

UDC 539.4.013:  
620.171.5:  
62-253

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-279

偏心円孔を有する回転円板の応力

(2次元光弾性試験)

松末勝利・米内山 誠  
橋本良作

1975年6月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 偏心円孔を有する回転円板の応力\*

(2次元光弾性試験)

松末勝利\*\* 米内山 誠\*\*\*  
橋本良作\*\*

## 1. まえがき

種々のガスタービン、発電機または超速心機などの回転機械は近年大型化、高速化されており、その使用条件も厳しさを増している。したがって、これら回転体の設計に際して、耐久性向上のためには、その強度に関してより正確な情報が必要となってきた。

従来回転体の強度に関する研究は多数あり、本資料で対象とした多数の偏心円孔を有する回転円板についてもいくつかの解析例<sup>1)~5)</sup>はあるが、それらの研究はいずれも偏心円孔の大きさ、個数、偏心量などが特定の場合であって、しかも、外周に作用する遠心負荷の影響については、検討されていない。

そこで本資料では、このように多数の偏心円孔を有する回転円板の強度を系統的に検討することを目的として、2次元光弾性試験および軟鋼円板を用いた回転試験を行なった。まず光弾性試験では、偏心円孔の大きさ、個数、偏心量および外周に作用する遠心負荷の大きさなどのパラメータがそれぞれ異なる円板を用いて回転試験を行ない、各円板内の応力分布および偏心円孔によって生ずる応力集中率の値などを求め、さらに各パラメータが異なる場合の応力集中の変化を詳細に検討した。そしてその結果を用いて、円孔縁の応力集中を最低にするような各パラメータの選び方を明らかにし、さらに、一般に利用されている有孔無限板の応力集中から類推する方法の回転円板への適用条件についても検討した。

軟鋼円板の回転試験では、2種類の円板を使用して回転中のひずみをスリップリングを介して測定し、光弾性結果と比較した。

本資料は以前著者等が発表した有限要素法による計算結果<sup>6)</sup>をさらに実験によって詳細に検討したものである。

## 2. 試験円板

光弾性実験に使用した試験円板を図1に示す。材料は厚さ6mmのエポキシ板(理研計器製)である。図2に軟鋼円板を示す。この円板をスピテスターで回転して、スリップリングを介して回転中の各部のひずみを計測し、光弾性の結果と比較した。一般に金属を対象としたモデル実験に高分子材料を用いる場合、金属との材料定数の相違が問題とされる。特に本報のように回転体を対象とする場合は、ポアソン比の差がその結果に影響をおよぼすと言われている。事実回転体の応力約合式にはポアソン比を含んでいるので当然その相違は現われるが、その差はせいぜい数%と見なすことができる。本実験で軟鋼円板を用いた理由は以上の材料定数の相違による影響を調べることだけでなく、回転中のひずみをどの程度の精度で計測できるかを検討することを目的としている。

図1および図2に示されている $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_0$ はそれぞれ内半径, 外半径, 偏心円孔の偏心量を示し、 $R_2$ から $R_3$ に至るスリット部は実機におけるブレードをモデル化したもので、 $R_3$ の大きさの変化によるスリット部の重量変化およびスリット間に設けた $6.5\phi$ の円孔に金属片を着脱することによるスリット部の重量変化により、外周に働く遠心応力の大きさを調整するためのものである。以上のように外周に働く遠心応力を得るためにスリット部を設けたが、これによる応力集中も当然生じ、偏心円孔縁の応力への影響が懸念されたが、その影響は外周のごく近傍のみであることが図3より明らかである。従って、外周に働く遠心応力は一様に作用しているとし、

実験に用いた試験円板の寸法は表1に示す。表中 $P$ は次式で表わされる外周に働く無次元化された応力で以下単に遠心応力と呼ぶ。

$$P = (\bar{\sigma}_r)_{R=R_2} / \bar{\sigma}_0$$

ここで、 $(\bar{\sigma}_r)_{R=R_2}$ は外半径 $R_2$ 上に作用する一様な半径応力で、遠心力によって生ずる。また $\bar{\sigma}_0$ は偏心円孔を含まない直径断面上の円周応力の平均値で次式により

\*昭和50年3月13日 受付

\*\*原動機部

\*\*\*都立航空工業高等専門学校(元原動機部)

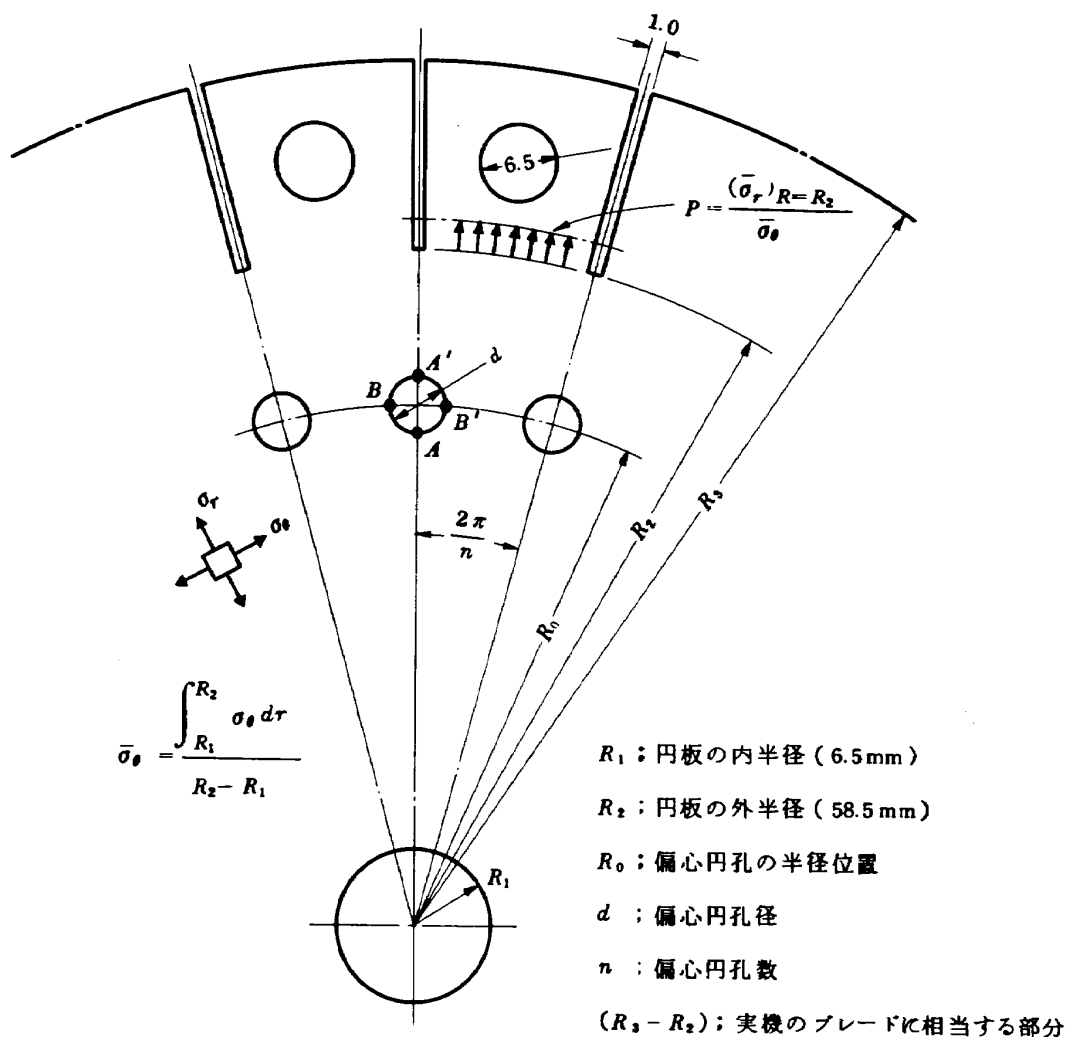


図1 光弾性実験用円板

与えられる。

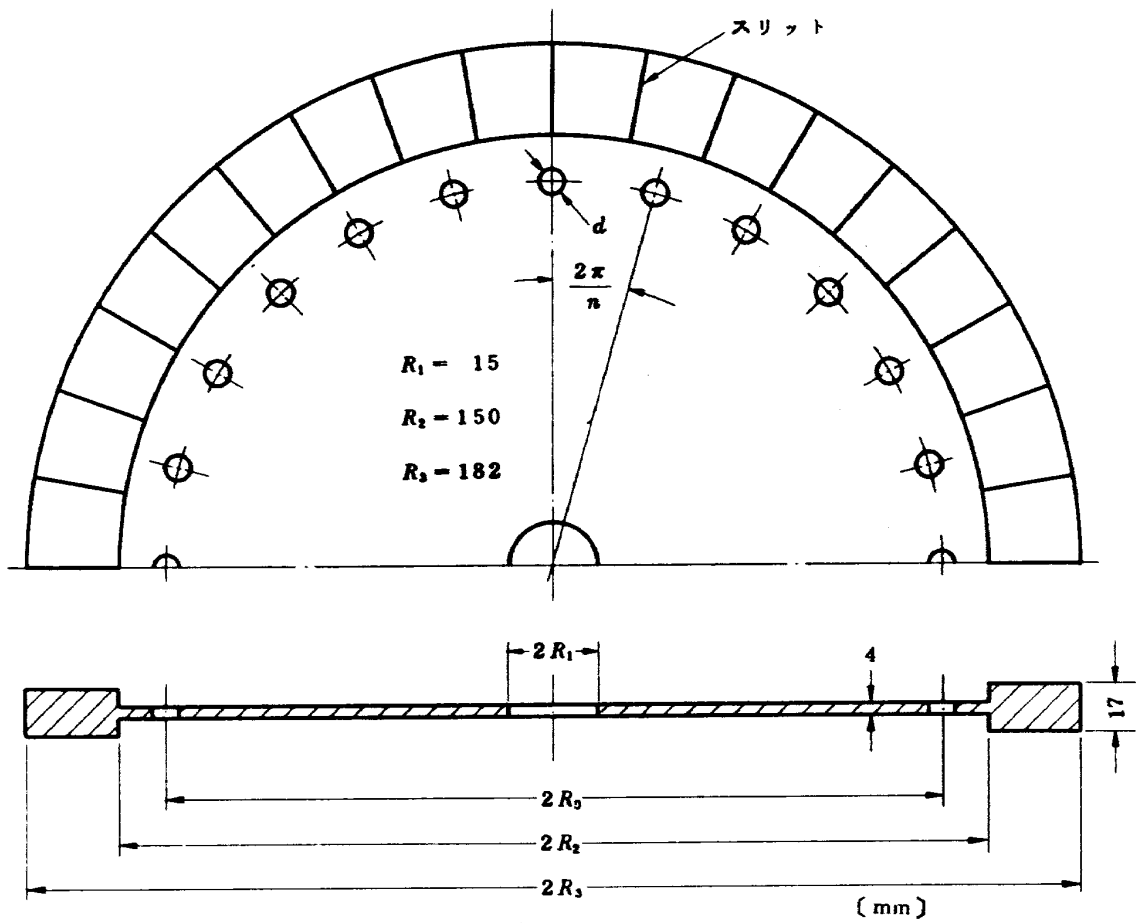
$$\bar{\sigma}_\theta = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta d\tau / (R_2 - R_1)$$

この様に外周に働く遠心応力を無次元化するために  $\bar{\sigma}_\theta$  を用いた理由は、回転体を徐々に回転速度を増加させて破壊に至らせるような静的破壊においては、破壊条件として平均応力説および修正平均応力説<sup>7)</sup>が有力とされているためである。

### 3. 実験装置および方法

光弾性実験には理研計器製の標準型平行光弾性装置 (口径 300 mm) および内部に回転試験装置を設けた三次元応力凍結炉を使用した。凍結炉内部の状況を図4に示す。

応力凍結法による回転試験の場合、回転の安定、試験円板の支持条件、偏心および振動などの影響により応力分布が乱れやすいので回転試験前に、これらの影響について検討する必要がある。本実験では不適切な支持条件のために生ずる拘束による影響と偏心をさけるため、図5に示す支持容器内に無拘束状態で試験円板を置き、回転力は試験円板の自重による摩擦によって伝達するようにした。ここで図における試験円板とゴムとの間のクリアランスは、加熱状態での回転試験中に円板外周が拘束を受けないで、しかも偏心しないようにゴムの厚さを変えることにより調節した。またモータから支持容器への回転力の伝達は糸ドライブ方式を用いて、モータから回転系への振動をシャ断し、回転系の回転による共振については、支持容器と変速用のプーリーの位置を変えることにより共振点を避けることにした。この装置での回



- $R_1$  : 円板の内半径
- $R_2$  : 円板の外半径
- $R_0$  : 偏心円孔の半径位置
- $d$  : 偏心円孔径
- $n$  : 偏心円孔数
- $(R_3 - R_2)$  : 実験のブレードに相当する部分

図2 軟鋼円板

表1 試験円板寸法

	$R_0$ mm	$R_0 / R_2$	$d$ mm	$d / R_2$	$n$	$P = (\sigma_r)_{R=R_2} / \sigma_\theta$	実験点数
エ ボ キ シ	40	0.68	3.5	0.060	3~32	0.37 ~ 0.56	16
	20 ~ 52	0.34 ~ 0.89	3.5	0.060	4, 24	0	14
	30 ~ 52	0.51 ~ 0.89	3.5	0.060	4, 24	0.24, 0.64	12
	25 ~ 52	0.43 ~ 0.89	3.5	0.060	4, 24	0.43	12
	40	0.68	2.5 ~ 6.5	0.043 ~ 0.111	4, 24	0.43	12
軟鋼	134	0.89	9	0.060	4, 24	0.69	2

