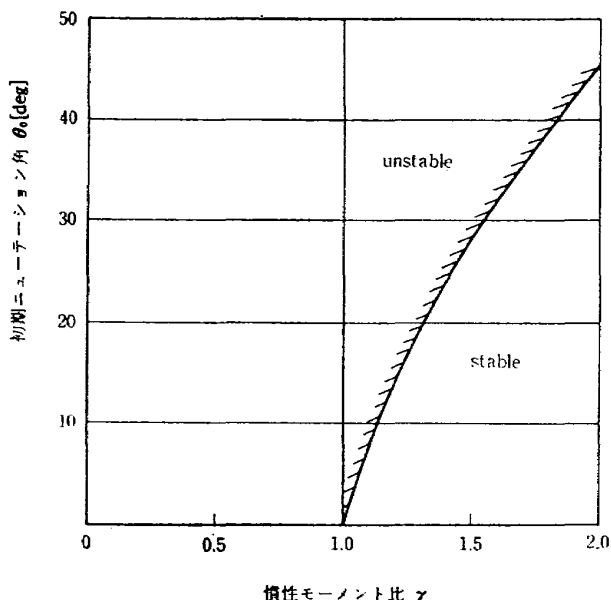


Fig. 6 ダンパの不安定領域

なお、上述の不安定現象は Fig. 4 のように Y 軸上にとりつけた場合には発生しない。この場合、ダンパの運動方程式は (47) 式となり、そのうちのバネ項は $(\omega_n^2 - q^2 - r^2)\xi$ であるから、係数はきわめてゆっくりと減衰する非振動的な時間関数である。したがって、本節に述べたような考慮をほらう必要はない。

7. 計算機によるシミュレーション

これまでに述べた解析手法を検討するために、ディジタル計算機による数値シミュレーションを行なった。微分方程式は4次の Runge-Kutta-Gill 法で解いた。シミュレーション・プログラムについては付録2で述べる。

7.1. ニューテーション角が小さい場合

シミュレーションに用いた数値は、Table 2に示す通りで、これらは文献(11)、(18)による。

Table 2 シミュレーションに用いた数値

パラメータ		
衛星の慣性モーメント比	γ	1.36
ダンパのおもり	α	0.000645
ダンパの固有振動数	ω_m	} Fig. 7 の通り
ダンパの減衰係数	ζ	
初期値		
衛星の角速度	p_0	8.79 [rad/s]
	q_0	0.0 ["]
	r_0	0.293 ["]
ダンパ変位	ξ	0.0
ダンパ変位の時間微分	$\dot{\xi}$	0.0

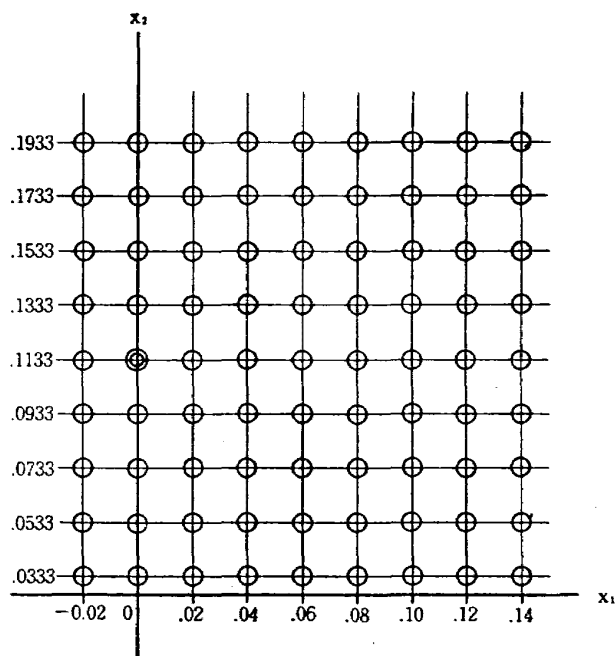


Fig. 7 シミュレーションに用いた (x_1, x_2)

ダンパ・パラメータ ω_n, ξ に関しては、5.1の考察に基づいて、次のように選定した。(38)式の変数変換

$$\begin{cases} x_1 = (\omega_n/p_0)^2 - \{(\gamma-1)^2 + 1\} \\ x_2 = D(\gamma-1)/p_0 \end{cases}$$

による変数 (x_1, x_2) を座標軸とする平面において、Fig.7 に示す格子点に対応する (x_1, x_2) の値についてシミュレーションを行なった。これらの値は、5.1で述べたある最適値

$$\begin{cases} x_1 = 0 & (\text{'tuned' ダンパ}) \\ x_2 = 0.133 & (\xi_m = 0.4 \text{ を与える}) \end{cases}$$

から x_1, x_2 (したがって ω_m, ζ) がずれた場合に、このずれがダンピングおよび最大衝程に及ぼす影響を考察するために選定したものである。ニューテーションの時間的变化の一例 ($x_1=0, x_1=0.1333$) を Fig. 8

