

UDC 533.69.01:
518.61

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-357

二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム

河合伸坦・石黒登美子

神谷信彦

1978年7月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. まえがき	1
2. 数値解法	2
2.1 問題の設定	2
2.2 変数変換	2
2.3 基礎方程式等の変換	2
2.4 差分式	4
2.5 計算手順	5
2.6 Kutta条件	6
2.7 準保存形差分	6
2.8 境界層修正	7
3. 数値計算例	7
3.1 非粘性計算結果	7
3.2 境界層修正を含む計算結果	9
3.3 境界層修正計算の問題点	10
3.4 抵抗発散マッハ数	11
3.5 レイノルズ数の影響	13
3.6 比熱比の影響	14
4. プログラムの使用手引	15
4.1 最も簡単な使い方	16
4.2 本プログラムのRUNに必要なコントロールカード及びデータカードとその説明	17
4.2.1 LP 出力に関する指示を与えるカード	17
4.2.2 プロッター出力に関する指示を与えるカード	18
4.2.3 プログラムのRUN全体に関する指示を与えるカード	18
4.2.4 結果を出力するときの x 座標を指定する x/c データカード	20
4.2.5 翼型データカード	21
4.2.6 比較用 c_p データカード	22
4.2.7 粗いメッシュに関する指示を与えるカード	23
4.2.8 粗いメッシュで計算を始める指示を与えるカード	23
4.2.9 細かいメッシュに関する指示を与えるカード	23
4.2.10 細かいメッシュで計算を始める指示を与えるカード	23
4.2.11 プログラムの終了の指示を与えるカード	23
4.3 JOB制御文及びコントロールカードの配列	24
4.4 計算時間・容量	24
5. ま と め	25
参考文献	26

二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム*

河合伸垣**・石黒登美子***

神谷信彦**

概 要

非粘性・圧縮性・定常な速度ポテンシャル方程式の数値計算法を解説する。これは二次元翼まわり、一様流マッハ数 $M_\infty < 1$ に対して差分法を適用するものであり、また境界層修正も行なう。そして計算例をもって、この計算プログラムの能力と限界を示す。一般のユーザーが容易にこのプログラムを利用できるように、汎用性を重視してプログラムを整備し、使用手引きを詳説した。

二次元翼外部を円内部へ等角写像する手法、局所超音速流に対して上流側差分をとる手法（非保存形）、人工粘性を陽に加える手法（準保存形）、Jamesonの安全性解析などが計算法に取り入れられている。

後縁はく離が弱い場合には、実験値と良く一致した計算結果を得ることができる。

1. まえがき

遷音速流の研究の重要性は、改めて述べるまでもなく広く認識されている。近年、計算機の高速化とともに、遷音速流に関する数値計算法は目覚しく発展しつつある。ここでは、最も基本的かつ重要な二次元翼型まわりの遷音速流の数値計算について、汎用の計算プログラムを作製し、その理論、使用法などを述べる。プログラムを利用するだけの目的の読者は、ここから第4章の使用手引まで読み飛ばして差しつかえない。

流れを非粘性ポテンシャル流と仮定しても、差分法による遷音速流の数値計算にはいくつかの問題点がある。その第1は、対応する差分方程式を作り、繰返し計算によってその解を求めるのであるが、その際、差分式の解はもとの微分式の解の近似となっているか、さらに、差分式の解は物理的に意味のある解となっているかという

根本的な疑問が生じるという事である。ここではこの問題を避けて、得られた数値解を他の数値解や実験値と比較するに留める。

第2は、無限に広い流れ場に格子網を張る方法である。もしも等間隔の格子網をとれば、格子点の数は膨大となり、計算機の記憶容量の制限から十分な近似が得られない。そこで、座標変換を施す方法や、数値計算によって格子網を発生させる方法がとられる。Sells¹⁾は翼の外部を円の内部へ等角写像した。これは、境界条件を正確に扱える点、および前縁・後縁近傍の格子が細かい点において優れている。

第3は、微分方程式が楕円型になる領域と、双曲型になる領域が併存する点である。方程式の型に応じて適当な解法も異なるのである。もしも緩和法を単純に適用すれば、解は発散するであろう。MurmanとCole²⁾は、亜音速（楕円型）の点では中心差分を、超音速（双曲型）の点では上流差分を局所的に用いる緩和法を考案し、収束解を得た。

GarabedianとKorn³⁾はCellsの座標変換法とMurman・Coleの差分法を組み合わせ、境界条件を正確にして遷音速流を計算した。またJameson⁴⁾は差分法を改良して、安定性と収束性を高めた。

第4の問題は衝撃波の取扱いである。以上^(2,3,4)の方法は非保存形の差分であるため、衝撃波を横切って物理量の保存が保証されず、従って衝撃波の位置などを正確に求めることができない。そこでMurman⁵⁾は遷音速近似式に対して保存形の差分法を示した。

Bauer・Garabedian・Korn・Jameson⁶⁾は以上の成果をすべて取入れて計算した。即ち、Sells¹⁾の座標変換法、Jameson⁴⁾の安定な差分法、そしてGarabedian他³⁾の非保存形差分と、Murman⁵⁾の保存形差分を応用した準保存形差分の両方を含むものである。

我々はBauerほか⁶⁾のものが現時点では最も有用であると考え、また将来の計算法の発展に備える意味からも、

* 昭和53年6月7日 受付

** 空気力学第二部

*** 計算センター

航技研にあるFACOM 230-75用のプログラムとして再製した。その際、入出力を改善して汎用化をはかり、また境界層修正法を改良して計算の安定性を高めた。さらにAP(アレイプロセッサ)用のコードも作製した。プログラムの詳細については、計算センターから貸出される予定の使用手引・計算例・解説書⁷⁾を参照されたい。また、概略については速報⁸⁾⁹⁾を参照されたい。

2. 数値解法

2.1 問題の設定

基礎方程式は、定常・2次元・非粘性・等エントロピーの仮定のもとに、速度ポテンシャル ϕ に関する2階の偏微分方程式

$$(a^2 - U^2)\phi_{xx} - 2UV\phi_{xy} + (a^2 - V^2)\phi_{yy} = 0 \quad (1)$$

とする。ただし(1)式において速度成分 U , V はポテンシャルの傾きとして定義される。すなわち

$$U = \phi_x, \quad V = \phi_y \quad (2)$$

である。音速 a はエネルギー式

$$\frac{U^2 + V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} + \frac{M_\infty^2}{\gamma - 1} \quad (3)$$

によって定められる。ただし一様流の風速は $U_\infty = 1$ とされ、 γ は比熱比を表わす。一様流のマッハ数は $0 < M_\infty < 1$ の範囲で与える。(2), (3)式から(1)式は非線型であり、また $a^2 - U^2 - V^2$ の正負に従い(1)式はそれぞれ楕円型または双曲型となる。

翼面上の境界条件は、 ν を法線方向とすると、

$$\phi_n = 0 \quad (4)$$

と表わされる。一方、Ludford¹⁰⁾によると、 R , θ を物理面における極座標とし、 $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ とすると、ポテンシャル流の解は

$$\begin{aligned} \phi = & R \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi\beta} \log R \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}(\beta \tan \theta) + \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\theta) \left(\frac{\log R}{R}\right)^n \left(\frac{1}{R}\right)^m \quad (6)$$

の形になる。ここで、吹出し $\sigma = 0$ であり、また $R \rightarrow \infty$ につれて $\varphi \rightarrow 0$ であるから、無限遠における境界条件は

$$\phi = R \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}(\beta \tan \theta) \quad (7)$$

である。ここで新たなパラメータとして、循環 Γ が導入された。 Γ の値を決定するために、後縁において速度が有限でなければならないというKuttaの条件を課す必要がある。

2.2 変数変換

等角写像法を利用するために、まず物理面における座標を $x - iy = z$ と置いて複素数表示する。次に、翼の外部(z)から単位円の外部(ζ)へ等角写像する。様々な等角写像関数があるが、ここではSchwartz-Christoffelの公式

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{1-\frac{\epsilon}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=0}^{NFC} \frac{c_n}{\zeta^n}\right) \quad (8)$$

を用いる。ただし ϵ は後縁角である。(8)式は後縁の角張りを正確に表現する点ですぐれている。翼型の形状から複素係数 c_n を求める方法は、著者の一人である石黒¹¹⁾の文献に詳しく述べられているので、参照されたい。

有限な空間において計算するために、さらに

$$\zeta = \frac{1}{\sigma} \quad (9)$$

によって単位円の内部(σ)に等角写像する。それから $\sigma = r e^{i\theta}$ と極座標表示し、 r と θ を新しい独立変数とし、 $r - \theta$ 面に等間隔な格子網を張る。

このようにして作られた物理面における格子網の例を図1に示す。格子が翼面に沿う点、翼面付近、特に前・後縁付近で格子が細かい点、格子が直交する点において望ましい格子網が得られることがわかる。また後縁が開いている翼型でも、この等角写像法では(閉じた)単位円に写像することができるから、計算上は何ら支障がない。

速度ポテンシャル ϕ は無限遠点における特異性をもつ。これは(5)式右辺第1項、即ち一様流ポテンシャルに寄因する。そこで残りの項を擾乱ポテンシャル ϕ として導入する。即ち

$$\phi = \frac{1}{r} \cos(\theta + \hat{\alpha}) + \phi \quad (10)$$

と定義すると ϕ は常に有限である。ただし $\hat{\alpha}$ は無揚力時の一様流の方向から測った迎角である。

このように、 r , θ を独立変数に、 ϕ を従属変数にとれば、有限な領域(r , θ)において有限な値(ϕ)をもつこととなり数値計算に適することとなる。

2.3 基礎方程式等の変換

(8)式の写像半径を f とおくと、(9)式により

$$f = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = r^2 \left| \frac{dz}{d\sigma} \right| \quad (11)$$

