

UDC 533.6.011.5:
629.76.024.32

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-331

超音速に於ける円錐・円筒物体上の圧力係数

野 溝 国 生

1977 年 5 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

超音速に於ける円錐・円筒物体上の圧力係数*

野 溝 国 生**

Pressure Coefficient of Supersonic Flows Over Cone-Cylinder

By Kunio NOMIZO

ABSTRACT

Numerical calculation of supersonic flows of a perfect gas over a cone-cylinder is treated. Characteristic method is applied and this method found useful for a cone-cylinder with slope discontinuities.

In this report, the nonlinear effect is investigated and compared with the linearized theory. This calculation is treated from Mach 1.5 to 6.0.

1. まえがき

多くのロケット飛しょう体はその先端がいわゆる円錐-円筒物体をなしている。超音速中の円錐のまわりの流れは Taylor-Maccoll¹⁾の厳密解以来多くの研究があるが、問題は円筒に移った直後、いわゆる肩のあとの流れである。これはこのような円錐-円筒の不連続を伴う基本的な問題としていくつかの研究が発表されているが^{2),3)}多くは個々の事例について解いたものであって、実際に計算に適用するためにはかなりの労が必要である。よって特性曲線法によってマッハ 1.5~6.0 までの種々の円錐のひらき角について圧力係数を計算し、実用に供しやすいグラフを作成した。

これによって広い範囲の見通しがつき、有用な情報が得られるはずである。

2. 記号

- C : 音速
- C_0 : よどみの時の音速
- C_D : 抗力係数 (基準断面積 π)
- C_p : 圧力係数
- k : 比熱比
- M : マッハ数

- P : 圧力
- R : 円筒の半径
- r : 半径方向座標 (胴体半径)
- u : x 方向速度
- v : y 方向速度
- V : $\sqrt{u^2+v^2}$
- x : 円錐-円筒物体の肩のところからの距離
- α : マッハ角
- β : $M_\infty^2 - 1$
- δ : 円錐の半頂角
- θ : 流体の流れの角度
- ρ : 密度
- ϕ : ポテンシャル

添字

- max : 最大
- ∞ : 自由流中

註

みだれをうけていない流れの速度を V_∞ , 同様に密度 ρ_∞ , 圧力を P_∞ とすると、圧力係数は、

$$C_p = (P - P_\infty) / \frac{1}{2} \rho_\infty \cdot V_\infty^2$$

で与えられる。

一般の場合には

$$P_\infty = \rho_\infty / k \times (C_0^2 - 1) / 2 (k-1) V_\infty^2$$

$$P = \rho / k \times (C_0^2 - 1) / 2 (k-1) V^2$$

ただし、 $k = 1.4$ 比熱比

* 昭和52年4月20日 受付

** 宇宙研究グループ

$$\frac{1}{2}(k-1)V^2 + k \times \frac{P}{\rho} = C_0^2 = \text{const}$$

3. 基礎式

a) 特性曲線法

流れが軸対称で定常であり、回転のない場合は、

$$\left(1 - \frac{u^2}{C^2}\right) \phi_{xx} - 2 \frac{uv}{C^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \phi_{yy} + \frac{\phi_r}{r} = 0 \quad (1)$$

ここに於て

$$C^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} V^2 = C_0^2 - \frac{k-1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x ; v = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r \quad (3)$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{I,II} = \frac{-uv \pm C\sqrt{u^2 + v^2 - C^2}}{C^2 - u^2} - \frac{C^2 v}{C^2 - v^2} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{du}\right)_{I,II} \quad (4)$$

ここに於て上側の符号はI族、下側の符号はII族に対応する。これらの等式は速度成分と角度成分によって書き表わされるとなお便利である。すなわち

$$u = V \cos \theta ; v = V \sin \theta$$

そして $\sin \alpha = C/V$ ということに注意すると

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{I,II} = \tan(\theta \mp \alpha) \quad (5)$$

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta}\right)_{I,II} = \mp \tan \alpha + \frac{\sin \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \sin \theta}{\sin(\theta \mp \alpha)} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{I,II} \quad (6)$$

b) 計算手順

全体の過程の中の一つの段階は次の如く要約される(5)