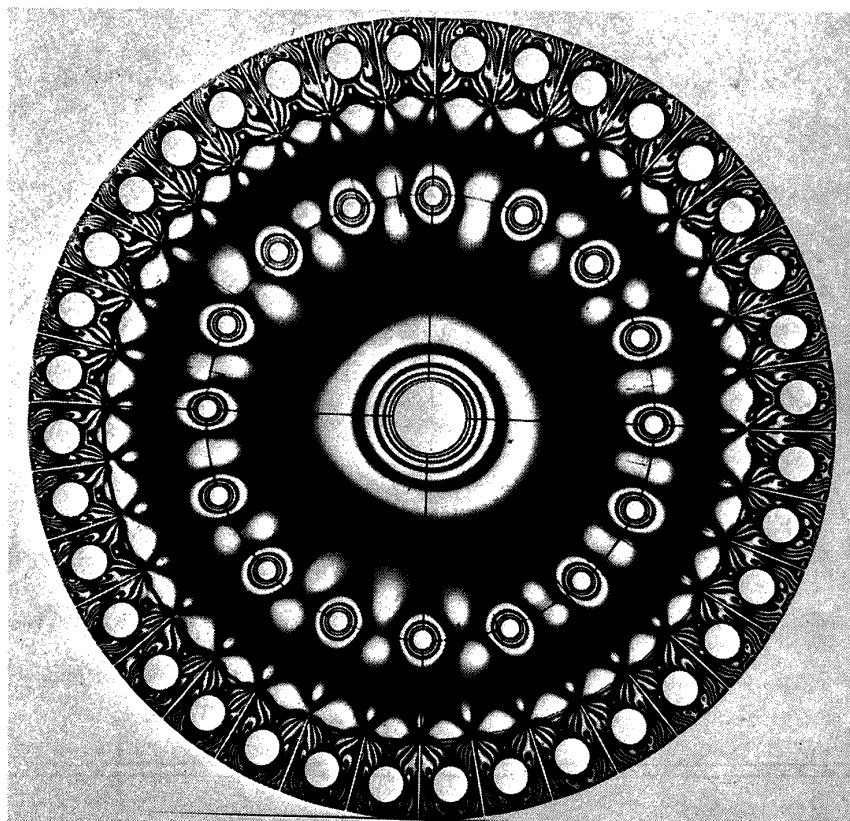


图3 光弹性縞写真(明視野)

$$n = 16, P = 0.56, \frac{d}{R_2} = 0.06$$

$$\frac{R_0}{R_2} = 0.68, \text{ 回転数 } 1520 \text{ r.p.m}$$

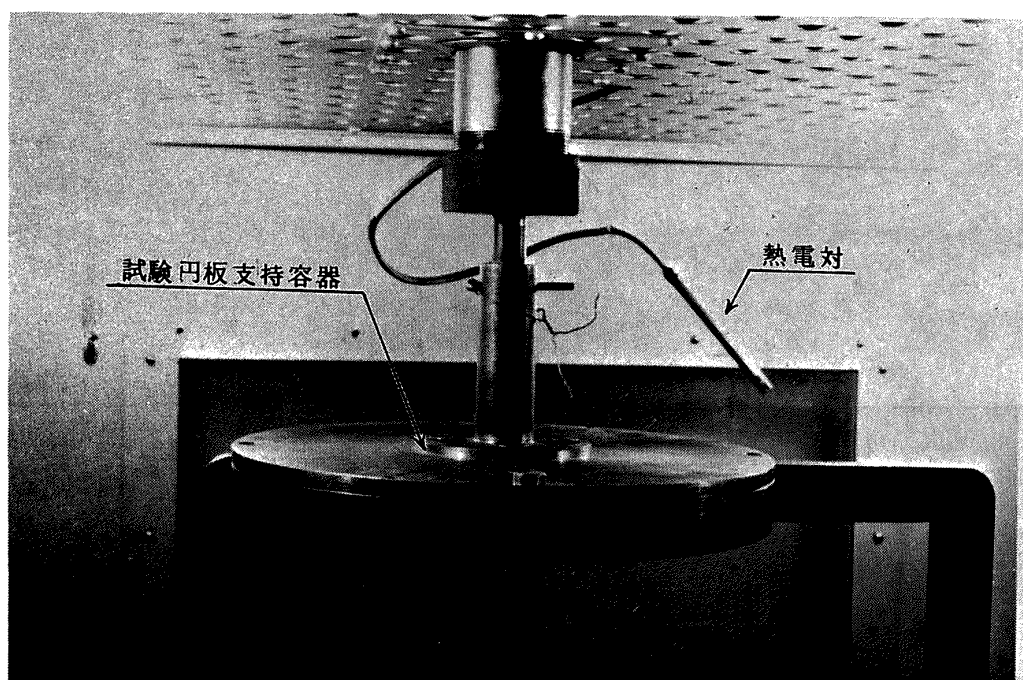


图4 応力凍結炉内部

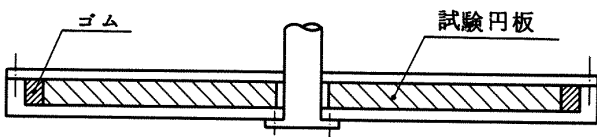


図 5 試験円板支持容器

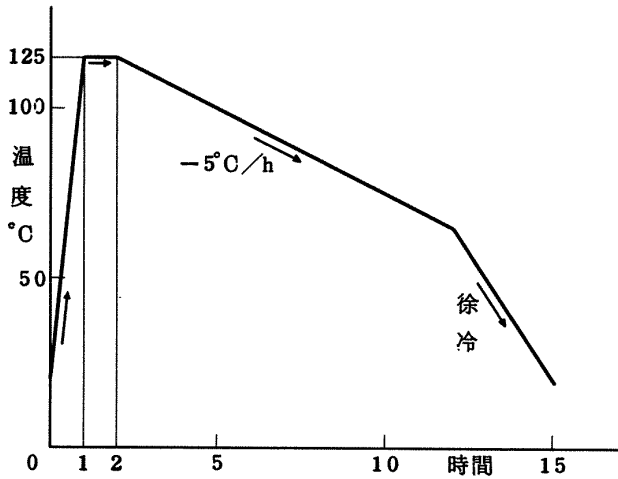


図 6 凍結サイクル

回転数の変動は 15 時間の間で最大 1% 以下であり、凍結サイクルは図 6 に示すように 125°C で 1 時間加熱後毎時 5°C の速度で徐冷する方法である。

縞次数の測定はつい立てに縞模様を投影して読みとり、さらに写真撮影してフィルムから求めた。1 次以下の縞次数については、暗視野および明視野から 0.5 次まで読みとり、それ以下は外挿法により 0.1 次まで求めた。

図 7 は凍結法による縞写真の一例であるが、中心孔付近の縞模様が同心円を示していることから、ほぼ理想的な回転が行なわれていることがわかる。

図 8 (a), (b) はスリップリングを介してのひずみゲージ法による測定部の写真および略図であり、ひずみゲージ接着済みの試験円板を図 8 (c) に示す。

一般に回転中のひずみ測定は、雑音、振動などの理由によるひずみ計指針の安定性および零点の移動などが問題となるが、本実験では、回転数は 4000 r.p.m と低く、1 点を測定するために要する時間は 5 分間と比較的短時間だったせいもあり、ひずみ計指針のふらつき、零点の移動共土  $3 \times 10^{-6}$  以下であり、非常に安定していた。

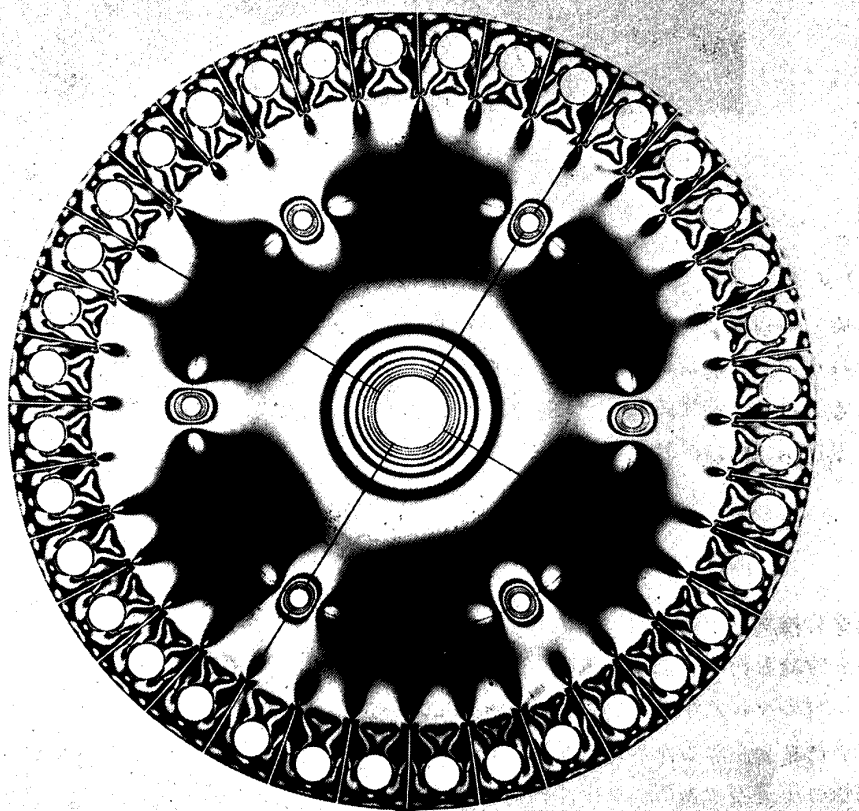


図 7 光弾性縞写真 ( 明視野 )

$$n = 6, P = 0.37, \frac{d}{R_2} = 0.06$$

$$\frac{R_0}{R_2} = 0.68, \text{ 回転数 } 2280 \text{ r.p.m}$$

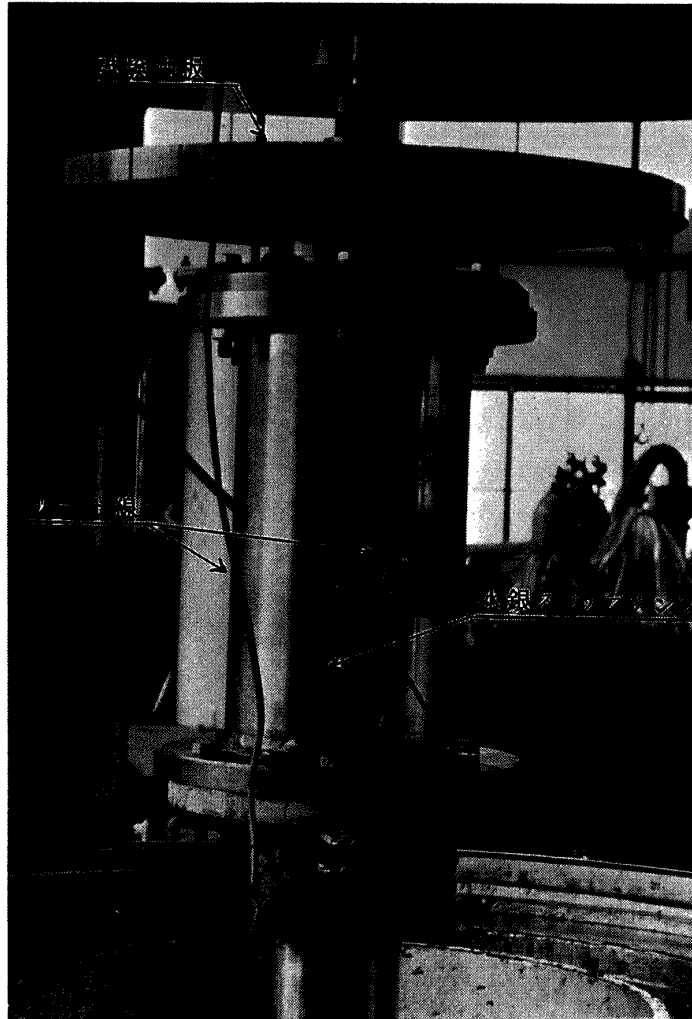


図 8(a) 試験円板取付状況

図 9 はスリップリングによる、回転中のひずめ計測の精度を検討するため、偏心円孔のない中空円板を用いて同様の回転実験を行ない、測定結果と理論解との比較を行なったものである。両者は非常に良く一致している。本実験にはスイス Vibro Meter 社製の水銀スリップリングを使用した。

#### 4. 実験結果

##### 4.1 光弾性感度の検定

応力凍結法により実験を行なう場合、凍結温度 (125 °C) では、エポキシ材のヤング率は著しく低下し、変形が大きくなるので、感度を求めるために通常行なわれている 4 点曲げの方法は不適當である。また小円板の直径方向の圧縮実験から求める方法もあるが、この方法も小円板を試験円板と同一材から、切り出したとしても試験円板とは実験条件が異なる。本実験では試験円板の中心円孔縁の応力は偏心円孔に影響されないことが確認できたので、応力勾配、縞模様などの条件がほぼ等しい中心

円孔縁の応力から光弾性感度を求めることにした。その際、回転による内・外半径の変化を考慮し、それらの寸法は凍結後測定することにした。

そのようにして求めた光弾性感度  $F$  は次式で示される。

$$F = \frac{N_{R_1}}{(\sigma_\theta)_{R=R_1} \cdot t}$$

$$= \frac{N_{R_1}}{\left\{ \frac{2\bar{\sigma}_{R_2} \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left( R_2^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} R_1^2 \right) \right\} \cdot t}$$

(mm/kg)