となる。また u , v をそれぞれ θ , r 方向の速度成分として定義すると、(2), (8), (9), (10), (11)式から

$$u = \frac{1}{f} (r \phi_r - \sin(\theta + \hat{\alpha})) \quad (12)$$

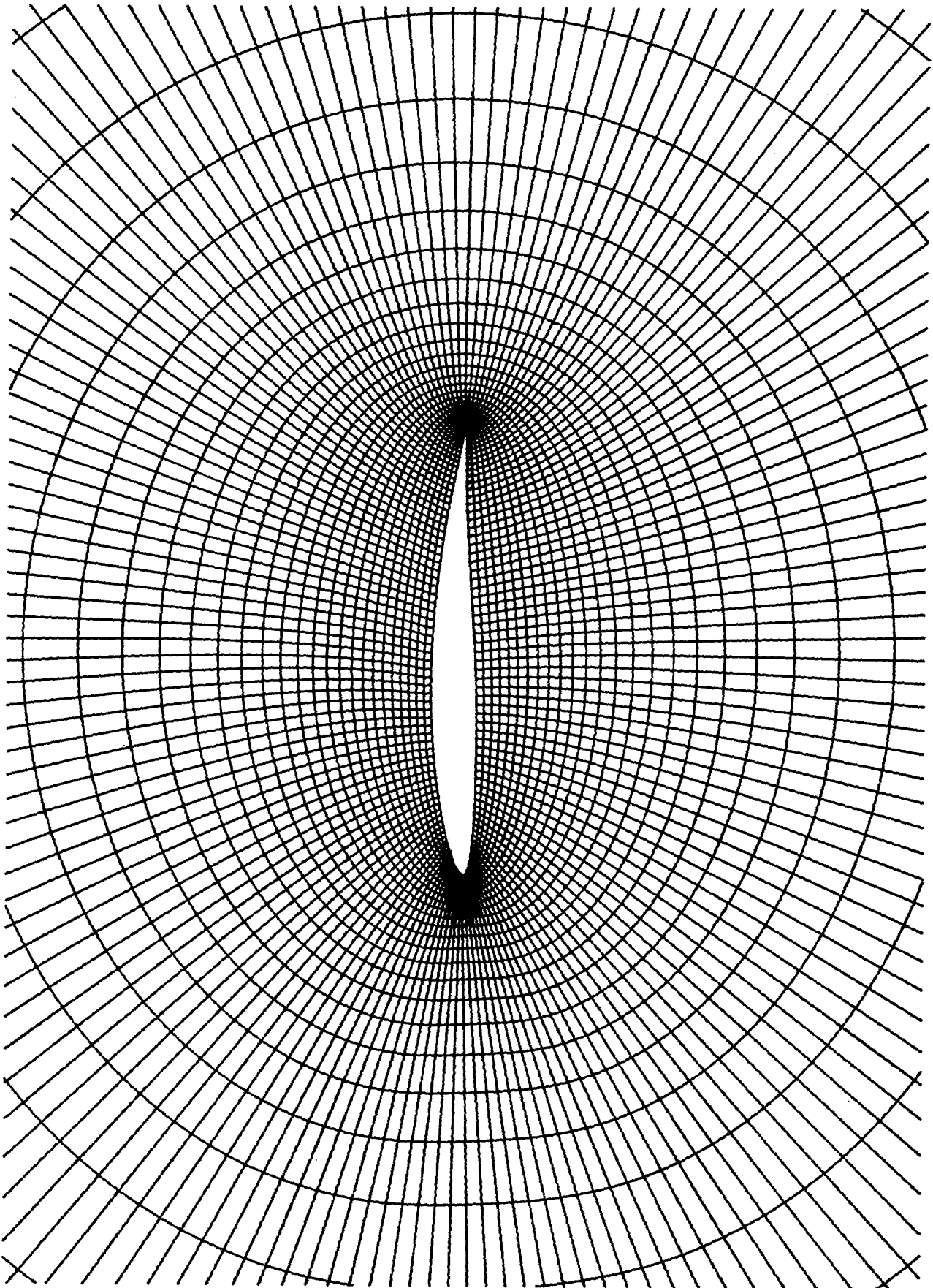


図1 等角写像法で得られた物理面上の格子網。
NACA 64A410 翼型。

$$v = \frac{1}{f} (r^2 \phi_r - \cos(\theta + \hat{\alpha})) \quad (13)$$

$$q^2 = u^2 + v^2 \quad (14)$$

となる。すると(3)式は

$$a^2 = \frac{r-1}{2} + \frac{1}{M_\infty^2} - \frac{r-1}{2} q^2 \quad (15)$$

と表わせる。

こうして(1)式は次のような計算の基礎方程式となる。

$$\begin{aligned} \text{【SN】} = & (a^2 - u^2) \phi_{\theta\theta} - 2ruv \phi_{\theta r} \\ & + r^2 (a^2 - v^2) \phi_{rr} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{【L】} = & -2uv \phi_\theta + r(a^2 + u^2 - 2v^2) \phi_r \\ & + \frac{u^2 + v^2}{2f^2} \left[\frac{(f^2)_\theta}{r} f u + (f^2)_r f v \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{【SN】} + \text{【L】} = 0 \quad (18)$$

ここで【SN】は2階の微分項，【L】は1階以下の微分項を表わす。

超音速の場合に、数値的安定性を得るために、座標を回転させて、上流差分をとる。そのために、【SN】を流れ方向の2階微分項【S】と流れに垂直な方向の2階微分項【N】に分ける。即ち、

$$\text{【S】} = \frac{a^2 - q^2}{q^2} (u^2 \phi_{\theta\theta} + 2ruv \phi_{\theta r} + r^2 v^2 \phi_{rr}) \quad (19)$$

$$\text{【N】} = \frac{a^2}{q^2} (v^2 \phi_{\theta\theta} - 2ruv \phi_{\theta r} + r^2 u^2 \phi_{rr}) \quad (20)$$

$$\text{【S】} + \text{【N】} + \text{【L】} = 0 \quad (21)$$

翼面上の境界条件は、 r が法線方向であるから、(4)式から $r=1$ において

$$\phi_r - \cos(\theta + \hat{\alpha}) = 0 \quad (22)$$

と表わされる。一方無限遠における境界条件は、(7)式から

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(\beta \tan(\theta + \hat{\alpha})) \quad (23)$$

$$\phi = \Gamma g(\theta) \quad (24)$$

と表わされる。

後縁では写像の等角性が崩れることから、写像半径は $f=0$ となる。(12)、(13)式からわかるように、このとき後縁における速度が有限であるための必要条件は、 $r=1$ 、 $\theta=0$ 、 2π において

$$\phi_\theta - \sin \hat{\alpha} = 0 \quad (25)$$

$$\phi_r - \cos \hat{\alpha} = 0 \quad (26)$$

である。(26)式は(22)式に含まれるから、(25)式をKuttaの条件と呼ぶ。この条件は後縁における速度の値を定めないので、ここでは、後縁はよどみ点であるものと

する。即ち、 $r=1$ 、 $\theta=0$ 、 2π において

$$u = v = 0 \quad (27)$$

とする。なお、他の値を与えても、計算結果にほとんど影響しなかった。

2次元翼型まわりのポテンシャル ϕ に関して、翼を1周すると ϕ の値が循環 Γ だけ増すという無限多価性がある。これを処理するには、翼面から無限遠点を結ぶ任意の曲線の切れ目を入れ、その上で ϕ の値に Γ だけの飛びがあるものとすればよい。ここでは便宜上、 $\theta=0(,2\pi)$ の線上で飛びの条件

$$\phi(2\pi, r) = \Gamma + \phi(0, r) \quad (28)$$

を与える。

2.4 差分式

区間 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 、 $1 \geq r \geq 0$ をそれぞれ M 等分、 N 等分し、添字を i 、 j とする。即ち $\theta_1=0$ 、 $\theta_{M+1}=2\pi$ 、 $r_1=1$ (翼面)、 $r_{N+1}=0$ (無限遠点)である。1階以下の微分項【L】は方程式の型に関係しないから、中心差分を適用する。

亜音速の場合には、【SN】を用い中心差分を適用する。すなわち、上添字 n を既知段階、*を更新段階として、翼の上面側で

$$\begin{aligned} (\Delta\theta)^2 \phi_{\theta\theta} = \\ \phi_{i-1j}^* - \frac{2}{\omega} \phi_{ij}^* - \left(2 - \frac{2}{\omega}\right) \phi_{ij}^n + \phi_{i+1j}^n \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 4 \Delta r \Delta\theta \phi_{\theta r} = \\ \phi_{i-1j-1}^* - \phi_{i-1j+1}^* - \phi_{i+1j-1}^n + \phi_{i+1j+1}^n \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (\Delta r)^2 \phi_{rr} = \\ \phi_{i+1j}^* - 2 \phi_{ij}^* + \phi_{i-1j}^* \end{aligned} \quad (31)$$

によって差分近似する。ここで ω は緩和係数であり、通常 $\omega=1.4$ とする。なお翼の下面側では添字 $i-1$ と $i+1$ を入れ替えて、(30)式の右辺の符号を逆にすればよい。

超音速の場合には、Murman & Coleの陰的上流差分法を、流線と座標軸が傾いている場合へ拡張する。即ち、流線に平行な成分【S】に対して上流側の格子点を使う一次精度の差分を適用し、流線に垂直な成分【N】に対しては中心差分を適用する。従って【N】に対して(29)、(30)、(31)式を利用する。ただしここでは $\omega=2$ に固定した時の式を用いる。

さらにJamesonの数値的安定性・収束性の解析によると、【S】の部分についての上流差分は次のような型がよいとされる。すなわち、 $u \geq 0$ 、 $v < 0$ のときの差分表現は

$$\begin{aligned} (\Delta\theta)^2 \phi_{\theta\theta} = \\ 2 \phi_{ij}^* - \phi_{ij}^n - 2 \phi_{i-1j}^* + \phi_{i-2j}^n \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Delta r \Delta \theta \phi_{rr} = 2\phi_{ij}^* - \phi_{ij}^n - \phi_{i-1,j}^* - \phi_{i,j-1}^* + \phi_{i-1,j-1}^n \quad (33)$$

$$(\Delta r)^2 \phi_{rr} = 2\phi_{ij}^* - \phi_{ij}^n - 2\phi_{i,j-1}^* + \phi_{i,j-2}^n \quad (34)$$

である。Jamesonは音速に近いときの安定性を増すために、次のような非定常項を(18)または(21)式の左辺に加えるように提案した。 $\hat{\beta} \geq 0$ として、

$$[V] = -\hat{\beta} f \frac{dt}{\Delta \theta} (u \phi_{\theta t} + r v \phi_{rt}) \quad (35)$$

とする。非保存形差分では $\hat{\beta}=0$ として良いことが多く、2.7節で述べる準保存形差分の場合には $\hat{\beta}=0.2$ 程度が適当である。 $\hat{\beta}=50, 100$ のように、あまり $\hat{\beta}$ を大きくとりすぎると、衝撃波がなだらかになり過ぎて、もっともらしくない数値解が得られる。

翼面上の境界($r=1, j=1$)では、(22)式から

$$\phi_{i0} = \phi_{i2} - 2\Delta r \cos(\theta_i + \hat{\alpha}) \quad (22a)$$

となって、 ϕ_{i0} を表わすことができるから、(30)、(31)、(33)式をそのまま $j=1$ においても適用できる。なお(34)式を $j=1$ において表わすのは困難であるが、(34)式の差分は(19)式の中の $r^2 v^2 \phi_{rr}$ の項としてだけ使われ、しかも翼面($j=1$)では $v=0$ であるから、実際には何の支障もない。

2.5 計算手順

図2に計算手順の概略を示す。①翼型座標から、等角写像を行なってフーリエ係数 c_n を求める。また $f_{ij}^2, \Delta r, \Delta \theta, g(\theta_i)$ などの幾何的な量を計算しておく。②初期値($n=0$ 段階)を次式で与える。迎角一定の場合、

$$\Gamma = 4\pi \sin \hat{\alpha} / \beta \quad (36)$$

c_L 一定の場合、

$$\hat{\alpha} = \beta c_L c / 8\pi \quad (37)$$

$$\Gamma = c_L / 2c \quad (38)$$

として、どちらの場合にも

$$\phi = r \cos(\theta + \hat{\alpha}) + \Gamma g(\theta) \quad (39)$$

とする。

③初期値または繰返しの前ステップから、 ϕ_{ij}^n および Γ^n が与えられている。④ θ_i を固定して、基礎方程式と境界条件を前節のように差分化すると、3項方程式が導かれるから、それをGauss消去法によって解く。この演算を走査(i を1ずつ動かす。)するのであるが、超音速の上流差分(32)、(33)式を実現できるためには、超音速領域において流れと走査とが同じ方向になるように走査しなければならない。そこで、前縁付近の適当な所から上面側、下面側にわけて、それぞれ別に関後縁まで走査する。⑤その結果、変動ポテンシャルは更新されて ϕ_{ij}^* と

なる。循環は Γ^n のままである。⑥この解 ϕ_{ij}^* 、 Γ^n は一般にKutta条件を満たさない。 $n+1$ 段階でKutta条件を満たすように循環 Γ を加減してやる。〔次節参照。〕循環の変化 $\Delta \Gamma = \Gamma^{n+1} - \Gamma^n$ は流れ場全体に影響を及ぼすから、無限遠点を含めたすべての ϕ_{ij}^* に $\Delta \Gamma$ の寄与分を加える。⑦このようにKutta条件を満たすように補正した値を ϕ_{ij}^{n+1} 、 Γ^{n+1} とする。⑧この後、収束の判定を行ない、収束していなければ③へ戻って以上の操作をくりかえす。収束の判定そのものがあまり明確でないので、通常は収束を認めず、指定した回数だけ演算を繰り返す。(4.2.7節から4.2.11節および4.2.3節のSTを参照。)そして収束の状況をプロットし、目で判断する方が安全である。(4.2.2節でIPLT(5)を1と指定するとよい。)

