

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-270

超音速に於ける円錐ポートテイル上の圧力係数

野 溝 国 生

1975年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

超音速に於けるポートテイル上の圧力係数*

野 溝 国 生**

Pressure Coefficient of Supersonic Flows Over Conical Boattails

by Kunio NOMIZO

ABSTRACT

Numerical calculation of supersonic flows of a perfect gas over conical boattails is treated, Characteristic method is used, and this method is useful for Conical boattails with slope discontinuities.

In this report, the nonlinear effect is investigated and compared with linearized theory. This calculation is treated from Mach 1.01 to 10.0.

1. まえがき

ロケットの抵抗を減少するため、その後端の断面積を減少させたいいわゆるポートテイルとすることは広く行われている。ポートテイルの効果としては底面圧への影響が特に重要であるが、その推定は粘性を考慮した議論によらなければならないから本稿の範囲外である。ポートテイルとして最も簡単な円錐形ポートテイルの場合について考える。このような表面の傾斜またはその微係数に不連続のあるところでは、通常用いられる超音速の線型理論に基づく軸上の吹出し分布による解が発散その他の困難を伴うので特に特性曲線法によって計算し減密解を求め、いくつかのマッハ数について圧力係数のグラフを作成した。

ポートテイルに関する計算は種々行われており¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾¹⁰⁾¹¹⁾、ポートテイルの計算としてはめずらしいものではないが、これらの計算は解析的で、線形化その他に於てかなりの仮定を含んでいる。よってこれらの欠点を最大限にとりのぞくため、特性曲線法によって計算した各種マッハ数、各種ポートテイル開き角についての圧力係数のグラフを作成した。

又特性曲線法による軸対称流の計算は種々行われているがこれらは各々の事例について行われており⁶⁾⁷⁾⁸⁾、計算方法としては新しいものではないが、それらはほとんど特

定の条件に於ける計算例でありかなり広い利用範囲をもたない、ただし迎角のないコーンについては KopaL⁸⁾ 等によりかなり広い利用範囲をもつ表の作成が行われている。しかしポートテイルについてはかなり広い利用範囲をもつ表、もしくはグラフの作成は行われていない。なお計算はマッハ 1.01 より 10 までについて行われた。又長さの単位は胴体半径を 1 とした。

2. 記 号

- C : 音速
- C_0 : 速度が 0 の時の音速
- C_D : 抗力係数 (基準断面積 π)
- C_p : 圧力係数
- M : マッハ数
- P : 圧力
- R : ポートテイルの肩から円錐の中心線に向って計った長さ
- r : 半径方向座標 (胴体半径 1)
- S : ポートテイル断面積 (図 2 7 参照)
- u : x 方向速度
- V : $u^2 + v^2$
- x : ポートテイルの肩からの距離 (ポートテイル全長)
- α : マッハ角
- β : $M_\infty^2 - 1$

*昭和49年8月14日 受付

**宇宙研究グループ

- δ : ポートテイルの角度
- θ : 流体の流れの角度
- ρ : 密度
- φ : ポテンシャル

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta} \right)_{I,II} = \frac{-\tan \alpha + \frac{\sin \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \sin \theta}{\sin(\theta - \alpha)}}{\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)_{I,II}} \quad (6)$$

添 字

- B : ポートテイル端
- max : 最大
- ∞ : 自由流中

3. 基礎式

a) 特性曲線法⁹⁾

流れが軸対称で定常であり、回転をしない場合は、

$$\left(1 - \frac{u^2}{C^2}\right) \phi_{xx} - 2 \frac{uv}{C^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \phi_{yy} + \frac{\phi_r}{r} = 0 \quad (1)$$

ここに於て

$$C^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} V^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r \quad (3)$$

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_{I,II} = \frac{-uv \pm C \sqrt{u^2 + v^2 - C^2}}{C^2 - u^2} - \frac{C^2 v}{C^2 - v^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{du} \right)_{I,II} \quad (4)$$

ここに於て上側の符号は I 族、下側の符号は II 族に対応する。これらの等式は速度成分と角度成分によって書き表わされるとなると便利である。すなわち

$$u = V \cos \theta; \quad v = V \sin \theta$$

そして $\sin \alpha = C/V$ ⁹⁾ ということに注意すると

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_{I,II} = \tan(\theta \mp \alpha) \quad (5)$$

b) 計算手順

全体の過程の中の一つの段階は次の如く要約される(5)は次の如くかゝれる。(図 1, 2 参照)

$$r_3 - r_1 = (x_3 - x_1) \tan(\theta_1 - \alpha_1) \quad (7)$$

$$r_3 - r_2 = (x_3 - x_2) \tan(\theta_2 + \alpha_2) \quad (8)$$

θ₁, θ₂, α₁, α₂ はすべて知られているのであるから、r₃ と x₃ はグラフ的にとくことが出来る。(6)に dθ・cot α をかけると、次の形を得る。

$$\left(d\theta \right)_{I,II} \pm (\cot \alpha / V) (dV)_{I,II} + \frac{\sin \theta \cdot \sin \alpha}{\sin(\theta \mp \alpha)} \cdot \frac{(dr)_{I,II}}{r} = 0$$

$$Q = (\cot \alpha) / V \quad (9)$$

$$F = (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta + \alpha) \quad (10)$$

$$G = (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta - \alpha) \quad (11)$$

図 1 の 1-3, 2-3 に応用すると

$$\theta_3 - \theta_1 + Q_1(V_3 - V_1) - G_1/r_1(r_3 - r_1) = 0 \quad (12)$$

$$\theta_3 - \theta_2 - Q_2(V_3 - V_2) + F_2/r_2(r_3 - r_2) = 0 \quad (13)$$

1, 2, 3 に於てすべての状態が与えられており、r₃ すでに求められているので、この 2 つの等式は同時に Q₃ と V₃ についてとかれる。

このようにして第一段階の近似が完成する。この近似は 1-2, 2-3 の平均的状态を計算することによって改良される。第一近似によって、r₃, x₃, V₃, θ₃ が求められているので、(7)式に於て θ₁ のかわりに、θ₁₋₃ = (θ₁ + θ₃) / 2, α₁₋₃ = (α₁ + α₃) / 2, このようにして、Q₁₋₃ と G₁₋₃ / r₁₋₃ を計算して使用することにする。このような過程を 2, 3 回くりかえすことにより良好な近似が得

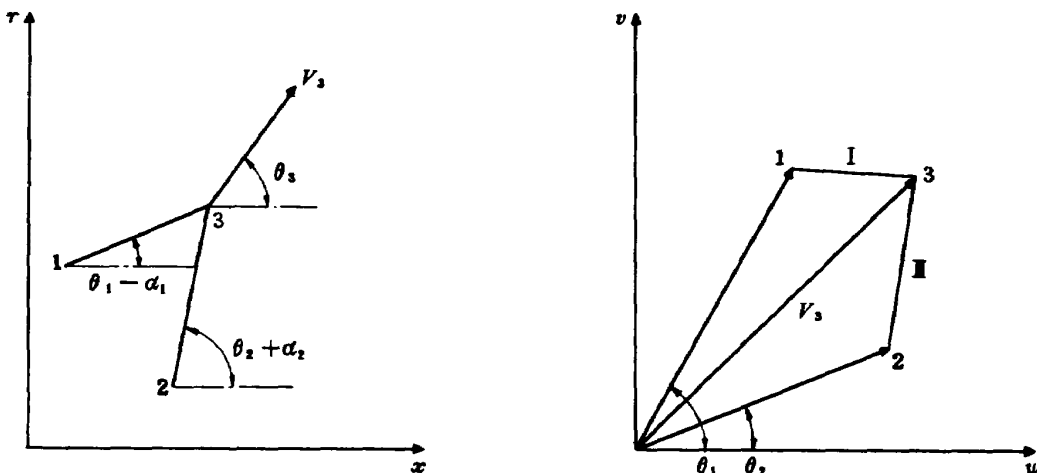


図 1 特性曲線法による 1 つのステップ

られる。本報告に於てはすべて3回くりかえしが行われた。

圧力係数の定義については附録のところで行う。

c) 初期条件の与え方

初期条件はポータイルの肩のところをさしてあり、この部分の初期条件はプラントル・メヤー流によって与えられる。

図2について具体的に計算方法について説明すると1点はプラントル・メヤー流によって与えられる。よって1, 2点から2点の状態をb)の計算手順のところ述べた方法によって計算し、2点と3点から3点の状態を計算する。このようにして次々と次の状態が計算される。 $2^{n'}, 3^{n'} \dots$ のラインが計算された後、1, $2^{n'}$ から $2^{(n+1)'}$ の状態を計算するわけであるが、これは今迄とやゝ異り(2)に於て θ_3 を $\theta^{(n+1)'}$ とし(7)に於て $x_3 = R_3 \cot\{\theta^{(n+1)'}\}$ として R_3 の値を求めしかる後に r_3 を求めて(2)に於て V_3 の値を求める。 $3^{(n+1)'}$ を求める方法は前述の計算手順の中で述べた方法である。

4. 考 察

圧力係数の非線型性

以上の特性曲線法による結果は図3から図26までに与えてある。

解析的理論では主として線型理論が取扱われており非線型の領域の理論も行われていないわけではないが十分

な精度をもつものとはいいがたく、定量的に信頼出来るものはない、よって数値解によって正確な値をもとめなくてはならない。

今非線型性を明確にするために一例として、ポータイルの肩のところにおける圧力係数が0の値と共にどのように変わるかを示したものが図3である。これによって線型理論の適用限界が大体つかめると思う、つまり0の絶対値が大きくなるにしたがって急速に線型性がわるくなることに気付くであろう。