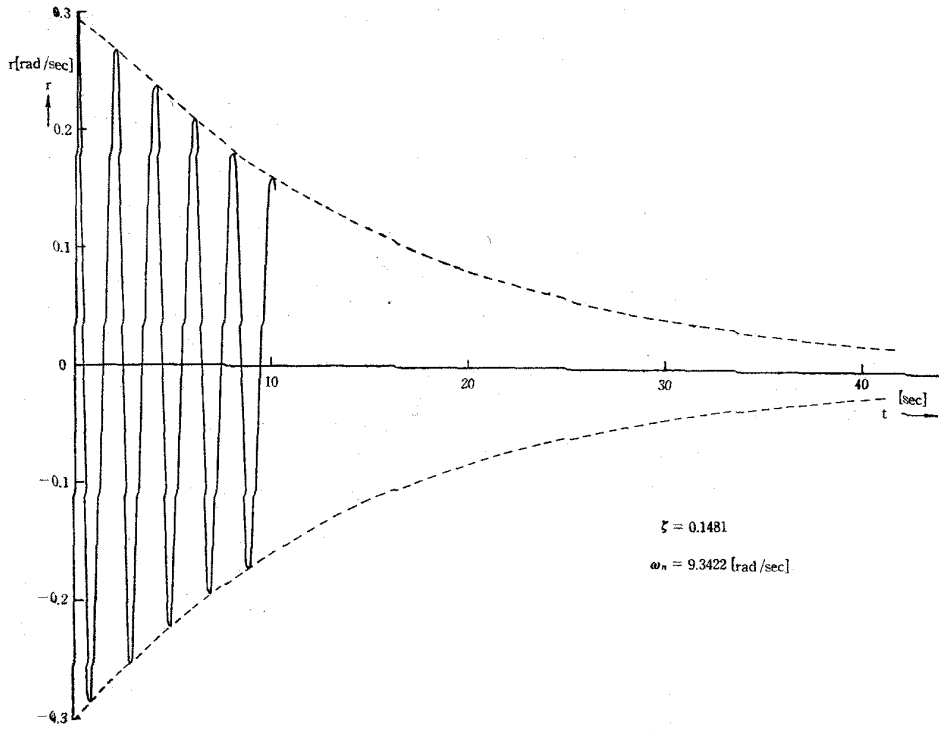


Fig. 8 $x_1=0, x_2=0.11333$ の時のニューテーション

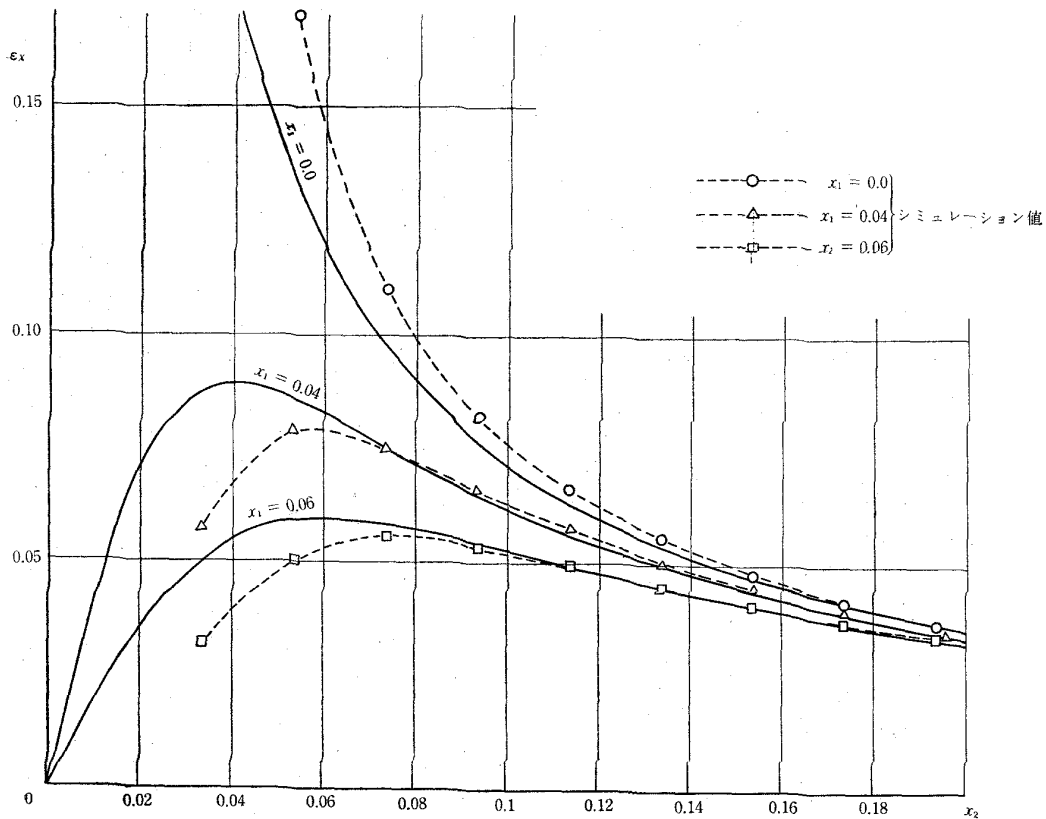


Fig. 9 減衰率のシミュレーション値と理論値との比較 (実線が理論値)

