

## DG法を用いた弧状衝撃波不安定性の三次元数値シミュレーション

佐藤陽介<sup>1</sup>, 鈴木佑一郎<sup>1</sup>, 保江かな子<sup>2</sup>, 大西直文<sup>1</sup>  
<sup>1</sup> 東北大学, <sup>2</sup> JAXA

## Three-dimensional numerical simulation of bow-shock instability using DG method

by

Yosuke Sato (Tohoku U.), Yuichiro Suzuki (Tohoku U.), Kanako Yasue (JAXA), and Naofumi Ohnishi (Tohoku U.)

## Abstract

Three-dimensional numerical simulations were conducted using the discontinuous Galerkin (DG) finite-element method to clarify mechanism of bow-shock instability, which has been experimentally observed for a blunt body in a low- $\gamma$  gas. Shock-surface formation was computed with a blunt body in Mach 3.9 flow. A well-known numerical instability, the carbuncle phenomenon, often occurs simultaneously in such a flow condition. Sufficient resolution of stream-ward grids is required to obtain a stable solution. Spectral analysis for shock-surface deformation suggests that the observed instability is induced by numerical errors. Moreover, influence of the angles of attack was examined, but bow-shock instability was not observed. Other conditions such as a sharp surface shape and a viscous boundary layer should be examined to obtain a physically unstable flow.

## 1. 緒論

超音速飛行する鈍頭物体前方に形成される弧状衝撃波について、これまでに多くの実験や数値計算が行われてきた。一般に、一様流中に形成される弧状衝撃波は安定であることが知られている。しかしながら、弾道法における実験において、比熱比の小さな気体中では、鈍頭物体前方に形成される弧状衝撃波が不安定であることが確認されている<sup>1)</sup>。様々な条件による実験から、この不安定性はマッハ数や気体の圧力、物体の大きさ、縁の丸み、前面の曲率に依存して発生することが分かっている。図1にNASAによる実験で得られた安定な弧状衝撃波<sup>2)</sup>と、Baryshnikovらによる実験で得られた不安定な弧状衝撃波を示す。この現象の要因として、比熱比が小さいことによる衝撃波後方の力学的非平衡と、急激な温度上昇による化学的非平衡が考えられているが、実験では衝撃波後方の流れ場の構造を詳しく解析することが困難であるため、原因は解明されていない。

現在、超音速で飛行する物体の解析には数値流体力学(CFD)がよく用いられる。CFDを用いることによって、衝撃波後方の流れ場の構造を詳しく解析することができ、不安定性の原因を解明することが可能となると考えられる。一方で、強い衝撃波が形成される数値計算において、衝撃波が計算格子に平行に近い場合に、衝撃波捕獲スキームは数値的に不安定になることが知られている。この不安定性はカーバンクル現象と呼ばれる<sup>3)</sup>。カーバンクル現象は主流条件、計算格子、計算手法等の様々な要因によって生じるため、適切な計算条件を整えることが重要である。

本研究では、鈍頭物体前方に形成される弧状衝撃波不安定性のメカニズムの解明を目指し、非構造格子を用いた Discontinuous Galerkin (DG) 法<sup>4)</sup>による三次元数値流体解析を行う。その際、カーバンクル現象を生じにくいと考えられる数値流束関数を用いて計算する<sup>5)</sup>。

カーバンクル現象の存在により、発生した不安定性が物理的なものか数値的なものかの判別が難しくなる。そこで、カーバンクル現象を生じにくい計算条件を模索するため、不安定性の計算格子依存性を調べる。まず、表面解像度、主流方向の解像度を変化させたときの不安定性の挙動について解析する。不安定性の解析は、フーリエ変換により行う。また、迎え角による不安定性への影響についても調べる。

## 2. 数値計算法

弧状衝撃波の物理的不安定性を調べるために、上で述べたカーバンクル現象を防ぐ必要がある。カーバンクル現象を検

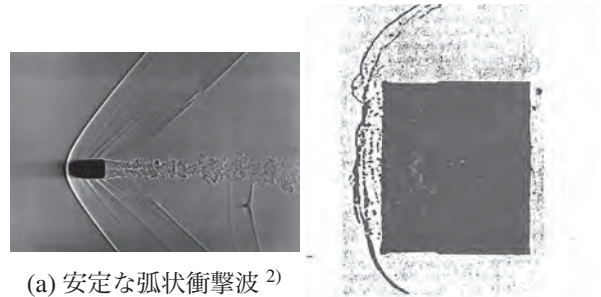
(a) 安定な弧状衝撃波<sup>2)</sup>(b) 不安定な弧状衝撃波<sup>1)</sup>

図1 安定な弧状衝撃波と不安定な弧状衝撃波。

証するに当たり、同形状の物体について、同じ主流条件と計算手法を用い、計算格子のみを変更して不安定現象を解析する。そこで、計算格子は物体の形状適合性が高く、格子の配置を比較的自由に変更できる非構造格子を用いる。計算手法としては、有限要素法の一つで、高精度を達成できる DG 法を用いて数値計算を行う。

## 2-1 Discontinuous Galerkin 法

## 基礎方程式

三次元 Euler 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $Q$  は保存関数、 $E, F, G$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の流束関数であり、以下のように表される。

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{pmatrix}$$

$\rho$  は密度、 $u, v, w$  はデカルト座標系における速度成分、 $e$  は単位体積あたりの全エネルギーである。また、圧力  $p$  が次式で表される理想気体における状態方程式に従うことを仮定する。

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right\} \quad (3)$$

ただし,  $\gamma$  は比熱比である.