ただし、

$N_{R_1}$  ; 試験円板の中心孔縁における縞次数

$(\sigma_\theta)_{R=R_1}$  ; 試験円板の中心孔縁における円周応力

$\bar{\sigma}_{R_2}$  ; 試験円板の外周部における半径応力

$R_1, R_2$  ; 凍結後の内、外半径

$\nu$  ; 凍結時のポアソン比

$t$  ; 凍結後の円板の厚さ

$\rho$  ; 円板の密度

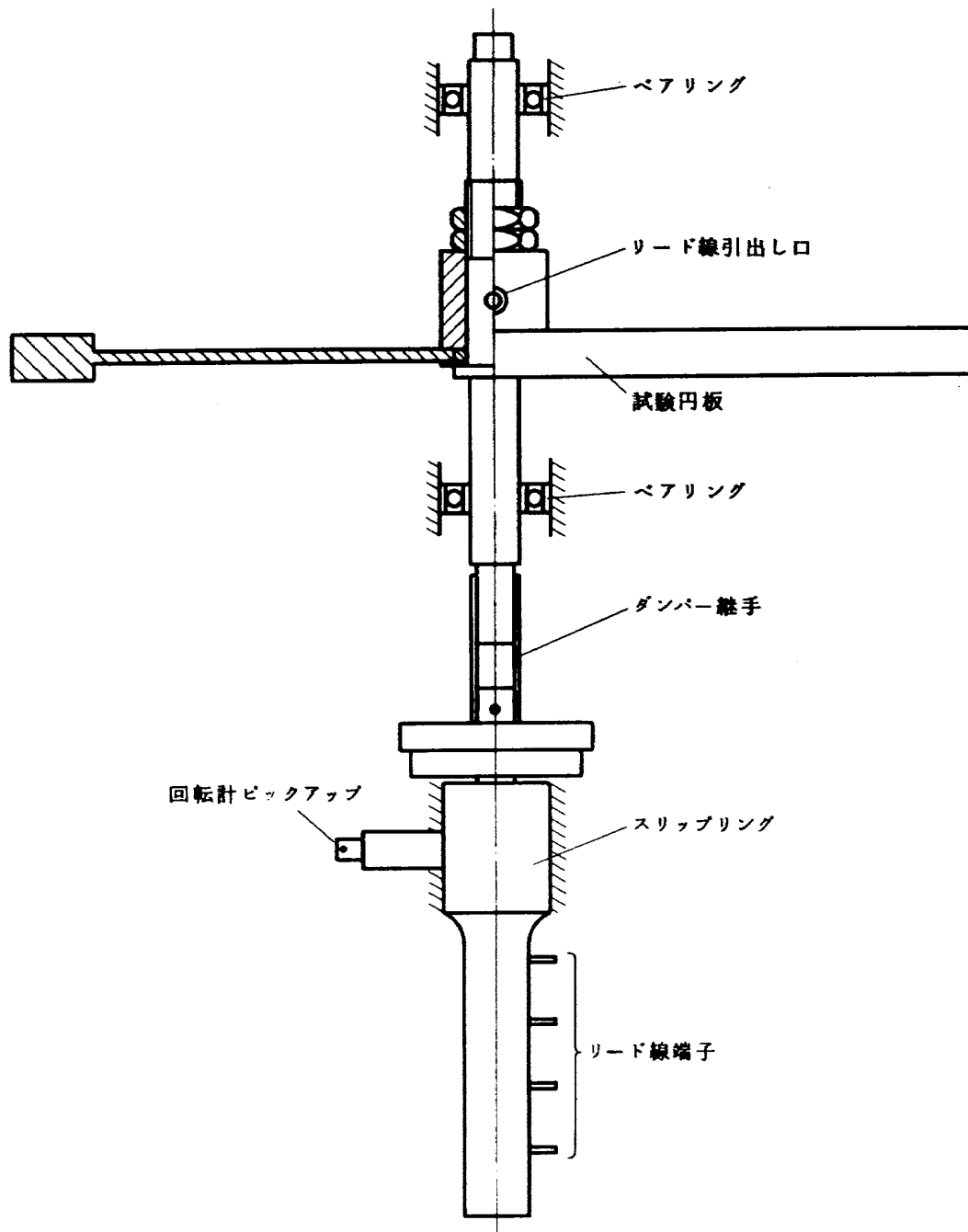


図8(b) 試験円板とスリップリングの取付概略図

$\omega$  ; 円板の角速度

以上の方法で得られた光弾性感度の平均値は 39.3(mm/kg)であった。

#### 4.2 円板の応力分布

偏心円孔をもつ回転円板について、円孔縁の応力 $\sigma$ を表わす場合、円孔がない場合の円孔中心に相当する点の円周応力 $\sigma_0(=(\sigma_\theta)_{R=R_0})$ を基準応力として応力集中度 $\sigma/\sigma_0$ として表わすことにした。また、寸法の異なる円

板に対しても適用できるように円孔の直径 $d$ 、偏心量 $R_0$ についてもそれぞれ外半径 $R_2$ との比 $d/R_2, R_0/R_2$ で表わし、無次元化することにした。図10は偏心円孔数 $n=24$ 、偏心量 $R_0/R_2=0.68$ 、外周に作用する遠心応力 $P=0.37$ 、偏心円孔径 $d/R_2=0.06$ の円板について描いた偏心円孔中心を通る断面の応力分布である。また、同図における実線は偏心円孔のない場合の計算値である。光弾性実験法では、等色縞模様から主応力差 $(\sigma_1$



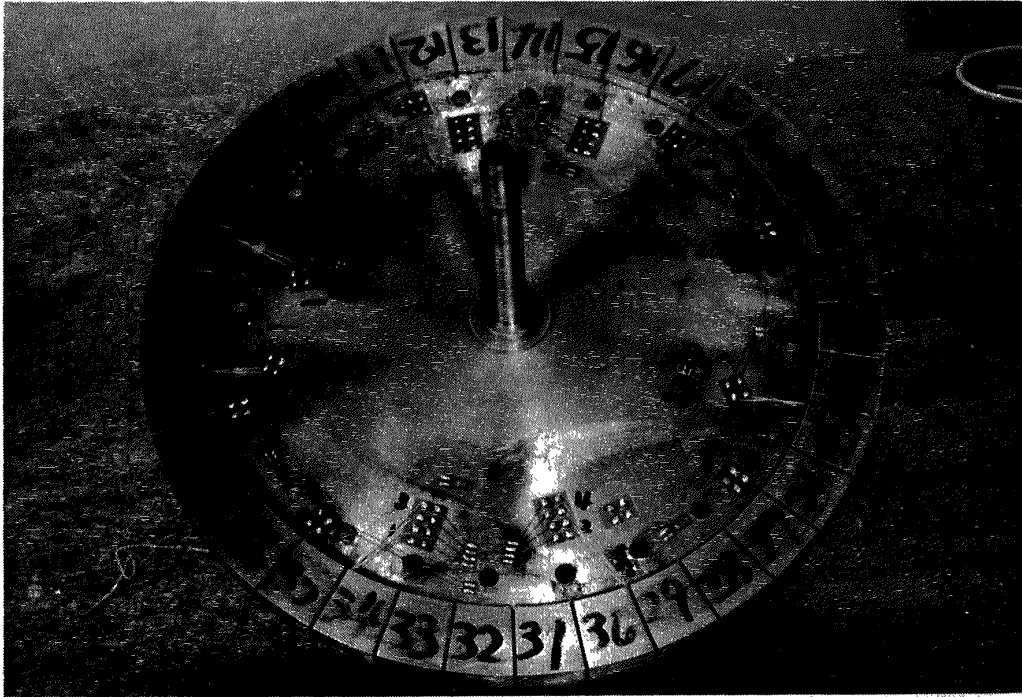


図 8(c) 軟鋼試験円板

表 2 スリップリングの主な仕様

使用回転数	0 ~ 30,000 r.p.m
チャンネル数	4
使用温度範囲	-25°C ~ 50°C
負荷容量	各チャンネル 0.5 A, 60 V
絶縁抵抗	10,000 MΩ
接触抵抗	0.1 mΩ
熱起電力	2 μV 以下

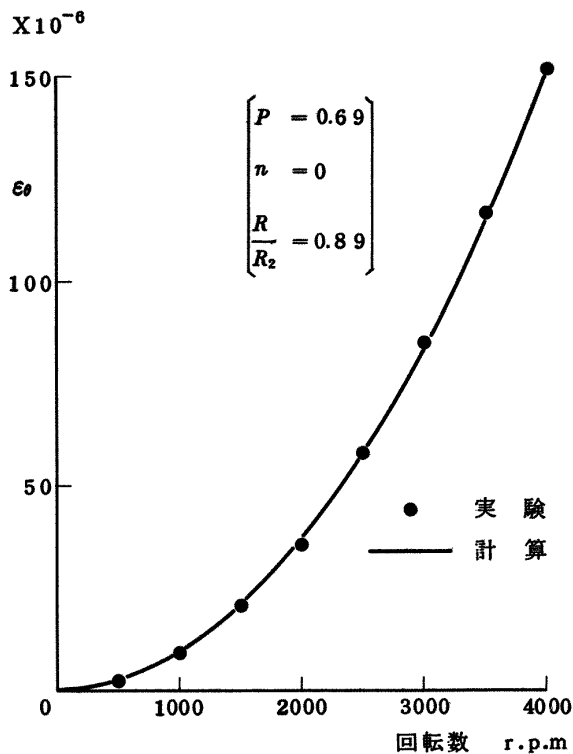


図 9 中空円板のひずみ実測値と計算値との比較

$-\sigma_2$ ), 等傾線図から主応力の傾きが求まるが,  $\sigma_1, \sigma_2$  は直ちに求めることはできない。本研究では, 円周応力  $\sigma_\theta$  と半径応力  $\sigma_r$  を求めるために最も一般的な方法である Frocht の Shear Difference Method<sup>8)</sup>を用いた。

偏心円孔の影響は, 有孔無限板の場合と同様に局部的性質を持ち, 円孔から離れるにしたがってその影響は急速になくなり, 円孔半径の 6 倍離れた個所では円孔の影響は無視できる。このことから, 後述の Saint-Venant の原理を適用した近似解は円孔の径が小さくなるにしたがって精度を増すことが理解できる。

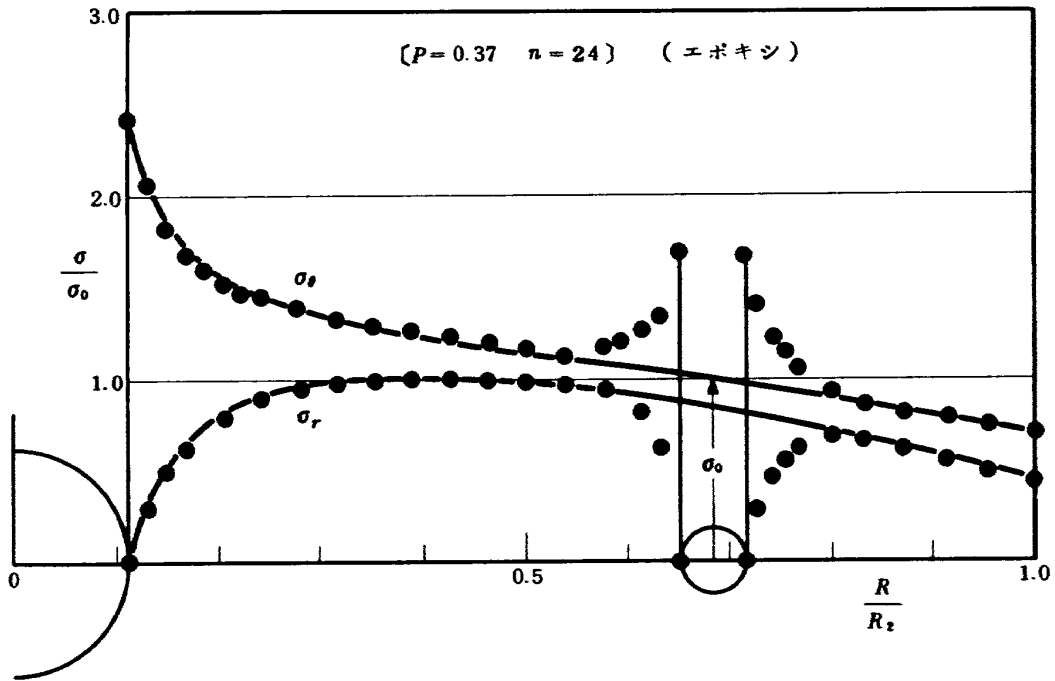


図10 光弾性凍結法による応力分布

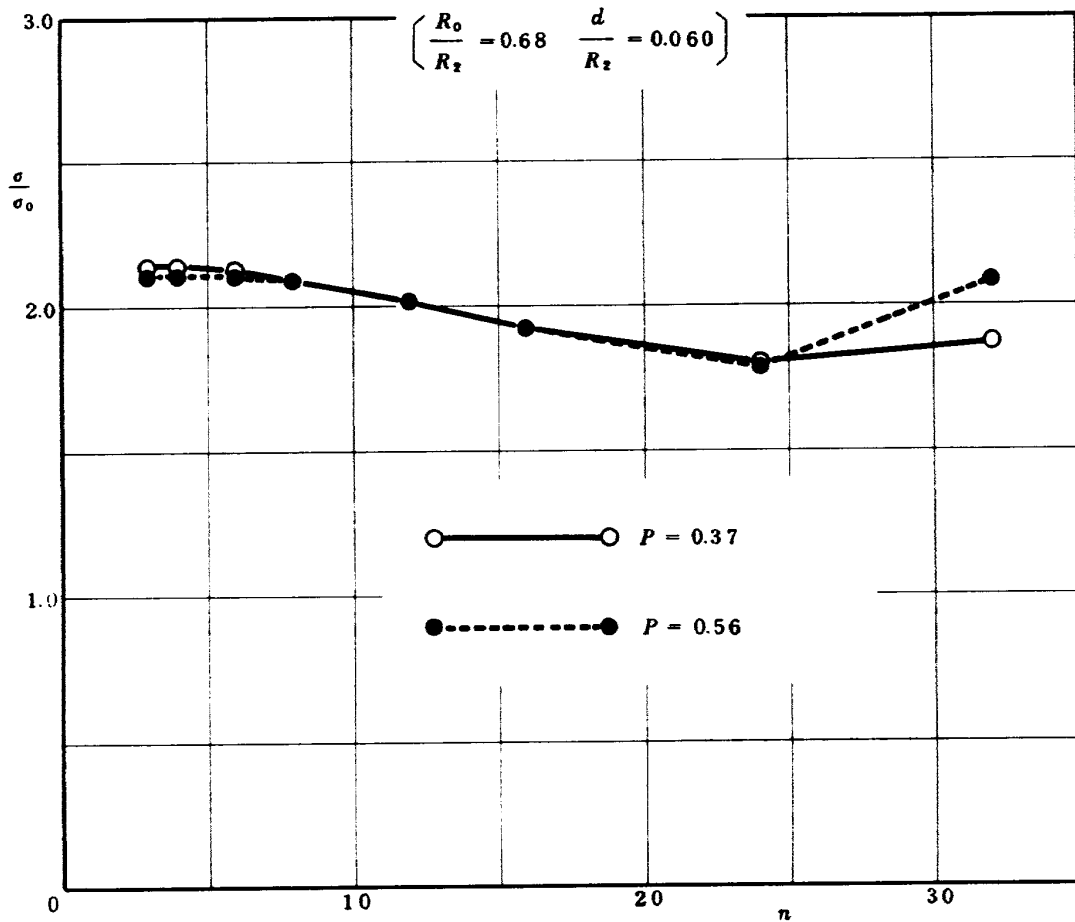


図11 偏心円孔縁の応力集中率と円孔個数との関係

以下の項では、偏心円孔縁の応力集中に影響をおよぼすパラメータとして、円孔の個数、偏心量、大きさ、および外周に作用する遠心応力などをとりあげ、それぞれのパラメータが変化した場合の応力集中への影響について、詳細に検討する。