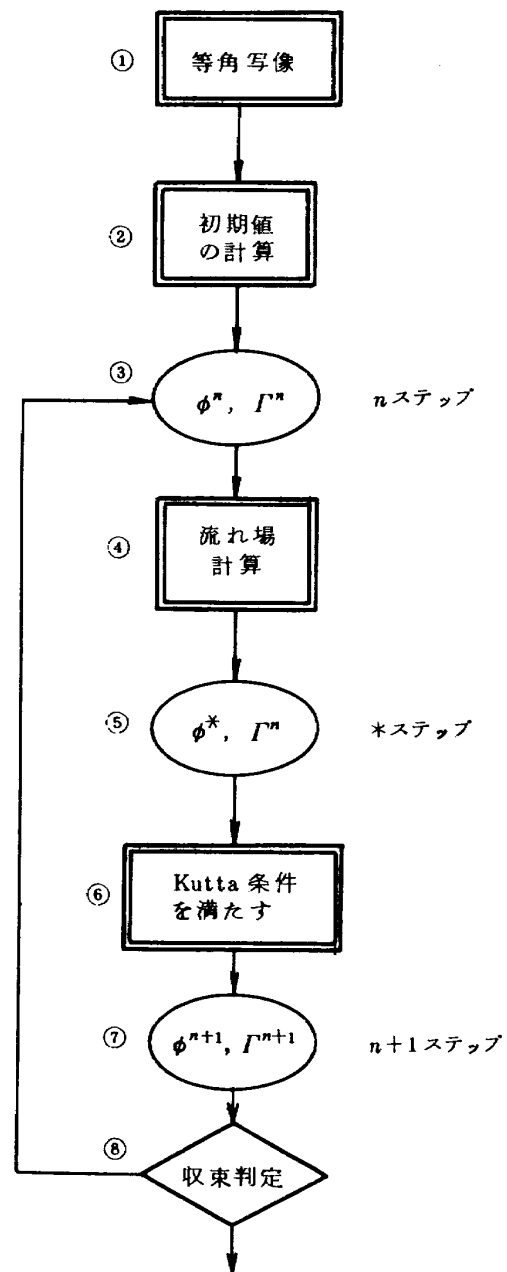


図2 計算手順の概略。(迎角一定の場合。)

2.6 Kutta 条件

〔迎角一定の場合〕

円柱まわりの非圧縮流から連想されるように、循環の値を任意に与えると、基礎方程式と境界条件から境界値問題として、その循環に対応した解が得られる。しかし異なる場合には、そのような解の中から、物理的な要請すなわち Kutta 条件を満たすものを選ぶ必要がある。数値計算の便宜上、まず、推定値 Γ^n , ϕ_{ij}^n を与えて、 Γ^n に対応した解 ϕ_{ij}^* を計算する。次に、この解をもとに、Kutta 条件を満たすような Γ^{n+1} を求め Γ^{n+1} に対応する解 ϕ_{ij}^{n+1} を求めるのであるが、その具体的方法を以下に述べる。

(5), (10), (23) 式から、次のように ϕ は循環項とその他の項に分けて表わされることがわかる。

$$\phi = \Gamma g(\theta) + \varphi \quad (40)$$

ステップでは ϕ^ , Γ^n , φ^* とし、 $n+1$ ステップでは ϕ^{n+1} , Γ^{n+1} , φ^{n+1} としよう。* $\rightarrow n+1$ の間では、 φ を変えず ($\varphi^* = \varphi^{n+1}$)、循環 Γ だけを変化させる。その変化量を

$$\Delta\Gamma = \Gamma^{n+1} - \Gamma^n \quad (41)$$

と定義すると、(40) 式から φ を含まない形で

$$\phi^{n+1} = \phi^* + \Delta\Gamma g(\theta) \quad (42)$$

と表わすことができる。そして $n+1$ ステップにおいて Kutta 条件(25)式を満たさせる。即ち後縁で

$$\phi_{\theta}^{n+1} = \sin \hat{\alpha} \quad (43)$$

とする。こうすると(42), (43) 式から

$$\Delta\Gamma = (\sin \hat{\alpha} - \phi_{\theta}^*) / g_{\theta} \quad (44)$$

となり $\Delta\Gamma$ が決定する。ただし ϕ_{θ}^* , g_{θ} は後縁で評価し、(28), (23) 式を考慮して

$$\phi_{\theta}^* = \frac{\phi_{2,1}^* - \phi_{M+1,1}^* + \Gamma^n}{2 \Delta\theta} \quad (45)$$

$$g_{\theta} = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \frac{1 + \tan^2 \hat{\alpha}}{1 + \beta^2 \tan^2 \hat{\alpha}} \approx \frac{\beta}{2\pi} \quad (46)$$

と表わされる。こうして $\Delta\Gamma$ が求まるから、(41), (42) 式により Γ^{n+1} , ϕ^{n+1} が決定される。実際の計算では緩和係数 ω_r を用いて(44), (46) から

$$\Delta\Gamma = (\sin \hat{\alpha} - \phi_{\theta}^*) \frac{2\pi}{\beta} \cdot \omega_r \quad (44a)$$

とする。通常 $\omega_r = 1.0$ である (4.2.3 節 RCL 参照)。

〔 C_L 一定の場合〕

Oswatitsch の一般化 Kutta-Joukowski 定理¹⁾ によると

$$L = \rho_{\infty} U_{\infty} \Gamma \quad (47)$$

であり、一方 C_L の定義から

$$L = c_L \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty} c \quad (48)$$

であるから、 $U_{\infty} = c = 1$ として

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_L = \text{一定} \quad (49)$$

であることがわかる。

(40) 式において Γ を変えることができないから、代わりに $g(\theta)$ を変化させる。これは迎角 $\hat{\alpha}$ を変えることになるから、その量を

$$\Delta\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{n+1} - \hat{\alpha}^n \quad (50)$$

と定義する。(40) 式から

$$\phi^{n+1} = \phi^* + \Gamma [g^{n+1}(\theta) - g^n(\theta)] \quad (51)$$

が導びかれ、Kutta 条件(25)式から

$$\phi_{\theta}^{n+1} = \sin \hat{\alpha}^{n+1} \quad (52)$$

となる。従って、 $|\Delta\hat{\alpha}| \ll 1$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\alpha} & \left[\frac{\Gamma\beta(1-\beta^2)}{\pi} \cdot \frac{\tan \hat{\alpha}^n \sec^2 \hat{\alpha}^n}{(1+\beta^2 \tan^2 \hat{\alpha}^n)^2} - \cos \hat{\alpha}^n \right] \\ & \doteq \sin \hat{\alpha}^n - \phi_{\theta}^* \end{aligned} \quad (53)$$

となる。よって(50)式から $\hat{\alpha}^{n+1}$ が求まり、(23) 式により $g^{n+1}(\theta)$ を求め、(51) 式によって ϕ^{n+1} を全領域で計算する。実際の計算では(53)式をさらに近似し、緩和係数 ω_r をかけて

$$\Delta\hat{\alpha} = (\sin \hat{\alpha}^n - \phi_{\theta}^*) \cdot (-\omega_r) \quad (53a)$$

とする。通常 $\omega_r = 1.0$ である。(4.2.3 節 RCL 参照)

2.7 準保存形差分

超音速領域での数値的安定性を得るために、後退差分法を用いたが、これは基礎方程式に人工粘性を加えたものと考えられる。例えば(33)式は $i - \frac{1}{2}$, $j - \frac{1}{2}$ が中心になっているから、 i , j を中心としたテイラー展開によると、

$$\phi_{\theta r}^{i-\frac{1}{2} j-\frac{1}{2}} = \phi_{\theta r}^{ij} - \frac{\Delta\theta}{2} \phi_{\theta\theta r}^{ij} - \frac{\Delta r}{2} \phi_{\theta rr}^{ij} \quad (54)$$

と近似される。右辺の第2, 第3項が人工粘性と呼ばれる。さて、完全な保存形の差分を構成するためには、基礎方程式と人工粘性の両方とも保存形にしなければならない。しかしここでは基礎方程式(1)を保存形に書き換えず、人工粘性だけを保存形にする。これは準保存形と呼ばれるが、完全な保存形と計算結果にあまり相違はないといわれる。(文献6, p.118 参照)

流れ方向項【S】, (19) 式に後退差分(32)~(34)式を適用したときの実質的な人工粘性は

$$\begin{aligned} & -\frac{a^2 - q^2}{q^2} \{ \Delta\theta (u^2 \phi_{\theta\theta\theta} + r u v \phi_{\theta\theta r}) \\ & + \Delta r (r u v \phi_{\theta rr} + r^2 v^2 \phi_{rrr}) \} \end{aligned} \quad (55)$$

である。(55) 式を考慮して、亜音速・超音速、 u , v の

正・負すべての場合に適合するように

$$\mu = \min \left(0, \frac{a^2}{q^2} - 1 \right) \quad (56)$$

$$P = \mu |u| (u \phi_{\theta\theta} + r v \phi_{\theta r}) \quad (57)$$

$$Q = -\mu |v| (r u \phi_{\theta r} + r^2 v \phi_{rr}) \quad (58)$$

とおき、人工粘性を保存形で

$$[T] = -\Delta\theta \frac{\partial P}{\partial\theta} - \Delta r \frac{\partial Q}{\partial r} \quad (59)$$

と表わすと、式

$$[SN] + [L] + [T] = 0 \quad (60)$$

は、亜音速領域の内部では(18)式に一致し、超音速領域の内部では高次の誤差を別として(21)式に一致する。しかし両領域の境界では $\mu = 0$ から $\mu = \frac{a^2}{q^2} - 1$ へ、または

その逆へ切り換わるから、(60)式は(18)、(21)式のどちらとも異なる。この境界での演算はまさに Murman⁵⁾の音速点演算子、衝撃波点演算子に相当するものである。

保存形の公式の差分化は次のように行なう。(57)式と(58)式の $\phi_{\theta\theta}$ 、 $\phi_{\theta r}$ 、 ϕ_{rr} に対しては中心差分をとる。この点について原プログラム⁶⁾には誤りがあったものと思われるので修正した。しかし計算結果には、ほとんど差はみられない。(59)式に対しては上流側差分をとる。すなわち、 $u_{ij} > 0$ 、 $v_{ij} < 0$ のとき、

$$[T] = P_{i-1j} - P_{ij} - Q_{ij} + Q_{ij-1} \quad (61)$$

と表わす。

2.8 境界層修正

現実の流れでは粘性の影響を無視できないから、境界層修正する必要がある。上記のポテンシャル流計算によって得られる圧力 (C_p) 分布に基づいて、境界層計算を行なう。まず遷移点を適当に指定し(通常7%翼弦長。4.2.3節PCH参照)、それより前縁がわの層流境界層では、排除厚さは非常に薄いからゼロとみなす。遷移点から後縁までNash, Macdonald法¹²⁾によって乱流境界層の計算を行なう。このとき

$$SEP = -\frac{\theta}{q} \frac{dq}{ds} > 0.04$$

ならば剥離状態とみなす。詳細は4.2.3節SEPM, XSEPの説明を参照。こうして得られる排除厚さに緩和係数をかけて(4.2.3節RDEL参照)翼形状に加えて、再びポテンシャル流の計算を行なう。普通、ポテンシャル流計算5回の割に境界層修正1回程度行なう(4.2.3節NS1参照)。