次に圧力係数の非線型性について特徴的なことは下流に於て0の絶対値が大きい場合、圧力係数は急激に正となる可能性をあらゆるマッハ数についても持っているということである。この事は流れが不安定になるといふ事も同時に示している。この点は解析的線型理論では予想出来ないものであり、数値解をもってはじめて可能になるものである。よってこの特性曲線法による理論では圧力係数が急速に正となる点より下流の領域については全く予想出来ず、差分法もしくは有限要素法による理論にまたなくてはならない、しかし圧力係数が急速に正となる点は解析的には特異点に属するものであり、差分法もしくは有限要素法によっても解析可能であるかどうかは疑問である。発散の可能性も十分に考えられる。

又図3から図21まではずっと下流まではデータがとられておらず0の絶対値が小さい領域で圧力係数が正となる気配は示されていないがずっと下流に於ては必ず正

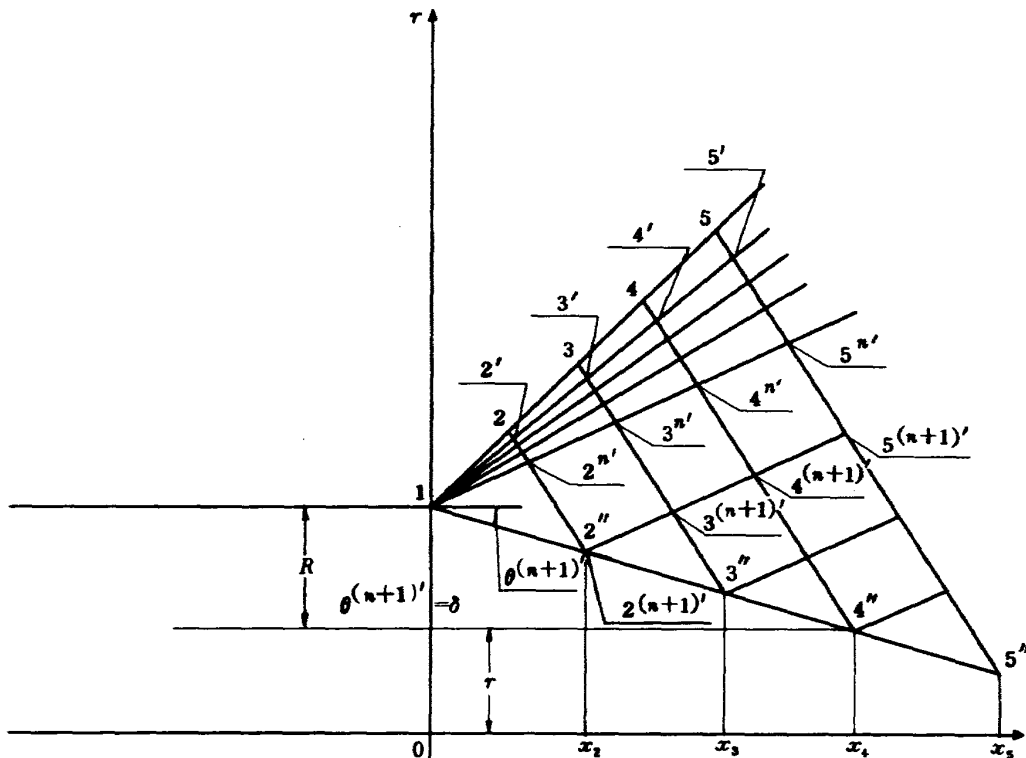


図2 ポータイル上に於ける特性曲線のあみの目

となるものであり、その点が、この理論の適用限界である。

図28から図31までは他の文献との比較を示す。

これらの文献は、実験の場合は特定なマッハ数、かぎられた δ について行われているだけなので広い適用範囲をもたない。

又実験値の場合は勿論、気体の不完全性が入ってくるので、どの程度が完全気体の効果であるか、又どの程度が、気体の不完全性にもとづくものであるか分離するのが困難である。しかし厳密解の場合は、この問題にかなり正確な解答を与え得るものである。

例えば δ の絶対値が大きくなれば、完全気体としての厳密解と実験値との間には、かなりの開きが出てくることになる(図28~31参照)

図4から図26までのデータはこれらの問題に対してある程度の解答を与え得る。

δ が大の場合には、理論によっても x が大となるにしたがって急激に C_p は正となる傾向があり、次第に解析不能点に近づくのであるが、気体の不完全性が加わると

更に一段とこのような傾向が強まるものと考えられる、又 $x=0$ の点に於て δ の絶対値が大の場合 C_p の値が下がっているのは境界層の影響と考えられる。

抗力係数

線型理論の場合には、抗力係数を求める場合圧力係数を積分から得られるが厳密理論の場合には下流にゆくにしたがって r が小となるので dx 当りのポートテイル上の面積は小となってゆくのこの事を考慮しなければならない。(図27参照)

dx の帯状の部分の面積は

$$2\pi r dx \tag{14}$$

$$\text{又 } r = 1 + x \tan \delta \tag{15}$$

よって抗力係数は(0から x までの部分による)