#### 4.2.1 偏心円孔の数による影響

円板内の偏心円孔の個数が異なる場合、偏心円孔縁の応力集中は変化するが、特に、偏心円孔の個数が多くなると、隣接円孔の影響を受けて、その値は微妙な変化をする。この変化の様子を検討するために、偏心円孔の偏心量  $R_0/R_2$  および直径  $d/R_2$  をそれぞれ一定とし、外周に作用する遠心応力  $P$  をパラメータとして、偏心円孔部の応力集中率と、偏心円孔の個数との関係を図11に示す。この場合、偏心円孔の偏心量が一定であるから、外周に働く遠心応力が一定の場合には、 $\sigma_0$  も一定となり、この場合の応力集中率の変化は、そのまま偏心円孔縁の最大応力値の変化に相当する。この図から偏心円孔の個数が3~8程度までは応力集中率はほぼ一定値をとり、それ以上では個数  $n$  の増加とともに応力集中率は低下し、 $n=24$  付近で極小値をとり、個数がそれ以上増すと上昇していることがわかる。また外周に働く遠心応力  $P$  の増加は、極値をグラフの原点の方へ移動させる傾向を示す。このように応力集中率が極小値をとることについての定性的な説明は次のようになる。

円孔数が変化することにより、同時に変化する量として、互いに隣り合う円孔間の距離が考えられる。また外周に働く遠心応力  $P$  の変化は、中心孔縁をのぞく円板内のそれぞれの点の半径応力と円周応力との比を変化させている。つまり、円孔数  $n$  の増加及び外周に働く遠心応力  $P$  の増加は半径応力と円周応力との比  $\sigma_r/\sigma_\theta$  の増加と考えてよい。

さて、図12は1つの円孔を持つ無限板に互いに垂直な応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  が無限遠に作用した場合の円孔縁の応力集中の説明図であるが、この場合、同図(b)に示すように  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  のうち一方が零のとき、応力集中率が最大の3になり、双方が等しいときには、応力集中率は最低の2をとり、円孔縁の応力は全ての点で等しくなる。図13は、 $P=0.56$ ,  $R_0/R_2=0.68$ ,  $d/R_2=0.060$  で偏心円孔数が変化した場合の偏心円孔縁の応力分布を示している。また、図14は同じ結果を用いて、偏心円孔縁の3点(A, A', B点)のそれぞれの応力変化を示したものである。それらの光弾性写真は、図15(a), (b), (c)に示す。これらの図から、1) 偏心円孔数が少ないとき、各点の応力の大小関係は  $\sigma_A > \sigma_{A'} > \sigma_B$  であったが、個数が32では、いかえると、2) 個数が非常に多いとき、 $\sigma_A < \sigma_{A'} < \sigma_B$  となっている。そして、1)と2)の間には、図12の  $n=24$  および光弾性編写真図14(b)にみられるように、偏心円孔縁の3点の応力が、ほぼ同一

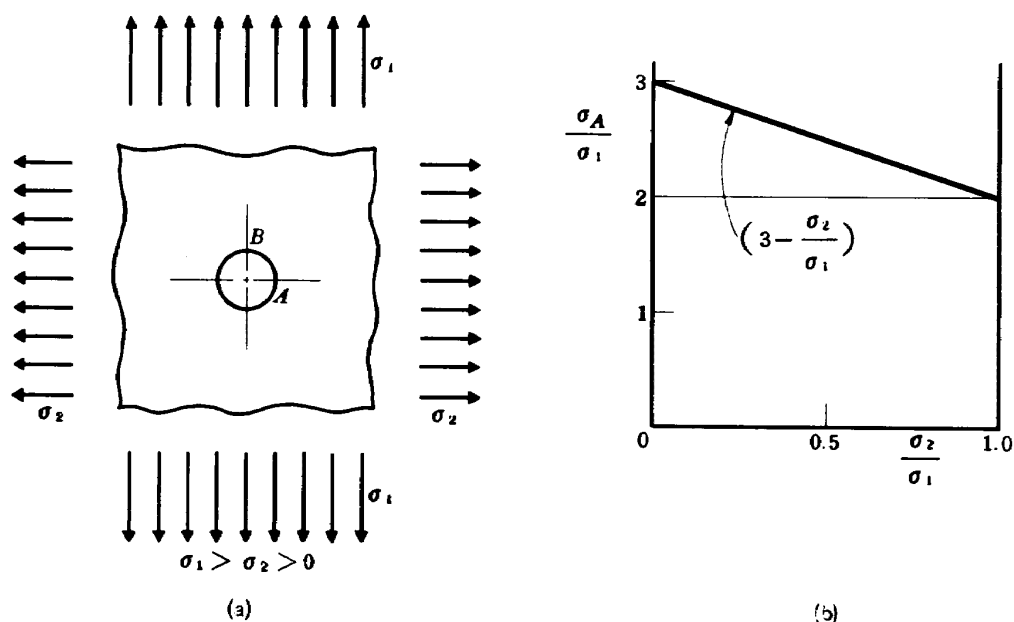


図12 有孔無限板の2軸引張りにおける円孔縁の応力集中

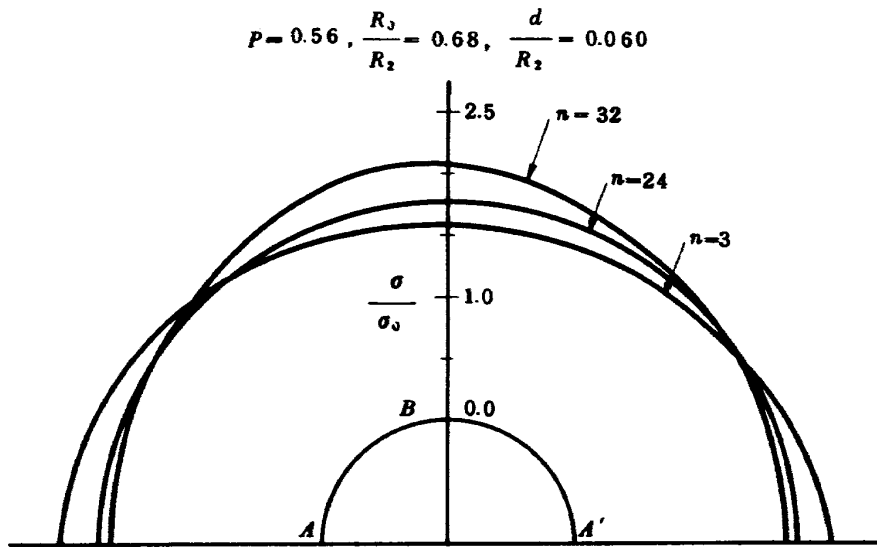


図 13 偏心円孔縁の応力分布（円孔数  $n$  が変化する場合）

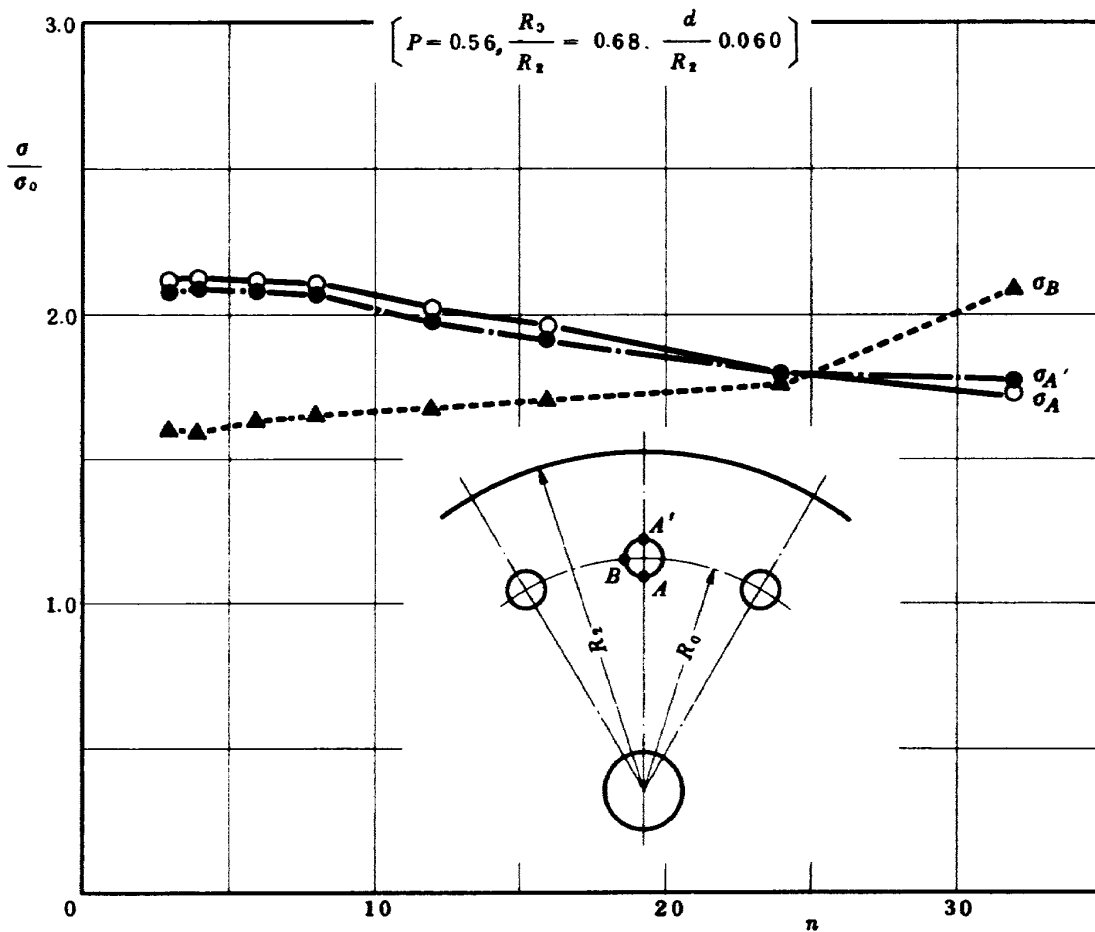


図 14 偏心円孔の個数と円孔縁の応力との関係

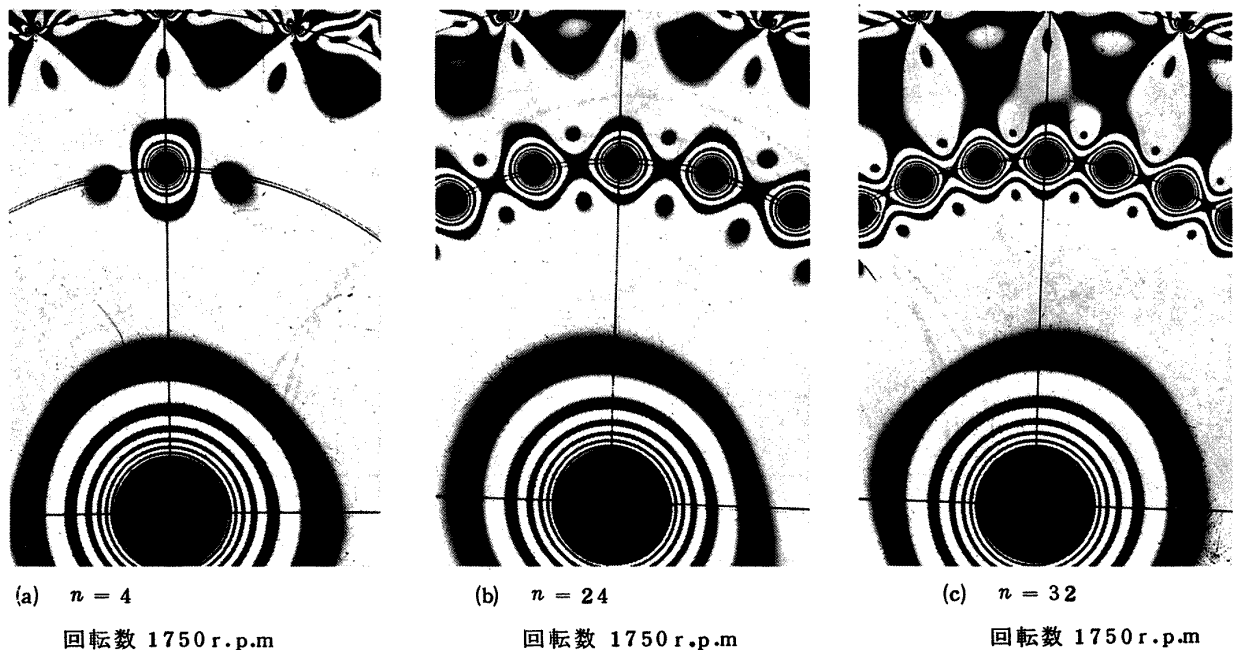


図 15 光弾性縞写真 ( 偏心円孔の個数が異なる場合 )

$$\left( \frac{d}{R_2} = 0.06, \frac{R_0}{R_2} = 0.68, P = 0.56 \right)$$

の値になる場合があり、応力集中率が極小値をとる個数と一致している。以上の事柄から、 $\sigma_r/\sigma_\theta$  の変化により偏心円孔縁各点の応力が等しくなる付近で応力集中率の極小値をもつことは容易に理解できる。また、外周に働く遠心応力  $P$  の増加による極小値の原点側への移動についても、 $\sigma_r/\sigma_\theta$  の変化を考慮すれば理解できる。