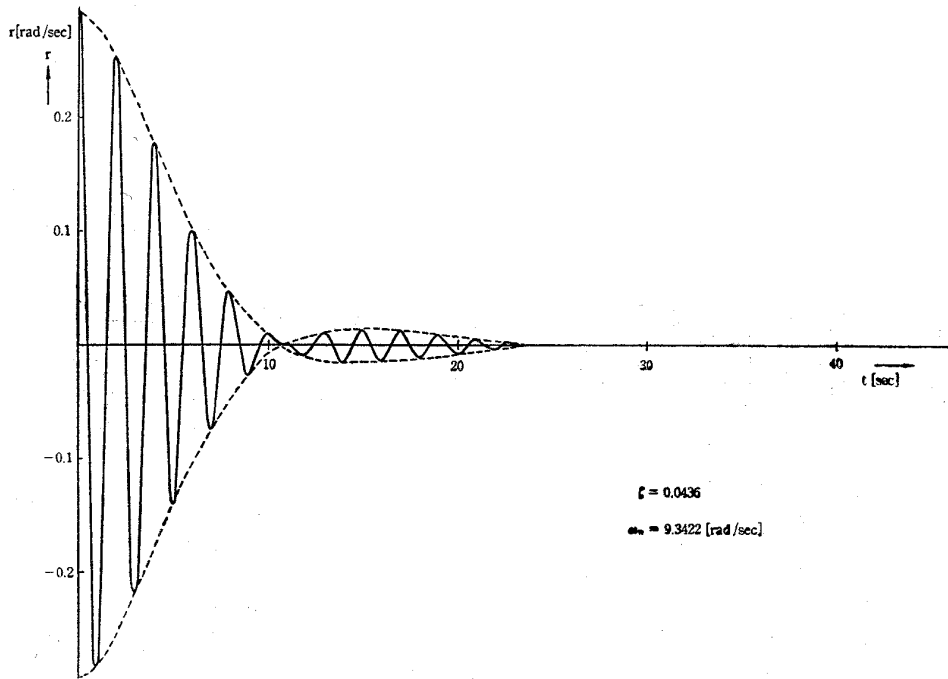


Fig. 10 $x_1=0, x_2=0.0333$ の時のニューテーション

に示す。ダンピングの様子を定量的に評価するために、4秒以後の r の振動振幅から、最小二乗推定によって減衰率 ε_x を求め、 x_2 を横軸にとって Fig. 9 に示した。なお、同時に、(40) 式であらわされる等 ε_x 曲線を重ねて描いた。この図において、 x_2 が小さい時に理論値とシミュレーション値との間にずれが生じているが、これは主としてダンパ変位の過渡特性に起因すると考えられる。すなわち、ダンパのおもりの時間的変化を表わす (35) 式の評価において、(35a) 式のみ注目したが、実際には (35b) 式で表わされる過渡項が存在し、とくにダンパ自身のダンピング係数 D が小さい時には、この影響を無視できない。これを調べるために Fig. 10 に

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0.0333 \end{cases}$$

の場合を例示する。

この場合には、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\approx 0.5 \\ D/2 &\approx 0.41 \end{aligned}$$

となり、両者はほぼ同程度の大きさをもつ。したがって、ダンパのおもりの変位およびその結果生ずるニューテーションの減衰振動は二つの周波数

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega = (I-1)p_0 \\ \Omega_2 &= \sqrt{\omega_n^2 - p_0^2 - D^2/4} \end{aligned}$$

をもつことになり、Fig. 10 において観測されるビート現象が生ずる。 ε_x の推定を、このような事情を無視

して行なったので、 $\varepsilon_x \sim D/2$ の場合には理論値とシミュレーション値との間に大きな誤差を生じた。なお、このようなビート現象は、ダンパの慣性モーメント比 $\alpha (= ml^2/I_T)$ が大きい場合にも生ずる可能性があることが指摘されている¹⁹⁾。

7. 2 ニューテーション角が大きい場合

6. で考察したように、初期ニューテーション角が (60) 式を満足しない程度に大きくなると、Fig. 5 の領域 1 の意味で不安定となることが予想される。Table 2 の数値例について、(60) 式の等号を与える θ_0 を求めると、

$$\theta_0 = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}(I-1)}{I} \approx 22^\circ$$

この値に近い二つの場合、

$$\theta_0 \approx 19.5^\circ (p_0=8.79, q_0=4.919, r_0=0.293 [\text{rad/s}])$$

$$\theta_0 \approx 24^\circ (p_0=8.79, q_0=5.274, r_0=0.293 [\text{rad/s}])$$

についてシミュレーションを行ない、その結果をそれぞれ Fig. 11, Fig. 12 に示す。

$\theta_0 \approx 19.5^\circ (< 22^\circ)$ の場合、ダンパ変位は収束していくが、 $\theta_0 \approx 24^\circ (> 22^\circ)$ の場合、ダンパ変位はほぼ $\xi=7.5$ にオフ・セットしたまま減衰振動をつづけることが確認された。この場合には振動が十分減衰した後においても、ダンパのおもりは変位したままになり、スピン軸が主慣性モーメント軸からわずかにずれのままスピンしつづけることが指摘されている¹⁸⁾。