$$C_D = \left(\int_0^x 2\pi r \tan \delta \cdot C_p dx \right) / \pi \tag{16}$$

より求められる。よって0から x までシンプソンの公式を使って積分すればよい。その場合に C_p はすでに示されたグラフより求めればよい。

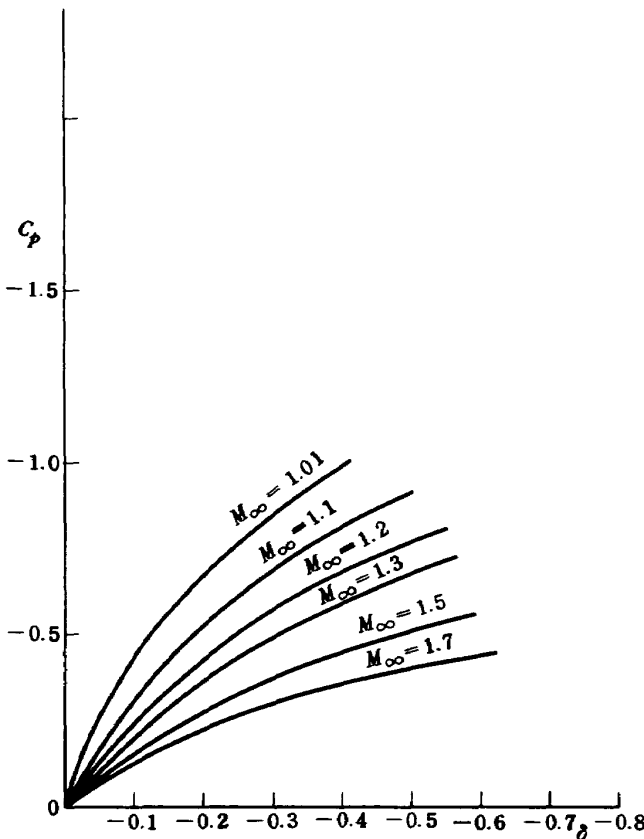


図3 円錐ポートテイルの肩に於ける圧力係数

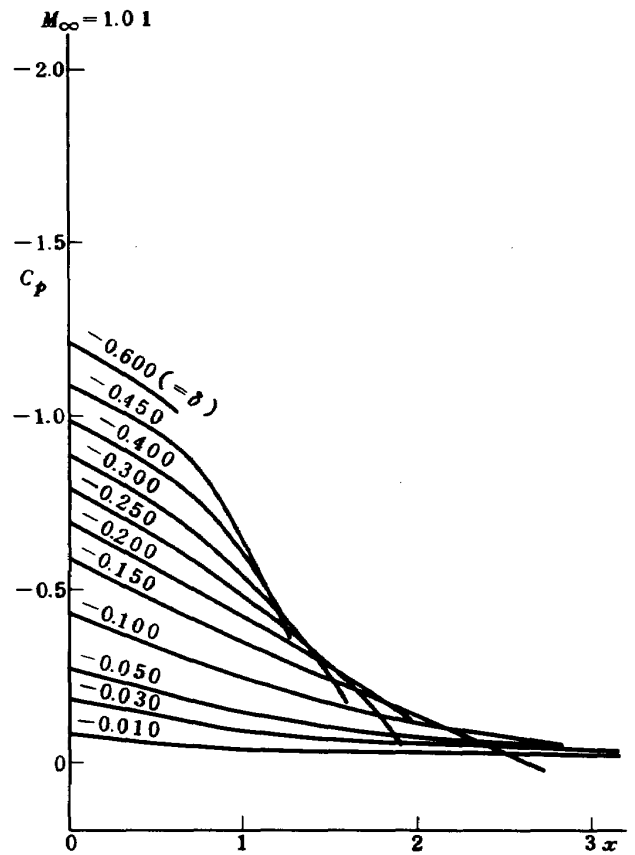


図4 $M_{\infty} = 1.01$ 円錐ポートテイル上の圧力分布

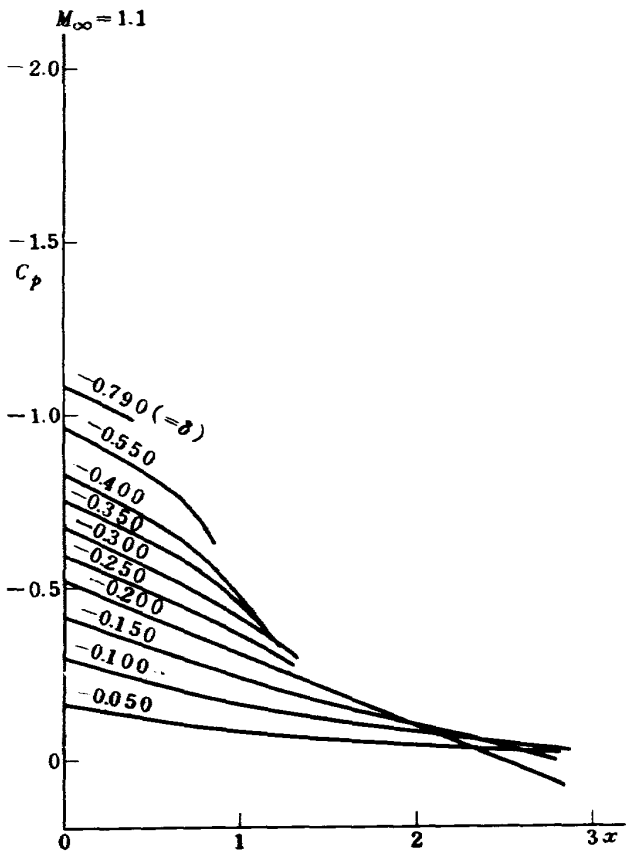


図5 $M_\infty = 1.1$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