DG 法は有限要素法の一つであるので, 次式のような弱形式にした積分方程式を解くことで解を得る.

$$\int_{\Omega} w(x, y, z) \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad (4)$$

$\Omega$  は計算空間での領域,  $w(x, y, z)$  はテスト関数を表す. 式 (4) に対して Gauss の発散定理を適用し, 展開すると次式を得る.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} w (En_x + Fn_y + Gn_z) d\partial\Omega - \int_{\Omega} \left( E \frac{\partial w}{\partial x} + F \frac{\partial w}{\partial y} + G \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad (5)$$

ここで,  $\partial\Omega$  は領域  $\Omega$  の境界,  $n_x, n_y, n_z$  はそれぞれ境界における  $x, y, z$  方向の法線ベクトルを表す. 有限要素法では, 次式のような自由度  $Q_j(t)$  と基底関数  $v_j(x, y, z)$  の積の線形和で表される近似関数  $Q_h(x, y, z, t)$  を用いてセル内の物理量の分布を記述する.

$$Q_h(x, y, z, t) = \sum_j Q_j(t) v_j(x, y, z) \quad (6)$$

DG 法では, テスト関数を基底関数  $v_j(x, y, z)$  とし, 式 (5) において厳密解  $Q(t)$  を式 (6) で表される近似関数  $Q_h(x, y, z, t)$  に置き換える. そして, 式 (5) に  $i$  番目の基底関数を乗じた各積分項を以下のように定義する.

$$K_1^i = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i Q_h}{\partial t} d\Omega \quad (7)$$

$$K_2^i = \int_{\partial\Omega} v_i (E(Q_h)n_x + F(Q_h)n_y + G(Q_h)n_z) d\partial\Omega \quad (8)$$

$$K_3^i = \int_{\Omega} \left( E(Q_h) \frac{\partial v_i}{\partial x} + F(Q_h) \frac{\partial v_i}{\partial y} + G(Q_h) \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) d\Omega \quad (9)$$

式 (6) を  $K_1^i$  に代入すると

$$K_1^i = \sum_j \frac{dQ_j}{dt} \int_{\Omega} v_i v_j d\Omega = \sum_j I_{ij} \frac{dQ_j}{dt} \quad (10)$$

となる. ここで, 基底関数の積のモーメントを  $I_{ij} = \int_{\Omega} v_i v_j d\Omega$  と表す. モーメント  $I_{ij}$  は基底関数に直交性がある場合には対角行列となる. その場合, 自由度の数だけ時間積分を独立に実行することが可能となり, 自由度ごとに解を得る.

### 直交基底関数

前述のように, 基底関数に直交性があれば, 自由度ごとに独立な時間発展の方程式が得られる. 非構造格子を用いて計算を行う場合には, 各セルの物理空間における座標  $(x, y, z)$  を基準セルの計算空間の座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  およびテンソルセルの写像空間座標  $(r, s, t)$  に座標変換を行うことで直交性が実現される. 三次元の計算セルにおけるテンソルセル座標の直交基底関数  $\phi_{lmn}(r, s, t)$  および基準セル座標の直交基底関数  $\phi_{lmn}(\xi, \eta, \zeta)$  は Jacobi 多項式  $P_{\gamma}^{\alpha, \beta}(z)$  を用いて記述される.<sup>6)</sup> 三角柱セルの場合は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \phi_j(r, s, t) &= P_l^{0,0}(r) P_m^{0,0}(s) (1-t)^l P_n^{2l+1,0}(t) \\ \phi_j(\xi, \eta, \zeta) &= P_l^{0,0} \left( 2 \frac{1+\xi}{1-\zeta} - 1 \right) P_m^{0,0}(\eta) (1-\zeta)^l \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, Jacobi 多項式  $P_{\gamma}^{\alpha, \beta}(z)$  は次式で与えられる.

$$P_{\gamma}^{\alpha, \beta}(z) = \frac{(-1)^{\gamma}}{2^{\gamma} \gamma!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^{\gamma}}{dz^{\gamma}} [(1-z)^{\alpha+\gamma} (1+z)^{\beta+\gamma}] \quad (12)$$

式 (11) において  $j$  は自由度であり, 三次元二次精度の場合, 自由度は 4 個必要となる. また, 添字  $l, m, n$  は多項式の次数であり,  $(l, m, n)$  の組み合わせは定数項では  $(0, 0, 0)$  となり, 1 次項では  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  となる.

### 離散化

式 (1) の物理空間  $(x, y, z)$  における支配方程式を計算空間  $(\xi, \eta, \zeta)$  へ変換すると, 次式のように記述できる.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = 0 \quad (13)$$

ここで,  $\hat{Q}$  は保存関数,  $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$  はそれぞれ  $\xi, \eta, \zeta$  方向の流束関数である.