非粘性の圧力分布をそのまま適用すると、後縁付近では剥離が起り計算が発散するから、何らかの処置が必要である。図3に示すようにBauer他⁶⁾のプログラムでは、

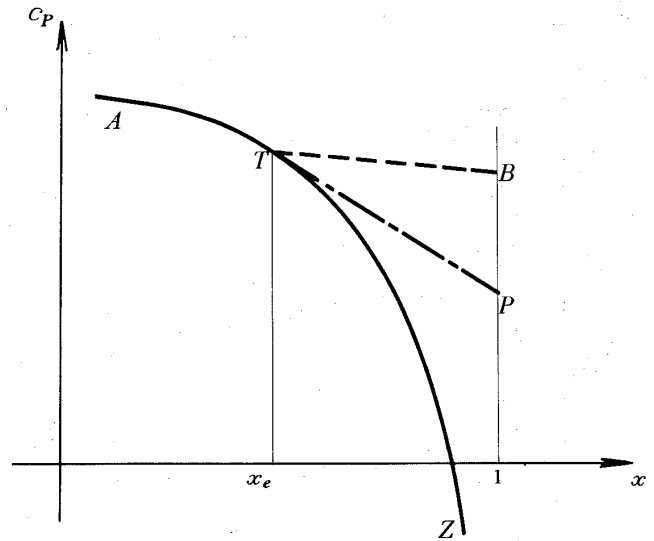


図3 境界層修正用の C_p 補間法。ATZが C_p 曲線、TPは接線である。Bauer他⁶⁾ではATBを、本プログラムではATPを使う。

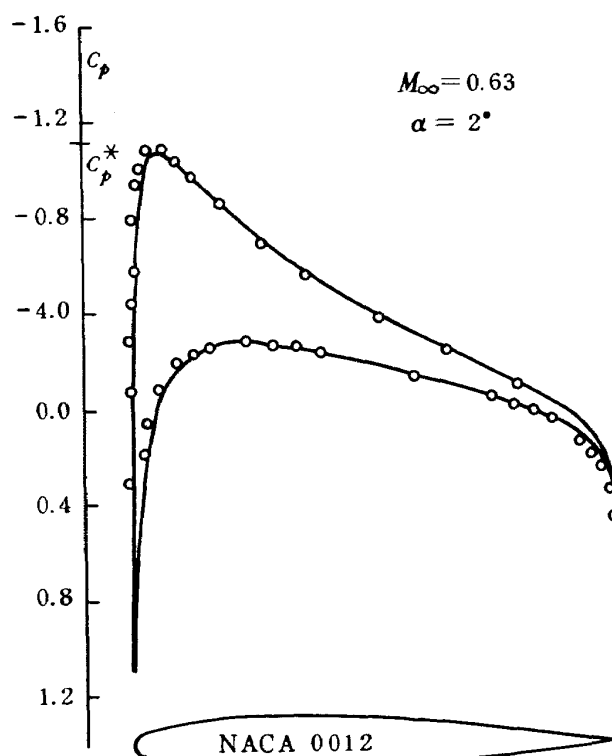
適当に指定した位置 x_e (C_p 補間位置と呼ぶ) から後縁まで C_p がほぼ一定になるように上面の C_p 分布を変更したものを境界層計算のために用いた。しかしこの方法では、多くの場合に数値解が激しく振動した。そこで我々は次のような C_p 補間法をとった。すなわち翼の上・下面それぞれについて x_e を指定し(4.2.3節XU, XL参照)、その位置で C_p 曲線に接線を引き、 x_e から後縁 ($x=1$) までの区間では、その接線上の値を境界層計算用の C_p とした。

3. 数値計算例

3.1 非粘性計算結果

上記のポテンシャル流計算法(非保存形)を用いた計算例を図4、図5に実線で示す。図中で C_p^* は臨界圧力係数を表わす。図4は亜臨界流の計算例である。図5は超臨界流の例であり、衝撃波が自動的に算出される。他のポテンシャル流計算法との比較として、Carlson¹³⁾の結果を○印でこれらの図に描いた。同一の条件において C_L に1%以下の差があるが、衝撃波位置を含めて良く一致している。 $M_\infty = 0.63$ の前縁付近の上面の C_p 分布に若干の差があるのは、Cartesian座標を使う Carlsonの計算法が前縁で多少無理があることを示す。

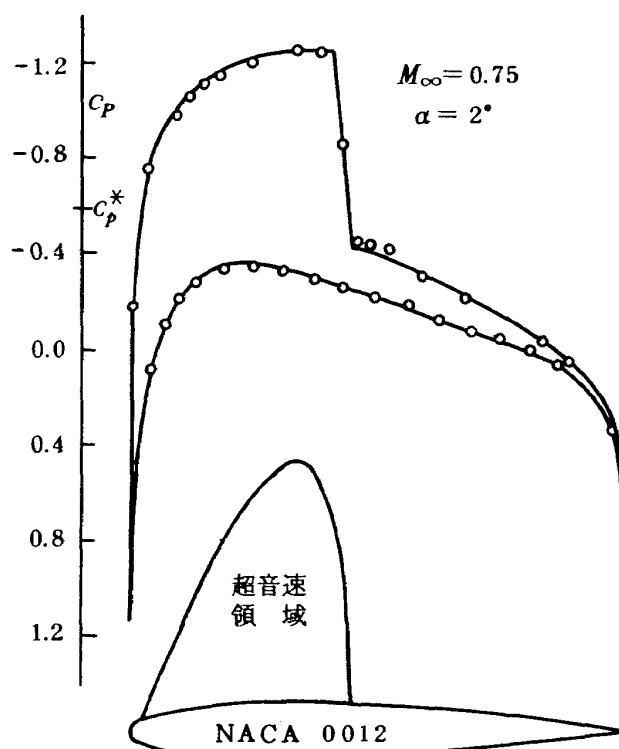
非保存形差分と(準)保存形差分との計算結果の比較を図6に示す。保存形であるか否かによって、衝撃波・圧力分布に著しい相異が見られる。これは主として衝撃波の取扱いの違いに基づくのであり、衝撃波が弱い場合の計算例では、この図ほどの差は認められない。亜臨界流の場合には、高次の誤差を除いて同一の差分であるか



— 本方法 $C_L = 0.333$ $C_D = 0.0000$

○ ○ ○ Carlson¹³⁾ $C_L = 0.335$

図4 亜臨界流。



— 本方法 $C_L = 0.445$ $C_D = 0.0136$

○ ○ ○ Carlson¹³⁾ $C_L = 0.440$

図5 超臨界流(非保存形)。

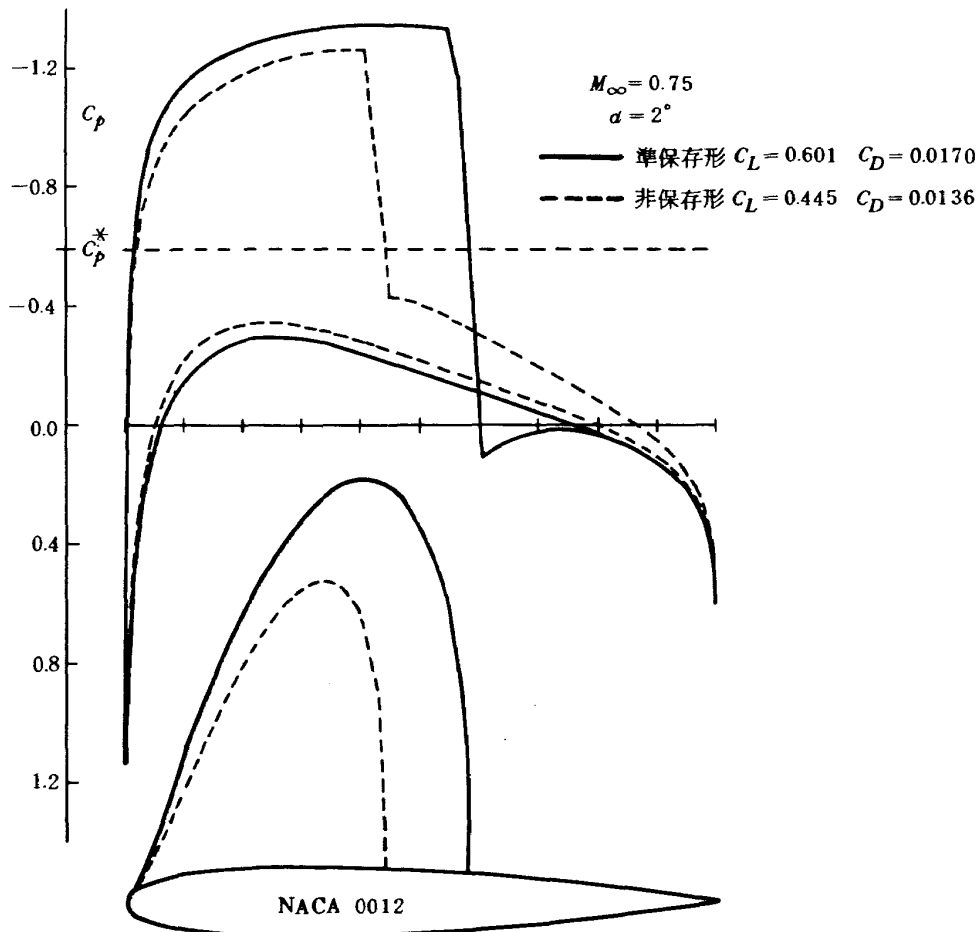


図6 非粘性計算の場合の、準保存形差分と非保存形差分との比較。

ら、比較するまでもない。

図7では石黒^{11,14)}のオイラー方程式の数値解および実験値との比較を示す。本方法のうち非保存形のものを図示したが、ここに示した流れの条件では、準保存形差分による数値解は発散し、途中で計算不能となった。本方法と石黒の計算結果には少し差異がみられるが、これは基礎方程式の相違ばかりでなく、むしろ差分精度つまり人工粘性効果の相違に基づくのであろう。しかしどちらの数値解も衝撃波付近で実験値から相当かけ離れる。粘性すなわち境界層の効果の重要性をこの図は示唆している。

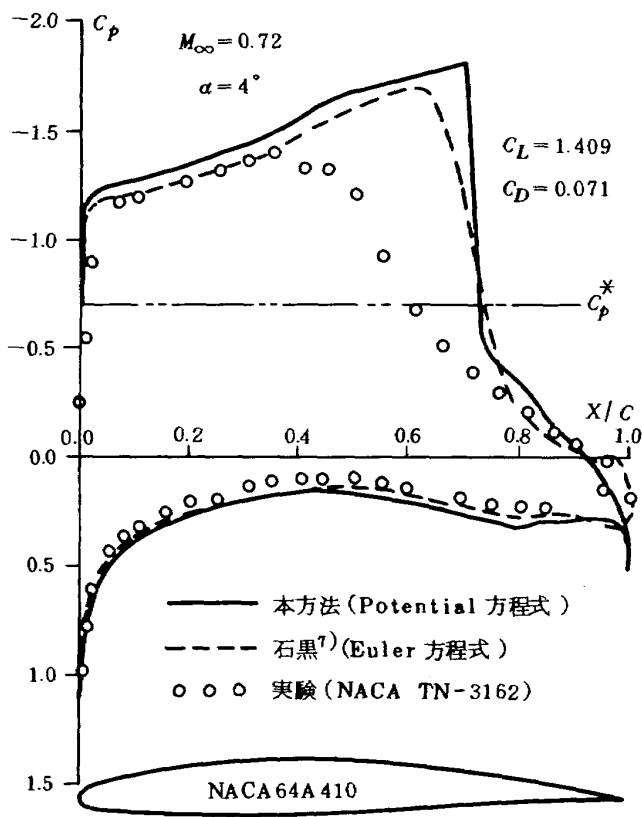


図7 基礎方程式の相違に基づく比較および実験値との比較。

3.2 境界層修正を含む計算結果

揚力係数 C_L を実験値と一致させて、非保存形差分で計算した結果を図8に示す。非粘性計算（実線）にくらべて、境界層修正を行なう（破線）ことによって実験¹⁵⁾の C_p 分布にかなり近い結果が得られることがわかる。しかし前縁・衝撃波・後縁の近傍における C_p 分布、迎角 α および抵抗係数 C_D の値にまだ相当な差が残っている。この差の一因はもちろん実験の精度にもあるが、境界層計算法および修正法、特に後縁付近の乱流境界層剥離の取扱いにも問題がある。