#### 4.2.2 偏心円孔の偏心量による影響

偏心円孔の偏心量が異なる場合、円孔縁の応力集中率がどのように変化するかを調べるために、偏心円孔数が少数の例として  $n = 4$ 、多数の例として、 $n = 24$  の 2 つの場合について実験を行った。この場合、基準応力が円孔の偏心量によって異なるため、応力集中率の変化は、必ずしも円孔縁の最大応力の変化を示してはいない。

まず、 $n = 4$  の場合については、図 16 に示すような結果が得られた。この図から偏心量  $R_0/R_2$  の変化は、応力集中率の変化に極値をもたらししていることがわかる。

この様に、円孔数が少なく、隣接円孔間距離および内、外周からの距離が円孔径に比較して大きい場合には、有孔無限板の厳密解を利用し Saint-Venant の原理を適用した近似計算法<sup>9)</sup> が一般に用いられている。そして、この原理の適用可能な条件としては、1) 偏心円孔の寸法が比較的小径であること、2) 偏心円孔の個数が少ないこ

と、3) 偏心円孔による応力状態の攪乱の範囲が半径応力および円周応力の一様な範囲内であること、この三つの条件を満たす必要がある。この条件を満足すれば、本報の場合も 1 つの円孔を持つ無限板に互に垂直な応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  が無限遠に作用している場合の問題に帰すから、偏心円孔がない場合の円孔中心に相当する円周応力および半径応力をそれぞれ無限板の  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  に代入して求めることができる。この原理を適用して行なったものを図 16 中に実線および破線でしめす。図から明らかなように、この近似計算は外周に働く遠心応力  $P = 0.43$  の場合は非常によい一致を示しているが、 $P = 0$  の場合には定性的には合うが定量的な一致は見られない。このことは  $P = 0$  と  $P = 0.43$  では  $d(\sigma_r/\sigma_\theta)/dR$  の大きさが異なるため、 $P = 0$  の場合は  $d(\sigma_r/\sigma_\theta)/dR$  が大きく前記 3 条件のうち 3) を満足してないためである。

図 17 は偏心円孔数  $n = 24$  の場合における円孔の偏心量による影響を示したものである。この場合にも応力集中率は極小値を持ち、その値は 2 以下であり外周に働く遠心応力  $P$  が変わってもその大きさはほぼ等しい。また外周に働く遠心応力  $P$  の増加は  $n = 4$  の場合と同様に極小点を偏心量を増す側に移動させる。

つぎに、応力集中率の変化のメカニズムを調べるため

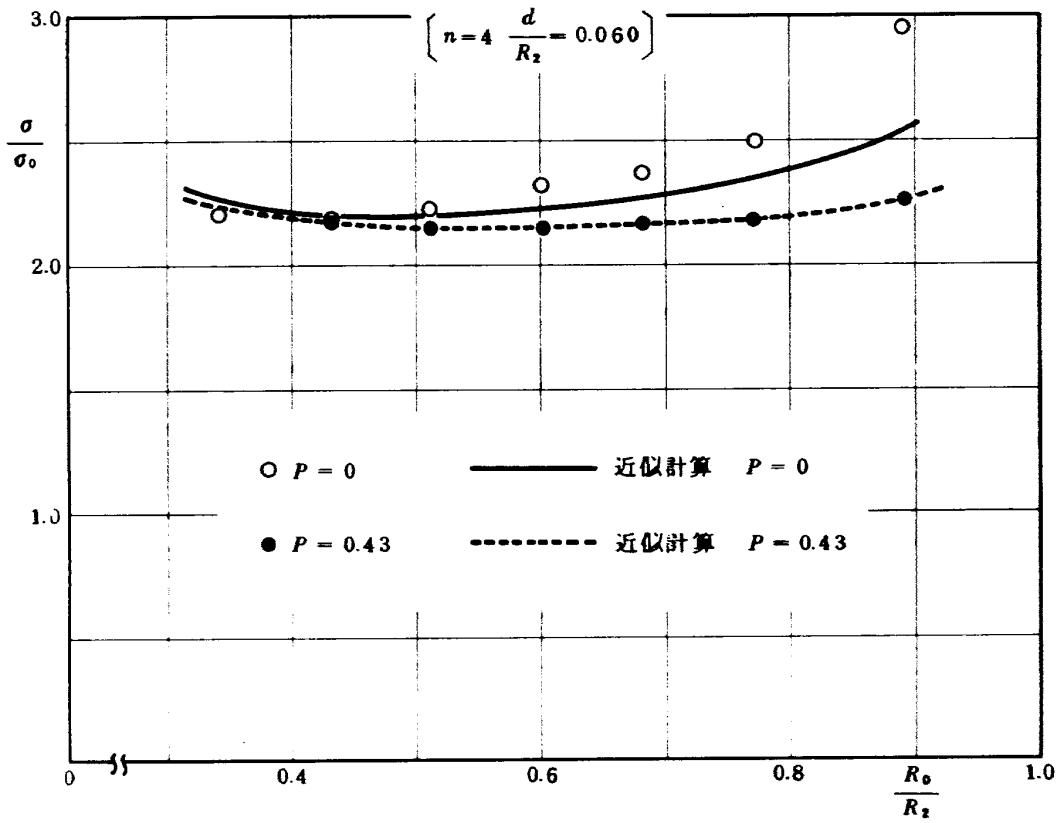


図 16 偏心円孔の偏心量と円孔縁の応力集中率との関係

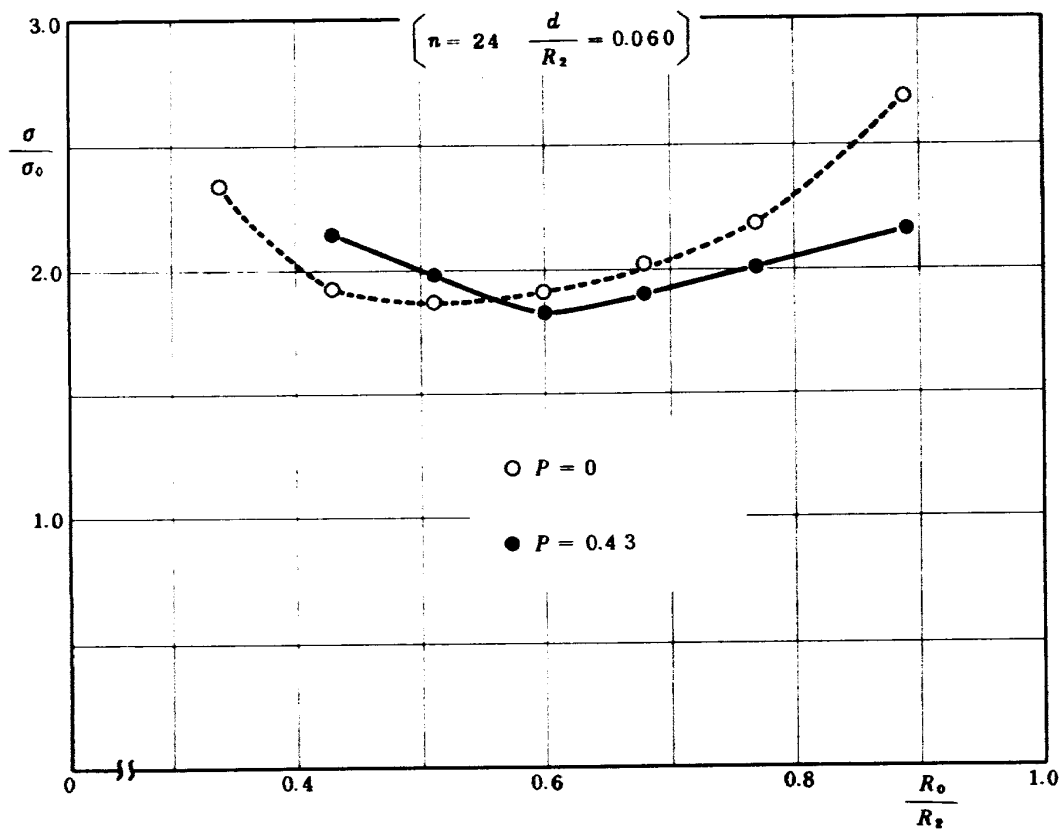


図 17 偏心円孔の偏心量と円孔縁の応力集中率との関係

$$n=24, P=0, \frac{d}{R_2}=0.060$$

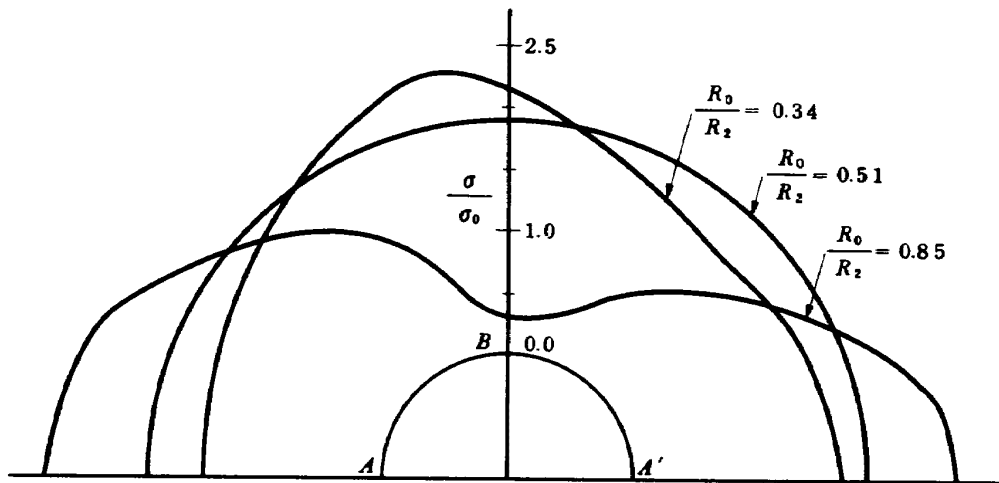


図 18(a) 偏心円孔縁の応力分布 ( 偏心量  $\frac{R_0}{R_2}$  が変化する場合 )

$$n=24, P=0.43, \frac{d}{R_2}=0.060$$

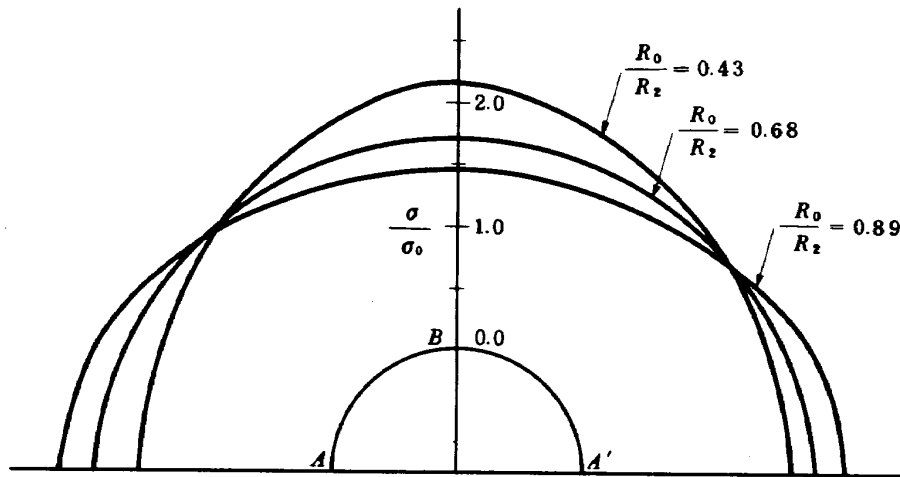


図 18(b) 偏心円孔縁の応力分布 ( 偏心量  $\frac{R_0}{R_2}$  が変化する場合 )

に、偏心円孔縁の応力分布の変化について検討する。図 18 (a), (b) はそれぞれ、外周に働く遠心応力  $P$  が零および 0.43 の場合における偏心円孔数および大きさを一定として、偏心量が異なる場合の円孔縁の応力分布を示したものである。(a), (b)とも偏心量  $R_0/R_2$  により円孔縁応力がほぼ等しくなる位置があり、その位置は前項の個数を変えた場合と同様、応力集中率を極小にする偏心量と一致する。これらの定性的説明は前項で述べた説明と同様である。なお図 19 は  $P=0.43, n=24, d/R_2=0.060$  の場合  $A, A', B$  点における応力の変化を示すグ

