

UDC 629.78.062.2:
629.783.525

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-320

フレキシア・ジンバル支持モーメンタム・
ホイール搭載衛星のニューテーション運動

村 上 力 ・ 中 島 厚

1976 年 11 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. まえがき	1
2. 記 号	1
3. 運動方程式	2
3.1 系の構成	2
3.2 運動方程式の誘導	3
3.3 系の特性方程式	6
3.4 ニューテーション減衰時定数	6
4. 実 験	7
4.1 実験装置	7
4.2 各種パラメータの測定	7
4.3 実験結果	9
5. あとがき	11
引用文献	11
付 録	11

フレキシア・ジンバル支持モーメンタム・ ホイール搭載衛星のニューテーション運動*

村上 力**、中島 厚**

1. まえがき

人工衛星の3軸姿勢制御方式の一つにバイアス・モーメンタム方式があり、その中の一つにバイアス・モーメンタム・ホイールをジンバル支持することによって性能向上をねらったものが提案されている。^{1~3)}特に1ジンバル支持でしかもバネによってジンバル角に復元力を与えたものは、良好なニューテーション減衰特性を有し、今後の活用が期待される。このようなジンバル支持モーメンタム・ホイール(GMW)をフレキシア・ジンバル支持モーメンタム・ホイールと称し、本稿ではこれをFGMWと略記することにする。

一般にGMWを搭載した衛星の運動方程式は非常に複雑になる。本稿の目的はFGMWを搭載した衛星の運動方程式を誘導し、さらにこれの線形近似式を求めその結果から特性方程式を導き、特にニューテーション運動に関する洞察を与え、球面空気軸受式3軸実験テーブルでの実験結果との比較検討を行なうことである。運動方程式には円軌道運動も含まれ、一般化座標を用いないニュートンの定式化法を用いた。

2. 記号

- B : ジンバル軸の粘性抵抗係数
 C_{uv}^u ($u, v = r, b, G, g$) : u 座標から v 座標への変換行列
 E : 系のエネルギー変化率
 FGMW : フレキシア・ジンバル・モーメンタム・ホイール
 $f(s) = 0$: 系の特性方程式
 \bar{H} : 系全体の角運動量ベクトル
 $h \equiv J_{gy} \Omega$: ロータのジンバルに対する角運動量
 I : 衛星本体のそれ自身の重心まわりの慣性ダイアディック

I_t : 系全体のその重心まわりの慣性ダイアディック

I_t' : FGMWを質点とした時の系全体の慣性ダイアディック $= I + I' + J_G' + J_g'$, 機軸のテンソルでは

$$\{I_t'\} \equiv \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}_b, \quad \begin{matrix} I_{xy} = I_{yx}, \\ I_{yz} = I_{zy}, \\ I_{zx} = I_{xz} \end{matrix}$$

I', J_G', J_g' : それぞれ衛星本体, ジンバル, ロータの系全体の重心に対して質点として寄与する慣性ダイアディック

I_{x0}, I_{y0}, I_{z0} : 系全体のその重心まわりの主慣性モーメント

$I_{tx} \equiv I_{tx} + J_x$: x 軸まわりの系全体の慣性モーメント

$I_{ty} \equiv I_y + J_y$: y 軸まわりの系全体の慣性モーメント

$I_{tz} \equiv I_z + J_z$: z 軸まわりの系全体の慣性モーメント

J_G, J_g : それぞれジンバル, ロータのそれ自身の重心まわりの慣性ダイアディック
ジンバル軸系で

$$\{J_G\}_G \equiv \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix}_G, \quad \{J_g\}_G \equiv \begin{bmatrix} J_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{gz} \end{bmatrix}_G$$

$J_x \equiv J_{Gx} + J_{gx}$

$J_y \equiv J_{Gy} + J_{gy}$

K : ジンバルの復元バネ定数

\bar{L} : 外乱トルク

l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) : 方向余弦

$n_0 \equiv h / \sqrt{I_{tx} I_{tz}}$: ジンバル固定時 ($\delta = 0$) の衛星のニューテーション角周

*昭和51年9月13日 受付

**宇宙研究グループ

波数

P, Q, R, d : それぞれ p, q, r, δ のラプラス変換の量

p, q, r : ω_b の x, y, z 成分, $\bar{\omega}_b = p \hat{b}_x + q \hat{b}_y + r \hat{b}_z$

$q' \equiv q - \omega_o$

s : ラプラス演算子

s_1, s_2 : それぞれニューテーションとジンバル振動の $B=0$ の時の特性根

T : ジンバル軸のトルカによるトルク

T_g : ロータ軸のモータによる発生トルク

T_c : ニューテーション減衰時定数

T_1, T_2 : それぞれニューテーションとジンバルの振動周期

x, y, z : 衛星座標系, それぞれロール, ピッチ, ヨー軸を表わす。右手直交系

$\delta, \dot{\delta}$: ジンバル角および角速度

ζ_1, ζ_2 : それぞれニューテーションとジンバルの減衰比

ϕ, θ, ψ : 機軸の軌道座標に対するヨー, ピッチ, ロール角, 3-2-1系のオイラー角

Ω : ロータのジンバルに対する角速度

ω_o : 円軌道角速度

$\bar{\omega}'_G \equiv \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_G$

$\bar{\omega}'_g \equiv \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g$

$\bar{\omega}_r, \bar{\omega}_b, \bar{\omega}_G, \bar{\omega}_g$: それぞれ慣性系に対する軌道, 軌道に対する機体, 機体に対するジンバル, ジンバルに対するロータの角速度ベクトル

$\omega_n \equiv \sqrt{K/J_x}$: FGMW 単体のジンバル固有角周波数

\hat{e} : 各座標系の基底ベクトル。 r, b, G, g はそれぞれ軌道, 機体, ジンバル, ロータの座標系を表わし, 下添字 x, y, z で3軸を区別する

3. 運動方程式

3.1 系の構成

衛星のロール, ピッチ, ヨー軸をそれぞれ x, y, z の基準軸で表わし, 右手直交系を成すものとするが, 必ずしも慣性主軸であるとは限らない。この衛星に1個のFGMWを搭載するが, そのジンバル軸は x 軸に平行, ジンバル角 $\delta=0$ のときのロータ(ホイール)軸方向は y 軸方向に平行であるとする(図1)。これと類似の系に対する運動方程式は結果だけが文献(2)に, また, 簡略化した条件を入れた場合についてラグランジュの一般化座標に準じたWhittakerのquasi座標法を用いての誘導が文献(3)に与えられている。本稿ではしばしば引用されるGreensiteのNASA-CR-831⁴⁾と同じく古典的なニュートン法, 若しくはオイラー方程式(角運動量ベクトルの時間微分係数が外部トルクに等しいとして導く)

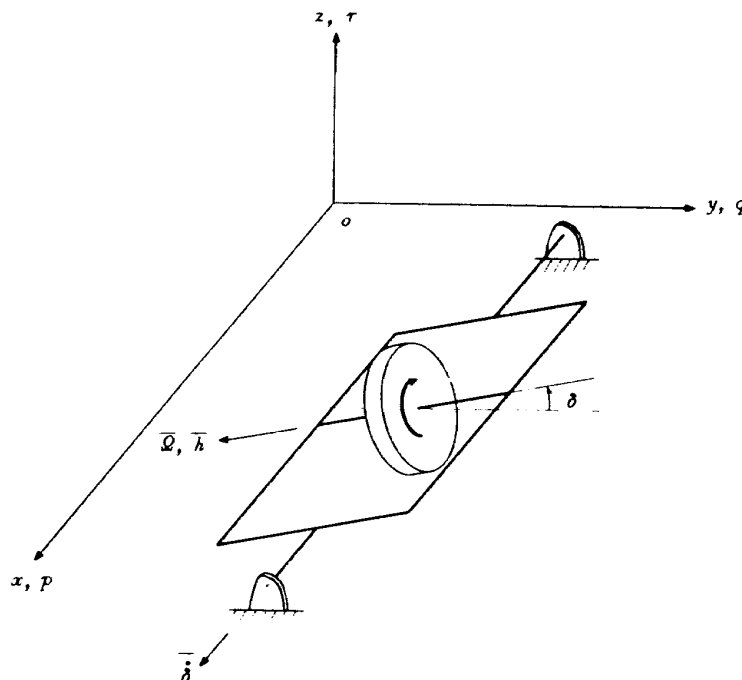


図1 衛星座標とジンバル・ロータ系

を導くことにする。但し、文献(4)においては次の前提条件が入っている：

- 1) ジンバルの質量を無視する
- 2) ロータと衛星本体の重心は一致する
- 3) ロータの慣性モーメントは衛星本体のそれに比べて微小として無視する。

の3項目が主なものである。工学者の間で1)と3)は納得できるが、2)だけは認めがたいという議論が生じている。併しこれらの3条件は、式の複雑さを殆ど増すことなしに完全に除去できることを付録で示したので参照され度い(付録I)。

衛星は円軌道を ω_o の角速度で軌道運動を行ない、衛星の角速度 $\bar{\omega}_b$ は軌道座標 (x_r, y_r, z_r) に対するものとする。 x_r は軌道接線(速度)方向、 z_r は地球中心方向、 y_r は軌道面法線と逆方向で右手直交系である。従って地球の公転運動を無視すれば軌道座標系は慣性系^{注)}に対して $\bar{\omega}_r \equiv 0\hat{r}_x + (-\omega_o)\hat{r}_y + 0\hat{r}_z$ の角速度を有する。当然ながら衛星は慣性系に対して $\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_b$ の角速度を有することになる。

ジンバル軸にはジンバル角 δ に比例する復元力を与えるバネ常数 K のバネが取付けられ、 δ に比例する粘性抵抗トルクを発生する粘性抵抗係数 B を有するものとする。またロータは回転対称体であり、ジンバルもロータ軸に対称であるとする。この仮定はジンバルがロータの密封ケースである殆どの場合に対して妥当な近似(仮定)であると思われる。

3.2 運動方程式の誘導

付録Iで与えたように系全体の角運動量ベクトル \bar{H} は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (\mathbf{I} + \mathbf{I}' + \mathbf{J}'_G + \mathbf{J}'_g) \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \\ &+ \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \\ &+ \mathbf{J}_g \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \\ &= \mathbf{I}'_i \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + \mathbf{J}_G \cdot \bar{\omega}'_G + \mathbf{J}_g \cdot \bar{\omega}'_g \end{aligned} \quad (1)$$