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= J^{-1} Q \\ \hat{E} &= J^{-1} (\xi_x E + \xi_y E + \xi_z E) \\ \hat{F} &= J^{-1} (\eta_x F + \eta_y F + \eta_z F) \\ \hat{G} &= J^{-1} (\zeta_x G + \zeta_y G + \zeta_z G) \end{aligned} \quad (14)$$

$J^{-1}$  は座標変換におけるヤコビアンであり次式で表される.

$$J^{-1} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (15)$$

式 (13), (14) に対して DG 法を適用する. 弱形式にした積分方程式は次式のようになる.

$$\int_{\hat{\Omega}} w(\xi, \eta, \zeta) \left( \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right) d\hat{\Omega} = 0 \quad (16)$$

$\hat{\Omega}$  は計算空間での領域,  $w(\xi, \eta, \zeta)$  はテスト関数を表す. 式 (16) に対して Gauss の発散定理を適用し, 展開すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial w \hat{Q}}{\partial t} d\hat{\Omega} + \int_{\partial\hat{\Omega}} w (\hat{E}n_{\xi} + \hat{F}n_{\eta} + \hat{G}n_{\zeta}) d\partial\hat{\Omega} \\ - \int_{\hat{\Omega}} \left( \hat{E} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \hat{F} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \hat{G} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) d\hat{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$\partial\hat{\Omega}$  は計算空間領域  $\hat{\Omega}$  の境界,  $n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta}$  はそれぞれ境界における  $\xi$  方向,  $\eta$  方向,  $\zeta$  方向の法線ベクトルを表す.

ここで, 次式のような自由度  $\hat{Q}_j(t)$  と前述した直交基底関数  $\phi_j(\xi, \eta, \zeta)$  の積の線形和で表される近似関数  $\hat{Q}_h(\xi, \eta, \zeta, t)$  を用いてセル内の分布を記述する.

$$\hat{Q}_h(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_j \hat{Q}_j(t) \phi_j(\xi, \eta, \zeta) \quad (18)$$

式 (17) において厳密解  $\hat{Q}(t)$  を式 (18) で表される近似関数に置き換え, テスト関数を直交基底関数とする.  $i$  番目の基底関数を乗じた各積分項を以下のように定義する.

$$K_1^i = \int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial \phi_i \hat{Q}_h}{\partial t} d\hat{\Omega} \quad (19)$$

$$K_2^i = \int_{\partial\hat{\Omega}} \phi_i (\hat{E}(Q_h)n_{\xi} + \hat{F}(Q_h)n_{\eta} + \hat{G}(Q_h)n_{\zeta}) d\partial\hat{\Omega} \quad (20)$$

$$K_3^i = \int_{\hat{\Omega}} \left( \hat{E}(Q_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \hat{F}(Q_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} + \hat{G}(Q_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \right) d\hat{\Omega} \quad (21)$$

式 (19)–(21) より, 式 (17) は次式のように記述できる.

$$K_1^i + K_2^i - K_3^i = 0 \quad (22)$$

また, 式 (18) を式 (19) に代入すると

$$K_1^i = \sum_j \frac{dJ^{-1} Q_j}{dt} \int_{\hat{\Omega}} v_i v_j d\hat{\Omega} = \sum_j I_{ij} \frac{dJ^{-1} Q_j}{dt} \quad (23)$$

となる. ここで, 基底関数の積のモーメントを  $I_{ij} = \int_{\hat{\Omega}} \phi_i \phi_j d\hat{\Omega}$  と表す. モーメント  $I_{ij}$  は基底関数の直交性により対角行列となるので, 以下のように表せる.

$$K_1^i = I_{ii} \frac{dJ^{-1} Q_i}{dt} \quad (24)$$

式 (22) と式 (24) より, 最終的に次式に対して時間積分を行うことで解を得る.

$$\frac{dQ_i}{dt} = -\frac{1}{J^{-1}I_{ii}}(K_2^i - K_3^i) \quad (25)$$

$K_2^i$  の評価において, DG 法では各セル毎に独立した近似関数を用いてセル内部の物理量を記述しているため, セル境界における流束関数の値は不連続となり, 直接求めることは出来ない. そのため, セル境界における流束関数を数値流束関数で置き換える必要がある. その際の流束計算には Riemann 解法を適用する.

式 (20) において, 流束関数 ( $\hat{E}(\hat{Q}_h)n_\xi + \hat{F}(\hat{Q}_h)n_\eta + \hat{G}(\hat{Q}_h)n_\zeta$ ) はセル内部の物理量  $Q_h^-$  と隣のセルの物理量  $Q_h^+$  を用いて表される流束関数  $\hat{h}(Q_h^-, Q_h^+)$  に置き換えられる. よって, 式 (20) は次式のように記述できる.

$$K_2^i = \int_{\partial\Omega} \phi_i \hat{h}(Q_h^-, Q_h^+) d\partial\hat{\Omega} \quad (26)$$

ここで, 流束関数  $\hat{h}(Q_h^-, Q_h^+)$  は本研究では, 流束関数  $\hat{h}(Q_h^-, Q_h^+)$  に数値流束 SLAU (Simple Low-dissipation AUSM<sup>7</sup>) を用いる.