一方、迎角 α を実験値に一致させた場合を図9に示す。

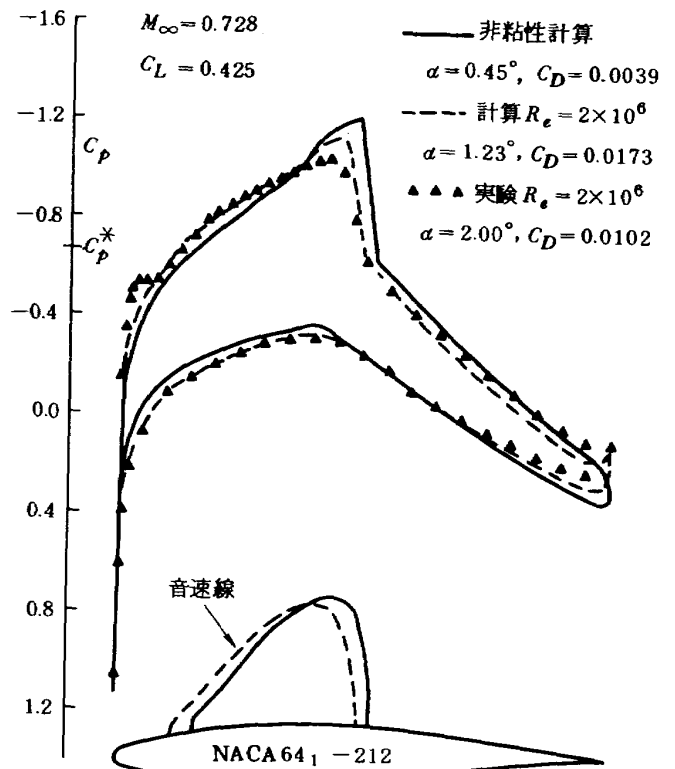


図8 数値計算（非保存形）と実験との圧力係数分布の比較。 C_L 一致の場合。

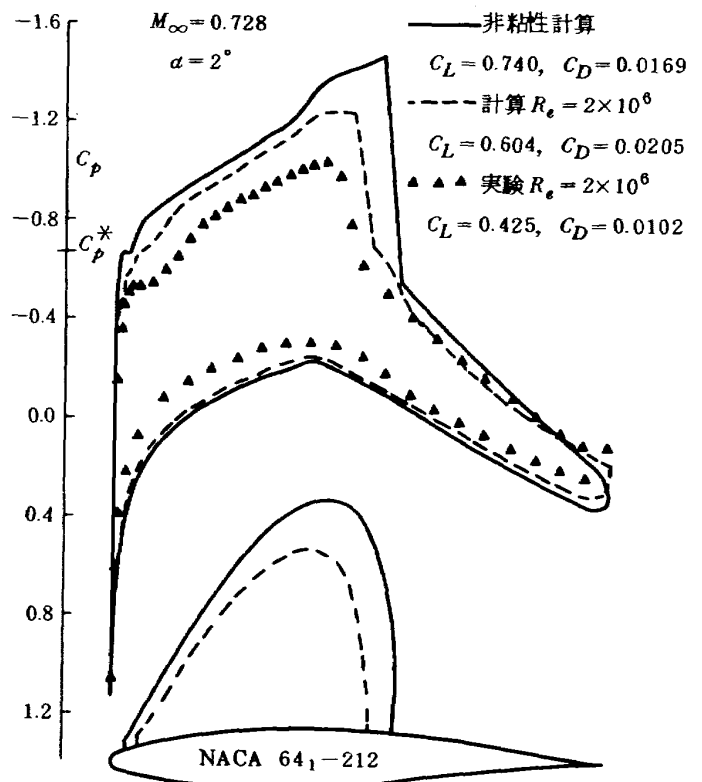


図9 数値計算（非保存形）と実験との圧力係数分布の比較。 α 一致の場合。

ここでも非保存形差分を用いた。 α を合わせたときには、図のように数値計算の C_p 分布は実験値から大きく離れてしまう。それでも境界層修正を行なうと、ある程度改善された結果が得られることがわかる。結局、この計算プログラムを利用して C_p 分布を推算するためには、 C_L を合わせて境界層修正をしなければならないといえよう。

図10には、境界層修正を行なうときの準保存形と非保存形差分による数値解を相互に比較する。やはり差はあるが、非粘性計算の場合（例えば図6）から比べると、 C_p 分布の差は著しく小さくなっている。ここでは C_L 一定の場合だけを图示したが、 α 一定の場合にも C_p 分布の差は同程度に小さい。また、図を見やすくするため実験値をプロットしてないが、準保存形と非保存形のどちらが実験値に近いかが判定できない具合である。

3.3 境界層修正計算の問題点

我々は2.8節において、 C_p 補間位置 x_e を指定し、 x_e から後縁まで C_p を外挿したものを境界層計算に用いると述べた。しかしこの修正法でも、多くの場合に不都合が生じることを示そう。

図11では、 C_p 補間位置 x_e を変えると揚力係数 C_L が変化する様子を示す。これは、計算を制御するパラメータの選び方によって計算結果が違ってしまふことを意味する。また C_L の変化も決して小さくはない。 C_L に幅をもたせて描いてあるのは、十分な繰返し回数を経た後に、この範囲で解が振動することを示す。2.8節の境界層修正法により解の振動は減小し、収束解が得られる場合もあるが、この図のように振動が残る場合も相当ある。

図12では、 x_e の選び方による C_L の変化を多くの数値

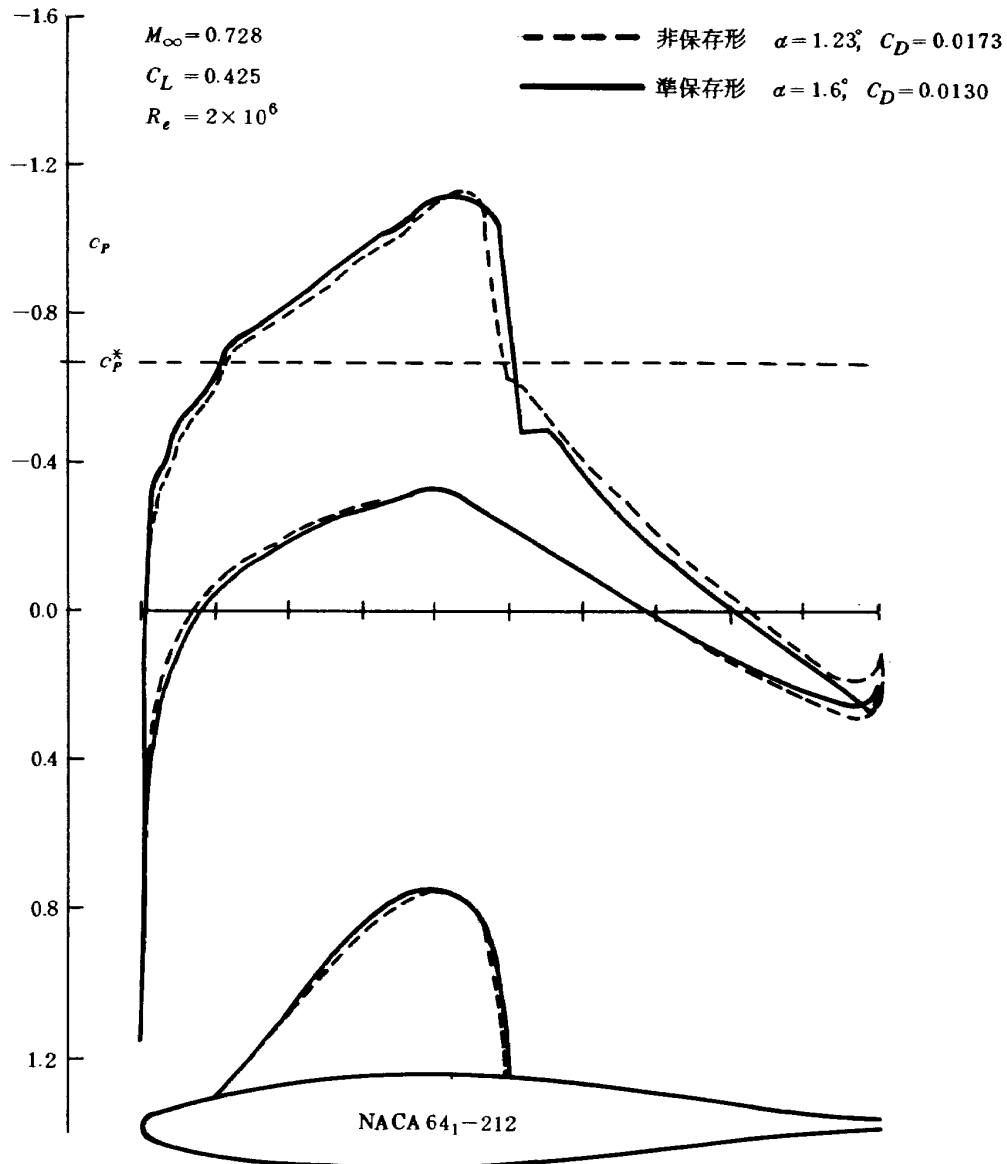


図10 境界層修正計算の場合の、準保存形差分と非保存形差分との比較。

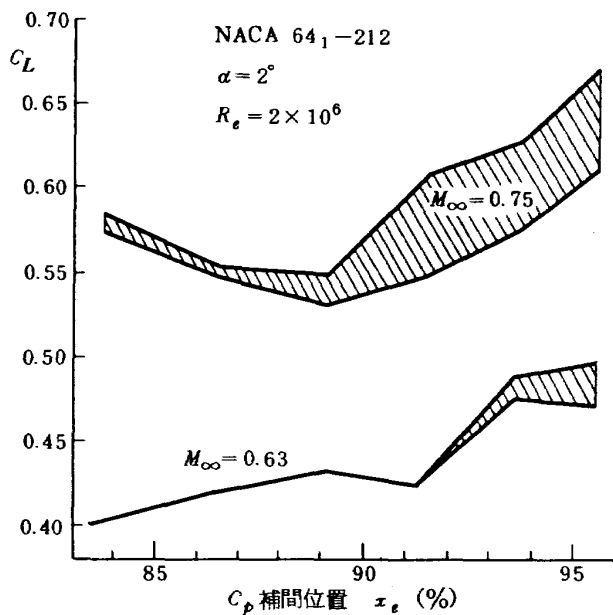


図11 x_e の選び方により、計算解が変わる様子。

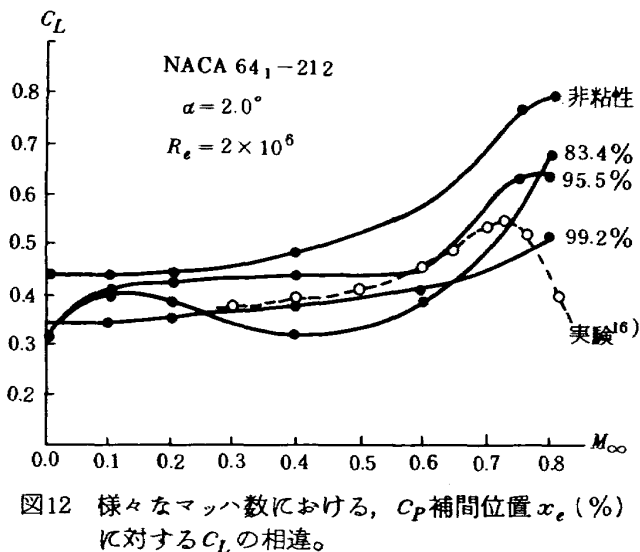


図12 様々なマッハ数における、 C_p 補間位置 x_e (%) に対する C_L の相違。

計算例で示し、また実験値¹⁶⁾および非粘性計算結果と比較する。 x_e の値をどのように指定すべきかについて適当な指針がないことがわかる。もっともこの図のように実験値がわかっているときに、実験の C_L に一致するように x_e を選ぶことは可能であるが、逆に数値計算から実験値を推定するのは困難である。それでも、非粘性計算とくらべれば、 x_e をどのようにとっても、境界層修正によって実験に近い結果を得られることをこの図は示す。