こゝに \mathbf{I}'_i は系全体の重心まわりの衛星本体と、ジンバル・ロータ系がその重心(ジンバル軸上)にあってジンバル角によって変動しない)に質点として存在する寄与分を含み、系全体の慣性ダイアディック \mathbf{I}_i に対し

$$\mathbf{I}'_i = \mathbf{I}_i - \mathbf{J}_G - \mathbf{J}_g \quad (2)$$

の関係がある。なお、このあとの解析ではベクトルを3行1列の行列で表現し(列ベクトル)、その際の座標系を右下に添字しておく、また、基底ベクトル(座標軸の単位ベクトル)は $\hat{\ }$ 記号を用い、座標変換行列は C を用い、右上添字から右下添字へ回転(変換)されるものと

する。例えば衛星座標軸(以下、機軸と略称)からジンバル軸への変換を基底ベクトルの変換として表現すると T を転置記号として

$$\{\hat{b}\}^T = [C_b^G \{\hat{G}\}]^T = \{\hat{G}\}^T C_b^G \quad (3)$$

$$\therefore [C_b^G]^T = [C_b^G]^{-1} = C_b^G \quad (4)$$

(3)式の意味は例えば $\bar{\omega}_b$ を $b \rightarrow G$ に変換する場合にベクトルを基底ベクトルを用いた厳密な表現では

$$\begin{aligned} \{\hat{b}\}^T (p, q, r)^T &\equiv p\hat{b}_x + q\hat{b}_y + r\hat{b}_z \\ &= \{\hat{G}\}^T C_b^G (p, q, r)^T \end{aligned} \quad (5)$$

つまり $\{\hat{b}\}^T$ はそれに右乗されるベクトル成分が機軸を基準としていること、 $\{\hat{G}\}^T$ はジンバル軸を基準とした成分で表現していることを示している。併し本稿では基底ベクトル以外は右下添字で座標系を示す。例えば

$$\bar{\omega}_r = \{\hat{r}\}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{pmatrix}_r = \{\hat{b}\}^T C_b^r \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega_o \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}_b \quad (6)$$

但し

$$\begin{aligned} C_b^r &= \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta & c\phi & & c\theta s\phi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\phi - c\phi s\phi & s\phi s\theta s\phi + c\phi c\phi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\phi + s\phi s\phi & c\phi s\theta s\phi - s\phi c\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

こゝに ϕ, θ, ϕ は3-2-1系のオイラー角で、 s と c はそれぞれ \sin, \cos の省略記号である。

その他 $b \leftrightarrow G$ 間の座標変換行列は次式で与えられる：

$$C_G^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\delta & s\delta \\ 0 & -s\delta & c\delta \end{pmatrix}, \quad C_b^G = [C_G^b]^T \quad (8)$$

3軸制御された状態を想定し ϕ, θ, ϕ はともに微小であると仮定する：

$$C_b^r \approx \begin{pmatrix} 1 & \phi & -\theta \\ -\phi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

従って(6)式および(8)式から

$$\bar{\omega}_r \approx -\omega_o \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \\ -\phi \end{pmatrix}_b = -\omega_o \begin{pmatrix} \phi \\ c\delta & -\phi s\delta \\ -s\delta & -\phi c\delta \end{pmatrix}_G \quad (10)$$

注) $\hat{\ }$ 記号については第2章の記号表または3.2節の(2)式以降を参照され度い

$$\bar{\omega}_b = \begin{pmatrix} p \\ qc\delta + rs\delta \\ -qs\delta + rc\delta \end{pmatrix}_G \quad (11)$$

$$\bar{\omega}_G = \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_G \quad (12)$$

$$\bar{\omega}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix}_G, \quad Q \text{ はロータ速度} \quad (13)$$

以上から以下の近似式が求まる (≡ 記号を省略)

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) &= \begin{pmatrix} p - \omega_o \phi \\ q - \omega_o \\ r + \omega_o \phi \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} p - \omega_o \phi \\ q' \\ r + \omega_o \phi \end{pmatrix}_b, \quad q - \omega_o \equiv q' \quad (14) \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}'_G \equiv \begin{pmatrix} \dot{\delta} + p \\ q'c\delta + rs\delta \\ -q's\delta + rc\delta \end{pmatrix}_G, \quad (\omega_o \approx 0 \text{ とした}) \quad (15)$$

$$\bar{\omega}'_g = \begin{pmatrix} \dot{\delta} + p \\ -Q + q'c\delta + rs\delta \\ -q's\delta + rc\delta \end{pmatrix}_G, \quad (\omega_o \approx 0 \text{ とした}) \quad (16)$$

次に慣性ダイアディックであるが、簡単のため基底ベクトルによる厳密式は省略してベクトルと同様に行列の右下添字でその座標系を表わす：

$$\begin{aligned} I'_t &\equiv \{\hat{b}\}^T \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \{\hat{b}\} \\ &\equiv \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix}_b \equiv [I'_t]_b \quad (17) \end{aligned}$$

$$J_G \equiv \begin{pmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{pmatrix}_G \quad (18)$$

$$J_g \equiv \begin{pmatrix} J_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{gz} \end{pmatrix}_G \quad (19)$$

以上の諸式を用いて(1)式を時間微分して運動方程式を導く。但し外乱トルクを \bar{L} とする：

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt} [I'_t \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r)] + \frac{d}{dt} [J_G \cdot \bar{\omega}'_G]$$

$$+ \frac{d}{dt} [J_g \cdot \bar{\omega}'_g] = \bar{L} \quad (20)$$

上式の三項をそれぞれ〔①〕, 〔②〕, 〔③〕と略記し、座標系を右下に添えて示す。

まず第1項 = 〔①〕から求める：

$$\begin{aligned} [①]_b &= [I'_t]_b \begin{pmatrix} \dot{p} - \omega_o \dot{\phi} \\ \dot{q} \\ \dot{r} + \omega_o \dot{\phi} \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} p - \omega_o \phi \\ q' \\ r + \omega_o \phi \end{pmatrix}_b \\ &\times \left[[I'_t]_b \begin{pmatrix} p - \omega_o \phi \\ q' \\ r + \omega_o \phi \end{pmatrix}_b \right]_b \quad (21) \end{aligned}$$

オイラー角は微小であるから $\dot{\phi} \approx r$, $\dot{\phi} \approx p$ である。この式の×記号はベクトル外積を意味するので(21)式のような行列表示では次のような交代行列を意味する

$$\begin{pmatrix} p - \omega_o \phi \\ q' \\ r + \omega_o \phi \end{pmatrix} X \equiv \begin{pmatrix} 0 & -(r + \omega_o \phi) & q' \\ r + \omega_o \phi & 0 & -(p - \omega_o \phi) \\ -q' & p - \omega_o \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

(17)式の $[I'_t]_b$ を代入した結果は

$$\begin{aligned} [①]_b &= \begin{pmatrix} I_x (\dot{p} - \omega_o r) + I_{xy} \dot{q} + I_{xz} (\dot{r} + \omega_o p) \\ I_{yx} (\dot{p} - \omega_o r) + I_y \dot{q} + I_{yz} (\dot{r} + \omega_o p) \\ I_{zx} (\dot{p} - \omega_o r) + I_{zy} \dot{q} + I_z (\dot{r} + \omega_o p) \end{pmatrix}_b \\ &+ \begin{pmatrix} (I_x - I_y) q' r + I_{yz} (q'^2 - r^2) + I_{zx} p q' - I_{xy} p r \\ (I_x - I_z) r p + I_{zx} (r^2 - p^2) + I_{xy} q' r - I_{yz} q' p \\ (I_y - I_z) p q' + I_{xy} (p^2 - q'^2) + I_{yz} r p - I_{zx} r q' \end{pmatrix}_b \quad (23) \end{aligned}$$

上式の第2項では p, q', r をも1次の微小量とすると、 $\omega_o \phi, \omega_o \phi$ を含む項は結果的に3次以上の微小項となるので省略した。なお、軌道運動を含まないと $\omega_o = 0$ であるから $\bar{\omega}_r = 0$ であり、オイラー角が含まれないから(23)式は $\omega_o = 0, q' = q$ となって厳密式となる。

次に(20)式の第2項をジンバル座標系〔②〕_Gで計算し、これを機軸系に変換する、即ち〔②〕_b = C_b^G 〔②〕_Gである。 $J_G, \bar{\omega}'_G$ にそれぞれ(18), (19)式を代入し、(21)式と同様な計算を行なった結果は

$$[②]_G = \begin{pmatrix} J_{Gx}(\dot{\delta} + p) + (J_{Gx} - J_{Gy}) \\ \times [q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta] \\ J_{Gy}(\dot{q}c\delta - q'\dot{\delta}s\delta + \dot{r}s\delta + r\dot{c}\delta) \\ J_{Gz}(-\dot{q}s\delta - q'\dot{\delta}c\delta + \dot{r}c\delta - r\dot{s}\delta) \\ + (J_{Gx} - J_{Gy})(\dot{\delta} + p)(q'c\delta + rs\delta) \end{pmatrix}_G \quad (24)$$

機軸への変換は〔③〕_Gと一緒に行なうとして〔③〕_Gを求める。 $\bar{\omega}'_g$ は $\bar{\omega}'_G$ に比べて $-Q$ が追加されただけである。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} G = & \begin{pmatrix} J_{gx}(\dot{\delta}+p) + (J_{gx} - J_{gy}) \\ \times \{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} \\ J_{gy}(\dot{q}c\delta - q'\dot{\delta}s\delta + \dot{r}s\delta + r\dot{\delta}c\delta) \\ J_{gx}(-\dot{q}s\delta - q'\dot{\delta}c\delta + \dot{r}c\delta - r\dot{\delta}s\delta) \\ + (J_{gx} - J_{gy})(\dot{\delta}+p)(q'c\delta + rs\delta) \end{pmatrix}_G \\
 & + \begin{pmatrix} J_{gy}\Omega(-q's\delta + rc\delta) \\ -J_{gy}\dot{\Omega} \\ -J_{gy}\Omega(\dot{\delta}+p) \end{pmatrix}_G \quad (25)
 \end{aligned}$$