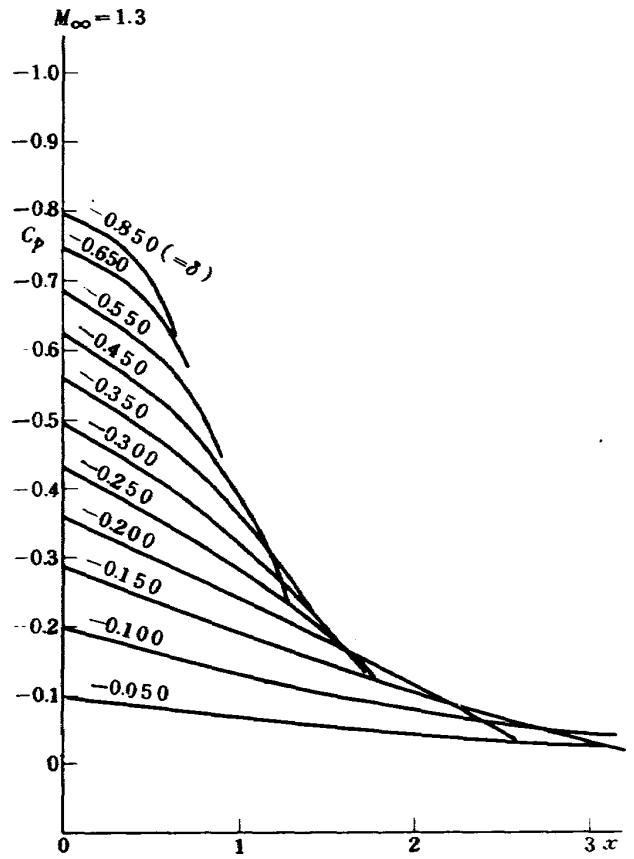


図7 $M_\infty = 1.3$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

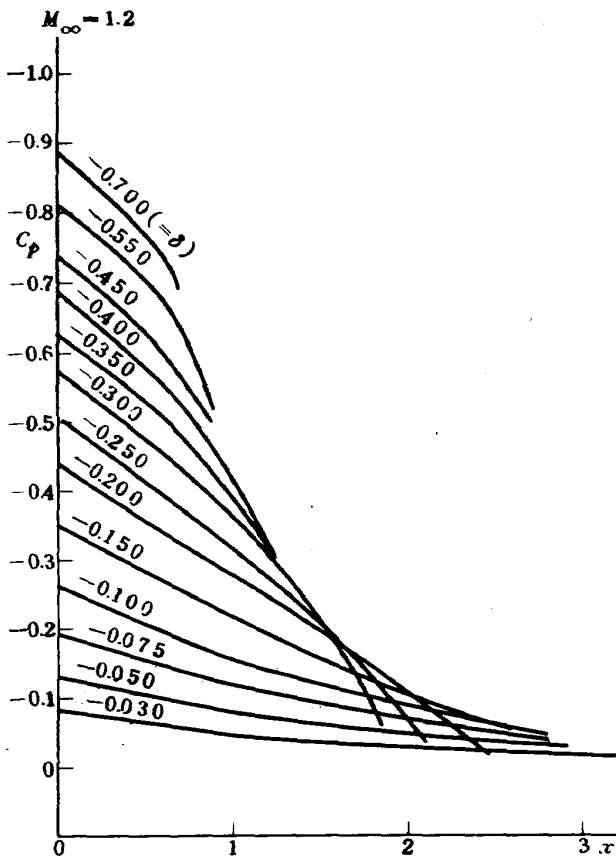


図6 $M_\infty = 1.2$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

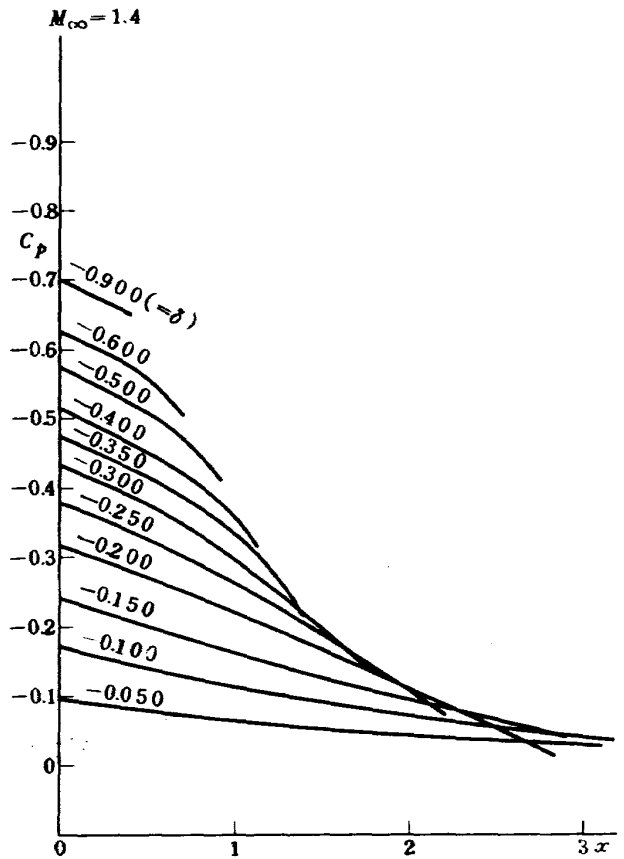
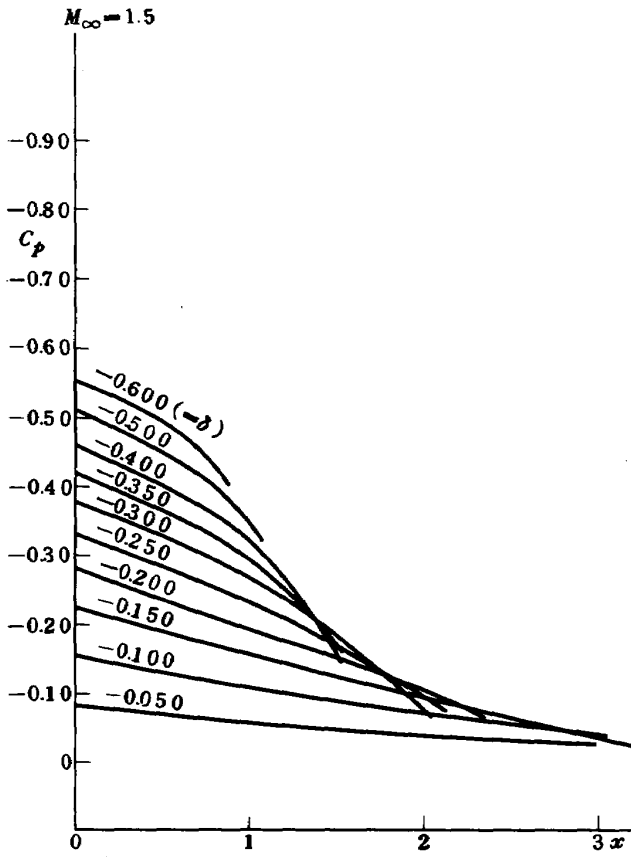
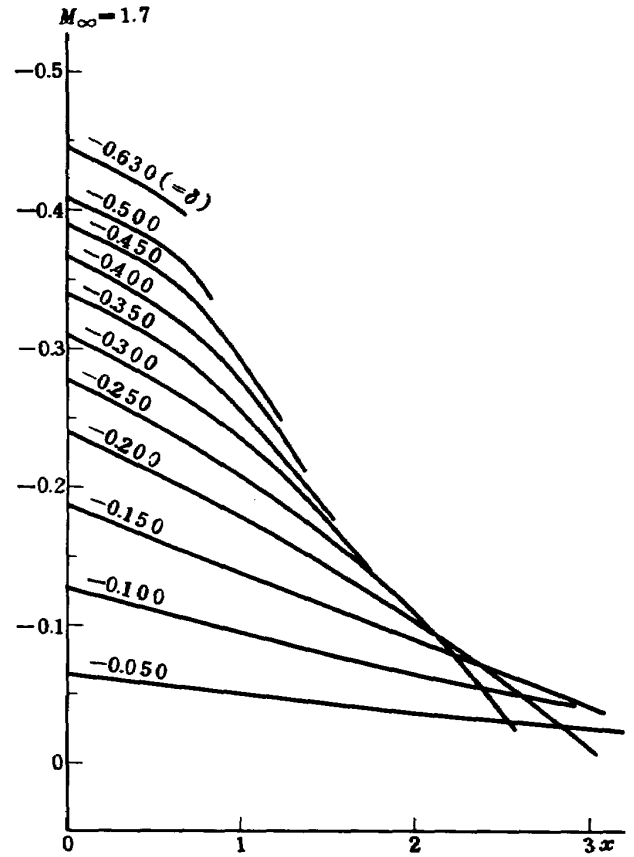
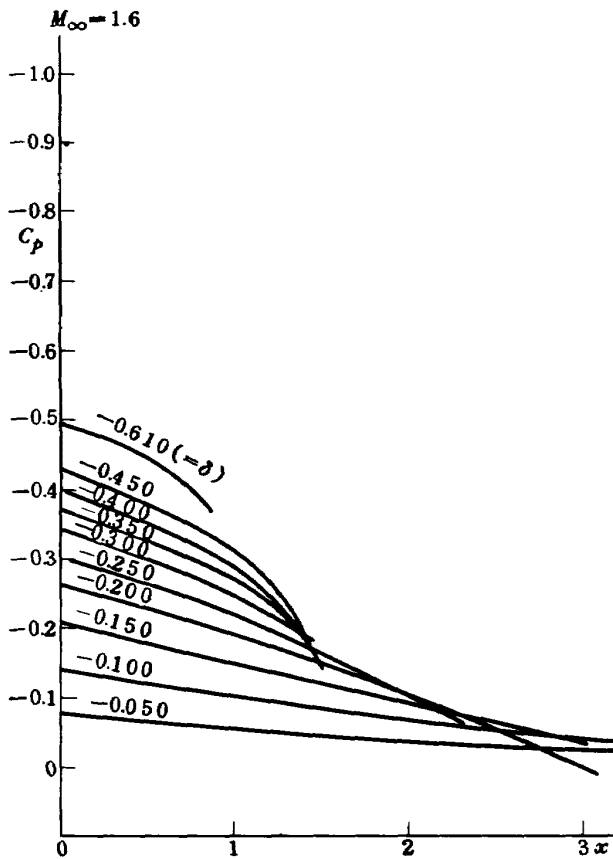
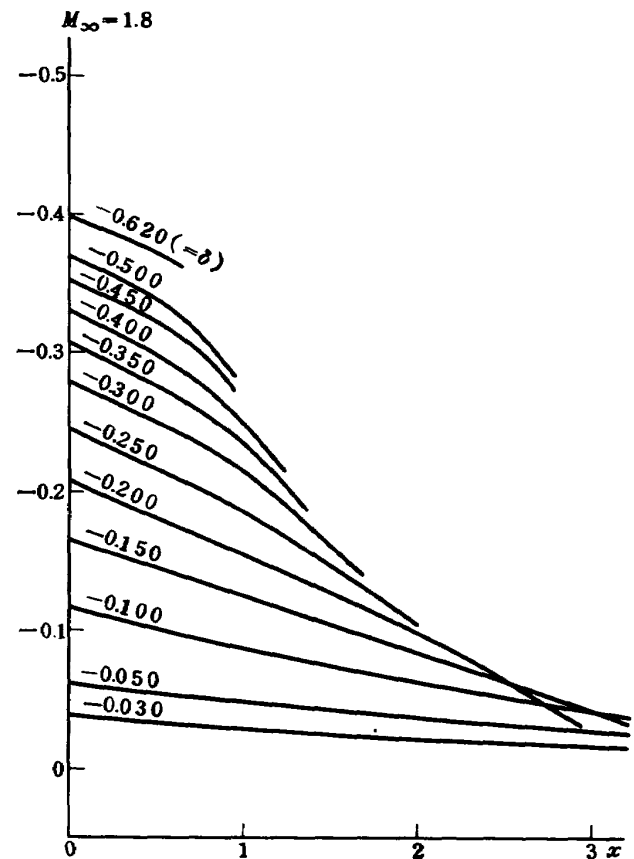