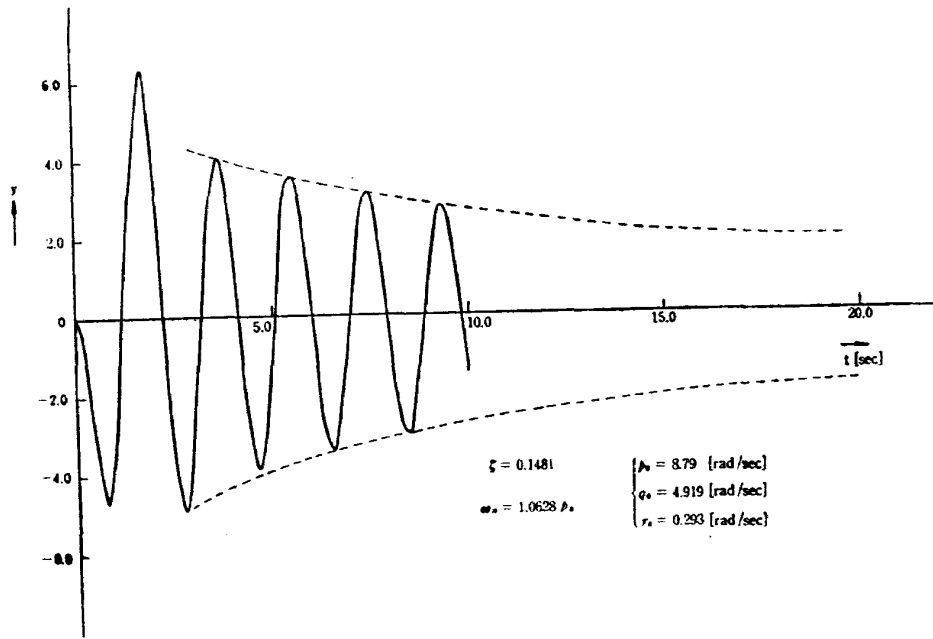


Fig. 11 $\theta_0 = 19.5^\circ$ の時のダンパ変位

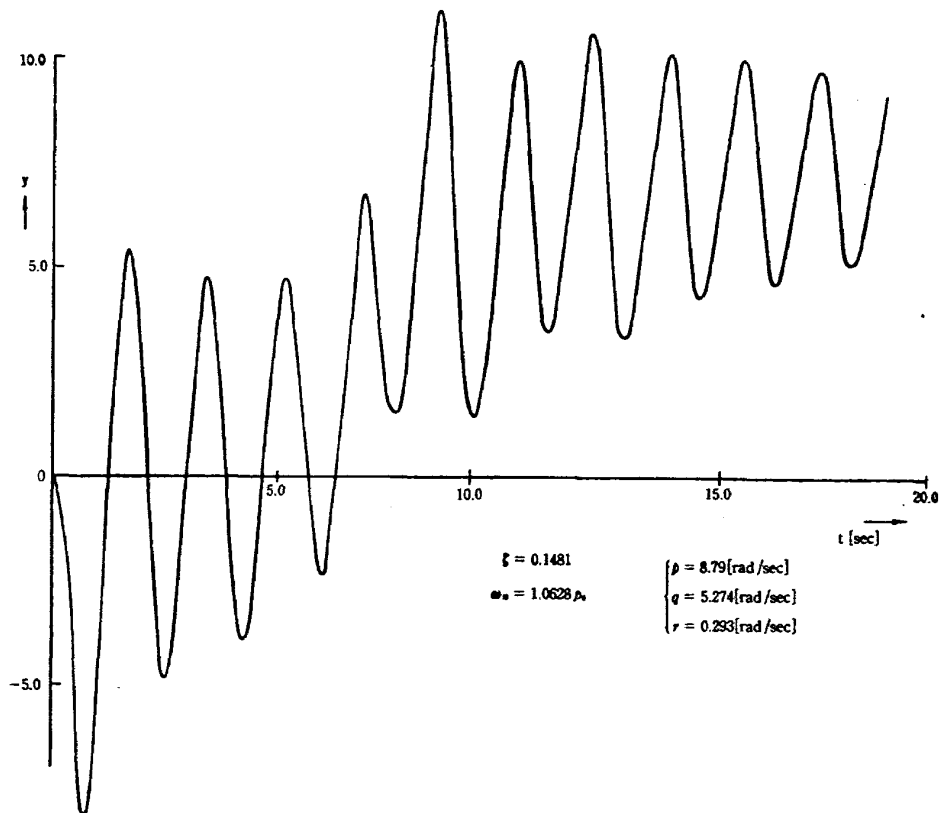


Fig. 12 $\theta_0 = 24^\circ$ の時のダンパ変位

8. む す び

おもり摺動形ダンパを搭載した対称スピン衛星の姿勢運動を記述する運動方程式を導き、換算質量を導入することによって厳密性を失なうことなく簡略化できることを示した。さらに、線形化の条件を明確にした上で、線形化方程式を導き、その特性方程式の根を詳しく調べることによって、衛星本体の慣性モーメント比およびダンパ・パラメータがニュートン減衰率に及ぼす影響を考察した。また、ダンパ・パラメータのかなり広い範囲にわたり数値シミュレーションを行なうことによって解析の妥当性を検討した結果、次の結論を得た。