上式の第1項は〔2〕_Gと全く同形であり、第2項は J_{gy} と Ω または $\dot{\Omega}$ だけに関係している。いま、

$$\left. \begin{aligned} J_{Gx} + J_{gx} &\equiv J_x \\ J_{Gy} + J_{gy} &\equiv J_y \\ J_{gy}\Omega &\equiv h, \quad J_{gy}\dot{\Omega} \equiv \dot{h} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とおけば

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} G + \textcircled{3} G &\equiv \textcircled{2+3} G \\
 &= \begin{pmatrix} J_x(\dot{\delta}+p) + (J_x - J_y) \\ \times \{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} \\ J_y(\dot{q}c\delta - q'\dot{\delta}s\delta + \dot{r}s\delta + r\dot{\delta}c\delta) \\ J_x(-\dot{q}s\delta - q'\dot{\delta}c\delta + \dot{r}c\delta - r\dot{\delta}s\delta) \\ + (J_x - J_y)(\dot{\delta}+p)(q'c\delta + rs\delta) \end{pmatrix}_G \\
 &+ \begin{pmatrix} h(-q's\delta + rc\delta) \\ -\dot{h} \\ -h(\dot{\delta}+p) \end{pmatrix}_G \quad (27)
 \end{aligned}$$

上式を(8)式を用いて機軸に変換した結果は

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2+3} b &\equiv C_b^G \textcircled{2+3} G \\
 &= \begin{pmatrix} J_x(\dot{\delta}+p) + (J_x - J_y) \\ \times \{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} \\ J_x r(\dot{\delta}+p) + 0.5(\dot{r} - pq')(J_y - J_x)s2\delta \\ + \dot{q}(J_x s^2\delta + J_y c^2\delta) - pr(J_x c^2\delta + J_y s^2\delta) \\ + (J_x - J_y)\dot{\delta}(q's2\delta - rc2\delta) \\ - J_x q'(\dot{\delta}+p) + 0.5(\dot{q} + pr)(J_y - J_x)s2\delta \\ + \dot{r}(J_x c^2\delta + J_y s^2\delta) + pq'(J_y c^2\delta + J_x s^2\delta) \\ + (J_y - J_x)\dot{\delta}(rs2\delta + q'c2\delta) \end{pmatrix}_b \\
 &+ \begin{pmatrix} h(-q's\delta + rc\delta) \\ -\dot{h}c\delta + h s\delta(\dot{\delta}+p) \\ -\dot{h}s\delta - hc\delta(\dot{\delta}+p) \end{pmatrix}_b \quad (28)
 \end{aligned}$$

上式は軌道運動を含めないと $\omega_o = 0$ であるから $q' = q$ と置き換えられて厳密式となるが、 $\omega_o \neq 0$ ではオイラ一角を微小として無視した近似が含まれる。

以上で(20)式の3項は全部機軸で与えられたから、 L も機軸で与えれば三つのスカラー運動方程式が得られることになる。併し変数は p, q', r の他に δ と h がある。 h

が一定になるようにロータのモータを制御すれば、残りは δ だけとなり、これに関する方程式が必要となる。ジンバル軸上のトルカがトルク T を発生するものとするれば、これが(28)式の x 軸(ジンバル軸)成分と粘性トルク $B\dot{\delta}$ とバネによる復元力 $K\delta$ に等しい

$$\begin{aligned}
 J_x(\dot{\delta}+p) + B\dot{\delta} + K\delta + h(-q's\delta + rc\delta) \\
 + (J_x - J_y)\{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} = T \quad (29)
 \end{aligned}$$

さらにロータをモータで駆動する点まで考慮に入れると、モータの発生トルクを $-T_g$ ($-y$ 軸方向)、粘性抵抗係数を B_m とすれば、 $-T_g$ は(25)式の y 成分と $-B_m\dot{\Omega}$ の和と釣り合うから、次式を得る：

$$J_{gy}\dot{\Omega} + B_m\dot{\Omega} - J_{gy}(\dot{q}c\delta - q'\dot{\delta}s\delta + \dot{r}s\delta + r\dot{\delta}c\delta) = T_g \quad (30)$$

以上、(23)、(28)、(29)、(30)式をまとめると、以下の五つのスカラー方程式を得る。

x 成分：

$$\begin{aligned}
 I_x(\dot{p} - \omega_o r) + I_{xy}\dot{q} + I_{xz}(\dot{r} + \omega_o p) + (I_x - I_y)q'r \\
 + I_{yz}(q'^2 - r^2) + I_{zx}pq' - I_{xy}pr + J_x(\dot{\delta}+p) \\
 + (J_x - J_y)\{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} \\
 + h(-q's\delta + rc\delta) = L_x \quad (31)
 \end{aligned}$$

y 成分：

$$\begin{aligned}
 I_{yx}(\dot{p} - \omega_o r) + I_y\dot{q} + I_{yz}(\dot{r} + \omega_o p) + (I_x - I_z)rp \\
 + I_{zx}(r^2 - p^2) + I_{xy}q'r - I_{yz}q'p + J_x r(\dot{\delta}+p) \\
 + 0.5(\dot{r} - pq')(J_y - J_x)s2\delta + \dot{q}(J_x s^2\delta + J_y c^2\delta) \\
 - pr(J_x c^2\delta + J_y s^2\delta) + (J_x - J_y)\dot{\delta}(q's2\delta - rc2\delta) \\
 - \dot{h}c\delta + h(\dot{\delta}+p)s\delta = L_y \quad (32)
 \end{aligned}$$

z 成分：

$$\begin{aligned}
 I_{zx}(\dot{p} - \omega_o r) + I_{zy}\dot{q} + I_z(\dot{r} + \omega_o p) + (I_y - I_x)pq' \\
 + I_{xy}(p^2 - q'^2) + I_{yz}rp - I_{zx}rq' - J_x q'(\dot{\delta}+p) \\
 + 0.5(\dot{q} + pr)(J_y - J_x)s2\delta + \dot{r}(J_x c^2\delta + J_y s^2\delta) \\
 + pq'(J_y c^2\delta + J_x s^2\delta) + (J_y - J_x)\dot{\delta}(rs2\delta + q'c2\delta) \\
 - \dot{h}s\delta - h(\dot{\delta}+p)c\delta = L_z \quad (33)
 \end{aligned}$$

ジンバル軸：

$$\begin{aligned}
 J_x(\dot{\delta}+p) + B\dot{\delta} + K\delta + h(-q's\delta + rc\delta) \\
 + (J_x - J_y)\{q'rc2\delta + 0.5(r^2 - q'^2)s2\delta\} = T \quad (29)
 \end{aligned}$$

ロータ軸：

$$\begin{aligned}
 \dot{h} + (B_m/J_{gy})h - J_{gy}(\dot{q}c\delta - q'\dot{\delta}s\delta + \dot{r}s\delta + r\dot{\delta}c\delta) \\
 = T_g \quad (34)
 \end{aligned}$$

こゝに $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, \dots$ 等の I を含む記号は、衛星全体の重心まわりの機体軸に関する衛星本体と、ジンバル・ロータ系がそれ自身の重心に質点として存在した場合を含んでいる(2)式)。また、 J_x, J_y はジンバル・ロータ系のそれ自身の重心(ジンバル軸上)にあって δ

によって変動しない)まわりのもので、バネ等の変形の影響は考慮していない。 h はジンバル軸から見たロータの角運動量である。軌道運動の影響は近似的に含まれているが、軌道運動を考慮しないときは $\omega_0 = 0, q' \equiv q - \omega_0 = q$ とすれば完全に厳密式である。

3.3 系の特性方程式

前述した運動方程式の線形近似式をラプラス変換し、特性方程式を導いて系の運動に関する洞察を試みる。但し、外乱トルク、ジンバルトルカのトルクはないものとし、ロータは一定速度に保持されているものとする。さらに $p, q, r, \delta, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{\delta}$ は微小量とし、これらの初期値と ω_0 はゼロとする。 p, q, r, δ のラプラス変換量を P, Q, R, D で表現すると前節の式から次式を得る

$$\begin{pmatrix} I_{tx}s & I_{xy}s & I_{xz}s+h & J_x s^2 \\ I_{yx}s & I_{ty}s & I_{yz}s & 0 \\ I_{zx}s-h & I_{zy}s & I_{tz}s & -hs \\ J_x s & 0 & h & J_x s^2+B_s+K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

こゝに I_{tx}, I_{ty}, I_{tz} はジンバル・ロータ系をも含む衛星全体の主慣性モーメントである(慣性乗積はジンバル・ロータ系のそれがゼロのために不変である)。即ち

$$I_{tx} \equiv I_x + J_x, I_{ty} \equiv I_y + J_y, I_{tz} \equiv I_z + J_z \quad (36)$$

35式から特性方程式を得る際に、4行4列の行列の第2列または第2行はすべて s の1次式であるから、これの行列式は $s=0$ の根があり、他は s の4次式である。結果は $I_{xy}=I_{yx}, I_{yz}=I_{zy}, I_{zx}=I_{xz}$ の関係から次式となる。

$$\begin{aligned} s \{ & J_x(I_{tx}I_{ty}I_{tz} + 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{tx}I_{yz}^2 - I_{ty}I_{zx}^2 \\ & - I_{tz}I_{xy}^2 + J_xI_{yz}^2 - J_xI_{ty}I_{tz})s^4 + B(I_{tx}I_{ty}I_{tz} \\ & + 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{tx}I_{yz}^2 - I_{ty}I_{zx}^2 - I_{tz}I_{xy}^2) \\ & + \{ h^2(I_{tx}I_{ty} - I_{xy}^2 - J_xI_{ty}) + K(I_{tx}I_{ty}I_{tz} \\ & - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{tx}I_{yz}^2 - I_{ty}I_{zx}^2 - I_{tz}I_{xy}^2) \} s^2 \\ & + BI_{ty}h^2s + KI_{ty}h^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

機軸が慣性主軸の場合には乗積項が消え、36式から

$$s \{ J_x I_x I_{ty} I_{tz} s^4 + BI_{tx} I_{ty} I_{tz} s^3 + I_{ty} (h^2 I_x + KI_{tx} I_{tz}) s^2 + BI_{ty} h^2 s + KI_{ty} h^2 \} = 0 \quad (38)$$