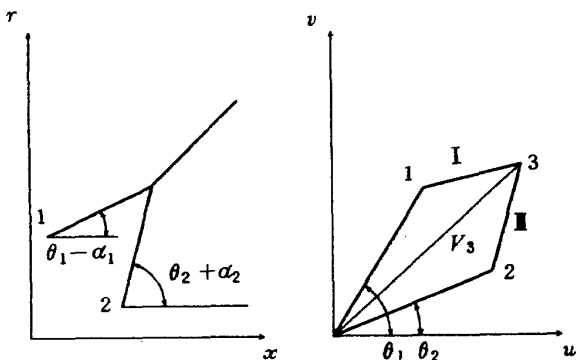


図1 特性曲線法による1つのステップ

は次の如くかゝれる。(図1.2参照)

$$r_3 - r_1 = (x_3 - x_1) \tan(\theta_1 - \alpha_1) \quad (7)$$

$$r_3 - r_2 = (x_3 - x_2) \tan(\theta_2 + \alpha_2) \quad (8)$$

$\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2$ はすべて知られているのであるから、 r_3 と x_3 はグラフ的にとくことが出来る。(6)に $d\theta \cdot \cot \alpha$ をかけると、次の形を得る。

$$\left(d\theta\right)_{I,II} \pm (\cot \alpha / V) (dV)_{I,II} + \frac{\sin \theta \cdot \sin \alpha}{\sin(\theta \mp \alpha)} \cdot \frac{(dr)_{I,II}}{r} = 0$$

$$Q \equiv (\cot \alpha) / V \quad (9)$$

$$F \equiv (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta + \alpha) \quad (10)$$

$$G \equiv (\sin \theta \cdot \sin \alpha) / \sin(\theta - \alpha) \quad (11)$$

図1の1-3, 2-3 に応用すると

$$\theta_3 - \theta_1 + Q_1 (V_3 - V_1) - G_1 / r_1 (r_3 - r_1) = 0 \quad (12)$$

$$\theta_3 - \theta_2 - Q_2 (V_3 - V_2) + F_2 / r_2 (r_3 - r_2) = 0 \quad (13)$$

1, 2, 3に於てすべての状態が与えられており、 r_3 がすでに求められているので、この2つの等式は同時に θ_3 と V_3 についてとかれる。

このようにして第一段階の近似が完成する。この近似は1-2, 2-3の平均的状态を計算することによって改良される。第一近似によって、 r_3, x_3, V_3, θ_3 が求められているので、(7)式に於て θ_1 のかわりに、 $\bar{\theta}_{1-3} = (\theta_1 + \theta_3) / 2, \bar{\alpha}_{1-3} = (\alpha_1 + \alpha_3) / 2$ 、このようにして、 Q_{1-3} と G_{1-3} / r_{1-3} を計算して使用することにする。このような過程を2, 3回くりかえすことにより良好な近似が得られる。本報告に於てはすべて3回くりかえしが行われた。