なお多くの数値計算の経験によると、NACA 0012 翼型のように後縁で圧力が急に増大する C_p 分布では解の収束性は良いようである。またレイノルズ数が高くなるほど、境界層が薄くなり剥離が弱まるから、収束性が良好になるようである。

3.4 抵抗発散マッハ数

揚力係数 C_L を一定にしたときの一様流マッハ数 M_∞ に対する抵抗係数 C_D の特性について、準保存形差分によって数値計算した例を図13に示す。ここで△印は非粘性計算であり、○印は上下面とも $x_e = 0.93$ として境界層修正を行なったものである。ある M_∞ 以上で衝撃波が強くなるため、 C_D が急激に増大する。この図で傾きが45度、即ち $\partial C_D / \partial M_\infty = 0.1$ となる M_∞ を抵抗発散マッハ数 M_{DD} と定義する。図13では $Re = 2 \times 10^6$ に対して $M_{DD} = 0.755$ 、非粘性計算に対して $M_{DD} = 0.745$ と読み取れる。このようにして得られた M_{DD} を C_L に対してプロットしたものが次の2枚の図である。

図14ではNACA64A410 翼型の抵抗発散マッハ数 M_{DD} の数値計算結果を風洞試験結果¹⁵⁾と比較する。境界層修正を行ない、準保存形差分を用いた場合(○印)には、実験値にほとんど一致することがわかる。逆に非粘性計算、あるいは非保存形の差分にすると実験値から相当に離れてしまう。この翼型は剥離をあまり考慮する必要のない層流翼であるから、境界層の計算がうまく行ったものと思われる。また、衝撃波を表現するには差分を保存形にしなければならないといわれるが、図14はそれを裏付けている。

図15は、神谷の800-441-13 翼型の抵抗発散マッハ数 M_{DD} について数値計算と風洞試験¹⁵⁾とを比較する。低揚力係数 ($C_L \leq 0.4$) では、やはり境界層修正をして準

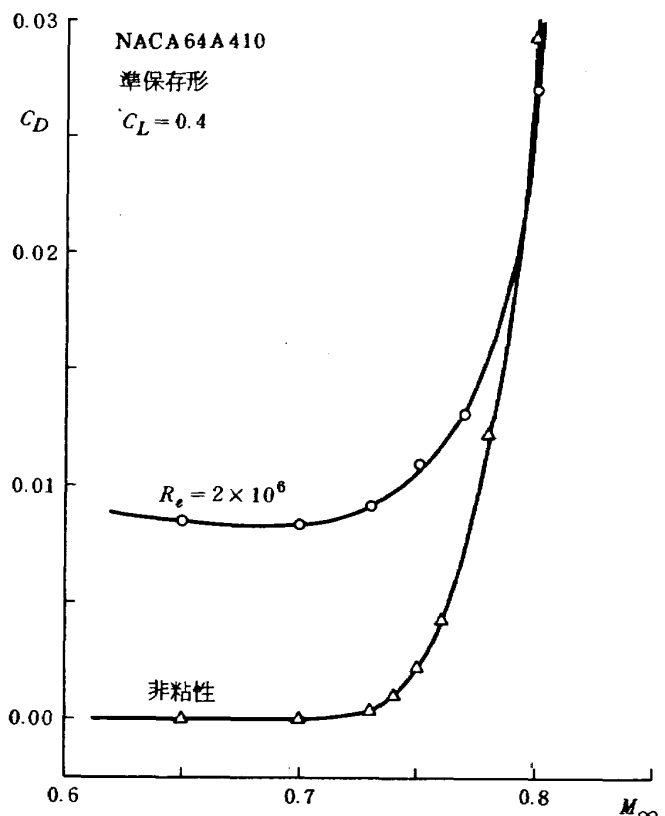


図13 抵抗係数・一様流マッハ数特性。

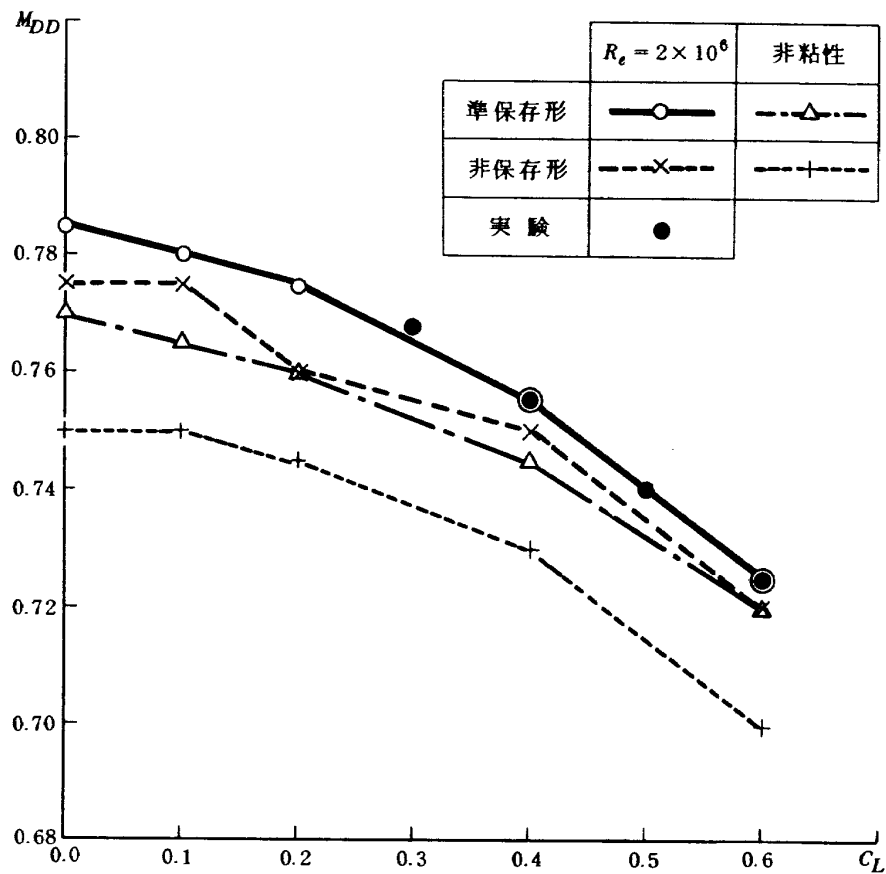


図14 NACA64A410翼型の抵抗発散マッハ数。

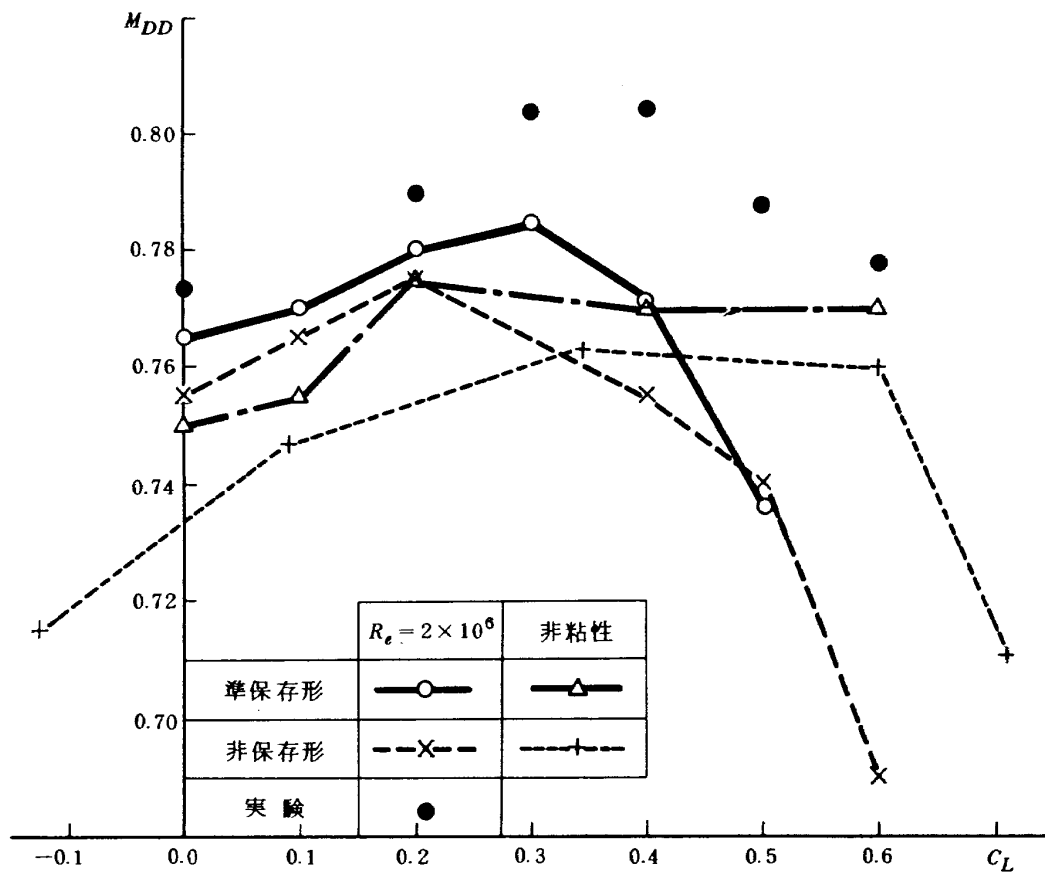


図15 KAMIYA 800-441-13翼型の抵抗発散マッハ数。

保存形差分を使った計算結果が最も実験値に近いことがわかる。しかし $C_L=0.5$ では逆に最も悪い結果となる。一般に、境界層修正する計算の M_{DD} が非粘性計算の M_{DD} 値を下回る場合には、その計算値は全く使いものにならないと言えそうである。ともかく、計算値と実験値の相違はかなり大きい。800-441-13 翼型は剥離限界ぎりぎり設計された翼であり、このような翼の抵抗発散マッハ数を本計算プログラムによって推定するのは難しいことを図15は示している。

3.5 レイノルズ数の影響

既存の遷音速風洞において翼型の試験を行なうときのレイノルズ数はおおむね $2 \times 10^6 \sim 5 \times 10^6$ 程度であるが、完成間近かな当所の二次元風洞¹⁷⁾では最大 40×10^6 を達成できる見込みである。そこで、二次元風洞において実験が行なわれる予定の NACA 64A410 翼型について、数値計算によってレイノルズ数の影響を推定しておくこととした。以下の3枚の図は当プログラムによる計算結果である。ただし遷移点は R_e 数にかかわらず、7%翼弦長に固定した。(2.8節または4.2.3節PCHを参照)

図16は主流マッハ数 $M_\infty=0.73$ 、迎角 $\alpha=-1^\circ$ の場合について、揚力係数 C_L および抵抗係数 C_D のレイノルズ数 R_e に対する変化の計算結果を示す。この条件では下面の前縁近くに小さな超音速領域があるだけであり、ほとんど亜臨界流に近い状態である。そのため、差分が保存形であるか否かに基づく差はごく小さいことがわかる。 $R_e=1 \times 10^6$ で C_L に差があるのは解の収束性が悪いためである。逆に高いレイノルズ数 ($R_e \geq 5 \times 10^6$) では