ラフであり、図 20 (a), (b), (c) は対応する光弾性縮写真である。

#### 4.2.3 偏心円孔の大きさによる影響

図 21 は偏心円孔縁の応力集中率はその大きさによりどのような変化を示すかを調べるために、偏心量および外周に働く遠心応力を一定とし、個数  $n$  をパラメータとして縦軸に応力集中率、横軸に無次元化された円孔の大きさにより示したグラフである。この場合は、 $P, R_0/R_2$  が定数となるため基準応力も一定の値となる、それゆえ、応力集中率の変化は最大応力の変化と同一である。

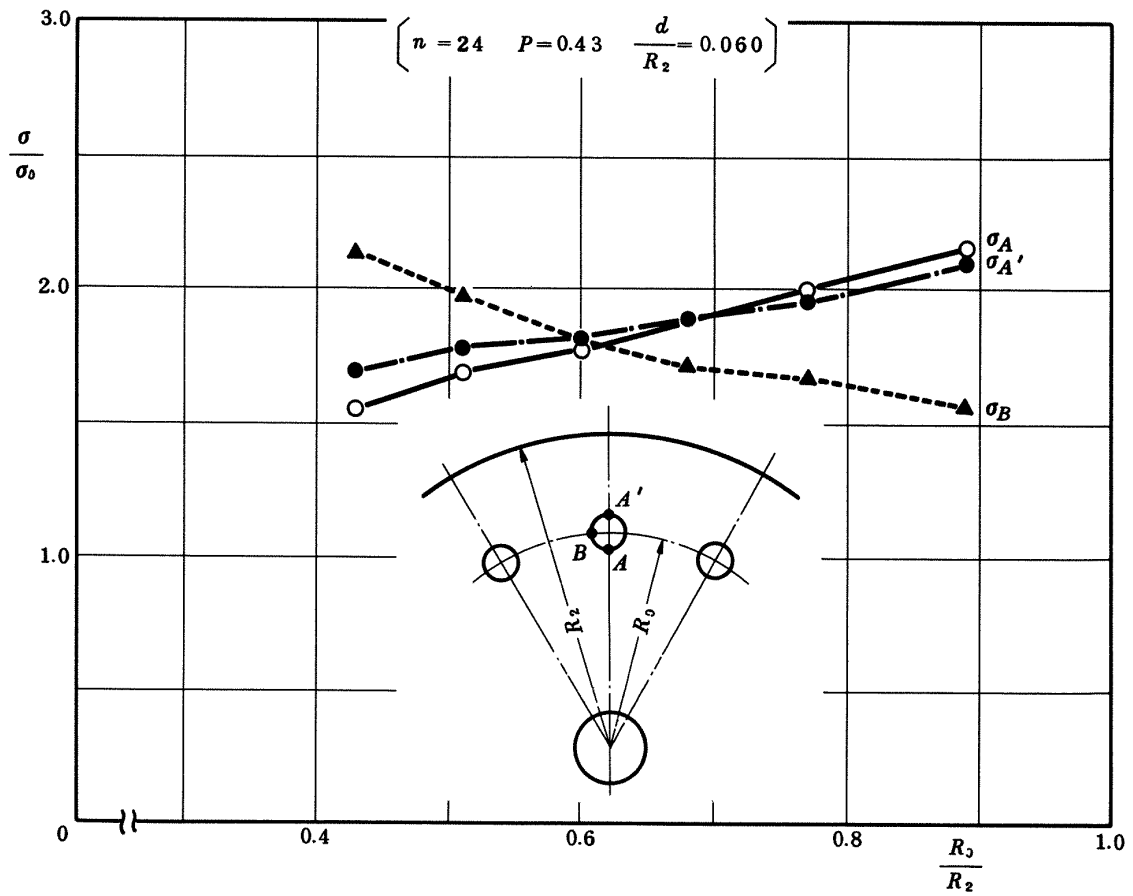


図 19 偏心円孔の偏心量と円孔縁の応力との関係

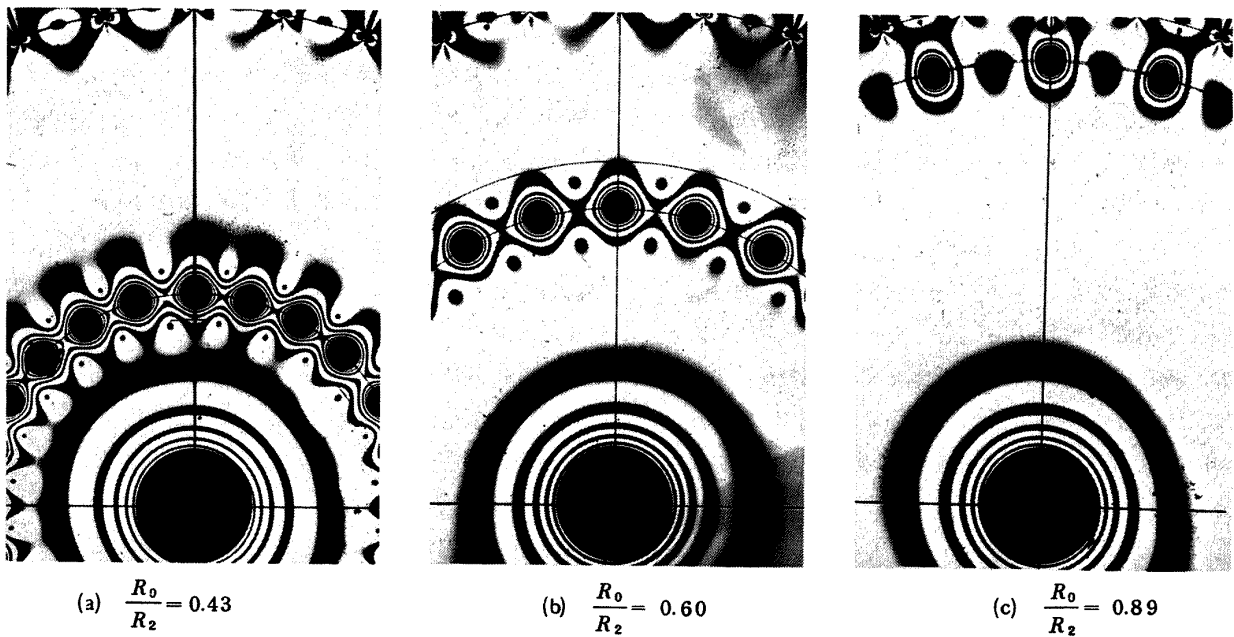


図 20 光弾性縞写真（円孔の偏心量が異なる場合）

$\left( n = 24, \frac{d}{R_2} = 0.06, P = 0.43, \text{回転数 } 1750 \text{ r.p.m} \right)$



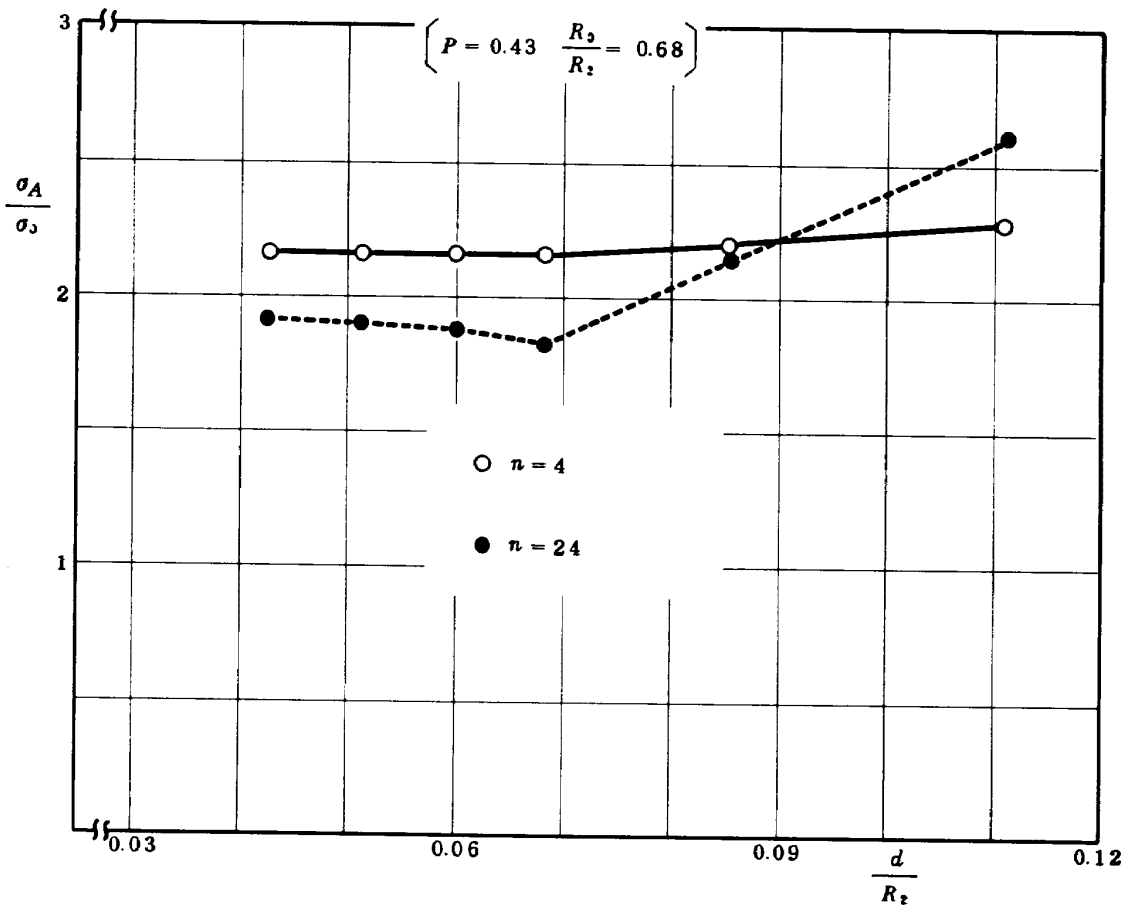


図 21 偏心円孔の大きさと応力集中率との関係

個数  $n = 4$  の場合には  $d/R_2 = 0.07$  程度まで、応力集中率は一定の値を示し、その大きさは Saint-Venant の原理適用による近似計算値と一致するが、それ以上では直径の増加とともに応力集中率も増す。これは応力集中率を表わす際に基準応力として、円孔のない場合の円孔中心に相当する点の応力を用いたためである。

また、このことは、直径を一定とし、円孔の偏心量、個数および外周に作用する遠心応力などをパラメータとして偏心円孔縁の応力集中の変化を実験的に検討する場合には、応力集中率が直径に無関係な範囲、つまり  $d/R_2 = 0.07$  以下の直径の円孔を選ぶならば、我々が便宜的に採用した基準応力をもとにして、応力集中の変化を検討してよいことになる。

個数が 24 個の場合には、直径の変化により生ずる隣接円孔間の距離の変化が無視できなくなり、個数を変えた場合と同様に応力集中率は極値を取り、その値も同様に 2 以下となる。図 22 は偏心円孔数、外周に働く遠心応力および偏心量を一定とし、偏心円孔の直径を変えた場合の A, A', B 点の応力の変化を示している。また、

図 23 (a), (b), (c) はそれぞれ、 $d/R_2 = 0.043, 0.068, 0.111$  の場合の光弾性縞写真である。各点の応力の大小関係は  $d/R_2 = 0.043$  のときは  $\sigma_A > \sigma_{A'} > \sigma_B$  であるが  $d/R_2 = 0.111$  では  $\sigma_A < \sigma_{A'} < \sigma_B$  とそれらの関係が逆になる。また、 $d/R_2 = 0.068$  でそれら各点の応力の大きさはほぼ等しくなっている。図 24 は円孔縁の応力分布を示す。それらの定性的説明は 4.2.1 の個数を変えた場合の説明と同様である。

#### 4.2.4 外周に働く遠心応力 P による影響

図 25 は偏心円孔が少数 ( $n = 4$ ) の場合の応力集中率と外周に作用する遠心応力 P との関係を示す。この場合には、偏心円孔の偏心量が一定であるから、外周に作用する遠心応力が異なれば基準応力も変化する。したがって応力集中率の変化は偏心円孔縁の最大応力の変化と一致しない。同図では、P の増加とともに応力集中率が低下している。その定性的な説明を以下に述べる。

図 26 に示す偏心円孔をもたない回転円板において、P の増加は半径応力と円周応力との比 ( $\sigma_r/\sigma_\theta$ ) を増加させ、逆に、 $d(\sigma_r/\sigma_\theta)/dR$  の絶対値は減少する。つ