無ジンバルまたはジンバル固定($\delta=0$)の場合には $B \rightarrow \infty$ か $K \rightarrow \infty$ であり、 $s=0$ の根の他に

$$s^2 = -h^2 / (I_{tx} I_{tz}) \equiv -(n_0)^2 \quad (39)$$

が得られ、これがニューテーション運動に相当する。若しも $B=0$ で $K \neq 0$ のジンバル系ならば38式の〔〕内で B は奇数次項のみの係数であるから〔〕内は偶数次の項だけとなり、 I_{ty} を消して

$$J_x I_x I_{tz} s^4 + (h^2 I_x + KI_{tx} I_{tz}) s^2 + Kh^2 = 0 \quad (40)$$

を得る。これの $J_x \approx 0$ のときの近似解を求める

$$I_x \approx I_{tx} \quad (41)$$

であるから40式は次の2組の虚根を有する:

$$s_1 = \pm j n_0 \sqrt{\frac{1}{1+h^2/(KI_{tx})}} \quad (42)$$

$$s^2 = \pm j \omega_n \sqrt{1+h^2/(KI_{tx})} \quad (43)$$

ただし

$$\omega_n \equiv \sqrt{K/J_x} \quad (44)$$

面白いことに固有振動数に関して

$$|s_1| \cdot |s_2| = n_0 \cdot \omega_n \quad (45)$$

となって、単体のそれと、衛星系に組んだときのその両者同士の積は不変である。 $K > 0$ ならば明らかに

$$|s_1| < |n_0| \quad (46)$$

であるから、ニューテーション速度が低減化され、このことは例えば地球の画像を走査撮像する場合などでは姿勢の変動速度が小さくなることであるから有利であり、 K が小さい(軟かい)バネでは特に著しい。

3.4 ニューテーション減衰時定数

38式で $B \neq 0$ の場合のニューテーション減衰時定数の近似解析解を求めて見る。同様な系について既に文献(2)で結果だけが与えられているが、本節では二種類の方法で求め、比較して見る。

(1) $|s_2| \gg |s_1|$ を利用する方法

一般に $\omega_n > n_0$ の場合が多く、後述する実験例でも特に顕著である。ジンバル・ロータ系と衛星本体と組んだ場合には(42), (43)式で示されるようにこの特徴が強調されることになるから、 $|s_1| \gg |s_1|$ と考えるのは妥当と思われる。38式の〔〕内を書き直すと、

$$s^4 + (B/J_x) s^3 + \{ (n_0^2 I_{tx} + K)/J_x \} s^2 + (Bn_0^2/J_x) s + (Kn_0^2/J_x) \equiv f(s) = 0 \quad (47)$$

この式の固有振動数は $|s_1|, |s_2|$ の近傍にあるものとして次式の形を取るものとする:

$$(s^2 + 2\zeta_1 |s_1| s + |s_1|^2) (s^2 + 2\zeta_2 |s_2| s + |s_2|^2) = 0 \quad (48)$$

これが(47)式と恒等であるとすれば3次と1次の係数がそれぞれ等しいから

$$B/J_x = 2(\zeta_1 |s_1| + \zeta_2 |s_2|) \quad (49)$$

$$Bn_0^2/J_x = 2|s_1||s_2|(\zeta_1 |s_2| + \zeta_2 |s_1|) \quad (50)$$

$$|s_2| \gg |s_1| \quad (51)$$

の条件から直ちに

$$\zeta_2 = \frac{B}{2J_x \omega_n \sqrt{1+h^2/(KI_{tx})}}$$

$$= \frac{\zeta_{20}}{\sqrt{1+h^2/(KI_{tx})}} \quad (52)$$

$$\text{たゞし } \zeta_{20} = B/(2J_x \omega_n) \quad (53)$$

はジンバル・ロータ系単体の減衰比である。

$$\zeta_1 = \zeta_2(n_o/\omega_n) \quad (54)$$

$$= \frac{Bh}{2\sqrt{K^2 I_{tx} I_{tz} + Kh^2 I_{tx}}} \quad (55)$$

一般にニューテーションの減衰はエネルギー消散の大きい程良好である。(52)(53)式から、 $\zeta_2 < \zeta_{20}$ であるから衛星に組込むと見掛け上ジンバル軸の減衰が劣化したかに見える。併し実際のエネルギー消散率 \dot{E} は

$$\dot{E} = B \dot{\delta} d\delta/dt = B(\dot{\delta})^2 \quad (56)$$

であるから B が一定であればジンバルが高速に動いた方が有利である。(56)式からジンバル軸に対する主な加振力は $J_x \dot{p}$ と $hr \cos \delta$ である。ニューテーションは p, r ともに振動数 $|s_1|$ の単振動で表現されるから、加振力の振幅は前者が $J_x p_o |s_1|$ 、後者は hr_o (p_o, r_o はそれぞれ p, r の振幅でほぼ同程度の大きさ)である。 $J_x |s_1| \ll h$ であるから h によって $\dot{\delta}, \dot{E}$ の増大する事は明らかである。

(2) ニュートン法による近似解

ここではニューテーションの根 s_1 の近傍にニューテーションの減衰根が存在すると仮定し $|s_1| \ll |s_2|$ の条件は用いない。併し $B=0$ とする。これは、 B の存在によって(47)式の $f(s)$ の根の移動量を微小と見做し、 $f(s)$ を s_1 の近傍で $f(s_1)$ を通り $f'(s_1)$ の傾斜の直線で近似して1次方程式で解く方法である。近似根を $s_{(2)}$ とすると

$$s_{(2)} = s_1 - f(s_1)/f'(s_1) \quad (57)$$

(47)式を変形して

$$f(s) = (s^2 + |s_1|^2)(s^2 + |s_2|^2) + (B/J_x)(s^2 + n_o^2)s \quad (58)$$

以下の式の誘導において、 $f'(s_1)$ を求める際に $B=0$ とおいた近似だけが入る。結果は

$$s_{(2)} = \pm j |s_1| - \frac{Bh^4}{2} \frac{1}{I_{tx}(KI_{tx} + h^2)^2 - J_x Kh^2 I_{tx}} \quad (59)$$

明らかに $I_{tx} > J_x$ であるから(59)式の第2項は減衰項であり、これが減衰時定数 T_c を決定する。

以上の両方法から T_c を求め、それぞれ T_{c1}, T_{c2} とする:

$$(55)式から \quad T_{c1} = \frac{1}{\zeta_1 |s_1|} = \frac{2 I_{tx}}{Bh^2} \{h^2 + KI_{tx}\} \quad (60)$$

$$(59)式から \quad T_{c2} = \left[-\mathcal{R}_e(s_{(2)}) \right]^{-1} \\ = \frac{2}{Bh^4} \{I_{tx}(h^2 + KI_{tx})^2 - J_x Kh^2 I_{tx}\} \quad (61)$$

参考として T_c に関する文献(2)中の(32)式を示す

$$T_{c3} = 2 I_{tx}(h^2 + KI_{tx})^2 / (Bh^4) \quad (62)$$

但しピッチ運動は無視して原文の H は $H=h$ とした。この式は(61)式で $J_x=0$ とおいたものに等しく、(60)式は(62)式において $(h^2 + KI_{tx})^2 \rightarrow (h^2 + KI_{tx})h^2$ とおいた場合に等しい。(60)式の誘導では $|s_1| \ll |s_2|$ の条件が入っているため、より簡単な式になったものと思われる。(1)の方法においては特性根 $s_{(1)}$ は(48)式から

$$s_{(1)} = -\zeta_1 |s_1| \pm j |s_1| \sqrt{1 - \zeta_1^2} \quad (63)$$

で与えられるから(59)式の $s_{(2)}$ と比較して虚数部がより小さくなっている。即ち複素平面上では $s_{(2)}$ は虚軸上の s_1 点から水平に左方へ延びるのに対し、 $s_{(1)}$ は多少下降しながら左方へ延びることに注目され度い。

4. 実験

本章では前章で導かれた運動方程式を確認するために行われた球面空気軸受式3軸実験テーブル装置によるハードウェア実験について述べる。

4.1 実験装置

本実験装置の詳細については既に報告⁸⁾してあるのでそれを参照していただきたいが、模擬衛星についてはその外観を図2に示す。FGMWの模擬衛星への搭載は図2のようになっているが、その構造は図3に示す通り、バイアス・モーメンタム・ホイールを1軸ジンバルで支持し、更にバネでジンバル角に比例する復元力を与えている。ポテンショメータはジンバル角をモニターするためにジンバル軸に直結している。またジンバル軸は模擬衛星のロール軸と平行になるように取り付けられている。尚本装置は試作したバイアス・モーメンタムホイールに、後にケースを取り付けてジンバル支持したものであるため、構造的にも多少の問題は残るが、実験には特に支障はなかった。

4.2 各種パラメータの測定

(1) 慣性主軸の決定と慣性モーメントの測定

主軸決定と慣性モーメント測定は既に報告した文献(5)によった。この方式で測定できるのは、ジンバル、ロータ系を含む衛星全体の慣性主軸と主慣性モーメントである。ところで特性方程式を解くためには(37)式からもわかる通り、機軸に関する衛星全体の慣性ダイアディック