圧力係数については、J. R. JACK 等によって計算されているが、ポートテイルの場合肩の不連続点に於てブラントルメヤー流の圧力係数と一致しなければならない。

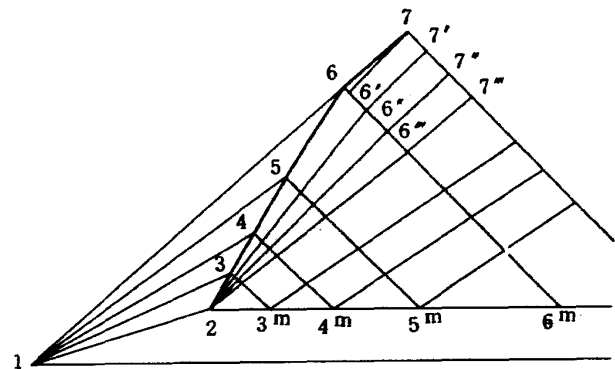


図2 コーン及びコーンの肩の後に於ける特性曲線のあみの目

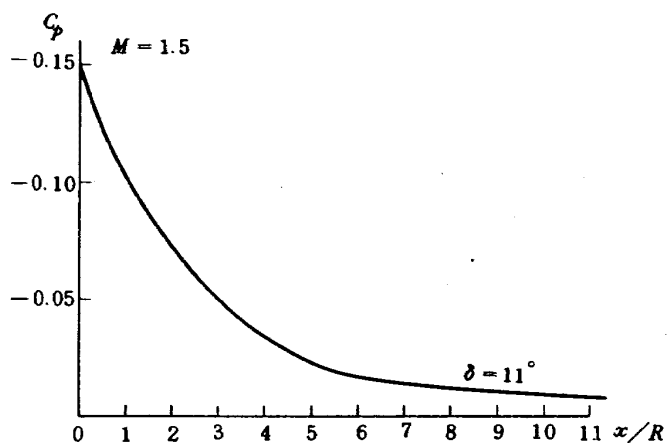


図3 $M = 1.5$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

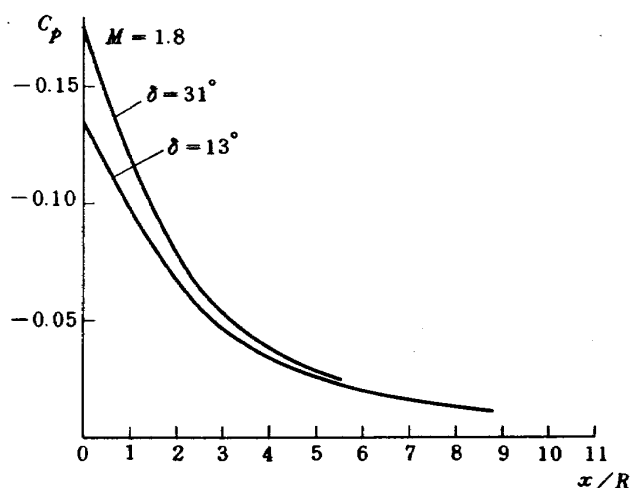


図6 $M = 1.8$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

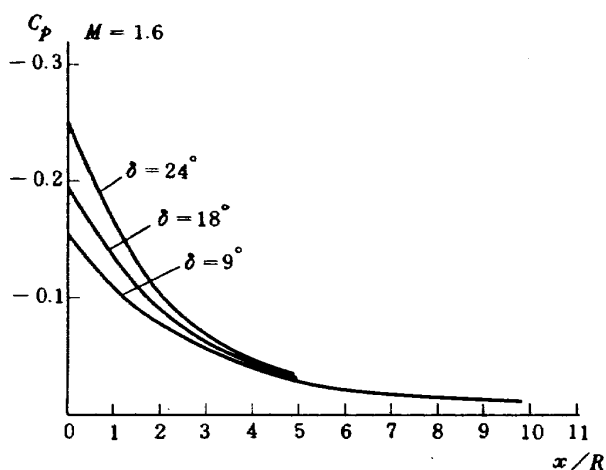


図4 $M = 1.6$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

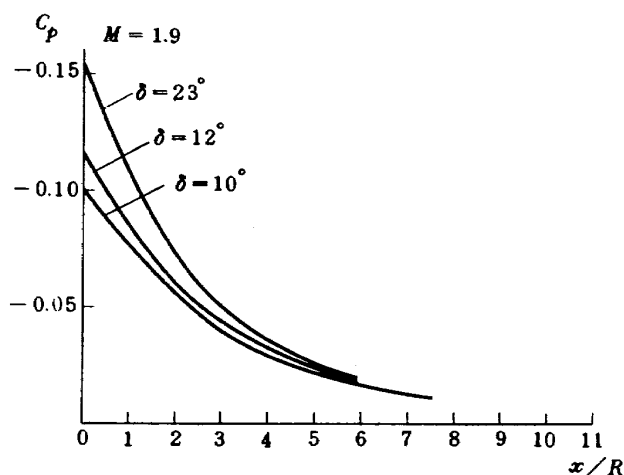


図7 $M = 1.9$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

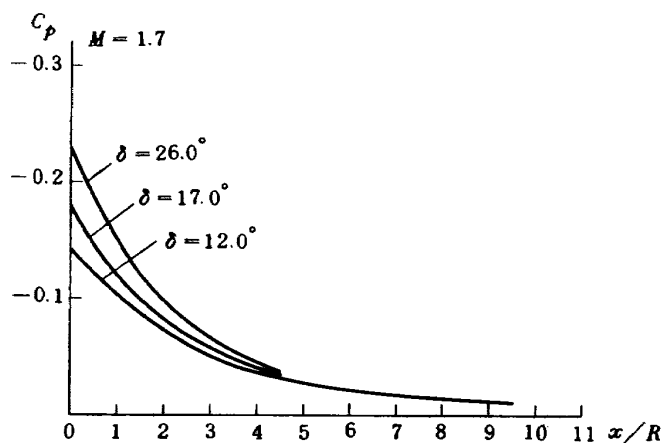


図5 $M = 1.7$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

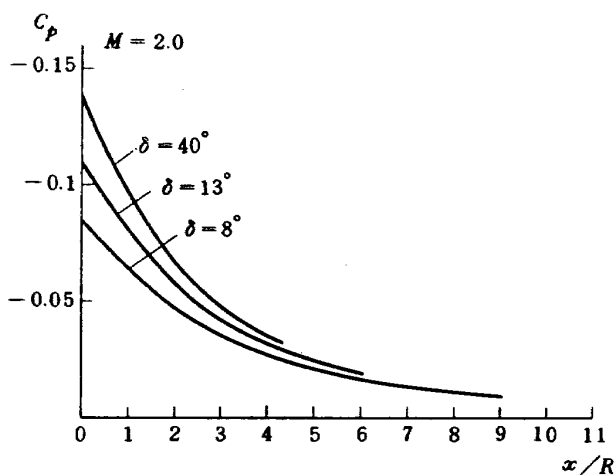