$K_2^i$  の積分の評価は, 各境界上に精度に見合った Gauss 点を取り, 二次元の Gauss 求積法を用いて面積分を行い  $K_2^i$  の近似を行う. また,  $K_3^i$  の評価は, セル内に精度に見合った Gauss 点を取り, 三次元の求積法を用いて体積積分により近似を行う. それにより式 (26) および式 (21) はそれぞれ次式のように置き換えられる.

$$\hat{K}_2^i = \sum_e \sum_l (\phi_i \hat{h}_l(Q_h^-, Q_h^+) \sigma_l)_e \quad (27)$$

$$\hat{K}_3^i = \sum_l \left( \hat{E}(\hat{Q}_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \hat{F}(\hat{Q}_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} + \hat{G}(\hat{Q}_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \right) \sigma_l \quad (28)$$

ここで,  $e$  はセル境界面,  $l$  はセル境界面の Gauss 点,  $\sigma_l$  は各 Gauss 点における重みを表す. 二次精度の場合, 三角形および四角形のセル境界面の Gauss 点の数は 4 個となる.

## 2-2 勾配制限法

本研究で定義した自由度  $Q_i$  は, 二次精度の場合には  $Q_1$  がセル内の物理量の平均値,  $Q_2, Q_3$  がセル内の物理量の一階微分を表す. よって, 勾配制限は  $Q_2, Q_3$  に対して以下のように行う.

$$\tilde{Q}_{2,3} = \begin{cases} \phi Q_{2,3} & , \text{ if } p_{lmax} > p_{mmax}, p_{lmin} > p_{mmin} \\ Q_{2,3} & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\phi = \min(\phi_{max}, \phi_{min})$$

$$\phi_{max} = \frac{p_{mmax} - p_n}{p_{lmax} - p_n}$$

$$\phi_{min} = \frac{p_{mmin} - p_n}{p_{lmin} - p_n}$$

ここで,  $p_n$  はセル内の圧力,  $p_{lmax}, p_{lmin}$  はそれぞれセル境界の Gauss 点における圧力の最大値および最小値,  $p_{mmax}, p_{mmin}$  はそれぞれ各面に隣接するセルの圧力の最大値および最小値を表す.

## 2-3 TVD Runge-Kutta 法

本計算で時間積分に用いた二段階 TVD Runge-Kutta 法<sup>9)</sup> は以下に示す通りである.

$$Q^{(1)} = Q^n + \Delta t R(Q^n) \quad (29)$$

$$Q^{n+1} = \frac{1}{2} \left( Q^n + Q^{(1)} + \Delta t R(Q^{(1)}) \right) \quad (30)$$

ここで,  $R$  は式 (25) の右辺を表す.

## 3. 計算結果および考察

### 3-1 表面解像度による影響

物体表面の解像度が不安定性に与える影響を調べるために, 表面解像度の異なる 3 種類の計算格子を用意して計算を行った. 各計算格子の表面セル数は, それぞれ 3984, 7592, 12810 である. 全セル数は, それぞれの表面格子に対して, 199200, 372008, 627690 とした. 図 2 に表面セル数が 3984 の場合の計算格子を示す. 衝撃波面の解析は, 図 2 に示した物体の中心を通る断面において行う. また, 図 3 に表面セル数が 3984, 12810 の場合の表面格子を示す.

主流条件は主流マッハ数を 3.9, 迎え角を 0 とした. 不安定現象を生じやすくするために, 比熱比は 1.01 とした. また, CFL 数は 0.2 または 0.5 とした. 前節で示した断面における衝撃波面の変形の時間発展を表面セル数 3984 の場合には  $t = 20 \sim 50$  について, 表面セル数 12810 の場合には  $t = 5 \sim 20$  について, それぞれ図 4, 図 5 に示す. 色は圧力の大きさを表す.

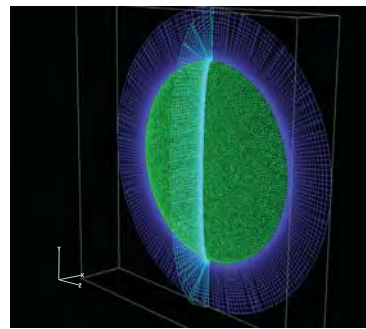
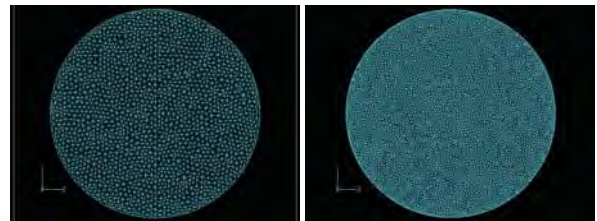


図 2 表面セル数 3984 の場合の計算格子.



(a) 表面セル数 3984 (b) 表面セル数 12810

図 3 表面セル数 3984, 12810 の物体表面の計算格子.