図8 $M_\infty = 1.4$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

図9 $M_\infty = 1.5$ 円錐ポートテイル上の圧力分布図11 $M_\infty = 1.7$ 円錐ポートテイル上の圧力分布図10 $M_\infty = 1.6$ 円錐ポートテイル上の圧力分布図12 $M_\infty = 1.8$ 円錐ポートテイル上の圧力分布

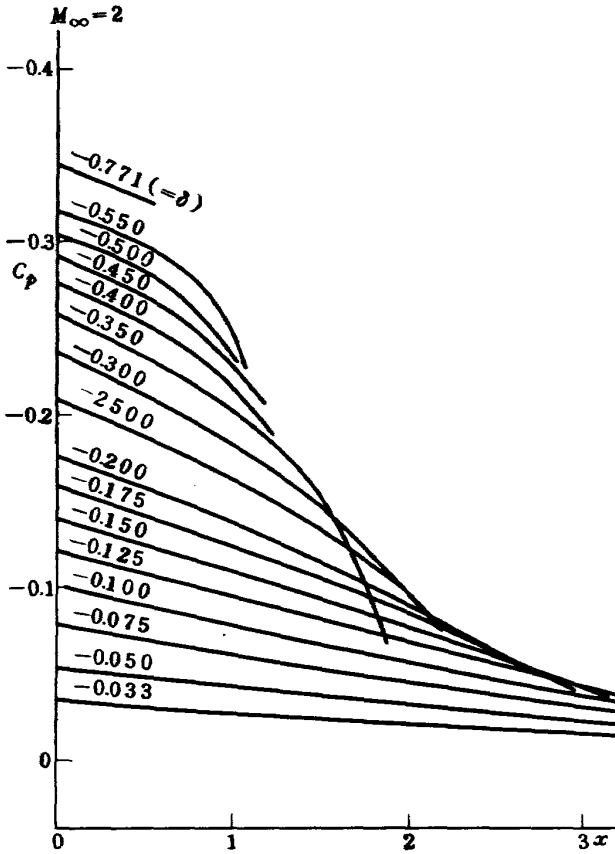


図13 $M_{\infty}=2$ 円錐ポータイル上の圧力分布

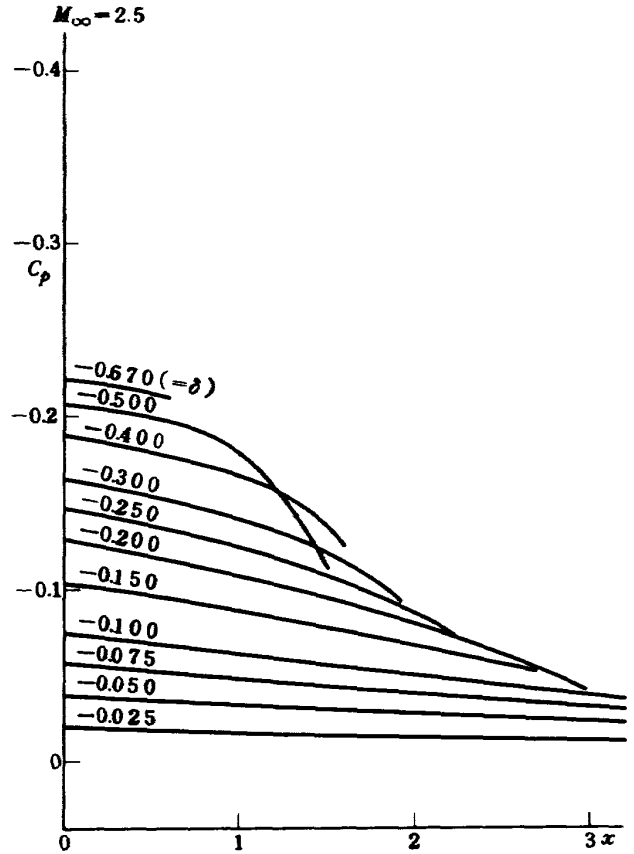


図15 $M_{\infty}=2.5$ 円錐ポータイル上の圧力分布

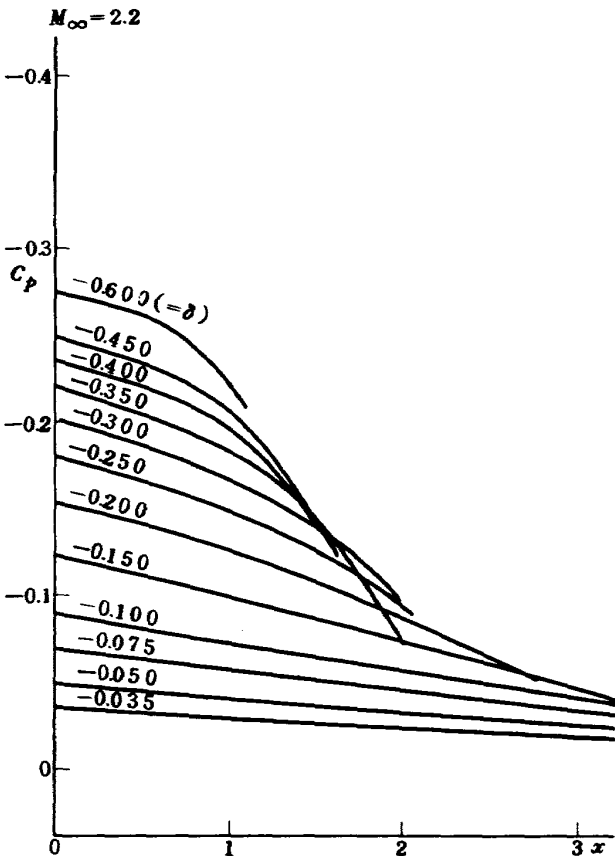


図14 $M_{\infty}=2.2$ 円錐ポータイル上の圧力分布

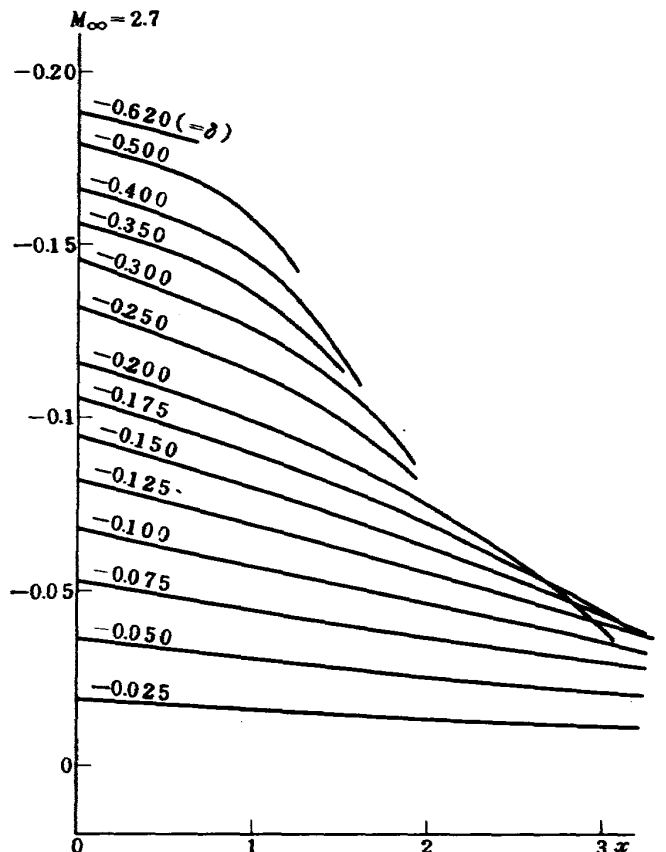


図16 $M_{\infty}=2.7$ 円錐ポータイル上の圧力分布

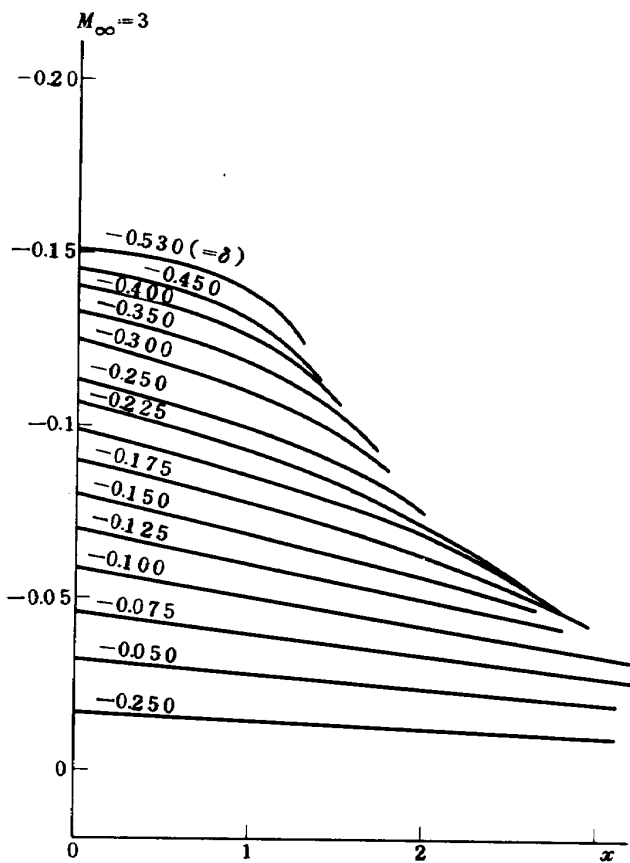


図 17 $M_{\infty} = 3$ 円錐ポードテイル上の圧力分布

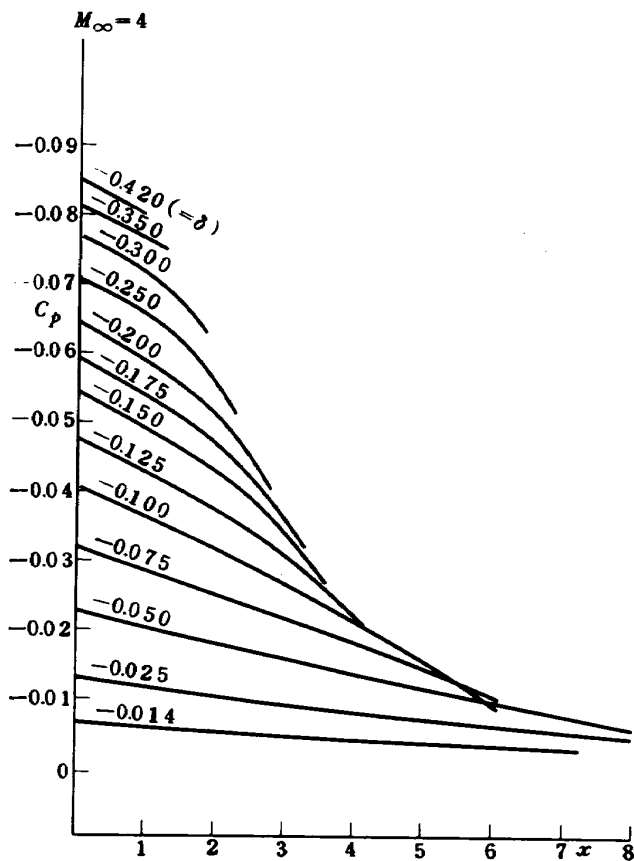


図 19 $M_{\infty} = 4$ 円錐ポードテイル上の圧力分布

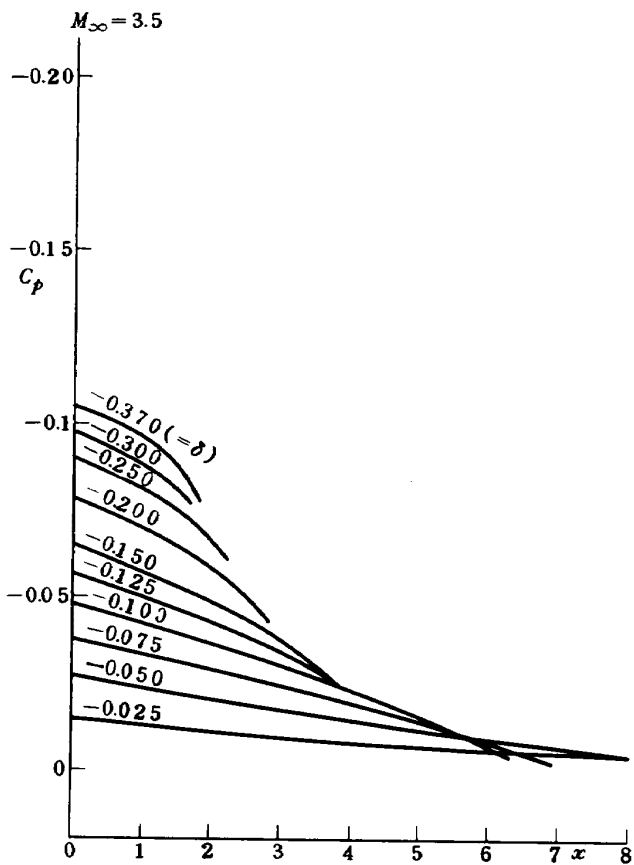


図 18 $M_{\infty} = 3.5$ 円錐ポードテイル上の圧力分布

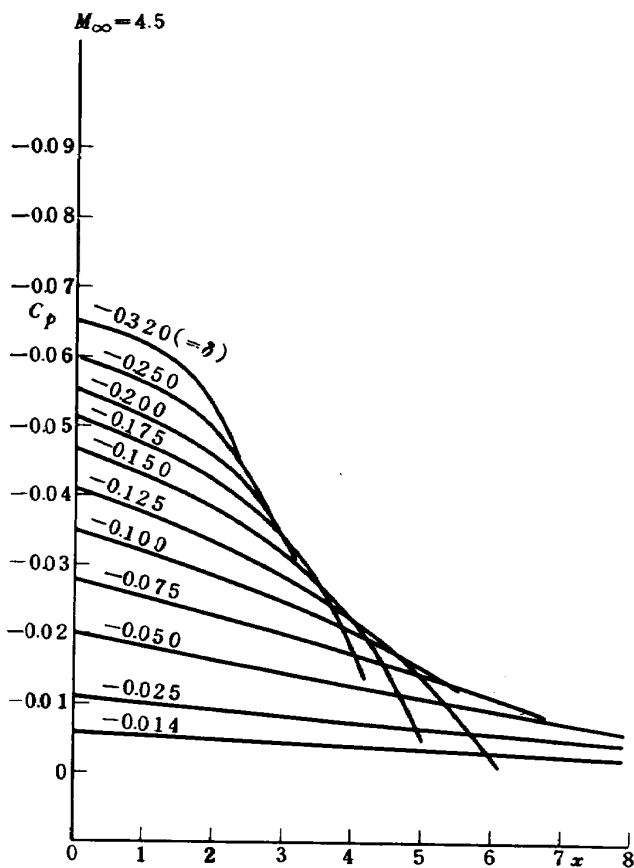


図 20 $M_{\infty} = 4.5$ 円錐ポードテイル上の圧力分布

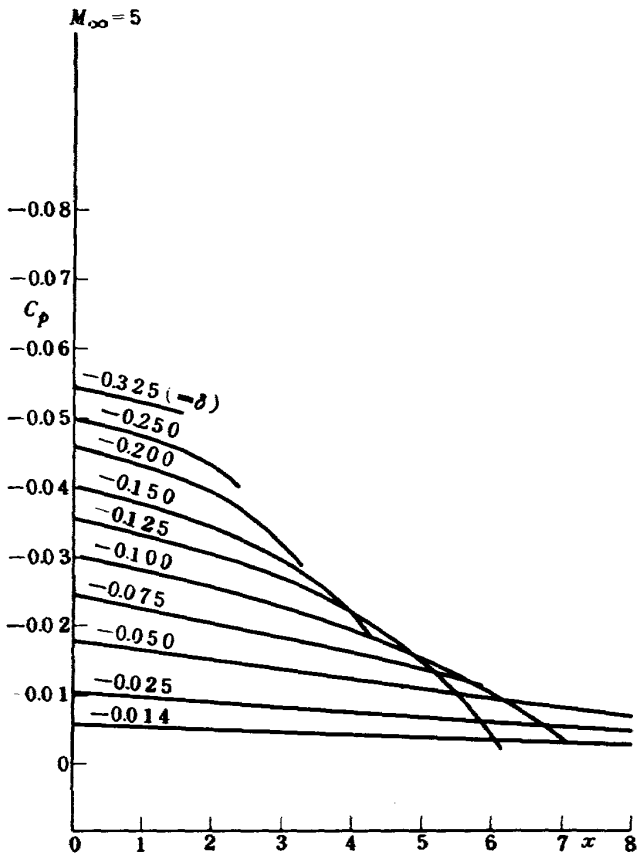


図 21 $M_{\infty} = 5$ 円錐ポータイル上の圧力分布

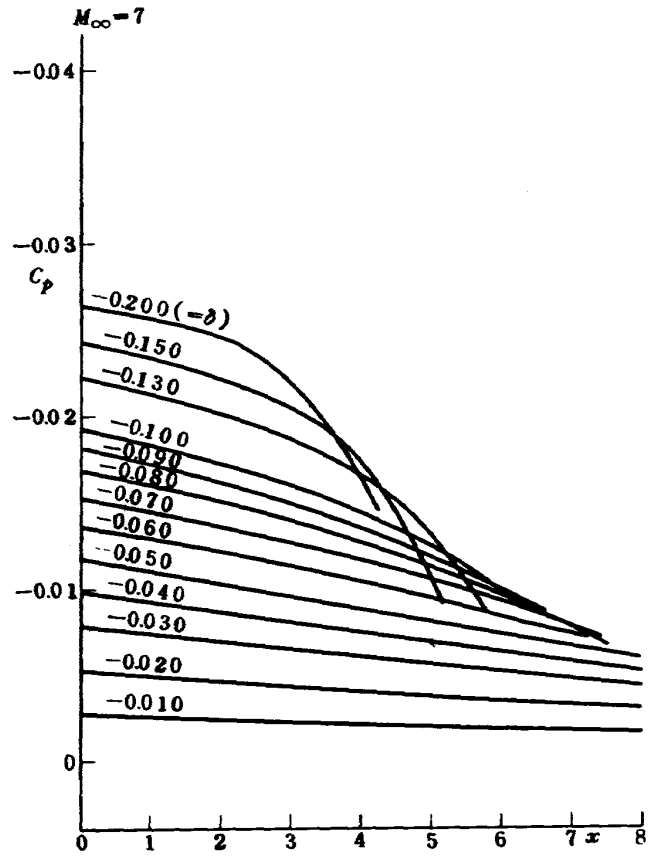


図 23 $M_{\infty} = 7$ 円錐ポータイル上の圧力分布

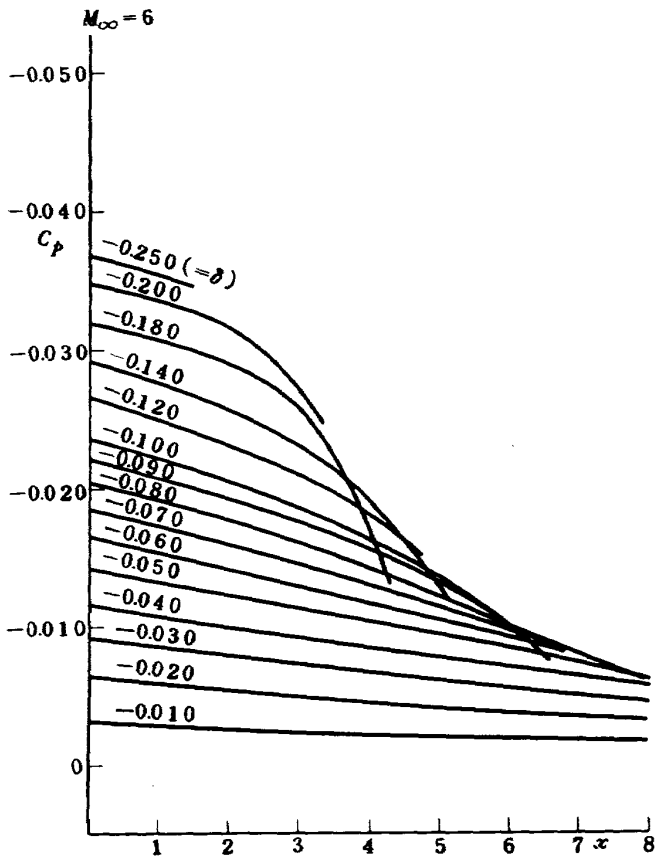


図 22 $M_{\infty} = 6$ 円錐ポータイル上の圧力分布