図8 $M = 2.0$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

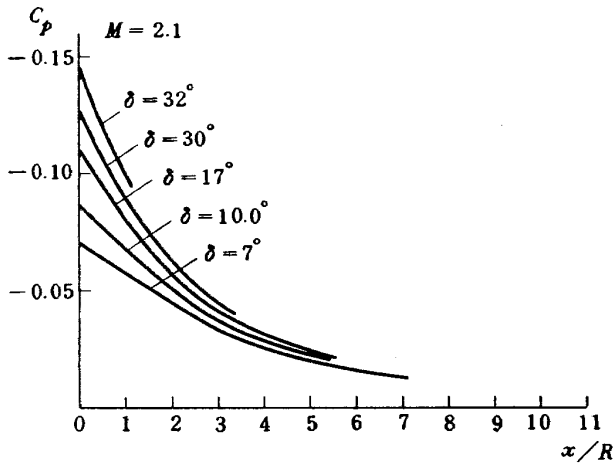


図9 $M = 2.1$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

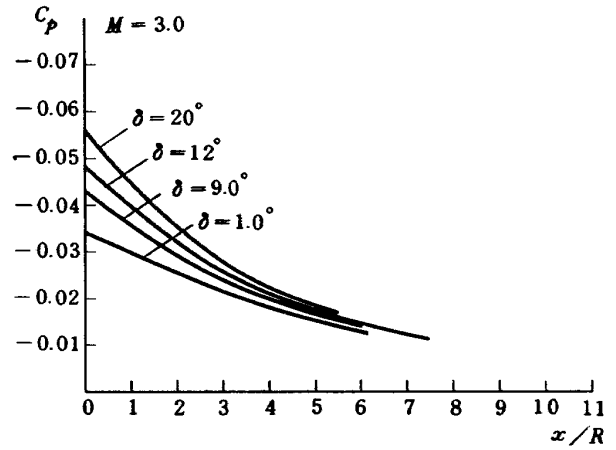


図12 $M = 3.0$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

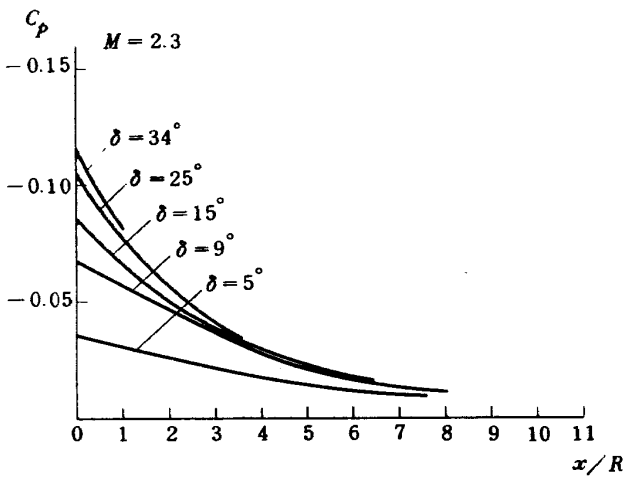


図10 $M = 2.3$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

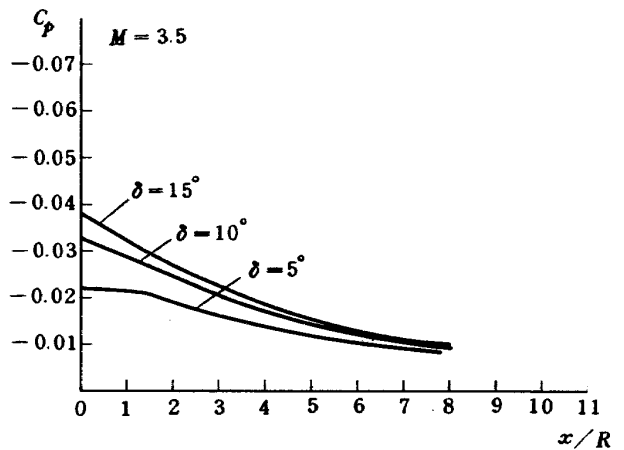


図13 $M = 3.5$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

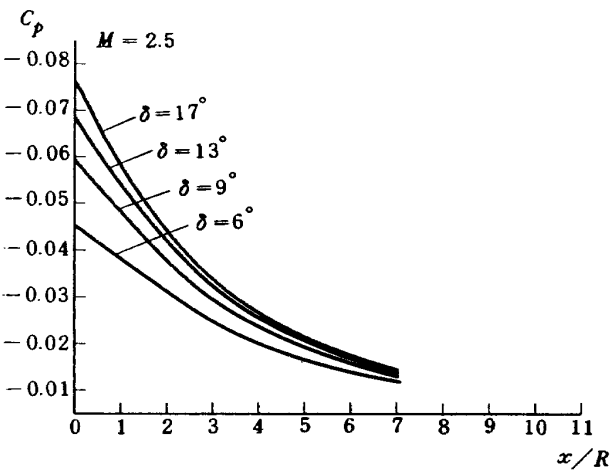


図11 $M = 2.5$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

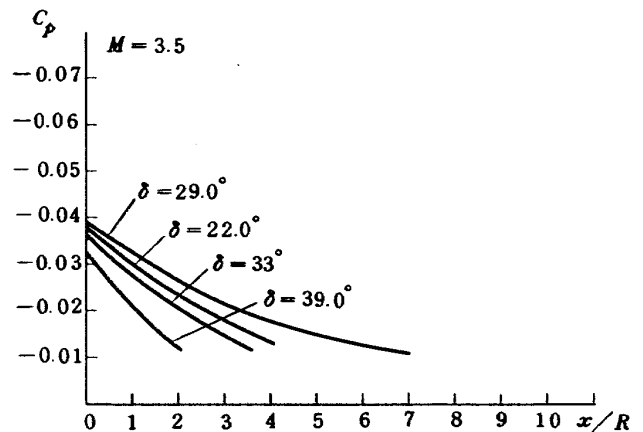


図14 $M = 3.5$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

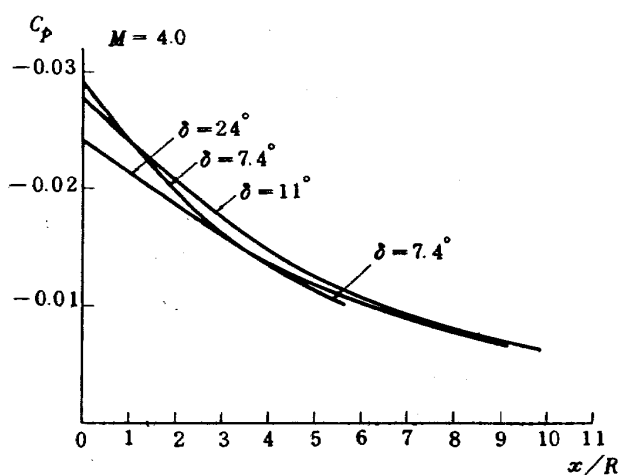