- (i) ダンパのおもりの質量が十分小さく、初期ニュートン角が微小である場合には、線形化が可能であり、線形化方程式の特性根は Newton 法の第1次近似で評価することができる。
- (ii) ダンパの固有振動数はニュートン角速度に同調すると最も効果的な減衰が得られ、これよりも大きくする程、安定性の余裕が増加する。
- (iii) 衛星本体の慣性モーメント比と初期ニュートン角が与えられれば、ダンパ・パラメータに関連した座標軸によって形成される平面内でダンピング効果とダンパの最大衝程を定量的に評価することができる。
- (iv) ニュートン角が大きい場合には、線形化方程式は Mathieu 形方程式に帰着され、不安定領域が存在する。

以上において、対称スピン衛星に限定して議論したが、非対称スピン衛星の姿勢運動も実用上は必要と思われる。また、他の形のダンパ (ring damper, pendulum damper) の評価、ダンパの搭載位置の検討なども今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Bracewell, R. N. and Garrott, O. K.: Rotation of Artificial Earth Satellites, Nature, Vol. 182, No. 4638, pp 760~762, Sept. 1958.
- 2) Thomson, W. T. and Reiter, G. S.: Attitude Drift of Space Vehicles, J. of Astro. Sci., Vol. 7, pp 29-34, 1960.
- 3) Carrier, G. F. and Miles, J. W.: On the Annular Damper for a Freely Precessing Gyroscope, J. of Applied Mechanics, Vol. pp. 237-240, June, 1960.
- 4) Bhuta, P. G. and Koval, L. R.: A Viscous Ring Damper for a Freely Precessing

Satellite, Int. J. Mech. Sci., Vol. 8, pp 383-395, 1966.

- 5) Baines, D. J.: Design of the Rotational Kinetic Energy Dissipation System for the W. R. E Satellite WRESAT I, Technical Note HSA 134, 1968
- 6) Engineevig Mechanics Labortoratory (TR W): Feasibility Study and Design of Passive Dampers for a Manned Rotating Space Station, NASA CR-163, 1965.
- 7) Haseltine, W. R.: Nutation Damping Rates for a Spinning Satellites, Aerospace Engng. pp. 10-17, March 1962.
- 8) Alper, J. R.: Analysis of Pendulum Damper for Satellite Wobble Damping, J. SPACE-CRAFT Vol. 2, No. 1, pp. 50-55, 1965.
- 9) Taylor, R. S.: A Passive Pendulum Wobble Damping System for a Manned Rotating Space Station, J. SPACECRAFT Vol. 3, No. 8, pp 1221-1228, 1966.
- 10) Yu, E. Y.: Spin Decay, Spin-Precession Damping and Spin-Axis Drift of the Telstar Satellite BSTJ, pp. 2169-2193, 1963.
- 11) Wadleigh, K. H. et al: Spinning Vehicle Nutation Damper, J. SPACECRAFT, Vol. 1 No. 6, pp. 588-592, 1964.
- 12) Goldstein, H.: Classical Mechanics, Adison-Wesley Publishing Co., 1950.
- 13) Fang, B. T.: Kinetic Energy and Angular Momentum about the Variable Center of Mass of a Satellite. AIAA J., Vol. 3, No. 8, pp. 1540-1542, Aug. 1965.
- 14) Greensite, A. L.: Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems, Vol. XII, Attitude Control in Space, NASA CR-83, 1967.
- 15) Meirovitch, L. et al: On the High-Spin Motion of a Satellite Containing Elastic Parts, J. SPACECRAFT, Vol. 3, No. 11, pp. 1597-1602, 1966.
- 16) Booth: Numerical Methods, Butterworths Scientific Publications, pp. 142-160, 1955.
- 17) 村上, 狼: デュアル・スピン衛星用ニュートン角ダンパについて, 第14回宇科技講演会 7A 6, 1971.
- 18) Cloutier, G. J.: Nutation Damper Instability on Spin-Stabilized Spacecraft, AIAA J., Vol. 7, No.11, pp. 2110-2115, 1969.
- 19) Spencer, T. M.: Cantilevered Nutation Damper for a Dual-Spin Spacecraft, Proc. Sym. on Attitude Sabilization and Control of Dual-Spin Spacecraft, pp. 91-109, 1967.
- 20) Stoker, J. J.: Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, Inc., pp 197-222, 1950.

附録 1. Lagrange の方程式による運動方程式の誘導

一般化座標として、本体の姿勢を与えるオイラ角および、ダンパのおもりの変位をとることとする。すなわち、

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \phi, \quad q_4 = y \quad (A-1)$$