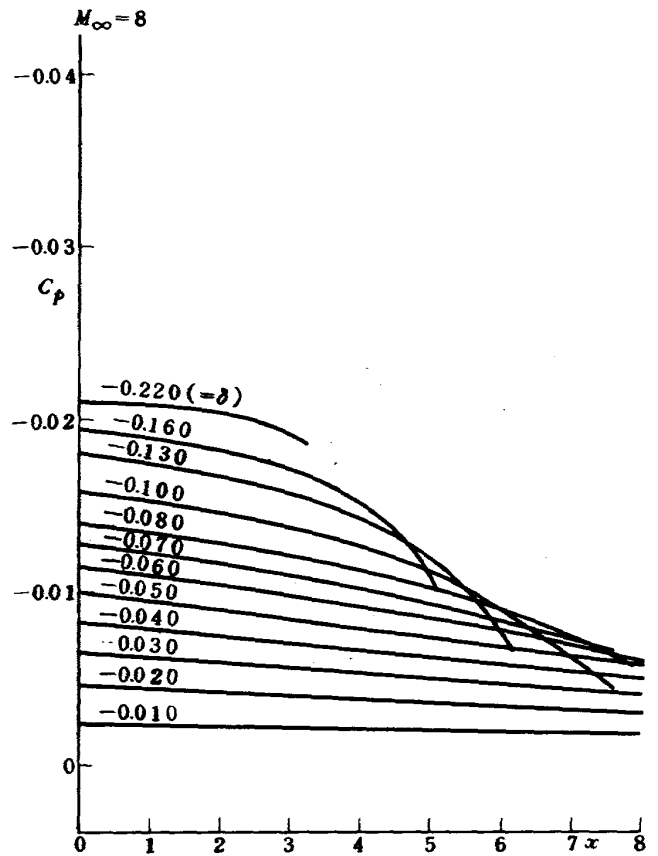


図 24 $M_{\infty} = 8$ 円錐ポータイル上の圧力分布

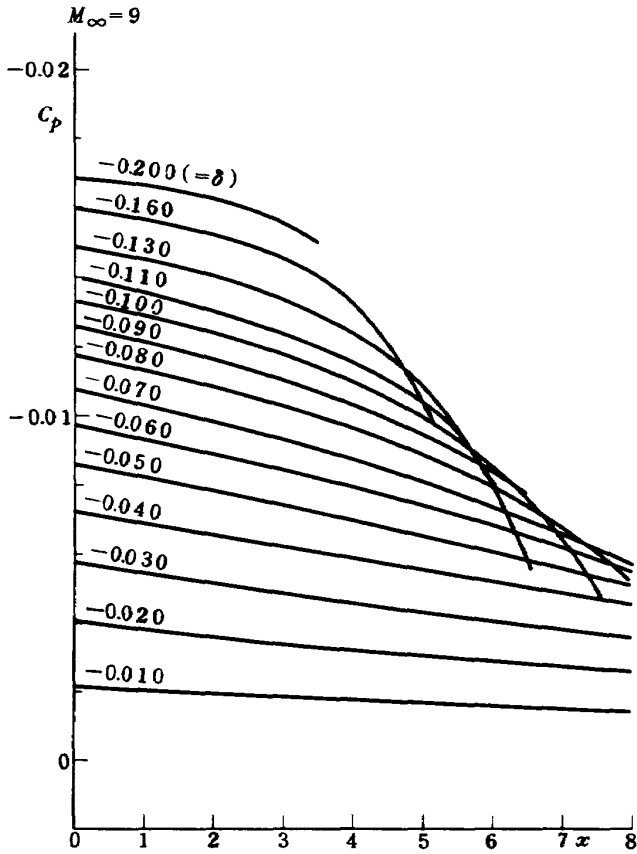


図 25 $M_\infty = 9$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

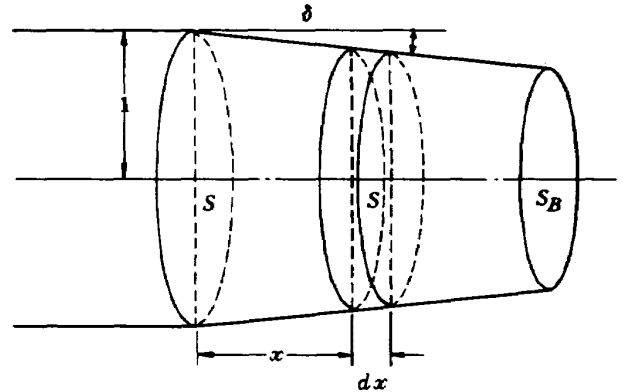


図 27 ポータテイル

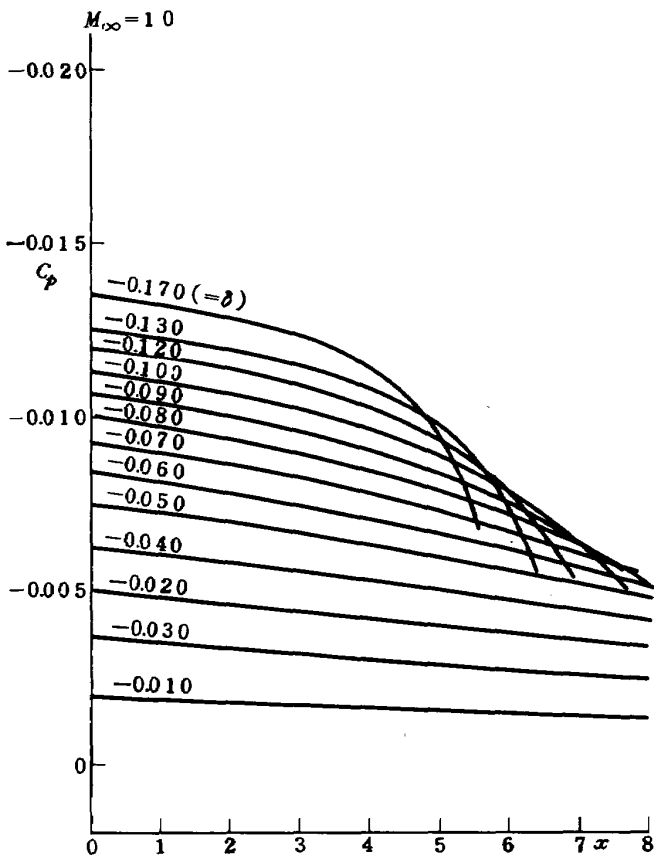


図 26 $M_\infty = 10$ 円錐ポータテイル上の圧力分布

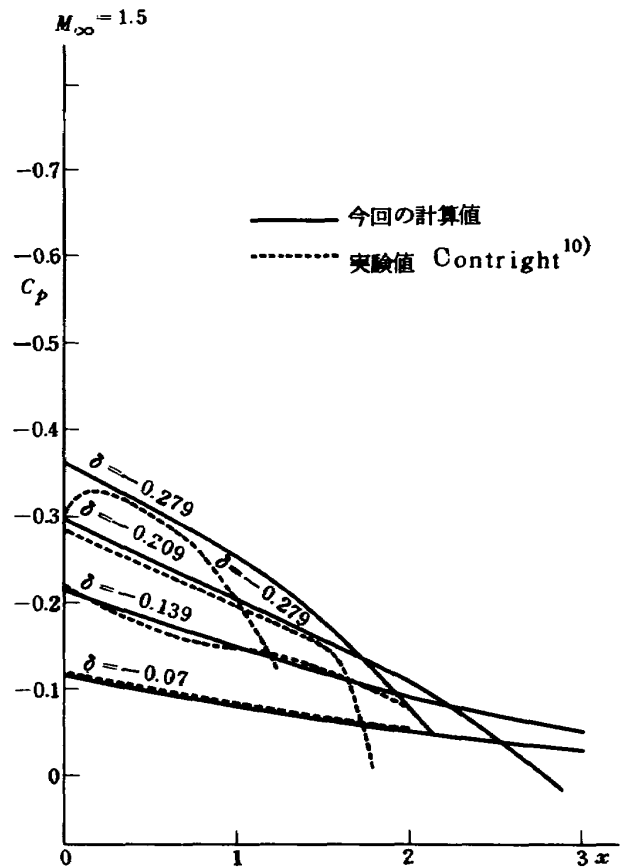


図 28 $M_\infty = 1.5$ 円錐ポータテイル上の圧力分布
実験データとの比較

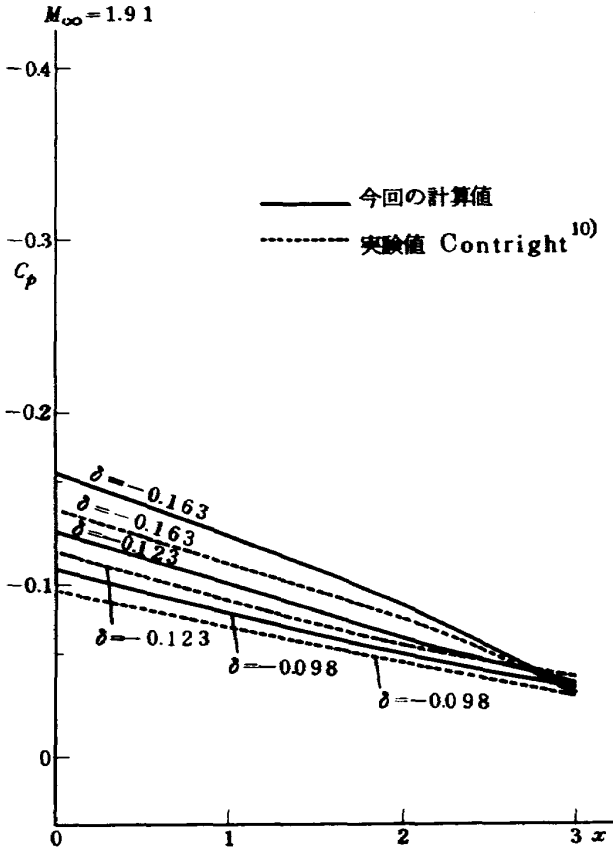


図 29 $M_\infty = 1.91$ 円錐ポータイル上の圧力分布
実験データとの比較

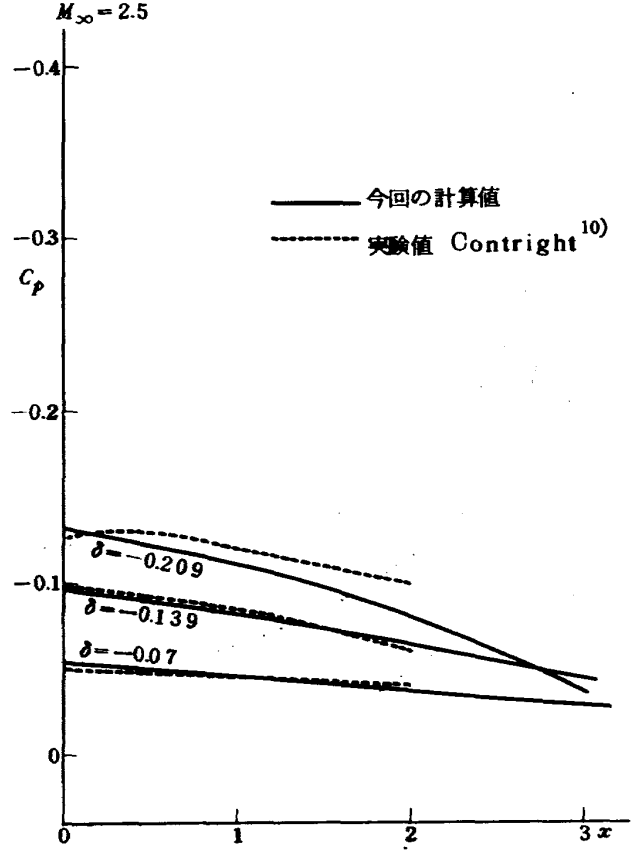


図 31 $M_\infty = 2.5$ 円錐ポータイル上の圧力分布
実験データとの比較

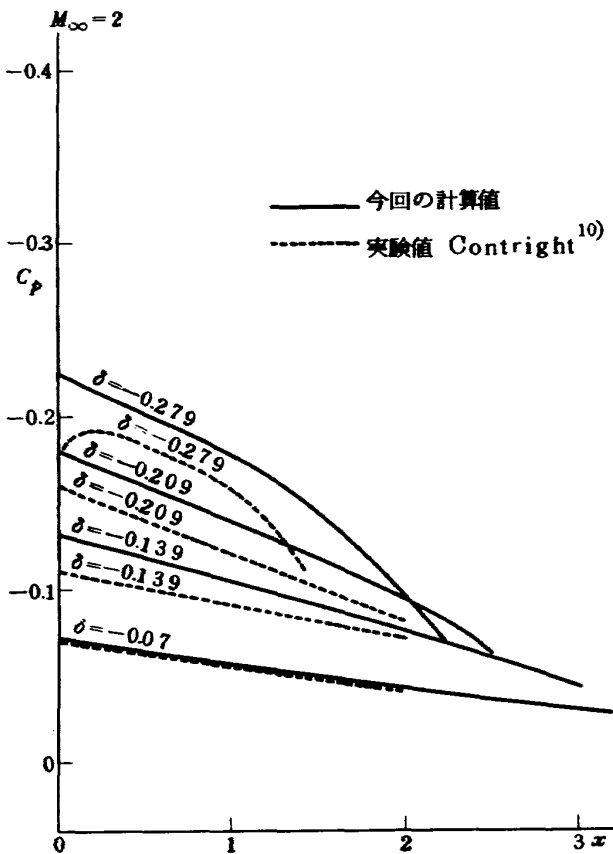


図 30 $M_\infty = 2$ 円錐ポータイル上の圧力分布
実験データとの比較

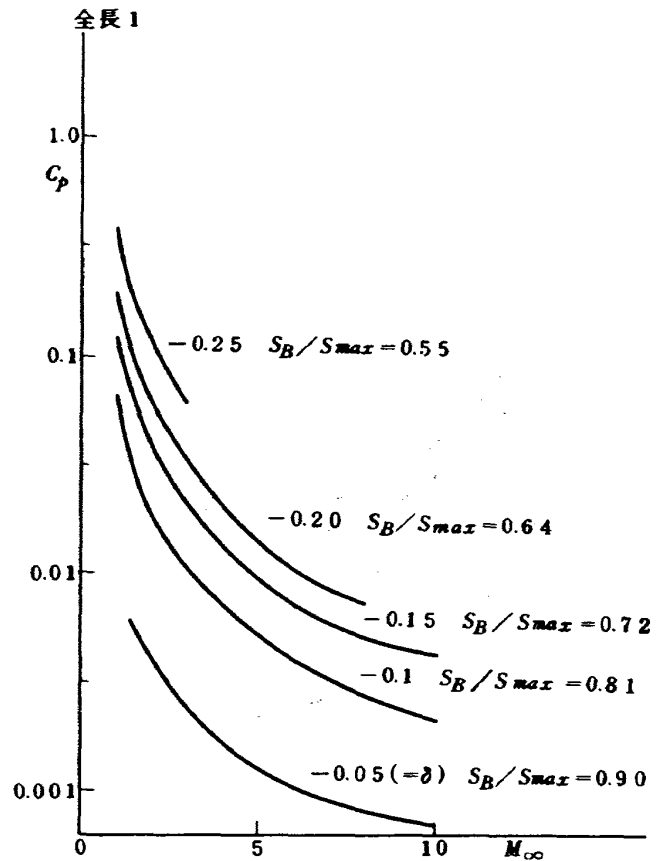


図 32 長さ 1 の円錐ポータイル上の抗力係数

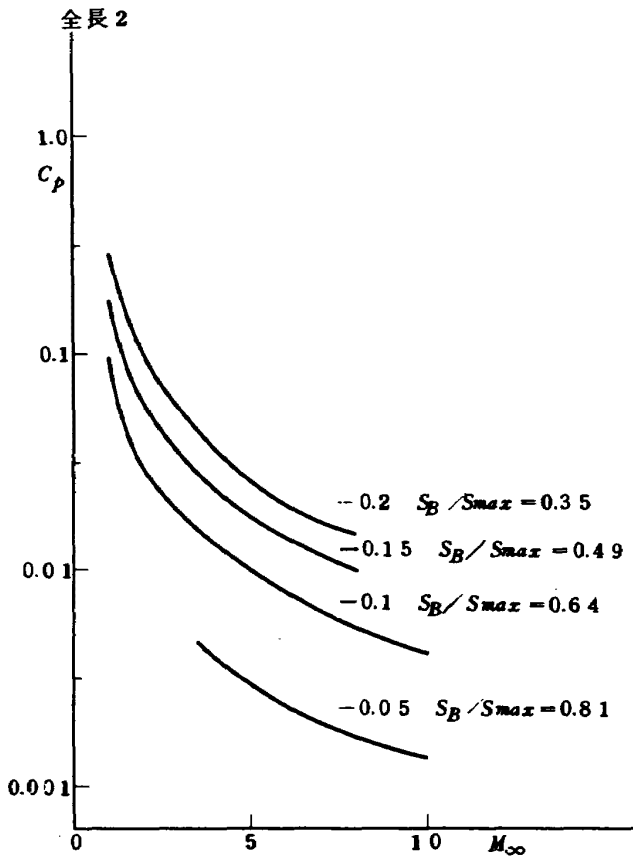


図 34 長さ 3 の円錐ポートテイル上の抗力係数

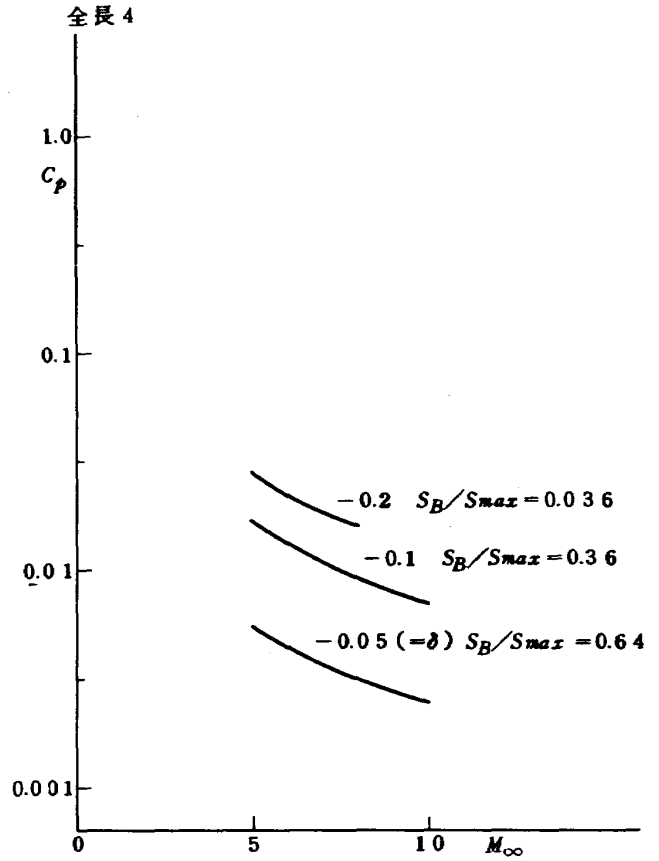


図 35 長さ 4 の円錐ポートテイル上の抗力係数

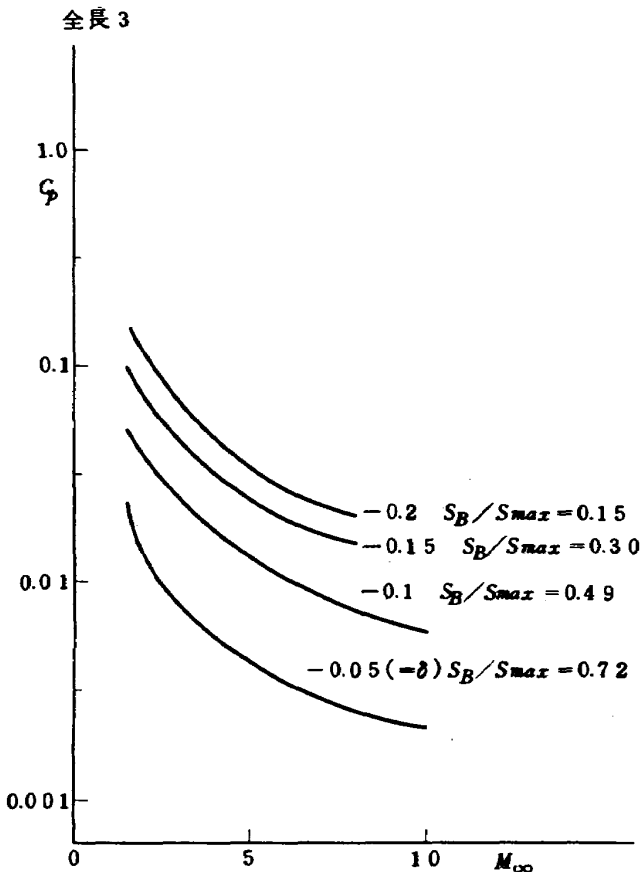


図 33 長さ 2 の円錐ポートテイル上の抗力係数

5. 結 論

1. 円錐状ポートテイルに働く空気力を簡単に計算するため、マッハ 1.01 からマッハ 10.0 までの圧力係数のグラフを作成した。このグラフを参照すれば、補間法を利用することにより、任意のマッハ数と円錐の開き角についてたゞちに圧力係数の計算が出来従来線型理論に比して非線型項の影響が完全に入っているため誤差が非常に少ない。