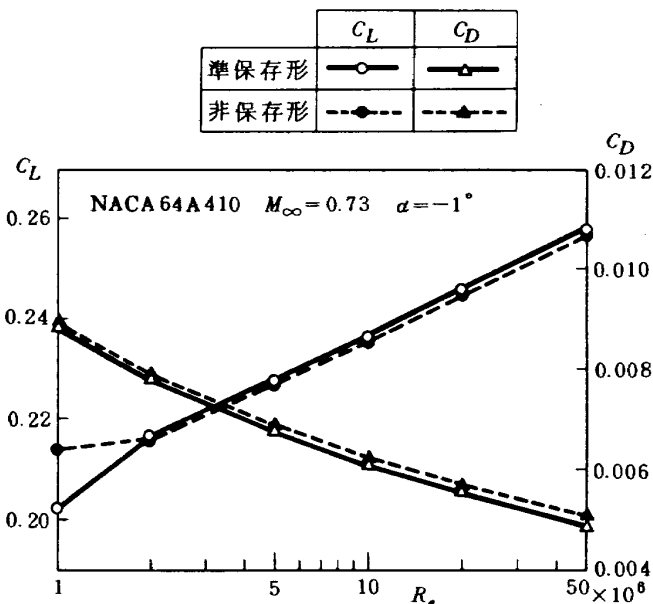


図16 レイノルズ数の影響。

完全に収束している。

さて、予期された通り、 R_e を増すにつれて C_L が上がり、 C_D が下がる結果になっている。そしてそれらの変化量は無視できないほど大きいことがわかる。したがって実機の飛行状態と同程度の高レイノルズ数を実現できる風洞の必要性が再確認される。一方、数値計算を高いレイノルズ数に対して実行するのは何の困難もないが、得られた解がどの程度信頼できるのか、現状では高レイノルズ数では何もわからない。その点からも二次元風洞の完成が待たれる。

図17は迎角 $\alpha=0^\circ$ のときの計算結果である。この条件では上面にかなりな超音速領域があり、また、 M_∞ と C_L を図14に当てはめると、まだ抵抗発散が起っていないものと思われる。この場合には保存形か否かによる差は相当みられる。一応、準保存形の差分の方が信頼できるものと考えられる。 $\alpha=-1^\circ$ のときと同様に、 R_e を増すと C_L が上がり C_D が下がり、それらの変化量は相当に大きい。

図18は迎角 $\alpha=1^\circ$ のときの結果である。この場合の M_∞ , C_L を図14に当てはめると、 $M_\infty > M_{DD}$ となっているものと思われる。剥離の影響が強くなるのは $M_\infty > M_{LD}$ (揚力発散マッハ数)と言われるが、 M_{LD} は M_{DD} にほぼ等しいから、このようなときには、境界層の剥離が強いため、この数値計算の信頼度は薄いものと考えられる。それでも、 R_e 効果の傾向は図16, 17の場合と同様であ

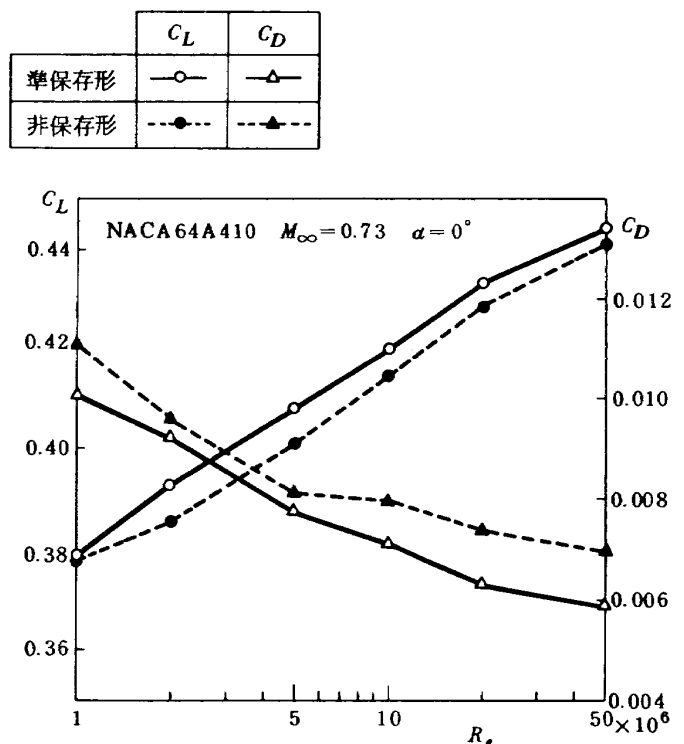
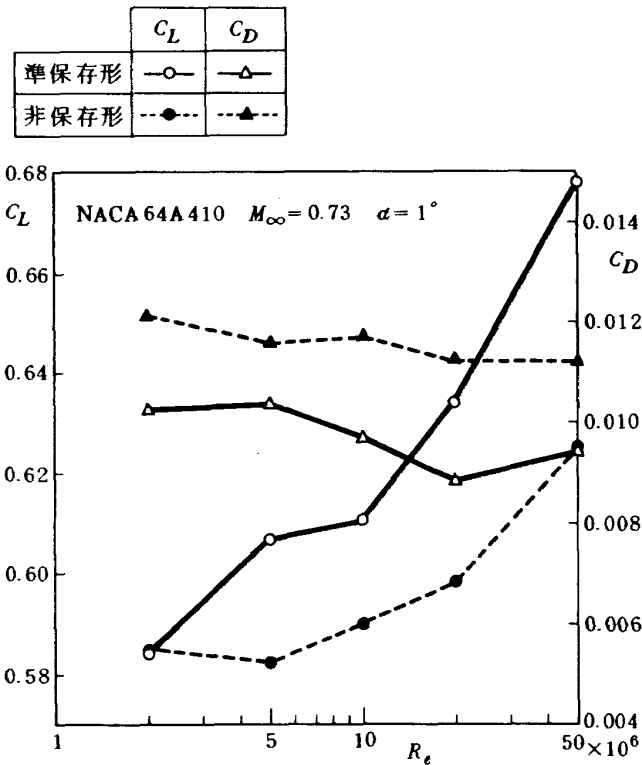


図17 レイノルズ数の影響 ($M_\infty < M_{DD}$)。

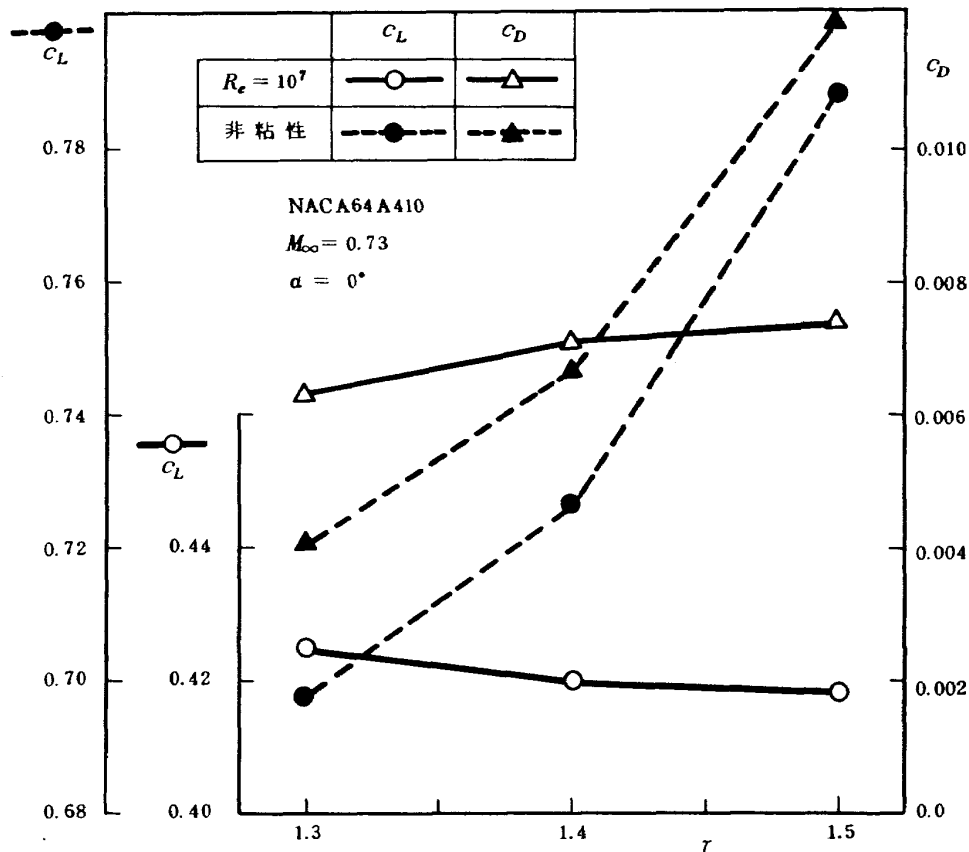
図18 レイノルズ数の影響 ($M_\infty > M_{DD}$)。

り、参考になるであろう。なお $R_e = 1 \times 10^6$ のときには、剥離のため数値解が発散した。

3.6 比熱比の影響

今までの計算ではすべて比熱比は $\gamma = 1.4$ としていた。これは空気について広い温度範囲でおよそその値をとるからであるが、細かく言うと、例えば 20°C において $\gamma = 1.403$ であり¹⁸⁾若干違う。また、超低温化による高レイノルズ数風洞では、このずれは拡大される。さらに空気以外の気体の使用を検討すると、例えば炭酸ガスでは常温・常圧で約1.9倍の R_e 数を得ることができるが、 16°C で $\gamma = 1.302$ であり¹⁸⁾著しく γ が相違する。だから、もしも γ の影響が十分に小さければ炭酸ガス等を用いるとたいへん有利である。しかし Tuzla ほか¹⁹⁾の実験によると、 γ を 1.31 から 1.67 へ変えると、衝撃波は直前の C_p 値が10%増す例がみられる。そこで、もう少し γ 効果の例をふやすために、数値計算を行なった。

図19ではNACA64A410翼型について中程度の超音速領域が生じるような場合に対して、準保存形の差分によって計算した例を示す。非粘性の計算結果によると、比熱比 γ を増すと揚力係数 C_L および抵抗係数 C_D は著しく

図19 比熱比 γ の影響。

増加することがわかる。一方、境界層修正を行った場合には、 r を増すと C_D は増加するが C_L は逆に減少し、ともに変化量は比較的小さいことがわかる。一方Tuzla他¹⁹⁾の対称翼に対する非粘性計算では、 r を増すと衝撃波の位置が後退し、また彼らの境界層計算では、 r を増すほど剥離位置が前進する。以上の傾向から推測すると、 r が増すと、圧縮性が高まり剥離を起しやすくする、言い換えれば、 r の増加は M_∞ の増し R_e を減らすのと似た効果をもたらすと受け取れる。しかし r は M_∞ 、 R_e から独

立したパラメータであるから、このような類推が一般に適用できるかどうかはわからない。

さて以上の結果から、比熱比 r の影響は少なくとも遷音速状態ではかなりあると推定されるから、空気中の飛行をシミュレートするための風洞試験の流体として、単原子分子あるいは3原子分子等の気体を使用するのは困難であると思われる。しかし2原子分子気体を冷却する程度ならば、実的に差しつかえない可能性が大きい。

4. プログラムの使用手引

本プログラムは、主要部をAP-FORTRAN、および全部をCP-FORTRANでコンパイルし、EBファイルの形で一般ユーザに公開する。差分は非保存形のものと準保存形の両方ともとられているから、合計4個のプログラムがあり、その全部を1個のファイル(AIRFOIL)の中に納めMTとして計算センターが所蔵する。

そこでまずセンター受付でMTを借出し、次の方法でユーザーのディスクへファイルに移す。

```

¥NO K000 ×××.△△△△
      ユーザにより異なる

¥KJOB DATA
¥MTDA MF=AIRFOIL, MVOL=NS0269, /
      MTの中のファイル名 MTのボリューム通番
      DF=K000 ×××.AIRFOIL, /
      ユーザ用ディスクにkeepするときの ↑
      ファイル名                          継続
                                       (72カラム目)
      DVOL=USER01, SPACE=90
      好きなボリューム通番を選ぶことができる

¥JEND
  
```

(注) ×××は個人番号, △△△△はパスワード

表1に示すように、ファイルAIRFOILは4個のプログラムを含むから、ユーザはEBNAMEによって選択しなければならない。その選択に応じたJOB種別を選ぶのは当然である。これらの点で4.1節、4.3節のJOB制御文のパラメータを適切に与えていかなければならない。