ただし、オイラ角は Fig. A-1 に示すとおりである。

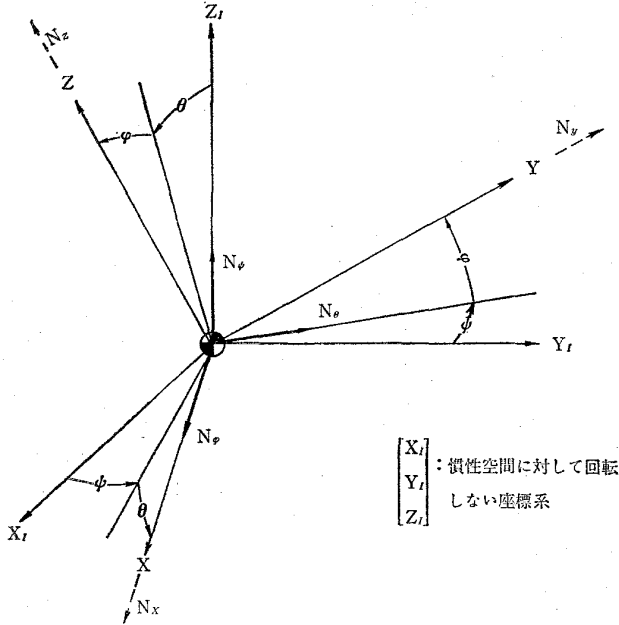


Fig. A-1 座標系とオイラ角

系のもつ運動エネルギー、ポテンシャル・エネルギーおよび散逸エネルギーは次のように与えられる。

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (A-2)$$

$$V = \frac{1}{2} k y^2 \quad (A-3)$$

$$F = \frac{1}{2} c y^2 \quad (A-4)$$

ここで、 $\mathbf{v} = d\boldsymbol{\beta}/dt$, m は換算質量である。

(A-2) 式は次のように導かれる：

運動エネルギーのうち並進運動に関するものを T^1 とすれば、

$$T^1 = \frac{1}{2} m^1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2} M (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)$$

ただし、

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}')$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\sigma})$$

簡単のため、系の重心が静止しているものとすれば、

$$d\boldsymbol{\sigma}_c/dt = d\{M\boldsymbol{\sigma} + m'(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}^1)\}/ds = 0$$

よって、

$$\mathbf{v}_1 = \frac{M}{M+m^1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{-m^1}{M+m^1} \mathbf{v}$$

以上から、

$$T^1 = \frac{1}{2} \left[m^1 \left(\frac{M}{M+m^1} \right)^2 + M \left(\frac{-m^1}{M+m^1} \right)^2 \right] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \quad m = Mm^1/(M+m^1) \quad (A-5)$$

次に、

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -yr \\ \dot{y} + lr \\ yp - lq \end{bmatrix}$$

であるから、(A-5), (A-2) 式をまとめて

$$T = \frac{m}{2} (r^2 y^2 + \dot{y}^2 + 2lr\dot{y} + l^2 r^2 + p^2 y^2 - 2lpqy + q^2 l^2) + \frac{I_x}{2} \dot{p}^2 + \frac{I_y}{2} \dot{q}^2 + \frac{I_z}{2} r^2 \quad (A-6)$$

次に、

$$\boldsymbol{\beta} \equiv ml^2, \quad \xi \equiv y/l$$

とおけば、

$$T = \frac{\beta}{2} [r^2 \xi^2 + \xi^2 + 2r\xi + r^2 + p^2 \xi^2 - 2pq\xi + q^2] \quad (A-6')$$

y 以外の一般化座標については、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} = P \frac{\partial p}{\partial q_i} + Q \frac{\partial q}{\partial q_i} + R \frac{\partial r}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = P \frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{q}_i} + Q \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_i} + R \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_i} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3) \quad (A-7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv \frac{\partial T}{\partial p} = I_x p + \beta \xi (\xi p - q) \\ Q &\equiv \frac{\partial T}{\partial q} = I_y q - \beta (\xi p + q) \\ R &\equiv \frac{\partial T}{\partial r} = I_z r + \beta (\xi^2 r + r + \xi) \end{aligned} \right\} \quad (A-8)$$

以上から、 y (したがって ξ) 以外の一般化座標に関する Lagrange's 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (A-9)$$

ここで、 Q_i は q_i に関する一般化力であり、この場合はオイラ角を増加させる方向のトルクである。すなわち

$$Q_1 = N_\varphi, \quad Q_2 = N_\theta, \quad Q_3 = N_\phi$$

(1) $q_1 = \varphi$ に関する Lagrange 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 1 & \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \dot{\phi} c \theta c \varphi - \theta s \varphi = r \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\dot{\theta} c \varphi - \dot{\phi} s \phi c \theta = -q \end{cases}$$

Lagrange's 方程式 (A-9) から

$$\begin{aligned} & \dot{P} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + P \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)' - P \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \\ & + \dot{Q} \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) + Q \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right)' - Q \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \\ & + \dot{R} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) + R \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)' - R \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) = N_\varphi \end{aligned}$$

したがって、

$$\dot{P} - Q\dot{r} + R\dot{q} = N_\varphi$$

すなわち、

$$I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr + \beta \xi (2\dot{\xi}p + \dot{\xi}p - \dot{q} + pr + \xi qr) = N_\varphi \quad (\text{A-10})$$

(2) $q_2 = \theta$ に関する Lagrange 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\dot{\phi}c\theta \\ \frac{\partial q}{\partial \theta} = c\varphi & \frac{\partial q}{\partial \theta} = -\dot{\phi}s\varphi s\theta \\ \frac{\partial r}{\partial \theta} = -s\varphi & \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\dot{\phi}c\varphi s\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \dot{P} \cdot 0 + P \cdot 0 - P \cdot (-\dot{\phi}c\theta) \\ & + \dot{Q} \cdot c\varphi + Q \cdot (-\dot{\phi}s\varphi) - Q \cdot (-\dot{\phi}s\varphi s\theta) \\ & + \dot{R}(-s\varphi) + R(-\dot{\phi}c\varphi) - R \cdot (-\dot{\phi}c\varphi s\theta) = N_\theta \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & P(\dot{\phi}c\theta) + Q(-\dot{\phi}s\varphi + \dot{\phi}s\varphi s\theta) + \dot{Q}(c\varphi) \\ & + R(-\dot{\phi}c\varphi + \dot{\phi}c\varphi s\theta) + \dot{R}(-s\varphi) = N_\theta \quad (\text{A-11}) \end{aligned}$$