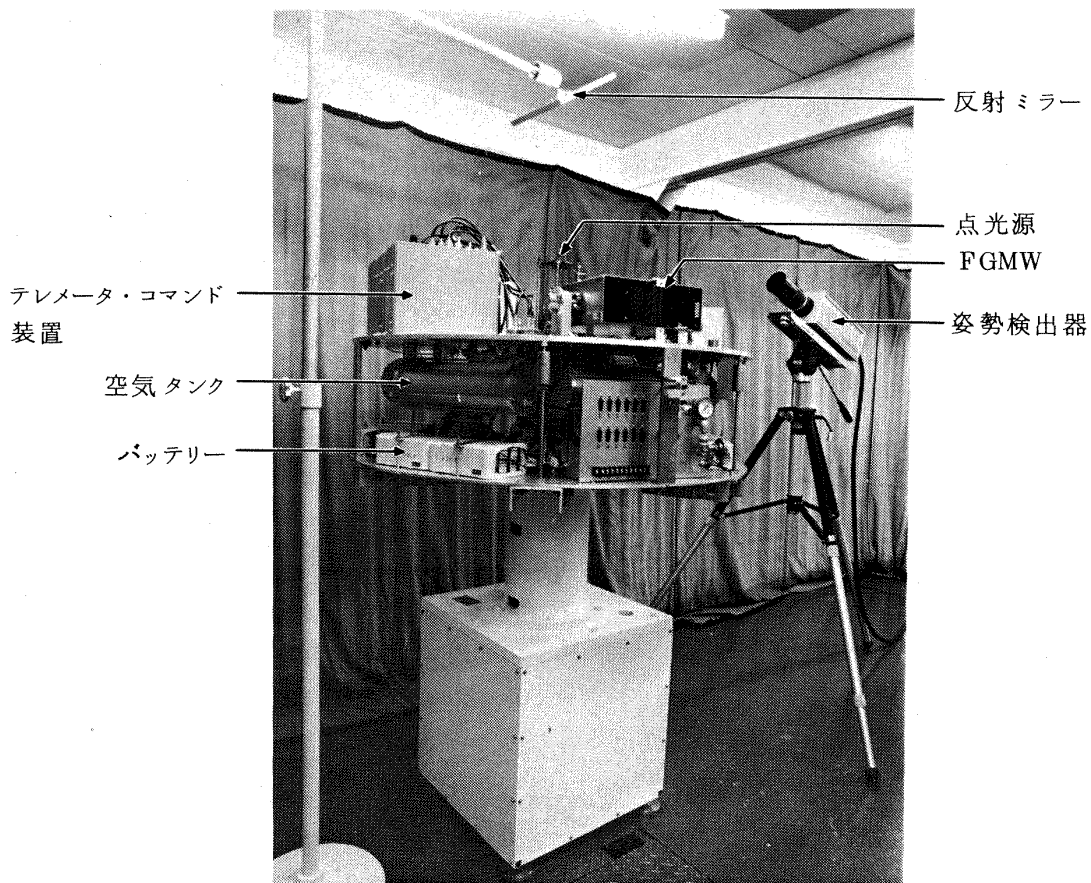


図2 模擬衛星 (直径 1000 mmφ)

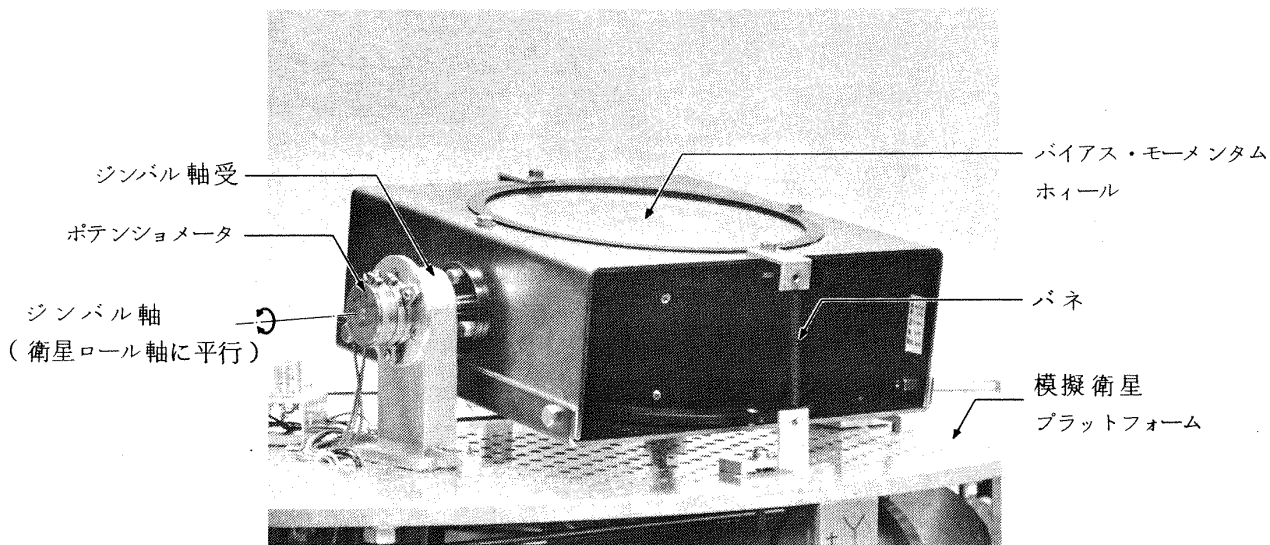


図3 FGMW (最大長 350 mm)

が必要である。

慣性主軸と機軸のずれをオイラー角 ϕ, θ, ψ で表わすと、その大きさは測定の結果 $\phi = 26.5^\circ$, $\theta = -4.8^\circ$, $\psi = 4.8^\circ$ であった。一方、主慣性モーメントは $I_{x_0} = 9.81 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I_{y_0} = 15.63 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I_{z_0} = 9.66 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ と測定され、計算の結果、慣性ダイアディックは表1のようになった。尚表1ではこの他にジンバル系の実測した特性も一緒に示してある。

表1 衛星・ジンバル系の諸特性

主慣性モーメント		
I_{x_0}	9.81	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
I_{y_0}	15.63	
I_{z_0}	9.66	
慣性モーメントおよび慣性乗積		
I_{tx}	9.85	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
I_{ty}	15.39	
I_{tz}	9.68	
I_{xy}	0.65	
I_{yz}	0.22	
I_{zx}	0.03	
ジンバル系		
J_x	3.91×10^{-2}	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
h	3.30	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$
K	1.97×10^{-1}	$\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
B	3.51×10^{-2}	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$
ζ	0.2	

(2) 減衰比の測定

ジンバル系の制動トルクには、速度に比例する粘性摩擦と、ほぼ一定値である固体摩擦（乾性摩擦またはクーロンフリクションともいう）によるトルクの2種類がある。ジンバル角の振幅が大きい場合には前者が制動トルクの大部分をしめるが、振幅が小さくなるにつれて相対的に後者の影響が大きくなる。ところで運動方程式を導くにあたっては粘性摩擦のみを考慮したため理論値と実験値の不一致が予想される。減衰比 ζ を決定する際は、ジンバルを振動させて特に振幅の小さい範囲（0.1度以下）の減衰特性から算定し、固体摩擦の影響を含める必要がある。振幅の大きい範囲では固体摩擦の影響が殆ど無く、 $\zeta = 0.09$ であった。従ってより小振幅ではこれ以上の値であろう事は明らかである。ジンバル軸にはポテンショメータの他に、ホイール駆動用のリード線など

も含まれ、そのため固体摩擦の推定は困難である。しかし理論値と比較するためには何らかの等価な ζ を決定する必要がある。ここではジンバル系単体の測定できたほぼ最小の振動振幅の時の値として $\zeta \approx 0.2$ を採用した。

4.3 実験結果

FGMW を搭載した模擬衛星のニューテーション減衰特性を図4に示す。図4にはロール・ヨー平面上のピッチ軸の動き（ニューテーション運動）とロール・ヨー軸に分解したニューテーション運動を示してある。この実験の結果からニューテーション減衰時定数は約130秒となった。この値は従来のニューテーションダンパの減衰時定数に比べ、1桁以上の改良になっている。⁹⁾ 尚図4においてピッチ軸は時間とともに一ヨー軸方向に流されているが、これは模擬衛星の重心と球面空気軸受装置の球心が完全に一致しないために地球重力の影響を受け、それによって生ずるプレセッショントルクのためで、ハードウェア実験上の問題による。

次に理論値との比較を試みる。人工衛星の姿勢制御用アクチュエータに本実験で使用したようなジンバル系が含まれる場合、その運動方程式が複雑になる事は既に述べたが、ハードウェア実験の結果、更にジンバル系の制動トルク（特に固体摩擦）の影響を受けてより解析困難になる。従って理論上の仮定がハードウェア実験においても厳密に成り立つという事は言い難く、線形化にもおのずと限界が生ずる。そのため定量的な一致は見られなくても定性的にはそのような傾向にあるという事が確認できれば、ほぼ目的は達成されたと見て良い。

(39), (44) 式より

$$n_0 = h / \sqrt{I_{tx} I_{tz}} = 3,380 \times 10^{-1} \text{ rad/sec} \quad (64)$$

$$\omega_n = \sqrt{K/J_x} = 2,244 \text{ rad/sec} \quad (65)$$

となり、それぞれの周期を求めると

$$T_0 = 1.86 \times 10 \text{ sec} \quad (66)$$

$$T_n = 2.80 \text{ sec} \quad (67)$$

となる。 T_0 はジンバル系を固定し、模擬衛星に h なる角運動量を与えた場合の衛星のニューテーション運動の周期である。また T_n はジンバル系単体（つまり衛星と力学的にカップルしない）の周期で、バネ常数 K とジンバル軸まわりの慣性モーメント J_x で決まる。次にジンバル系と衛星がカップルした場合、 n_0, ω_n は (42), (43) 式で表わされるような角速度に変化する。つまり

$$|s_1| = \frac{n_0}{\sqrt{1+h^2/(KI_{tz})}} = 1,304 \times 10^{-1} \text{ rad/sec} \quad (68)$$