### 衝撃波面の変形

衝撃波面の解析は, 物体の中心を通る断面において行う. 本解析では, 衝撃波の位置の決定は密度の変化によって行う. 流入境界から物体表面に向かって各格子点における密度の値を調べ, その値が 6 以上になったときに衝撃波であると判断する. 判別する密度の値 6 が格子点をまたぐときは, 前後の格子点の密度の値および座標から線形補間を行うことによって衝撃波の位置を決定する.

各計算格子について, 前節で得られた衝撃波面の物体表面からの距離を, 表面セル数 3984 の場合には  $t = 20, 30, 40, 50$  について, 表面セル数 7592, 12810 の場合には  $t = 5, 10, 15, 20$  について図 6 に示す. 横軸は物体表面上での中心からの距離, 縦軸はその位置での衝撃波面と物体表面の距離を表す. 衝撃波面は時間発展とともに形成されていき, どの計算格子を用いて計算した場合にも衝撃波面は不安定になった. また, 不安定になる時間は, 表面セル数 3984 の場合には  $t = 30$  前後であるのに対して, 表面セル数 7592, 12810 の場合には  $t = 10 \sim 15$  と差が見られ, 表面セル数が多いほど早くなった. この原因については次節で考察する.

### フーリエ変換による解析および考察

弧状衝撃波が物理的に不安定であれば、特定の波長成分が成長することで不安定になると考えられる。フーリエ変換により衝撃波面に含まれる波の成分の中で成長するものを調べ、得られた不安定現象が物理的なものか数値的なものか判断する。前節で得られた各時間での衝撃波距離を線形補間したものをフーリエ変換する。

図7にそれぞれの計算格子を用いて計算した場合の、各波数に対する振幅の時間発展を示す。横軸は時間、縦軸は波数、カラーバーは波数0の波の振幅の大きさを規格化した振幅の大きさを表す。図7から、表面セル数によって生じている波長、またその成長の様子が異なっていることが分かる。さらに、不安定性を規定するような特徴的な波長が生じていないことが分かる。よって、この不安定性は数値的なものであると考えられる。また、表面解像度が高いほど衝撃波面が不安定になる時間が早かったのは、主流方向の解像度は同じであるため、衝撃波面付近またはそれより後方で生じた衝撃波面に平行な方向の数値振動をより解像したためと考えられる。

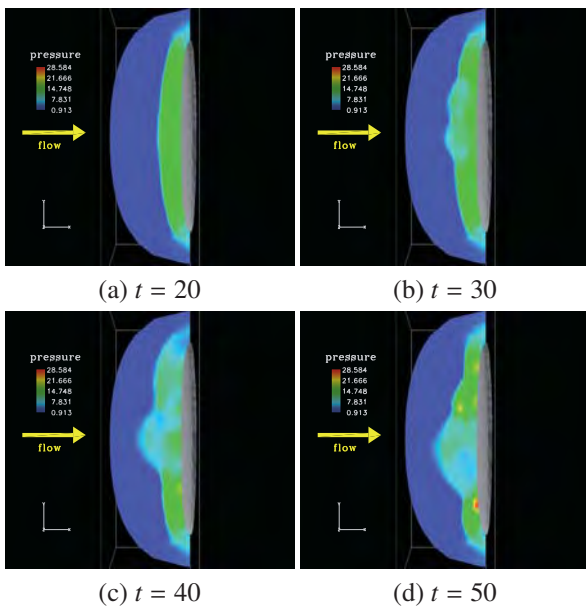


図4 表面セル数 3984 の場合の衝撃波面の時間発展。

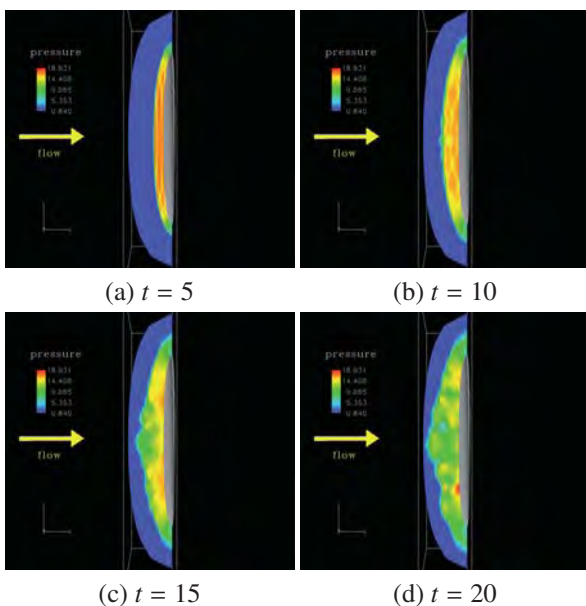
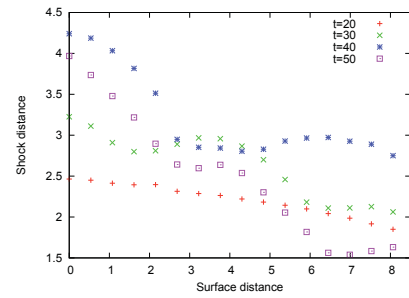
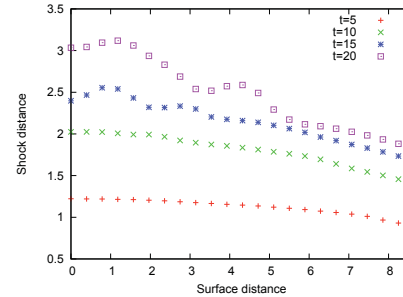