(3) $q_3 = \phi$ に関する Lagrange 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \phi} = -s\theta & \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \phi} = s\varphi c\theta & \frac{\partial q}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \phi} = c\varphi c\theta & \frac{\partial q}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \dot{P}(-s\theta) + P(-\dot{\theta}c\theta) \\ & + \dot{Q}(s\varphi c\theta) + Q(-\dot{\theta}s\varphi s\theta + \dot{\phi}c\varphi c\theta) \\ & + \dot{R}(c\varphi c\theta) + R(-\dot{\theta}c\varphi s\theta - \dot{\phi}s\varphi c\theta) = N_\phi \quad (\text{A-12}) \end{aligned}$$

以上で、一般化座標および一般化力を用いた運動方程式が得られた。ここで本体固定の座標軸系に変換するための、座標変換のマトリクスを求める。

(1) 角速度ベクトルの成分に関しては、

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\phi}s\theta \\ q = \dot{\theta}c\varphi + \dot{\phi}c\theta s\varphi \\ r = -\dot{\theta}s\varphi + \dot{\phi}r\theta c\varphi \end{cases}$$

すなわち、

$$\omega = C \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

ただし、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & c\theta s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{A-14})$$

(2) 一般化力については、外力を $N = [N_x, N_y, N_z]^T$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 (\equiv N_\varphi) &= n_1 \cdot N \\ Q_2 (\equiv N_\theta) &= n_2 \cdot N \\ Q_3 (\equiv N_\phi) &= n_3 \cdot N \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-15})$$

ただし、 n_1, n_2, n_3 は一般化座標の回転方向をあらわす単位ベクトルで、

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= [1, 0, 0]^T \\ n_2 &= [0, c\varphi, -s\varphi]^T \\ n_3 &= [-s\varphi, s\varphi c\theta, c\varphi c\theta]^T \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-16})$$

これより、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = C^T \cdot N \quad (\text{A-17})$$

あるいは、

$$N = (C^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-18})$$

以上から、

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_\varphi \\ N_y &= N_\varphi (s\varphi \cdot s\theta / c\theta) + N_\theta c\varphi + N_\phi (s\varphi / c\theta) \\ N_z &= N_\varphi (c\varphi \cdot s\theta / c\theta) - N_\theta s\varphi + N_\phi (c\varphi / c\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-19})$$

さらに、(A-14)式を考慮して整理すれば、

$$\begin{aligned} \dot{P} - (Q\dot{r} - R\dot{q}) &= N_x \\ \dot{Q} - (R\dot{p} - P\dot{r}) &= N_y \\ \dot{R} - (P\dot{q} - Q\dot{p}) &= N_z \end{aligned}$$

以上によって Euler 方程式が一般的な形で導かれた。

いま、外力がなく、対称衛星であるから、

$$N_x = N_y = N_z = 0, \quad I_z = I_y$$

したがって、本体に関する方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_x \dot{p} + \beta \xi [2p\dot{\xi} + \dot{p}\xi - \dot{q} + pr + qr\xi] &= 0 \\ I_y \dot{q} - (I_y - I_x) r\dot{p} - \beta [2p\dot{\xi} + \dot{p}\xi - \dot{q} \\ & \quad + pr + qr\xi] = 0 \\ I_y \dot{r} - (I_x - I_y) p\dot{q} + \beta [\dot{\xi} + \dot{r} - r^2\xi \\ & \quad - p(\dot{p}\xi - \dot{q}) + \xi(r\dot{\xi} + 2r\dot{r}\xi - qp\xi + q^2 + r^2)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-20})$$

(4) $q_4 = y$ に関する Lagrange 方程式

運動エネルギーの他に、バネ力によるポテンシャル・エネルギーおよび散逸関数を考慮して、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} L = T - V &= (m/2) \{ r^2 \dot{y}^2 + \dot{y}^2 + 2r\dot{y} + r^2 + p^2 y^2 \\ & \quad - 2pqy + q \} - (1/2)ky^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + lr) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = m(r^2y + p^2y - lpq) - ky \\ \frac{\delta F}{\delta y} = cy \end{cases}$$

ここで,

$$\omega_n \equiv (k/m)^{1/2}, \quad \zeta \equiv \frac{c}{2}(mk)^{-1/2}$$

とおけば,

$$\ddot{\xi} + 2\zeta\omega_n \dot{\xi} + (\omega_n^2 - p^2 - r^2)\xi + pq + \dot{r} = 0 \quad (\text{A-21})$$

以上で得られた (A-20), (A-21) 式が各々本体およびダンパのおもりに関する運動方程式である。これ

らの方程式は本文の (28), (19) 式に一致する (\dot{r} に関する方程式の右辺は $2\zeta\omega_n \dot{\xi} + \omega_n^2 \xi$ の代りに (19) 式を代入すれば (A-20) の第 3 式に一致する)。