図 15 $M = 4.0$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

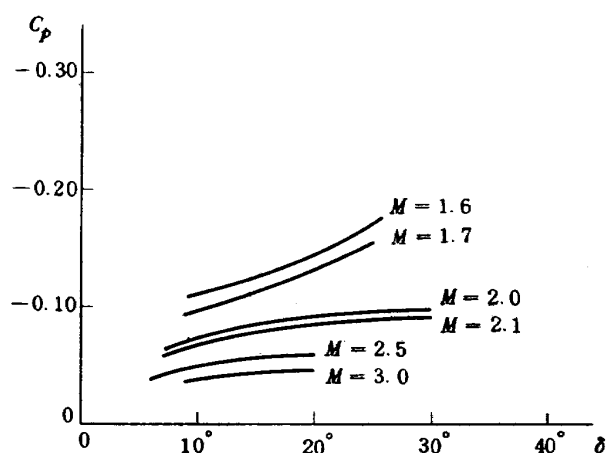


図 18 $x = 1$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

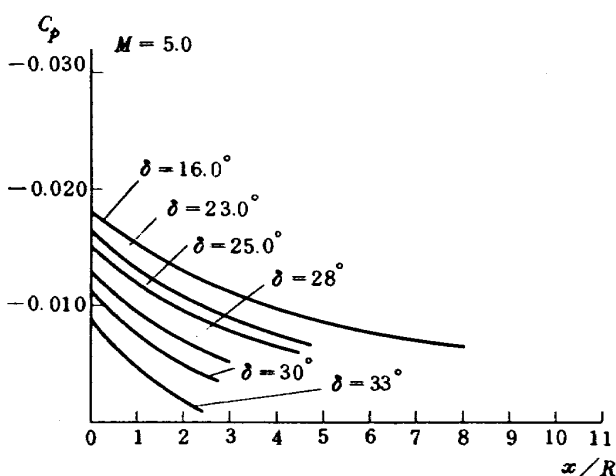


図 16 $M = 5.0$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

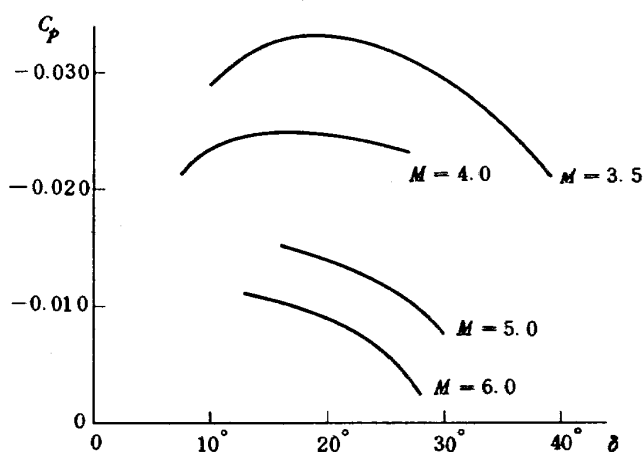


図 19 $x = 1$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

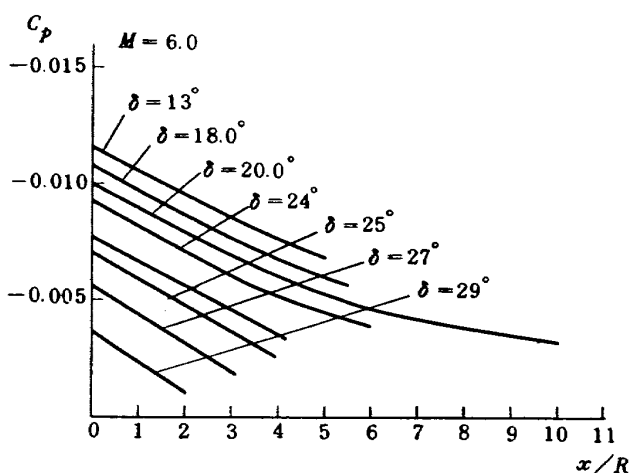


図 17 $M = 6.0$ 円錐-円筒物体上の圧力係数

特性曲線法によると V_3 は

$$V_3 = \frac{\theta_1 - \theta_2 + Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + G_1/r_1(r_3 - r_1) + F_2/r_2(r_3 - r_1)}{Q_1 + Q_2} \quad (14)$$

このうち $\frac{\theta_1 - \theta_2 + Q_1 V_1 + Q_2 V_2}{Q_1 + Q_2}$ はプラントルメー流に