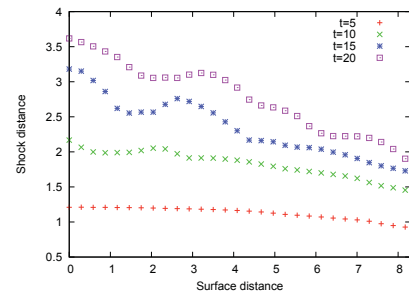
図5 表面セル数 12810 の場合の衝撃波面の時間発展。



(a) 表面セル数 3984



(b) 表面セル数 7592



(c) 表面セル数 12810

図6 各時間における衝撃波面の物体表面からの距離。

### 3-2 主流方向の解像度による影響

主流方向の解像度が不安定性に与える影響を調べるために、主流方向に解像度の異なる3種類の計算格子を用いて計算を行った。表面セル数は3984で共通とする。各計算格子の物体中心を通る断面を図8に示す。それぞれ次のように定義する。

- (A) 主流方向の分割数50, 全セル数199200, 物体表面付近の解像度が高い計算格子
- (B) 主流方向の分割数25, 全セル数99600, 主流方向に解像度が均一な計算格子
- (C) 主流方向の分割数50, 全セル数199200, 主流方向に解像度が均一な計算格子

主流条件は3-1節と同じである。計算格子(B), (C)を用いて計算したときの、物体の中心を通る断面における衝撃波面の変形の時間発展をそれぞれ図9, 図10に示す。色は圧力の大きさを表す。ただし、計算格子(A)の結果は図4である。衝撃波面は時間発展とともに形成されていき、計算格子(A), (B)では $t=20$ 以降で衝撃波面が不安定になった。また、(C)では安定になった。

### 衝撃波面の変形

3-1節と同様に、衝撃波面の解析は物体の中心を通る断面において行う。前節で得られた $t=20, 30, 40, 50$ における衝撃波面の物体表面からの距離を各計算格子について、図11に示す。横軸は物体表面上での中心からの距離、縦軸はその位置での衝撃波面と物体表面の距離を表す。図11(a), (b)から、計算格子(A), (B)において衝撃波面が振動していることが分かる。一方で、図11(c)から計算格子(C)において衝撃波面が時間発展とともにほぼ同じ形状になっていることが分かる。

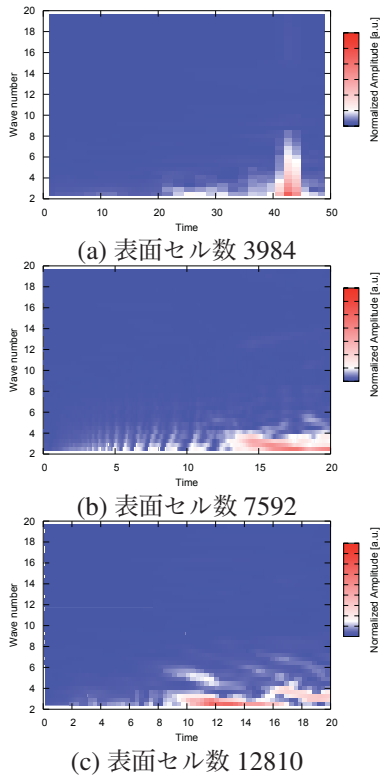


図7 各波数成分の振幅の時間発展.

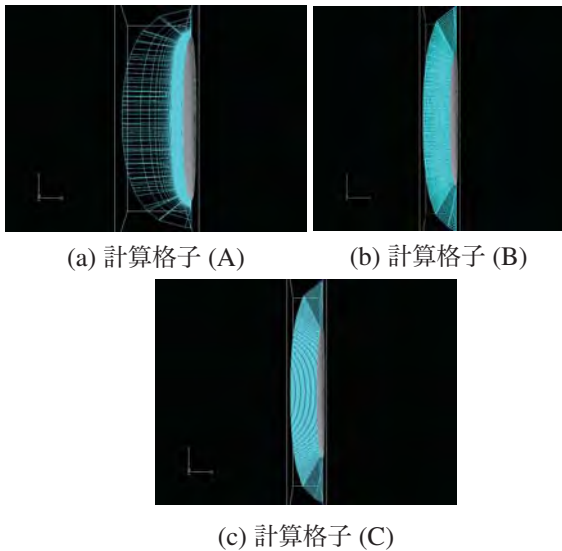


図8 各計算格子の物体中心を通る断面図.