付録 2 シミュレーション・プログラム

RKG 法による常微分方程式の解法を主体とするプログラムのフロー・チャートを Fig. A-2 に示す。シミュレートすべき方程式は微係数を計算するサブルーチン (DAUX) の中ですべて表現される。

なお, RKG サブルーチンは本研究所 志甫徹技官が修正したものを、最小二乗推定は東京大学計算センタ科学計算ライブラリ E2/TC/LMSO を使用した。

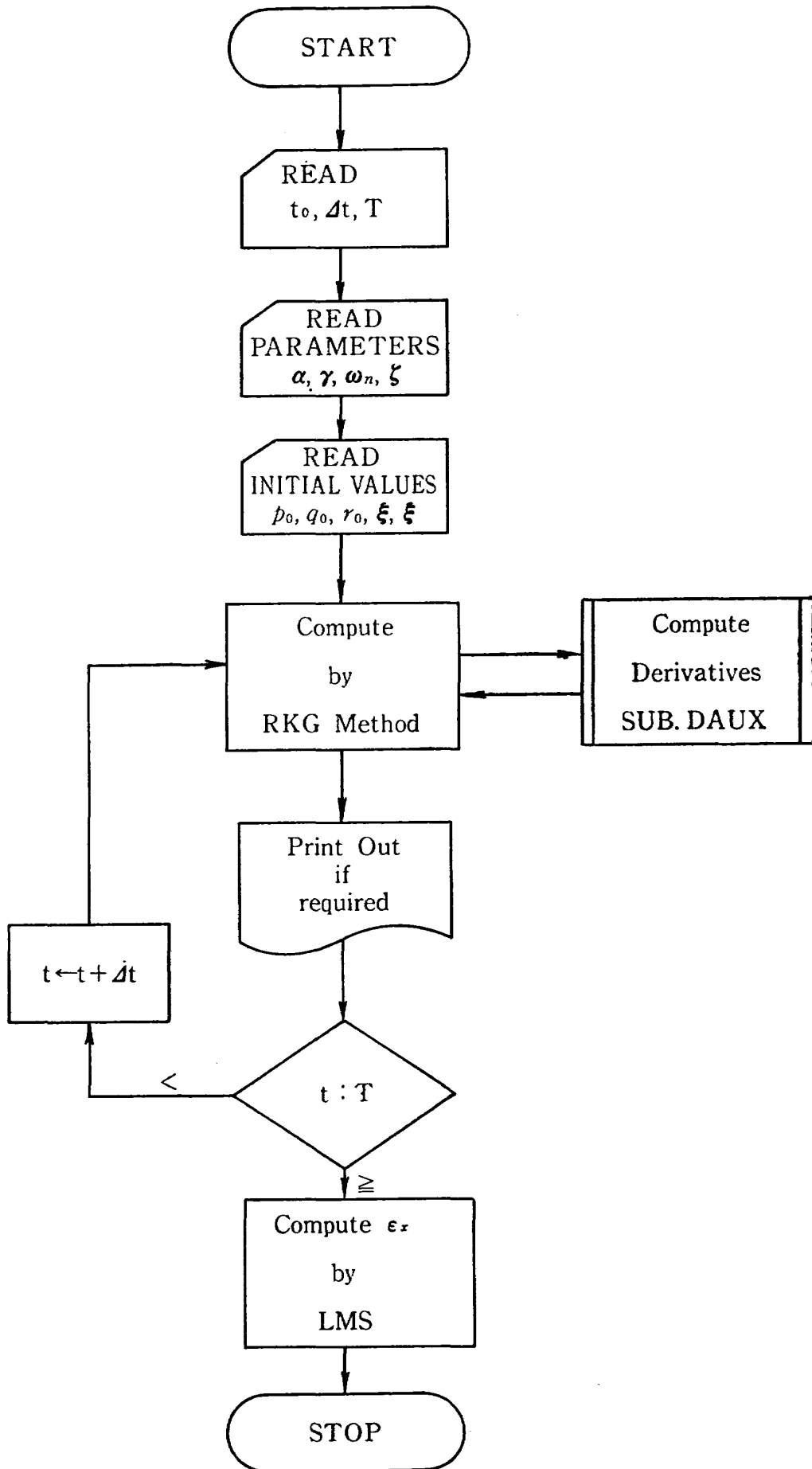


Fig. A-12 シミュレーションのフロー・チャート

TM-203	固体ロケットの比推力測定の標準化	1971年6月	五代富文, 岡部祐二郎 清水昭紀, 伊藤克弥 西村久男
TM-204	サーボ機構の温度応用改善用デジタルコントローラについて	1971年7月	小川鑛一, 島村正人 (日本大学)
TM-205	自由飛行模型FFM-10の動安定微係数の推定について	1971年7月	羽崎俊夫, 河本 巖
TM-206	静止衛星の軌道保持シミュレーションシステムの構成(I) —地球の重力場による摂動—	1971年8月	松島弘一

注：欠番は配布先を限定したもの

航空宇宙技術研究所資料207号

昭和46年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) ㊦182

印刷所 第一印刷株式会社
東京都新宿区富久町58