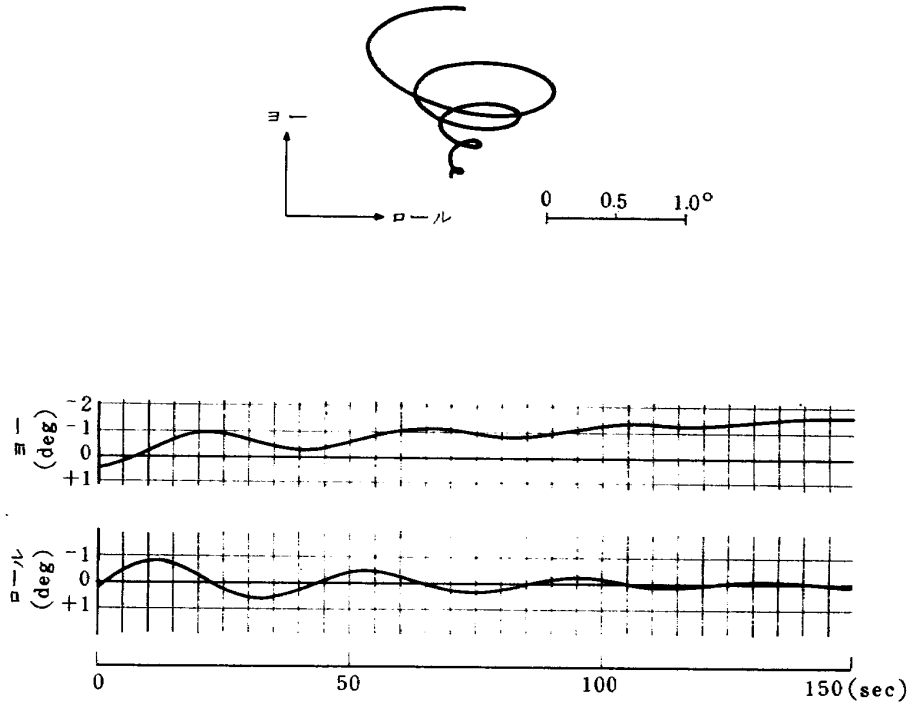


図4 ニューテーション減衰特性

$$|s_2| = \omega_n \sqrt{1+h^2/(KI_{tz})} = 5.814 \text{ rad/sec} \quad (69)$$

従ってそれぞれの周期 T_1, T_2 は

$$T_1 = 4.82 \times 10 \text{ sec} \quad (70)$$

$$T_2 = 1.08 \text{ sec} \quad (71)$$

となり、単体の場合とカップルした場合と比較すると、後者の場合、衛星のニューテーション周期は長くなり、逆にジンバル周期は短くなる。その割合は $\sqrt{1+h^2/(KI_{tz})}$ なる定数で決定される。Kが小さい程その影響が大きい事は明らかであり、この点については既に3.3で述べた。(68), (69)式(あるいは(42), (43)式)を求める際には慣性乗積項を無視し、 $B=0$ とおいた。後者の仮定は(38)式の4次式を解析的に解くためにおいたもので、実際はもちろん $B \neq 0$ である。しかし今のところ周期のみについて着目し、減衰項((38)式の根の実数部)については考えていないので、 $B=0$ とおいて解いても大差はないと考えられる。事実、実験結果より、

$$|s_1| = 1.50 \times 10^{-1} \text{ rad/sec} \quad (72)$$

$$|s_2| = 5.03 \text{ rad/sec} \quad (73)$$

更に周期は

$$T_1 = 4.19 \times 10 \text{ sec} \quad (74)$$

$$T_2 = 1.25 \text{ sec} \quad (75)$$

となり、理論とはほぼ15%程度の誤差で一致している。

次に減衰時定数について比較検討を行なってみる。実験結果からはニューテーションの減衰時定数が約130秒

であった。4次の特性方程式は計算機の数値解法により、その結果(38)式は $s=0$ の根の他に

$$s_1 = -0.12994 \times 10^{-2} \pm j 0.13090 \quad (76)$$

$$s_2 = -0.44940 \pm j 0.57983 \times 10 \quad (77)$$

の根が存在する。(77)式はニューテーション運動に関する項で、これにより減衰時定数770秒、周期48.0秒を得る。周期の方は実験値と大差ないが、減衰時定数では約6倍異なっている。また慣性乗積を考慮した場合は(37)式より

$$s_1 = -0.12948 \times 10^{-2} \pm j 0.13068 \quad (78)$$

$$s_2 = -0.44936 \pm j 0.57972 \times 10 \quad (79)$$

となり、ニューテーションの減衰時定数、周期はそれぞれ772秒、48.1秒となって慣性乗積項の影響は少ない事がわかる。いずれにせよ減衰時定数に関しては理論と実験結果とで約6倍の差が出てしまった。表1のパラメータの中で一番不確定な項は粘性抵抗係数Bであり、 $B = 2\zeta\omega_n J_x$ の関係から ζ の不確定さが問題となる。数値計算の結果、表1のBの値を6倍すると、減衰時定数、周期はそれぞれ128秒、48.0秒となり、ほぼ実験結果に合う事がわかった。結局 $\zeta = 0.2$ の代りに $\zeta = 1.2$ に証正すれば良い。以上、実験結果から理論と合うようなBを求める、いわゆるBの推定問題となってしまったが、今だ解析的に固体摩擦をどのように定量的に取り扱って良いかは未定なので、今後の問題として残しておく。

以上の結果とは別に、3.4では減衰時定数 T_c を解いて

いるので、その近似度を比較してみる。(60)~(62)式は更に次のように書き直せる。

$$T_{c1} = \frac{2I_{tx}}{B} \left[1 + \frac{KI_{tx}}{h^2} \right] \quad (80)$$

$$T_{c2} = \frac{2I_{tx}}{B} \left\{ \left(1 + \frac{KI_{tx}}{h^2} \right)^2 - \frac{J_x}{I_{tx}} \frac{KI_{tx}}{h^2} \right\} \quad (81)$$

$$T_{c3} = \frac{2I_{tx}}{B} \left[1 + \frac{KI_{tx}}{h^2} \right]^2 \quad (82)$$

数値を代入すると上式はそれぞれ $T_{c1} = 660$ 秒, $T_{c2} = 775$ 秒, $T_{c3} = 775$ 秒となり, (37)式の4次式を解いた結果の770秒とは(80)式を除いてほぼ一致している。尚(81)式右辺第2項は第1項に比べ $10^{-3} \sim 10^{-4}$ のオーダーである。

5. あとがき

FGMW方式によるニューテーション減衰特性の向上について論じたが、理論と実験の比較では実験値が時定数で約1/6という結果となってしまった。ニューテーション中のジンバル角が読取れれば固体摩擦をも含めた等価粘性抵抗を導入して、より正確な理論値が導けたかも知れない。併しこのことは人工衛星の姿勢制御を研究するには、単に数学モデルを用いる計算機シミュレーションの一つの欠点を示したことになる。今回の実験装置は既に分解してしまったのでこれの再実験は不可能であるが、新しいFGMWを試作したので今後これによる実験でダンピングに関する結論が得られる見込である。というのはジンバルの粘性抵抗としてトルカを用いた電氣的粘性抵抗を大きく与えることが可能となるので、固体摩擦の影響が小さくなり、ニューテーションの減衰時定数は今回のものより更に数分の1になる見込だからである。

引用文献

- 1) 村上力; 人工衛星の3軸姿勢制御について, 日本航空宇宙学会誌, Vol 24, No 266 (1976/3) pp. 14-20
- 2) J. U. Beusch and N. P. Smith; Stable Equilibria of Satellites Containing a Momentum Wheel in a Controlled Gimbal, J. Spacecraft, Vol. 8, No. 7 (1971/7), pp. 736~742.
- 3) N. P. Smith and R. W. Brockett; Attitude Control Dynamics for LES-8/9, Lincoln Lab (M.I.T.) Tech. Note 1973-27 (1973/7).
- 4) A. L. Greensite; Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems Vol. XII-Attitude

Control in Space, NASA CR-831 (1967/8), pp. 9~23, 113~116.

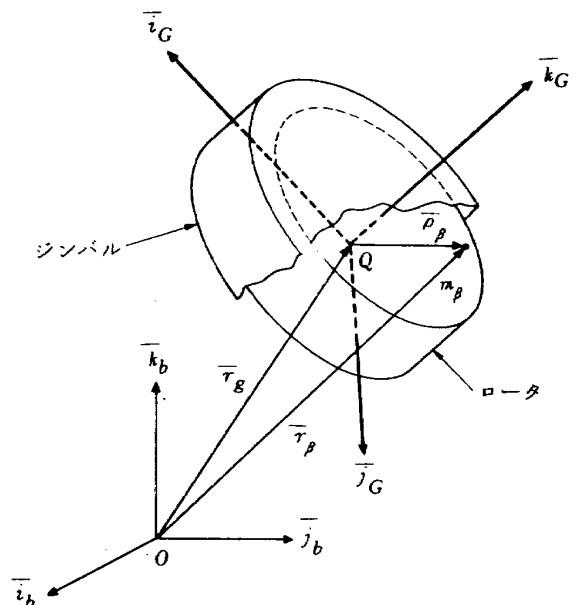
- 5) 村上力, 木田隆, 中島厚, 球面空気軸受支持模擬衛星の慣性主軸決定法, 航技研報告 TR-450 (昭和51)
- 6) E. T. Whittaker; A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, (1936) Cambridge Univ. Press, London, pp. 41~44.
- 7) 例えば, S. Fifer; Analog Computation, (1961) McGraw-Hill Book C, Inc., pp. 1114~1119.
- 8) 村上力他; 人工衛星の姿勢制御研究用3軸テーブル装置および実験例, 航技研資料 TM-304 (昭和51)
- 9) K. Phillips; Active Nutation Damping Utilizing Spacecraft Mass Properties, IEEE Transaction Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-9, No. 5 (1973/9), pp. 688~693.

付録I 本文の(1)式の誘導

文献(4)の必要部分を再録し、式の番号も原文のままとし、著者の追加した分に関してはその都度コメントを入れて式の番号にはM記号をつける。

1. 文献(4)の付録A: 機体に搭載されたロータの角運動量

文献(4)のp.113の図A.1において、機体の重心Oに対するロータの角運動量 \vec{H}_g を求める(後述するようにO点は機体の重心と考えずに、機体に固定されたある一点と考えた方がよい)。



図A1 機軸とジンバル・ロータ系の関係

$$\bar{H}_g = \sum_{\beta} \bar{r}_{\beta} \times m_{\beta} \bar{V}_{\beta} \quad (\text{A1})$$

こゝに m_{β} はロータを構成する任意の部分の質量で、 \bar{V}_{β} は慣性空間に対する m_{β} の速度である。即ち

$$\bar{V}_{\beta} = \frac{d}{dt} (\bar{r}_o + \bar{r}_{\beta}) \quad (\text{A2})$$

こゝに \bar{r}_o は慣性基準系の原点から O 点迄の距離、また

$$\bar{r}_{\beta} = \bar{r}_g + \bar{\rho}_{\beta} \quad (\text{A3})$$

であるから

$$\bar{V}_{\beta} = \bar{V}_o + \frac{d\bar{r}_g}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_{\beta}}{dt} \quad (\text{A4})$$

こゝに $\bar{V}_o = \frac{d}{dt} \bar{r}_o$ は O 点の慣性空間に対する速度。

(A4) 式の第 2, 第 3 項は

$$\frac{d}{dt} \bar{r}_g = \left(\frac{\delta \bar{r}_g}{\delta t} \right)_b + (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g \quad (\text{A5})$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_{\beta} = \left(\frac{\delta \bar{\rho}_{\beta}}{\delta t} \right)_g + (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{\rho}_{\beta} \quad (\text{A6})$$

こゝに $\bar{\omega}_r, \bar{\omega}_b, \bar{\omega}_G, \bar{\omega}_g$ はそれぞれ軌道基準系の慣性空間に対する角速度、軌道基準系に対する機体軸系の角速度、ジンバル軸系の機体軸系に対する角速度、ロータ軸系のジンバル軸系に対する角速度、である。