2. 円錐ポートテイル以外の形状のポートテイルについては、以上のグラフをもとにし円錐ポートテイルからずれている部分だけ線型理論的な修正を加えればよい。

参 考 文 献

- 1) T. von Kármán and N.B. Moore; Resistance of Slender Bodies Moving with Supersonic Velocities with Special Reference to Projectiles. Trans. Amer. Soc. Mech. Vol. 54 (1932). pp. 303-310.
- 2) Mac C. Adams and W.R. Sears; Slender Body Theory-Review and Extension, J. Aero. Sci., Vol. 20, No. 2 (1953).

- 3) M. Van Dyke; First- and Second- Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution, J. Aero Sci.; Vol. 18, No. 3 (1951).
- 4) J.H. Johannesen and R.E. Meyer; Axially-Symmetrical Supersonic Flow Near the Center of An Expansion. The Aerov. Quarterly Vol. 2, (1950/4).
- 5) J.N. Nielsen; Missile Aerodynamics (1960) pp. 80-84. McGraw Hill Book Co.
- 6) Isenberg. J.S. The Method of Characteristics in Compressible Flow, Part IB(Numerical Examples), Air Material Command Report, No. F-TR-1173C-ND (Dec., 1947).
- 7) Cronvich, L.L. A Numerical-Graphical Method of Characteristics for Axially Symmetric Isentropic Flow. Jour. Aero. Sci., Vol. 15, No. 3 (1948). p. 155.