よって与えられる部分であり $\frac{G_1/r_1(r_3 - r_1) + F_2/r_2(r_3 - r_1)}{Q_1 + Q_2}$

はプラントルメー流からのずれを与える部分である。

c) 初期条件の与え方

初期条件はコーンの先端のところをさしており、この部分から肩のところまでは Taylor-Maccoll の解で与えられる。(図 2 参照)

肩のつけ根のところにはプラントルメー流を適用する。

d) 境界条件の与え方

図 2 より明らかな如く, $2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m$ 点はすべて円筒上にあり, 又それらの点に於ける物理量は文献 4) で与えられる。

考 察

図 4 から図 17 より明らかな如く, マッハ数 3 までは開き角 θ が大となるにしたがって圧力係数が小となるが, その傾向は決して線型的でなく θ が大となるにしたがって急激に C_p が小となる傾向がにぶる傾向がある。そしてマッハ 3.5 に於ては $\theta = 15^\circ$ 近辺に於て C_p は θ の増加と共にふえはじめる傾向がある。この原因はマッハ数が大となりかつ θ が増加するとコーンの部分の空気の密度が自由流に対して高くなり, したがってその影響が円筒部にも強く出はじめるためと考えられる, したがってマッハ数が大となるといっそうこの傾向が強くなる。(図 18, 19 参照)

結 論

1) 円錐-円筒物体の円筒部に於ける圧力係数のグラフを作成した, このグラフを参照すれば, 補間法を利用することにより, 広範囲のマッハ数と円錐の開き角についてたゞちに圧力係数が計算できる。

従来の線型理論に比して非線型項の影響が完全に入っているので誤差が非常に少い。

2) 又従来の線型理論より全く予想の出来ない結果が得られた。つまりマッハ 4 までは開き角 θ が大となるにしたがって圧力係数が小となるのが, マッハ 4 以上となると θ が大となると円筒上の圧力係数が大となる傾向が出てくるのである。

参 考 文 献

- 1) G. I. Taylor and J. W. Maccoll; The Air Pressure on a Cone Moving at High Speed, Proc. Roy. Soc (A), Vol. 139 (1933), p. 278.
- 2) V. Zakkay and T. Tani; Theoretical and Experimental Investigation of Laminar Heat Transfer Downstream of a Sharp Corner, PIBAL Report No. 708 (1961).
- 3) Hakkinen; Supersonic Flow Near Two-Dimensional and Axially Symmetric Convex Cones and Curvature Discontinuity, Douglas Aircraft Co. Inc. Rep. No. SM-27747 (1958).
- 4) Ascher H. Shapiro; The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, pp. 680.

航空宇宙技術研究所資料331号

昭和52年5月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