フーリエ変換による解析および考察

図12にそれぞれの計算格子を用いて計算した場合の各波数に対する振幅の時間発展を示す。図12(a)から、 $t = 20 \sim 30$ で波数の小さな波が生じていることが分かるが、図11(a)において  $t = 20 \sim 30$ で衝撃波面が乱れていることに対応すると考えられる。これは、衝撃波面が物体表面付近にあるときは精度よく解像することができているが、衝撃波面が解像度の低い領域まで移動してしまうためであると考えられる。図12(b)から、計算時間全体に渡って各波数成分が振動していることが分かる。この振動は、計算領域全体で主流方向の解像度が低いため、移動する衝撃波面を精度よく解像することができないことが原因だと考えられる。一方で、図12(c)から、弧状衝撃波は定常状態に達していることが分かる。これは、計算領域全体に渡って主流方向の解像度が高いため、時間発展と

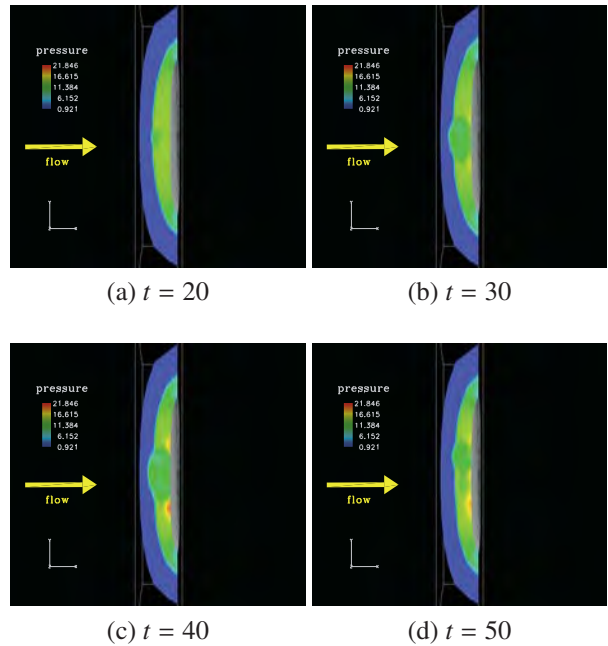


図9 計算格子(B)を用いた衝撃波面の時間発展.

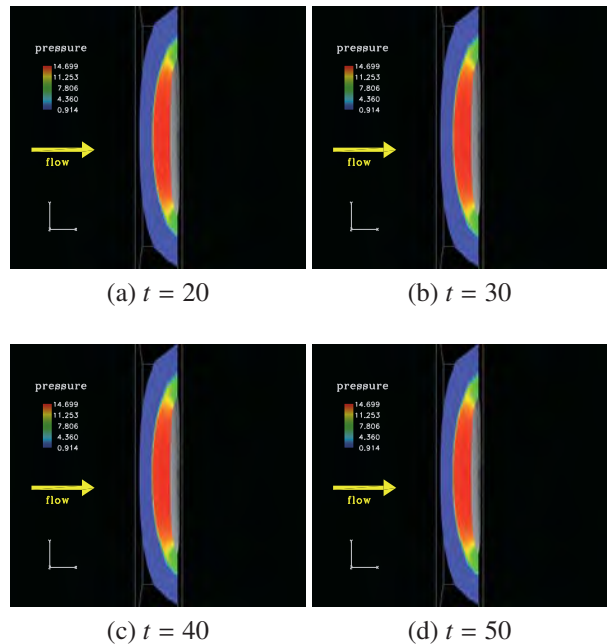


図10 計算格子(C)を用いた衝撃波面の時間発展.

もに移動していく衝撃波面をより精度よく解像することができたためと考えられる。

以上の結果から、弧状衝撃波不安定性の解析には、移動する衝撃波面を精度よく解像するのに十分な主流方向の解像度が必要であると考えられる。よって、前節の結果と合わせて、不安定性の解析には表面解像度よりも主流方向の解像度がより重要であることが分かった。

3-3 迎え角による影響

迎え角を変化させることで、マッハラインを含む亜音速領域の変化が不安定性に与える影響を調べる。同じ計算格子を用いて、迎え角のみを変化させる。計算格子には、前節の計算格子(C)を用いる。主流条件は主流マッハ数を3.9、迎え角を $3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ とした。比熱比は1.01、CFL数は0.5とした。

どの迎え角の場合も弧状衝撃波は安定になった。迎え角を $6^\circ$ とした場合の亜音速領域でのマッハ数分布を図13に示す。迎え角が大きい場合の方が、マッハラインが物体の端に近づいた。また、迎え角が大きい方が亜音速領域でのマッハ数分布が乱れたが、 $6^\circ$ までの範囲では衝撃波に乱れは見られなかった。