こゝでは機体、ロータともに剛体とするから (A5),

(A6) の第一項はともてゼロである：

$$\left(\frac{\delta \bar{r}_g}{\delta t} \right)_b = \left(\frac{\delta \bar{\rho}_{\beta}}{\delta t} \right)_g = 0$$

(A5), (A6) を (A4) に代入すると

$$\bar{V}_{\beta} = \bar{V}_o + (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g + (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{\rho}_{\beta} \quad (\text{A7})$$

これを (A1) に代入するのであるが (A3) と

$$\sum_{\beta} m_{\beta} \bar{\rho}_{\beta} = 0 \quad (\text{A8})$$

を使うと (ロータは回転対称体)

$$\bar{H}_g = m_g \bar{r}_g \times [\bar{V}_o + (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g] + \sum_{\beta} m_{\beta} \bar{\rho}_{\beta} \times [(\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{\rho}_{\beta}] \quad (\text{A9})$$

こゝに $m_g = \sum_{\beta} m_{\beta}$ で、ロータの質量である

(A9) を書き直すと

$$\bar{H}_g = m_g \bar{r}_g \times [\bar{V}_o + (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g] + \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (\text{A10})$$

こゝに \mathbf{J} はロータの、ロータ重心まわりの慣性ダイアディックである。即ち $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ を単位ベクトルとして

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= A \bar{i}_g \bar{i}_g + A \bar{j}_g \bar{j}_g + C \bar{k}_g \bar{k}_g \\ &= A \bar{i}_G \bar{i}_G + A \bar{j}_G \bar{j}_G + C \bar{k}_G \bar{k}_G \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$A = \sum_{\beta} m_{\beta} (y_{\beta}^2 + z_{\beta}^2) = \sum_{\beta} m_{\beta} (x_{\beta}^2 + z_{\beta}^2) \quad (\text{A12})$$

$$C = \sum_{\beta} m_{\beta} (x_{\beta}^2 - y_{\beta}^2) \quad (\text{A13})$$

$$\bar{\rho}_{\beta} = x_{\beta} \bar{i}_g + y_{\beta} \bar{j}_g + z_{\beta} \bar{k}_g \quad (\text{A14})$$

ロータの回転軸まわりの角速度を Ω とすると

$$\bar{\omega}_g = \Omega \bar{k}_g = \Omega \bar{k}_G \quad (\text{A15})$$

ロータと衛星本体の重心が一致する特別な場合には

$\bar{r}_g = 0$ であるから

$$\bar{H}_g = \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (\text{A16})$$

以上が付録である。最後の (A16) は文献(4)の本文でそのまま引用しているものである。次に $\bar{r}_g = 0$ の条件のない場合を誘導する。

2. ロータ取付位置が任意の場合 ($\bar{r}_g \neq 0$)

(A10) を変形して

$$\begin{aligned} \bar{H}_g &= m_g \bar{r}_g \times \bar{V}_o + m_g \bar{r}_g \times [(\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g] \\ &\quad + \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \end{aligned} \quad (\text{M1})$$

右辺第 2 項はロータが質点として \bar{r}_g に存在するときの O 点まわりの角運動量に他ならない。ロータの質点としての O 点に対する慣性ダイアディックを \mathbf{J}' とすると

$$m_g \bar{r}_g \times (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_g = \mathbf{J}' \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (\text{M2})$$

$$\mathbf{J}' = m_g (\bar{r}_g^2 \mathbf{E} - \bar{r}_g \bar{r}_g) \quad (\text{M3})$$

こゝに \mathbf{E} は単位ダイアディックである

従って (M1) は

$$\bar{H}_g = m_g \bar{r}_g \times \bar{V}_o + \mathbf{J}' \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (\text{M4})$$

次に衛星本体の点 O (衛星本体の重心ではなく衛星に固定されたある点) に対する角運動量 \bar{H}_b を求めるとロータの場合と全く同様に

$$\bar{H}_b = m_b \bar{r}_b \times \bar{V}_o + \mathbf{I}' \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + \mathbf{I} \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (\text{M5})$$

こゝに m_b は衛星本体の質量、 \bar{r}_b は O 点から衛星本体重心までの距離、 \mathbf{I} は衛星本体の衛星本体重心まわりの慣性ダイアディック、 \mathbf{I}' は衛星本体を質量 m_b の質点としたときの O 点まわりの慣性ダイアディックで

$$\mathbf{I}' = m_b (\bar{r}_b^2 \mathbf{E} - \bar{r}_b \bar{r}_b) \quad (\text{M6})$$

こゝから再び文献(1)の本文 p. 15 に入る。 O 点に関する系の全角運動量 \bar{H} は

$$\bar{H} = \bar{H}_b + \bar{H}_g \quad (\text{13})$$

であるが \bar{H}_b, \bar{H}_g はそれぞれ (M5), (M4) で与えられたものを使用すると

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (m_b \bar{r}_b + m_g \bar{r}_g) \times \bar{V}_o + (\mathbf{I}' + \mathbf{J}') \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \\ &\quad + \mathbf{I} \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \end{aligned} \quad (\text{M7})$$

こゝで O 点として上式の第一項がゼロとなる点、即ちロータを含む系の重心を選ぶと上式は

$$\bar{H} = (\mathbf{I} + \mathbf{I}' + \mathbf{J} + \mathbf{J}') \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + \mathbf{J} \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G) \quad (\text{M8})$$

0点に対する系全体の慣性ダイアディックを I_t とすると

$$I_t \equiv (I + I' + J + J') \quad (M9)$$

$$\bar{H} = I_t \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G) \quad (M10)$$

文献(1)では

$$\bar{H} = I \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G) \quad (17)$$

としているが、これにはまえがきで述べた3条件が入っている。それに対して(M10)では(1)の条件しか入っていない。

人工衛星の姿勢運動のハードウェアによるシミュレータとして、球面空気軸受支持式のテーブルが世界的に広く採用されている。実験に際して、テーブル上に構成された模擬衛星の重心は軸受の球心に一致するように細心の注意を払って調整する。模擬衛星は姿勢運動の模擬だけに主眼を置いた姿勢運動モデルであるから、例えばロータなども試作されたバラックセット的なものが多く、模擬衛星の I_t に占める J の割合は無視できなくなる。併し模擬衛星の場合には I よりむしろ I_t の方が実験的に実測が容易である⁵⁾。従ってこの意味からも(M10)は有効である。

以上はジンバルを無視した場合であるが、ジンバルを無視せず、その慣性ダイアディック J_G と重量 m_G 、その重心位置が0点に対して \bar{r}_G 、0点に対する質点としての慣性ダイアディックを J'_G とすれば

$$J'_G = m_G (\tau_G^2 E - \bar{r}_G \bar{r}_G)$$

であって、ジンバルの角運動量 \bar{H}_G は(M4)式と全く同様に

$$\bar{H}_G = m_G \bar{r}_G \times \bar{V}_o + J'_G \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J_G \cdot (\bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (M18)$$

で与えられる。従って0点に関する系全体の角運動量 \bar{H} は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}_b + \bar{H}_G + \bar{H}_g \\ &= (m_b \bar{r}_b + m_G \bar{r}_G + m_g \bar{r}_g) \times \bar{V}_o + (I' + J'_G + J'_g) \\ &\quad \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + I \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J_G \cdot (\bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b \\ &\quad + \bar{\omega}_r) + J_g \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (M19) \end{aligned}$$

こゝに J_g, J'_g はロータに関するものである。

0点として系全体の重心を選べば上式の第1項は消え

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (I + I' + J'_G + J'_g) \cdot (\bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J_G \cdot (\bar{\omega}_G \\ &\quad + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) + J_g \cdot (\bar{\omega}_g + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r) \quad (M20) \end{aligned}$$

これが本文の(1)式である

付録II quasi 座標法による運動方程式の誘導

文献(3)では

- 1) 機軸は系の慣性主軸
- 2) ジンバルもロータも球状の慣性楕円体

- 3) ジンバルに複元バネなし
- 4) ジンバル軸の粘性抵抗無視
- 5) レートジャイロを別に追加
- 6) 軌道運動は考慮しない

の5条件下で誘導している。以下ではレートジャイロは含まず、2)の条件は回転対称体とし、他の1),3),4),6)を一般化して誘導する。

quasi 座標法によるラグランジュの方程式に関しては文献(6)を参照されたい。この式の誘導には運動エネルギー、位置エネルギー U 、Rayleigh の消散関数 \mathcal{F} などを算出する必要がある。機軸の角速度 $\bar{\omega}$ は、

$$\bar{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T_b \equiv \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_b \quad (B-0)$$

とする。

ジンバル・ロータ系を含む衛星全体の重心を O とする場合について図A-1を参考に、衛星本体、ジンバル、ロータの各構成素子の速度を求める。それぞれ b, G, g の下添字で表現して

$$\bar{V}_b = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_b}{dt} = \bar{V}_o + \left(\frac{\delta \bar{\rho}_b}{\delta t} \right)_b + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_b \quad (B-1)$$

ジンバル軸以外は剛体であるから

$$\bar{V}_b = \bar{V}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_b \quad (B-2)$$

以下同様に

$$\begin{aligned} \bar{V}_G &= \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \left(\frac{\delta \bar{r}_G}{\delta t} \right)_b + \bar{\omega} \times \bar{r}_G + \left(\frac{\delta \bar{\rho}_G}{\delta t} \right)_G + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \\ &\quad \times \bar{\rho}_G = \bar{V}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_G + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \times \bar{\rho}_G \quad (B-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_g &= \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \left(\frac{\delta \bar{r}_G}{\delta t} \right)_b + \bar{\omega} \times \bar{r}_G + \left(\frac{\delta \bar{\rho}_g}{\delta t} \right)_g + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G \\ &\quad + \bar{\omega}_g) \times \bar{\rho}_g = \bar{V}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_G + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \times \bar{\rho}_g \quad (B-4) \end{aligned}$$