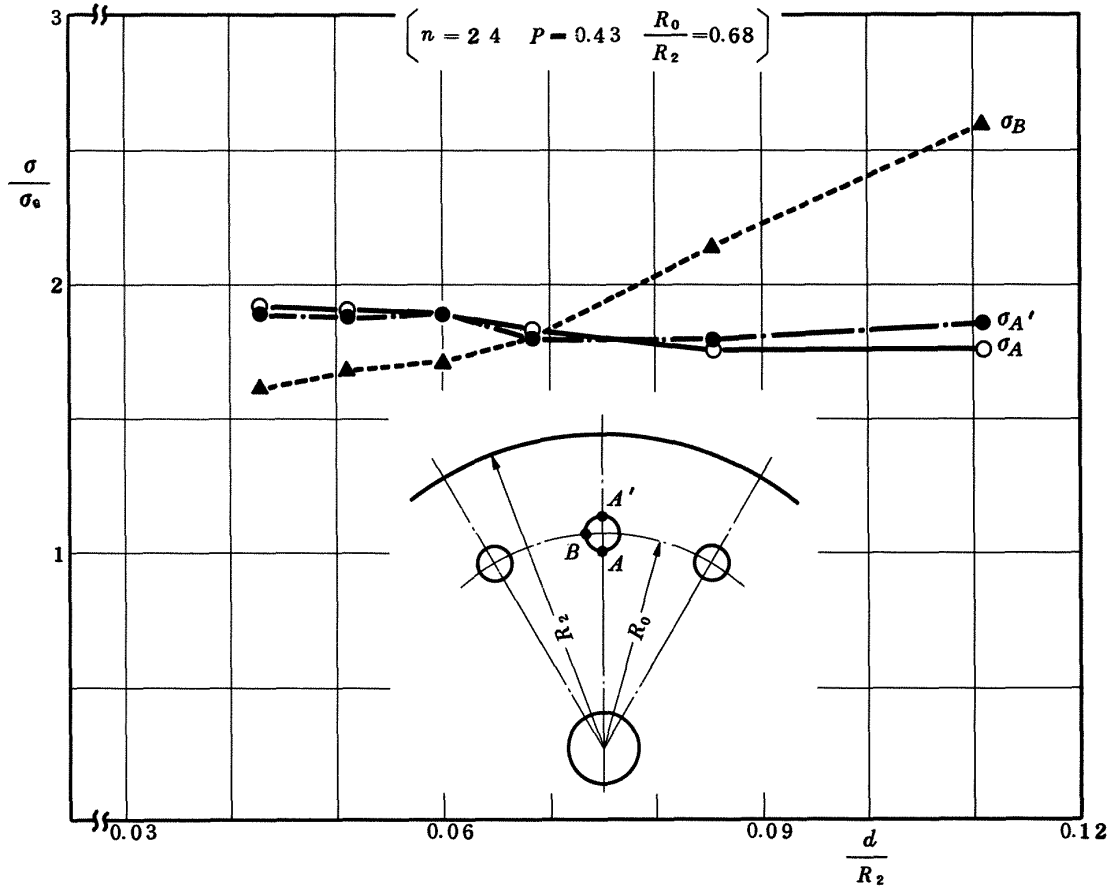


図 22 偏心円孔の偏心量と円孔縁の応力との関係

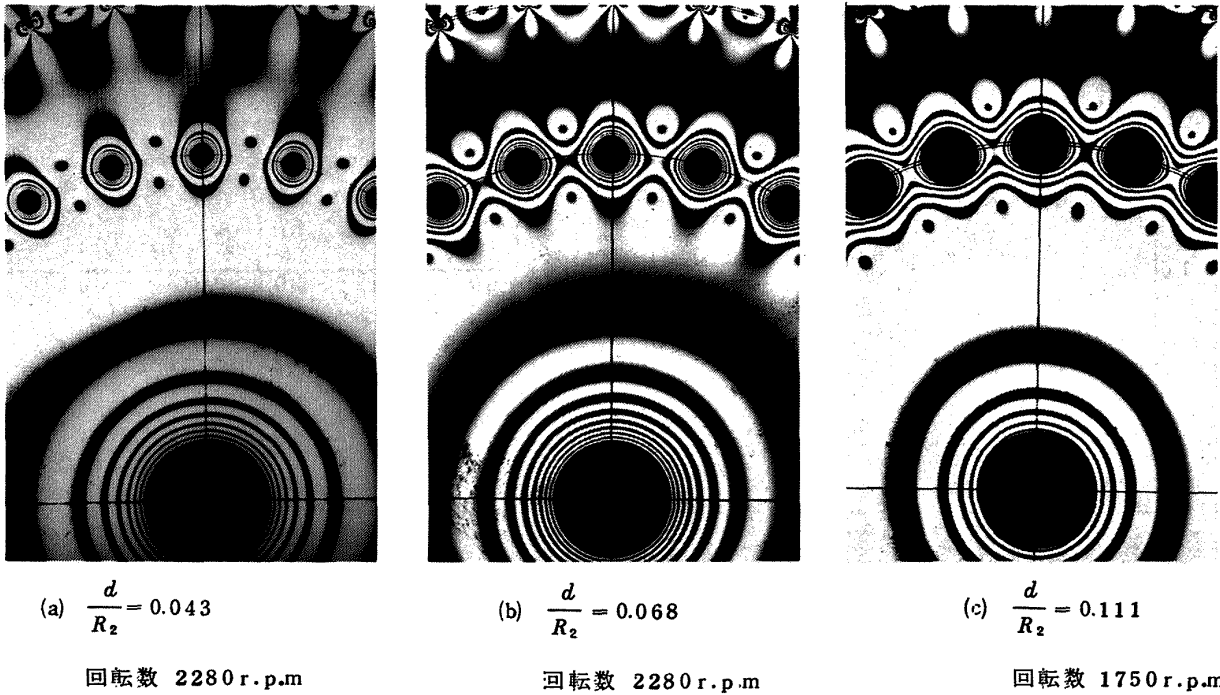


図 23 光弾性縞写真（円孔の大きさが異なる場合）

$$\left( n = 24, \frac{R_0}{R_2} = 0.68, P = 0.43 \right)$$

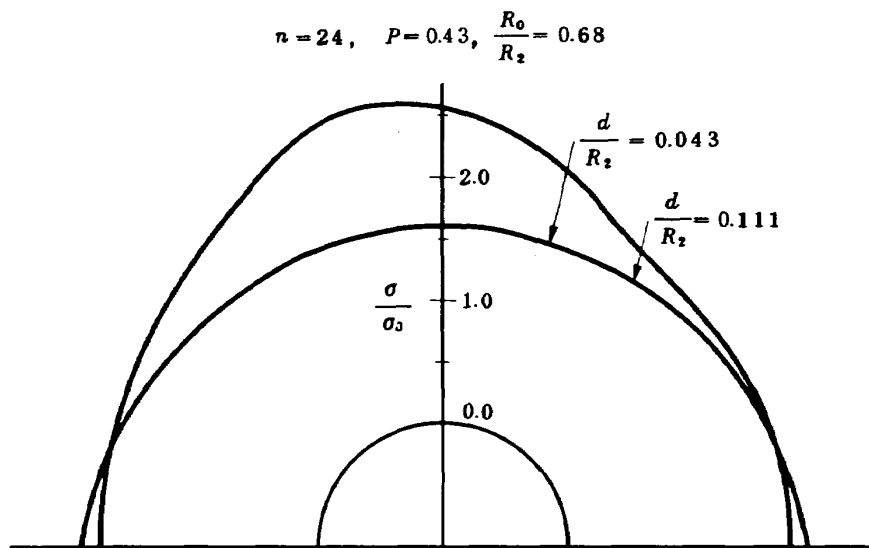


図 24 偏心円孔縁の応力分布 (円孔径  $d$  が変化する場合)

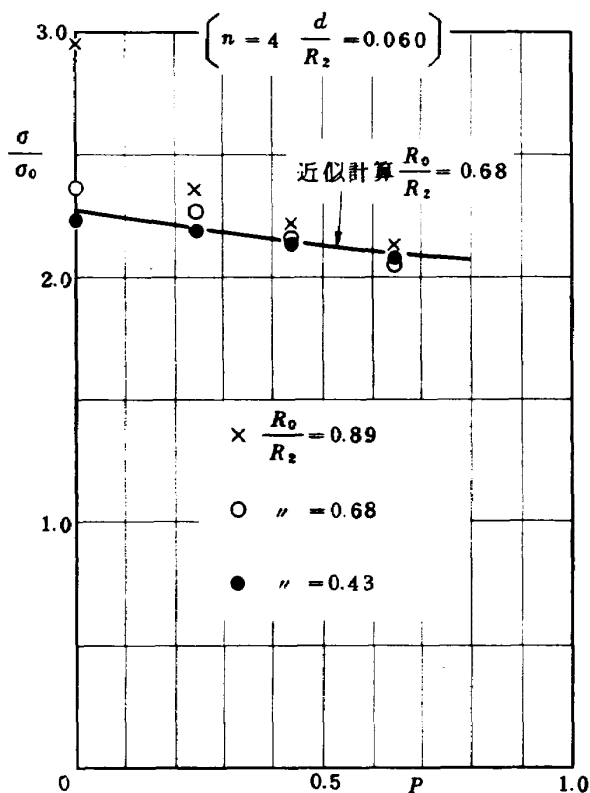


図 25 外周の遠心力と応力集中率との関係

まり、円板内の応力比  $\sigma_r/\sigma_\theta$  は 1 に近ずき、 $R$  に対する勾配はゆるやかになる。したがって、円孔数が少ない場合、外周に作用する遠心力  $P$  が増加すれば、応力集中率は Saint-Venant の原理を適用した近似計算と定量的に一致するようになり、この場合の応力集中率が 2 に

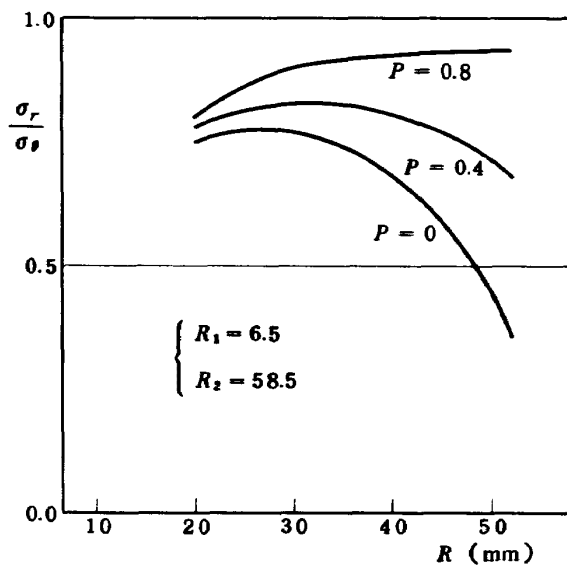


図 26 偏心円孔をもたない中空円板の  $\sigma_r/\sigma_\theta$  分布 (理論計算)

近づくことも容易に理解できる。

図 27 は偏心円孔数  $n = 24$  の場合の  $P$  と応力集中率との関係を示す。この場合は  $n = 4$  の場合とは異なり、外周に作用する遠心力と応力集中率との関係は、偏心円孔の偏心量によって異なった傾向を示す。

偏心量  $R_0/R_2 = 0.89$  の場合は、外周に作用する遠心力の増加とともに応力集中率は単調に減少するが、 $R_0/R_2 = 0.68$  の場合には極値がある。しかし、 $R_0/R_2 = 0.43$  になると、 $0.89$  の場合とは逆に単調増加の傾向

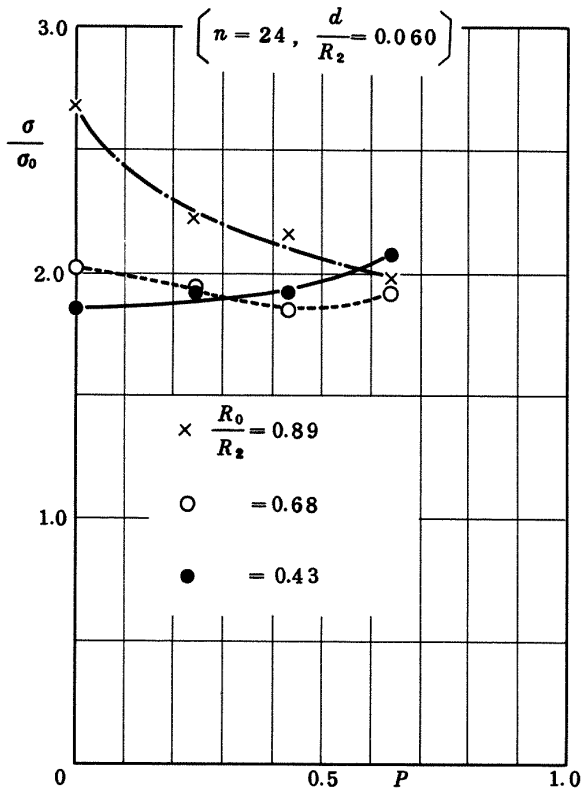


図 27 外周の遠心応力と応力集中率との関係

を示す。このように偏心量によってそれぞれ異なった傾向を示すけれども、いずれの場合も応力集中率の最小値は 2 以下になる。図 28, (a), (b) は  $R_0/R_2 = 0.68$  の場合の光弾性縞写真であり、図 29 は偏心円孔縁の応力分布を示す。

光弾性実験に用いたエポキシ材のポアソン比は、常温では金属材料と同じく 0.3 であるが、凍結時では、0.5 となる。一般に体積力が変化する場合に於ては応力分布状態はポアソン比に依存する<sup>10)</sup> ところで、偏心円孔の無い円板を対象として、ポアソン比の影響について考察する。図 30 (a), (b), (c) は、それぞれポアソン比  $\nu = 0.3, 0.5$  のとき、外周に作用する遠心応力  $P = 0, 0.4, 0.8$  の場合の応力分布である。 $P = 0$  の場合、半径応力  $\sigma_r$  についての  $\nu = 0.5$  と  $0.3$  との比は円板全体を通じて、 $(\sigma_r)_{\nu=0.5}/(\sigma_r)_{\nu=0.3} \div 1.06$  である。つまり金属材料と比較して、エポキシ材を用いた光弾性凍結法では約 6% 高い値となる。また、円周応力  $\sigma_\theta$  について比較すると、中心円孔部では約 6% 高い値であるが、半径位置  $R$  の増加とともに減少し、 $R = 34.5 \text{ mm}$  のとき両者は一致し、さらに  $R$  が増加すると両者の大小が逆になり、外周部では 26.7% 低い値となる。しかし、外周に作用する遠心応力  $P$  の増加とともに、ポアソン比の差の影響は