- 8) Taylor, G.I. and Maccoll, J.W. The Air Pressure on a Cone Moving at High Speed, Proc. Poy. Soc. (A), Vol. 139 (1933), p. 278.
- 9) Shapiro. Compressible Fluid Flow II. pp. 676.
- 10) Contright, E.M. Jr. and Schroeder, A.H. Investigation at Mach Number 1.91 of Side and Base Pressure Distributions over Conical Boattails Without and With Jet Flow Issuing from Base. NACARME-S 1F26, September 1951.
- 11) Maxwell, N.E. and Shutts, W.H. Aerodynamic Effects of Boattailing on a Body of Revolution at Mach Numbers of 1.5, 2.0 and 2.5. Bumlebee Report CVAC CM-645, Consolidated-Vultee Aircraft Corporation, March 1951.

附 録

みだれをうけていない流れの速度を V_∞ , 同様に密度 ρ_∞ , 圧力を P_∞ とすると

$$C_p = (P - P_\infty) / \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$$

で与えられる。

一般の場合は

$$E_o = \frac{\rho_\infty}{k} \times \left(C_o^2 - \frac{1}{2} (k-1) V_\infty^2 \right)$$

$$P = \frac{\rho}{k} \times \left(C_o^2 - \frac{1}{2} (k-1) V^2 \right)$$

ただし $k = 1.4$ 比熱比

$$\frac{1}{2} (k-1) V^2 + k \times \frac{P}{\rho} = C_o^2 = \text{const}$$

航空宇宙技術研究所資料270号

昭和50年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