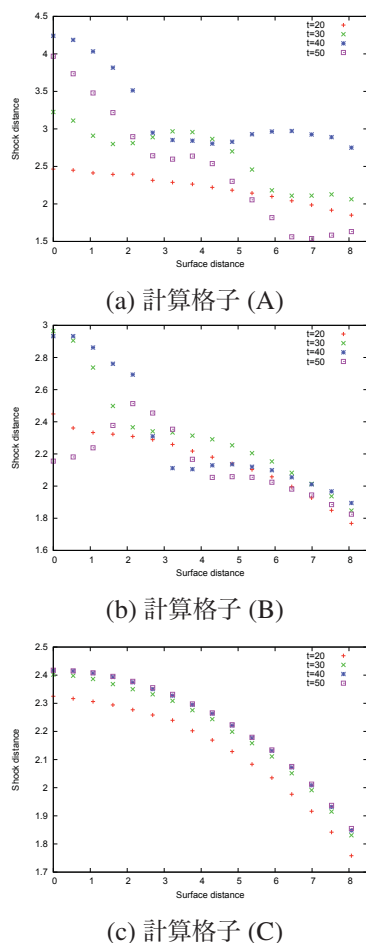


図 11 各時間における衝撃波面の物体表面からの距離。

#### 4. 結論

本研究では、弧状衝撃波不安定性の力学的メカニズムを調べるために、CFD を用いて衝撃波を含む流れ場を調べた。

まず、物体表面の解像度による不安定性への影響を調べるため、物体表面の格子数が異なる計算格子を用いて計算を行った。その結果、どの計算格子を用いた場合にも衝撃波面は不安定になった。フーリエ変換による解析から、この不安定性は数値的であると考えられる。次に、主流方向の解像度による不安定性への影響を調べるために、主流方向の解像度が異なる計算格子を用いて計算を行った。解像度が十分大きな格子を用いて計算すると、衝撃波面は安定になった。これは、時間発展とともに移動していく衝撃波面を精度よく解像できたためと考えられる。よって、不安定性の解析には、物体表面の解像度よりも主流方向の解像度がより重要であることが分かった。また、この衝撃波面が安定になった計算格子を用いて、迎え角が不安定性に与える影響を調べた。その結果、 $6^\circ$  までの範囲では不安定性は見られなかった。しかし、亜音速領域におけるマッハ数分布の乱れは迎え角が大きくなるにつれ大きくなった。また、マッハラインは迎え角が大きくなるにつれて物体の端に近づいた。本研究では弧状衝撃波不安定性は見られなかったが、後流を含んだ計算を行うことで、物体の表面端から発生する擾乱が不安定性を引き起こす可能性や境界層の影響について調べる予定である。

#### 参考文献

- 1) A. S. Baryshnikov, A. P. Bedin, V. G. Maslennikov and G. I. Mishin, "Stability of a bow shock," *Sov. Tech. Phys. Lett.*, 5 (1979), pp. 113–114.
- 2) [http://www.nasa.gov/mission\\_pages/galex/20070815/f.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/f.html).
- 3) J. Quirk, "A contribution to the great Riemann solver de-

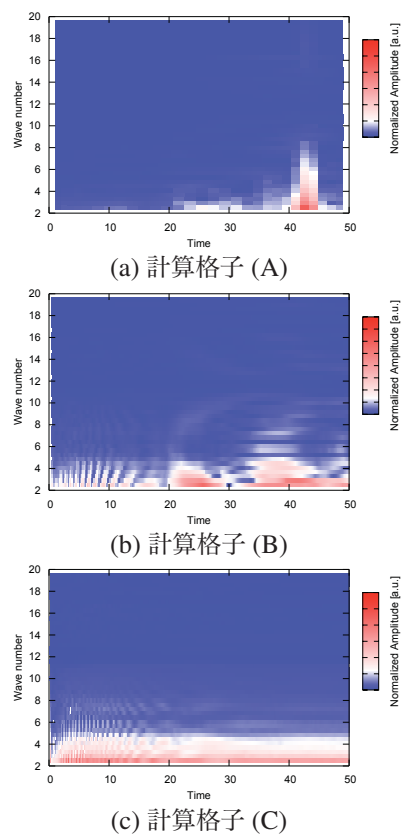
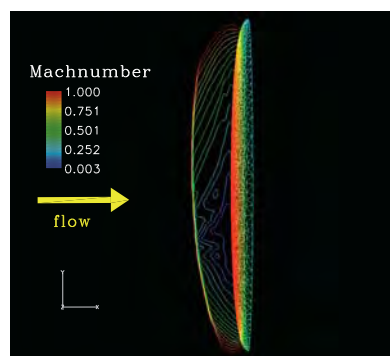


図 12 各波数成分の振幅の時間発展。

図 13 迎え角  $6^\circ$  のときの亜音速領域のマッハ数分布。

bate," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18 (1994), pp. 555–574.

- 4) B. Cockburn and C.-W. Shu, "The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems," *Journal of Computational Physics*, 141 (1998), pp. 199–224.
- 5) 鈴木佑一郎, 保江かな子, 大西直文, 第 42 回流体力学講演会, (2010), 2E10.
- 6) J. Sherwin, "Hierarchical hp finite elements in hybrid domains," *Finite Elements in Analysis and Design*, 27 (1997), pp. 109–119.
- 7) E. Shima and K. Kitamura, "On New Simple Low-Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds," *AIAA paper 2009-136* (2009).
- 8) Y. Wada and M. S. Liou, "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," *AIAA Paper 94-0083* (1994).
- 9) S. Gottlieb and C.-W. Shu, "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes," *Mathematics of Computation*, 67 (1998), pp. 73–85.