但しジンバルとロータの重心は一致するとする ($\bar{r}_g = \bar{r}_G$)。運動エネルギー \mathcal{T} を求めるためにまず速度の自乗を求めると：

$$V_b^2 = V_o^2 + (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_b)^2 + 2\bar{V}_o \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_b) \quad (B-5)$$

$$\begin{aligned} V_G^2 &= V_o^2 + (\bar{\omega} \times \bar{r}_G)^2 + [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \times \bar{\rho}_G]^2 + 2V_o \cdot (\bar{\omega} \\ &\quad \times \bar{r}_G) + 2V_o \cdot [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \times \bar{\rho}_G] + 2(\bar{\omega} \times \bar{r}_G) \\ &\quad \cdot [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \times \bar{\rho}_G] \quad (B-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_g^2 &= V_o^2 + (\bar{\omega} \times \bar{r}_G)^2 + [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \times \bar{\rho}_g]^2 \\ &\quad + 2V_o \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_G) + 2V_o \cdot [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \times \bar{\rho}_g] \quad (B-7) \end{aligned}$$

各構成素子の密度を σ とすると、一般的に公式から

$$(\bar{\omega} \times \bar{\rho})^2 = \omega^2 \rho^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho})^2 \quad (B-8)$$

であるから例えば衛星本体では

$$\begin{aligned} \Sigma [(\bar{\omega} \times \bar{\rho}_b)^2 \sigma_b] &= \bar{\omega} \cdot \Sigma [\sigma_b (\rho_b^2 \mathbf{E} - \bar{\rho}_b \bar{\rho}_b)] \cdot \bar{\omega} \\ &= \bar{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \bar{\omega} \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

つまり0点まわりの慣性ダイアディックで表現できる。同様に

$$\Sigma [(\bar{\omega} \times \bar{r}_G)^2 \sigma_G] = \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_G \cdot \bar{\omega} \quad (\text{B-10})$$

$$\Sigma [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \times \bar{\rho}_G]^2 \sigma_G = (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \cdot \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \quad (\text{B-11})$$

$$\Sigma [(\bar{\omega} \times \bar{r}_G)^2 \sigma_g] = \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_g \cdot \bar{\omega} \quad (\text{B-12})$$

$$\begin{aligned} \Sigma [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \times \bar{\rho}_g \sigma_g] &= (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \cdot \mathbf{J}_g \\ &\cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

これらを用いて各要素の運動エネルギー \mathcal{T}_i ($i=b, G, g$) を求めると:

$$2\mathcal{T}_b = m_b V_o^2 + \bar{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \bar{\omega} + 2\bar{V}_o \cdot [\bar{\omega} \times \Sigma (\bar{\rho}_b \sigma_b)] \quad (\text{B-14})$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{T}_G &= m_G V_o^2 + \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_G \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \cdot \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \\ &+ 2\bar{V}_o \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_G m_G) + 2\bar{V}_o \cdot [(\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \\ &\times \Sigma (\bar{\rho}_G \sigma_G)] + 2(\bar{\omega} \times \bar{r}_G) \cdot [(\bar{\omega} + \bar{r}_G) \\ &\times \Sigma (\bar{\rho}_G \sigma_G)] \\ &= m_G V_o^2 + \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_G \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \cdot \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \\ &+ 2\bar{V}_o \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_G m_G) \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

何故なら $\Sigma (\bar{\rho}_G \sigma_G)$ はジナル重心に対しゼロであるからである。同様に

$$2\mathcal{T}_g = m_g V_o^2 + \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_g \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \cdot \mathbf{J}_g \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) + 2\bar{V}_o \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_G m_g) \quad (\text{B-16})$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\mathcal{T} &\equiv 2 \Sigma \mathcal{T}_i \\ &= (\Sigma m_i) V_o^2 + 2\bar{V}_o \cdot [\bar{\omega} \times \{ \Sigma (\bar{\rho}_b \sigma_b) \\ &+ \bar{r}_G (m_G + m_g) \}] + \bar{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \bar{\omega} + \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_G \cdot \bar{\omega} \\ &+ \bar{\omega} \cdot \mathbf{J}'_g \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \cdot \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \\ &+ (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \cdot \mathbf{J}_g \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

0点 は系全体の重心であるから第2項は消え、整理すると

$$2\mathcal{T} = M V_o^2 + \bar{\omega} \cdot \mathbf{I}'_t \cdot \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) \cdot \mathbf{J}_G \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G) + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \cdot \mathbf{J}_g \cdot (\bar{\omega} + \bar{\omega}_G + \bar{\omega}_g) \quad (\text{B-18})$$

但し M は系全体の質量、 \mathbf{I}'_t はジナル・ロータ系がその重心位置に収縮して質点になった場合の0点に関する全系の慣性ダイアディックである。(B-18)式は系全体の重心を基準にとつたために並進と回転の両運動の寄与が完全に分離されたのである。

次に位置エネルギー u はジナルのバネが寄与し、

$$2u = K \delta^2 \quad (\text{B-19})$$

である。消散関数はジナル軸とロータ軸の粘性抵抗に

よるものだけで

$$2\mathcal{D} = B(\dot{\delta})^2 + B_n \mathcal{Q}^2 \quad (\text{B-20})$$

である。さらにラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - u \quad (\text{B-21})$$

と与えられる。

以上の材料をもとに quasi 座標 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を含むラグランジュの運動方程式 (B-22) を導く:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_x} \right) + \omega_y \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_x} \right) - \omega_z \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_y} \right) &= L_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_y} \right) + \omega_z \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_x} \right) - \omega_x \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_z} \right) &= L_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_z} \right) + \omega_x \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_y} \right) - \omega_y \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_x} \right) &= L_z \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\delta}} &= T \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathcal{Q}} &= T_g \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-22})$$

こゝに a はロータの回転角で $\dot{a} = \mathcal{Q}$ である (今回は \mathcal{L} の中に a は陽には含まれないから、この項はゼロ)。これらに (B-18) ~ (B-21) 式を代入すると本文の (29) ~ (33) 式が得られる。但し本文の $\omega_o = 0, p = \omega_x, g' = \omega_y, r = \omega_z$ とおいたものと全く等しい。(B-22) 式の方は $\bar{\omega} = \bar{\omega}_b + \bar{\omega}_r$ として最初から慣性座標に対する角速度を採用しているのだから、完全に厳密である。もちろん本文の古典的ニュートン式定式化においても最初から $\bar{\omega}$ を採用すれば、全く等しい形となる。

次に慣性座標系ではなく、軌道座標系に対する姿勢運動として厳密に解く場合 (例えば計算機シミュレーション) について述べる。

まず (B-22) 式から $\bar{\omega}, \delta, \mathcal{Q}$ の合計5個のスカラー変数 ($\bar{\omega}$ は $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の3個) が求まる。そのうちで姿勢に直接関係する $\bar{\omega}$ だけを論ずる。

$$\bar{\omega}_b \equiv (p, q, r)^T = \bar{\omega} - \bar{\omega}_r \quad (\text{B-23})$$

と与えられるが、 $\bar{\omega}_r$ は (6), (7) 式から得られ、結局

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x + \omega_o c \theta s \phi \\ \omega_y + \omega_o (s \phi s \theta s \phi + c \phi c \phi) \\ \omega_z + \omega_o (c \phi s \theta s \phi - s \phi c \phi) \end{pmatrix} \quad (\text{B-24})$$

となるが、オイラー角は良く知られているように⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= p + \dot{\phi} s \theta \\ \dot{\theta} &= q c \theta - r s \phi \\ \dot{\phi} &= q s \phi \sec \theta + r c \phi \sec \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-25})$$

であるから (B-24) 式を代入して

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \omega_x + \omega_o c \theta s \phi + \dot{\phi} s \theta \\
 \dot{\theta} &= \left\{ \omega_y + \omega_o (s \phi s \theta s \phi + c \phi c \phi) \right\} c \theta \\
 &\quad - \left\{ \omega_z + \omega_o (c \phi s \theta s \phi - s \phi c \phi) \right\} s \phi \\
 \dot{\phi} &= \left\{ \omega_y + \omega_o (s \phi s \theta s \phi + c \phi c \phi) \right\} s \phi \\
 &\quad + \left\{ \omega_z + \omega_o (c \phi s \theta s \phi - s \phi c \phi) \right\} c \phi \right\} \sec \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-26})$$

を得る。(B-22)式から得られた $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を用いて上式を積分すれば軌道座標軸に対する姿勢角としてオイラー角が厳密に求められる。

オイラー角が微小であれば

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_x &\approx p - \omega_o \phi \\
 \omega_y &\approx q - \omega_o = q' \\
 \omega_z &\approx r + \omega_o \phi
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-27})$$

であるが ϕ と $\dot{\phi}$ が混入するので本文では $\omega_o \phi$ と $\omega_o \dot{\phi}$ を無視し、 $\dot{\omega}$ だけは $\dot{\phi} \approx r, \dot{\phi} \approx p$ の近似を入れて

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\omega}_x &= \dot{p} - \omega_o r \\
 \dot{\omega}_y &= \dot{q} \\
 \dot{\omega}_z &= \dot{r} + \omega_o p
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-28})$$

まで含めてある。

既 刊 資 料

TM- 310	ストラップダウン用慣性センサシステムの評価プログラム	1976年 9月	大坪孔治, 新田慶治 森英彦, 小口美津夫
TM- 311	無人ランデブ・ドッキングに関する検討	1976年 9月	中井映一, 埜武敏 崎哲二, 山中龍夫 岡本修, 吉村庄市
TM- 312	材料試験用簡易小型低温槽	1976年 9月	池田為治, 藤沢良昭
TM- 313	ロケット・エンジン高空性能試験用ディフューザの設計計算	1976年 9月	宮島博, 阿部盛 木皿且人
TM- 314	加圧時のジェット燃料の物性値	1976年 10月	相波哲朗
TM- 315	1次方程式の解法III -長方形列を対象とするもの-	1976年 10月	福田正夫, 末松俊二
TM- 316	三次元非粘性超音速流の一差分数値解	1976年 10月	吉澤昭, 野村茂昭
TM- 317	極超音速風洞計測装置について II. 電子計算機システムの更新	1976年 10月	吉澤昭
* TM- 318	高压燃焼器の研究 (VI) -実機装着形ライナの燃焼実験結果-	1976年 10月	鈴木邦男, 石井浅五郎
TM- 319T	Operational Experiences related to Severe Turbulence between September 1973 and August 1975	Nov. 1976	Kosaburo YAMANE, Kazuyuki TAKEUCHI, Koichi ONO, Tokuo SOTOZAKI

* 配布先限定版

航空宇宙技術研究所資料 320号

昭和51年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