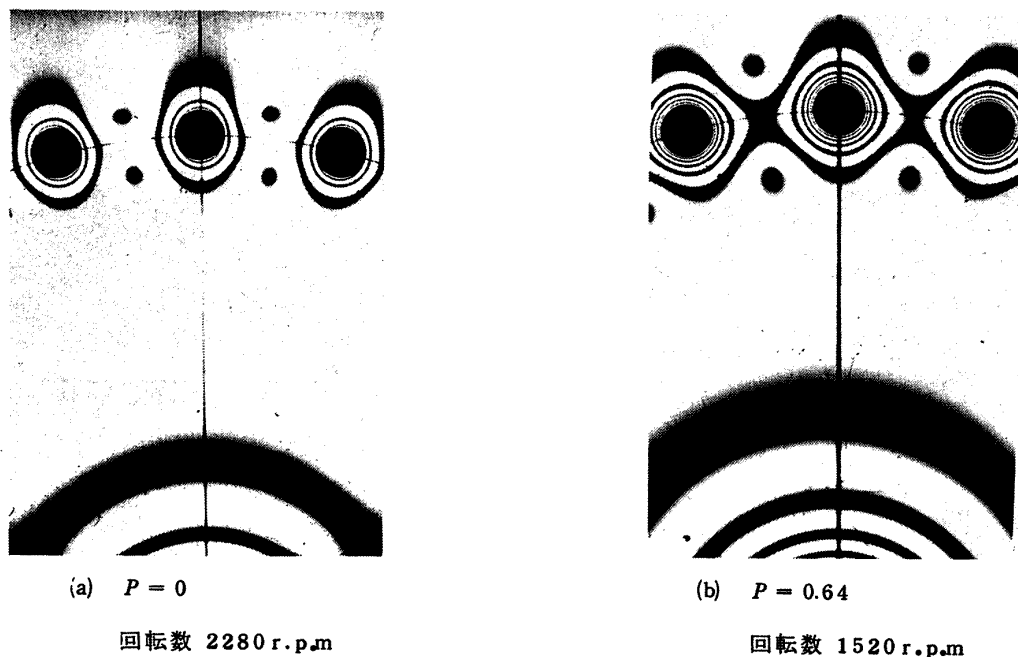


図 28 光弾性縞写真（外周の遠心応力が異なる場合）

$$\left( \frac{d}{R_2} = 0.06, \frac{R_0}{R_2} = 0.68, n = 24 \right)$$

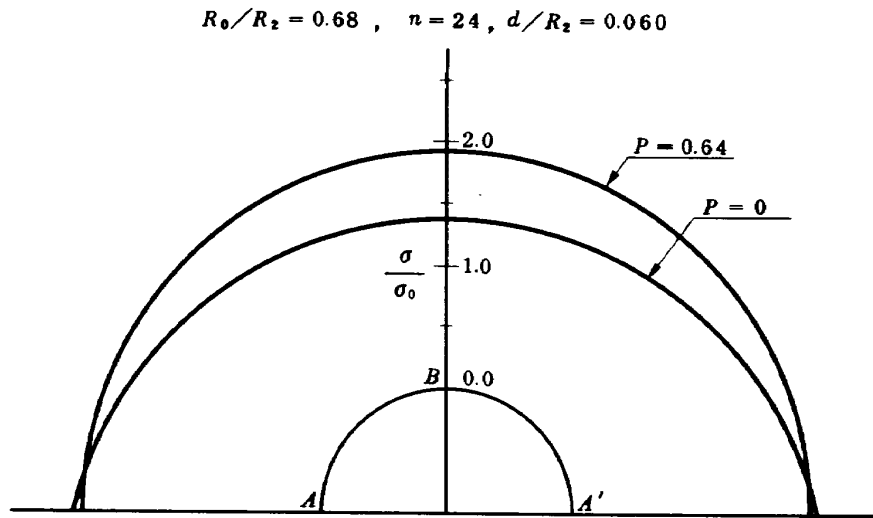


図 29 偏心円孔縁の応力分布 (外周に働く遠心応力  $P$  が変化する場合)

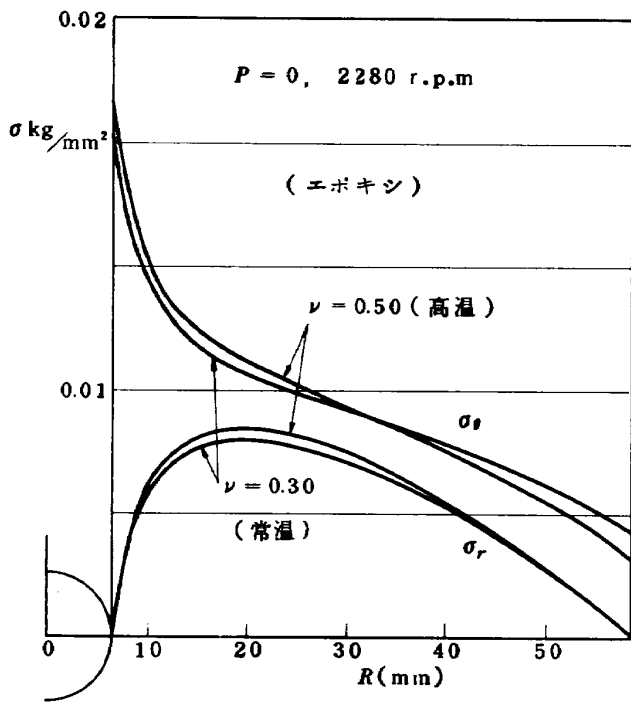


図 30 (a) 偏心円孔をもたない中空円板の応力分布 (理論計算)

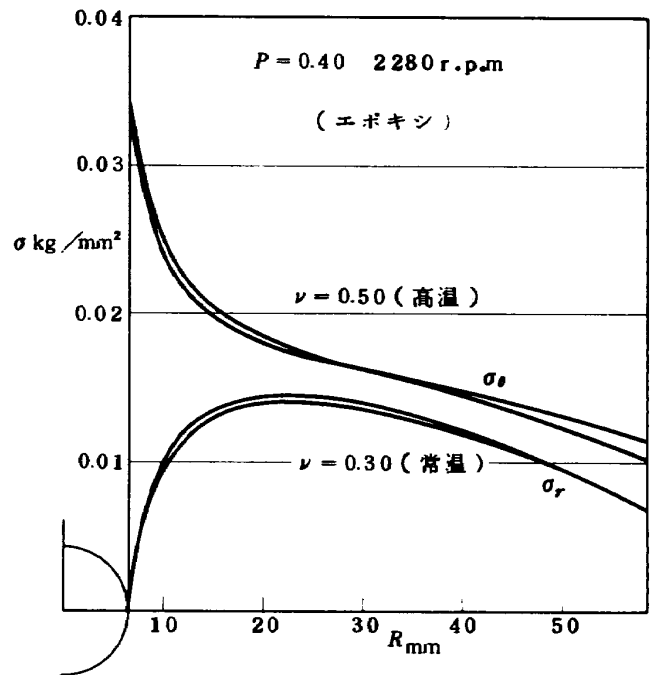


図 30 (b) 偏心円孔をもたない中空円板の応力分布 (理論計算)

少なくなり,  $P = 0.8$  になるとほとんど無視できる。  
(ポアソン比による差が微小のため, グラフ上では両者が識別できないので,  $\sigma_r, \sigma_\theta$  ともそれぞれ一つの曲線として示した。)

図 31 (a), (b) はポアソン比の影響の少ない  $P = 0.69$

の場合について, 軟鋼円板のひずみから求めた偏心円孔中心を通る断面の円孔近傍の応力値をプロットしたものである。この図で示される円孔縁の応力集中率は, 前出図 25 および図 27 の光弾性結果と良い一致を示している。

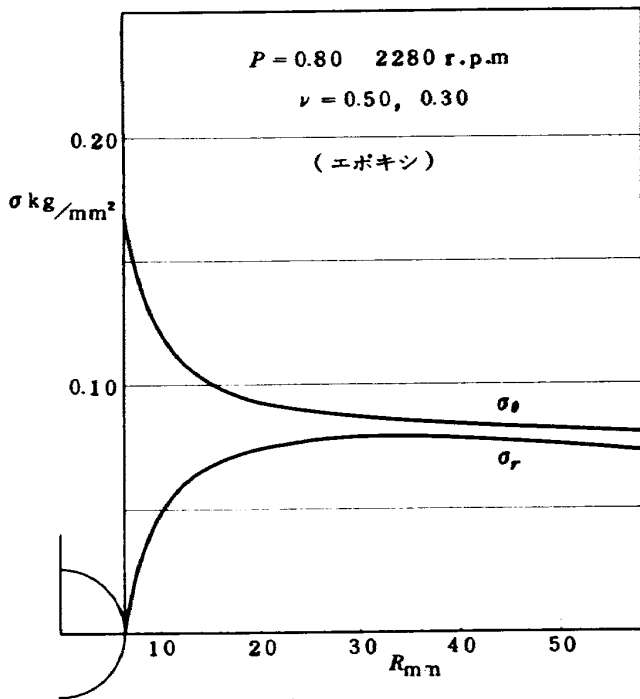


図 30(c) 偏心円孔をもたない中空円板の応力分布 (理論計算)

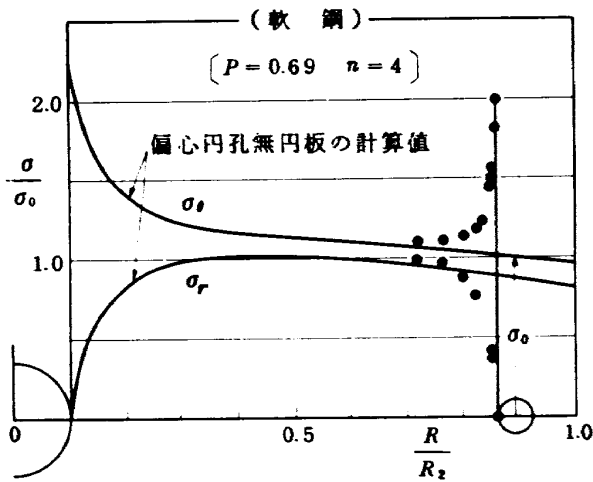


図 31(a) ひずみゲージ法で求めた軟鋼円板の応力分布 (円孔数 = 4 の場合)

あとがき

偏心円孔を有する回転円板の強度を検討するため、円板内に設けられた偏心円孔の大きさ、個数、偏心量および外周に作用する遠心力などのパラメータが変化した場合の偏心円孔縁の応力の値およびその変化を、2次元光弾性法および軟鋼円板を用いたひずみゲージ法によって求めた。そしてそれらの結果を各パラメータと応力集中

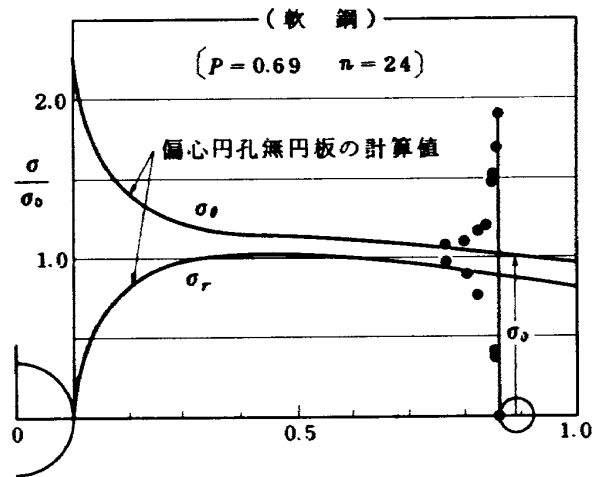


図 31(b) ひずみゲージ法で求めた軟鋼円板の応力分布 (円孔数 = 24 の場合)

との関係として図示した。これらの図を用いて、円孔縁の応力集中を最低にするという条件で、上述の4個のパラメータを決定しようとする場合、各パラメータ間には、互いに相関関係があって円孔縁の応力集中の変化は複雑であり、その組合せは幾通りもある。しかし、仮りに4個のパラメータのうち2個が固定されているとすれば、残りのパラメータは容易に決定することができ、円孔縁の応力集中率を2以下にすることが可能である。

従来、円孔縁の応力集中率を求める場合に便宜的に利用されてきた有孔無限板の応力集中から推定する方法は、円板内の応力勾配が小さい場所に、1~8個の小円孔を設ける場合には適用できるが、その他の場合に適用するとかかなりの誤差を生ずることが、本資料の結果から明らかになった。

以上は主として光弾性実験で得られた結果であるが、軟鋼円板の回転中のひずみ測定から求めた結果も、光弾性結果とよい一致を示すことを確認した。

参考文献

- 1) 斎藤秀雄, 多数の偏心円孔を有する静止および回転円板の応力分布について, 日本機械学会論文集, Vol. 20, No. 95, 昭和29年, pp.473~478.
- 2) Ta-Cheng KU, Stress Concentration in a Rotating Disk with a Central Hole and Two Additional Symmetrically Located Holes, J. Appl. Mechanics, 1960, 6, pp. 359~360.
- 3) M. Hete'nyi, The Application of Hardening Resins in Three-Dimensional Photoelast-

- icity, J. Appl. Physics, Vol. 10, 1939, p. 295.
- 4) R. E. Newton, A Photoelastic Study of Stresses in Rotating Disks, J. Appl. Mechanics, Vol. 62, 1940, p. 57.
  - 5) K. E. Barnhart, Jr., A. L. Hale, and J. L. Merian, Stress in Rotating Disks Due to Noncentral Holes, Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. 9, 1951, pp. 35~52.
  - 6) 松末勝利, 長松昭男, 橋本良作, 米内山誠, 多数の偏心円孔を有する回転円板の応力, NAL-TR-390, 1974.
  - 7) たとえば, 白鳥英亮, 金属材料, 4巻, 12号, pp. 108~111
  - 8) Max. Mark. Frocht, Photo-Elasticity, Vol. 1, John Wiley and Sons, 1957, pp. 252~256.
  - 9) 西田正孝, 応力集中, 森北出版, 1973, p. 243
  - 10) たとえば, S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970 p. 32 or p. 82

---

## 航空宇宙技術研究所資料279号

昭和50年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---