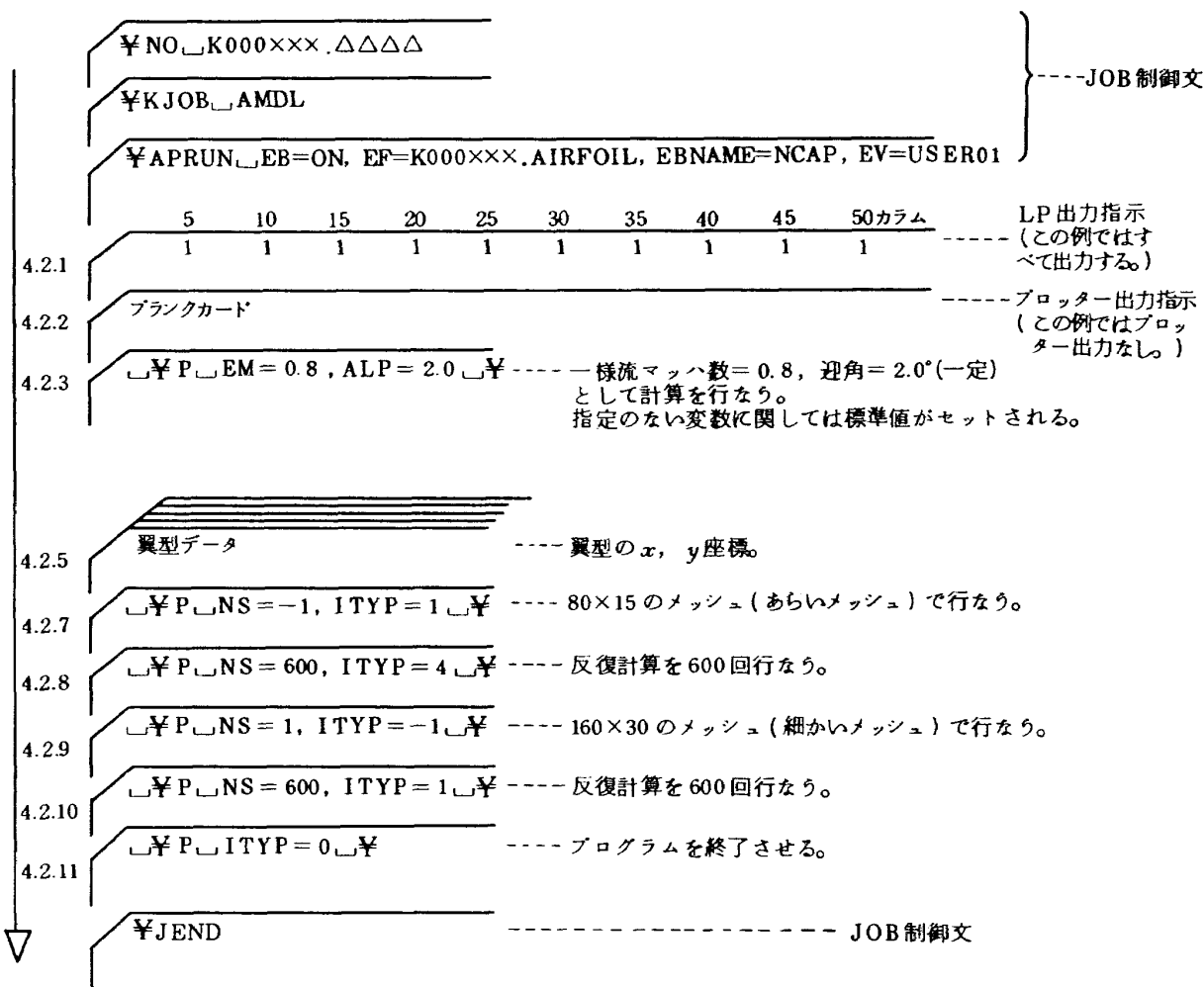
表1 ファイル名AIRFOILの中に含まれるEBNAME, および対応するジョブ制御文

		主要部 APU	全 部 CPU
ジョブ 種 別	¥KJOB	AMDL	MIDL
EBNAME	非 保 存 形	NCAP	NCCP
	準 保 存 形	QCAP	QCCP
実 行		¥APRUN	¥RUN

本プログラムでは汎用性のために、計算に必要なパラメータには、BLOCK DATAまたはDATA文によって標準値が内蔵されているから、ユーザーは必要最小限の指示を与えるだけで(4.1節参照)、計算を実行させることができる。一方、ユーザーの様々な入出力の要望にも応えることができ、また与えられた問題の性質に応じてユーザーが計算を制御するパラメータを指定することもできる。(4.2～4.3節参照)

4.1 最も簡単な使い方

本プログラムを最も簡単に使ってみるには、次のようにカードをセットしてRUNさせれば良い。なお詳細な説明は左に付した番号の節(4.2.1, 4.2.2等)に記す。



(注) $\times \times \times$ は個人番号, $\triangle \triangle \triangle \triangle$ はパスワード

以上のカード構成が最も簡単な非保存形差分による非粘性計算の例である。

又、粘性計算で行なう場合は 4.2.3 のカードで

$\square \text{¥P} \square \text{EM} = 0.8, \text{ALP} = 2.0, \text{RN} = 2 \text{ E } 6 \square \text{¥}$

のようにレイノルズ数の指定を追加すればよい。さらに 4.2.8 及び 4.2.10 のカードで反復計算の回数を粗いメッシュで 400 回, 細かいメッシュで 800 回にしてやるとよい。

また、準保存形差分で計算する場合には、JOB制御文で

$\text{¥APPUN} \square \text{EB=ON, EF=K000} \times \times \times . \text{AIRFOIL, EBNAME=QCAP, EV=USER01}$

のように EBNAME を QCAP にすればよい。(表 1 参照)

なおこれらのカードで指定のなかった変数に関しては、標準値が自動的にセットされる。

4.2 本プログラムのRUNに必要なコントロールカード及びデータカードとその説明

プログラムのRUNに際して次のようなコントロールカード及びデータカードの種類がある。

- (1) LP出力に関する指示を与えるカード
- (2) プロッター出力に関する指示を与えるカード
- (3) プログラムのRUN全体に関する指示を与えるカード
- (4) 結果を出力するときの x 座標を指定するX/Cデータカード
- (5) 翼型データカード
- (6) 比較用CPデータカード
- (7) あらいメッシュに関する指示を与えるカード
- (8) あらいメッシュで計算を始める指示を与えるカード
- (9) 細かいメッシュに関する指示を与えるカード

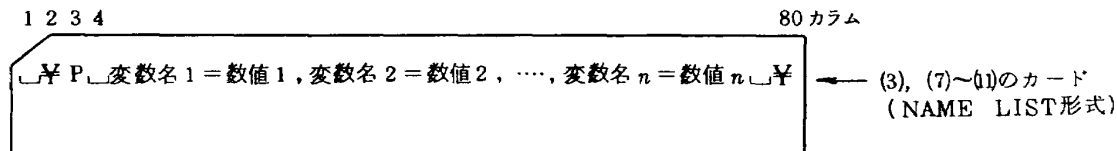
(10) 細かいメッシュで計算を始める指示を与えるカード

(11) プログラムの終了の指示を与えるカード

上記11種類のカードのうち(1), (2), (4), (5), (6)についてはカラム指定であり、後述したカラム内に右につめて数値を指示する。

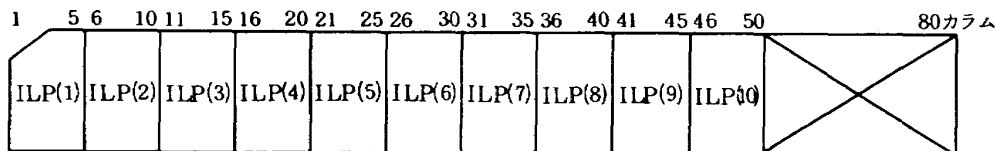
また, (3), (7), (8), (9), (10), (11)に関してはNAME LIST形式で2~3カラム目に $\$P$ の2文字を入れ, そのあとにブランクを1つあける。そして変数名=数値をカンマで区切って任意の個数をならべる。ただし, この部分にブランクを入れてはならない。

最後にブランクを1つあけて $\$$ をつける。



これら11種類のカードについての詳細を次に記す。

4.2.1 LP出力に関する指示を与えるカード



フォーマット形式は(10I5)でカラム指定である。

ILP(1)..... 入力された翼型座標を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(2)..... smoothingされた160点の座標, 表面の傾き, ARCLENGTH等を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(3)..... smoothingされた翼型で, 指定X/C (4.2.4参照) に対しての座標, 表面の傾き及びARCLENGTHを出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(4)..... 写像に関する情報を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(5)..... 各流れの計算ごとの情報を出力するか否

か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(6)..... マッハ数分布図を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(7)..... 最終結果を出力するか否か。翼面上のメッシュの点に関する出力。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(8)..... 最終結果を出力するか否か。翼面上の指定X/C点(4.2.4参照)に関する出力。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

ILP(9)..... CP曲線図を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

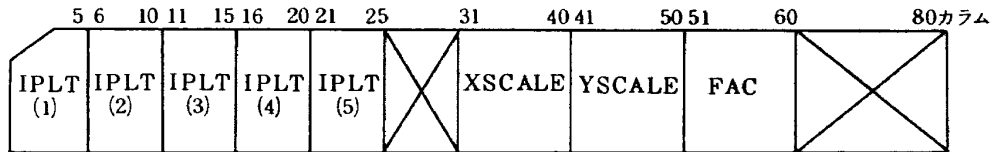
ILP(10)..... プログラム内でセットされる主要変数の

内容を出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

4.2.2 プロッター出力に関する指示を与えるカード



フォーマット形式は (5 I 5, 5 X, 3 F 10.2) で、カラム指定である。

IPLT(1) 排除厚さのプロットを出力するか否か。

(非粘性の場合には無意味。)

0 or 1 出力しない。

1 出力する。(境界層修正のたびに出力するため、出力量が多くなるので注意が必要)

IPLT(2) 翼型及び CP 曲線のプロットを出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

IPLT(3) 最終排除厚さのプロットを出力するか否か。(非粘性の場合には無意味)

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

IPLT(4) 物理面における翼まわりの格子状況のプロットを出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。

IPLT(5) 収束状況のプロットを出力するか否か。

0 or 1 出力しない。

1 出力する。(最大1200 の iteration 分まで出力可能)

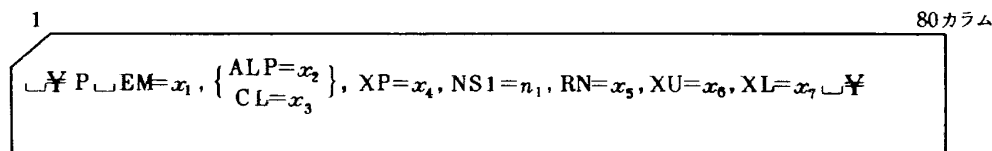
XSCALE IPLT(2)が1のとき縦軸(CP)の間隔0.4の長さを小数点付実数 (cm) で指定する。指定のないときは標準値として1インチになる。

YSCALE IPLT(2)が1のとき chord の長さを小数点付実数 (cm) で指定する。指定のないときは標準値として5インチになる。

(注) XSCALE, YSCALE は標準値のときに A4 サイズにきれいに納まる。

FAC IPLT(4)が1のとき chord の長さを小数点付実数 (cm) で指定する。指定のないときは、標準値として10 cm になる。

4.2.3 プログラムのRUN全体に関する指示を与えるカード



NAME LIST形式である。 x_n は実数型を指定し n_m は整数型を指定する。

以下で省略するという意味は「変数名=数値」を省略することである。

EM= x_1 一様流マッハ数を指定する。 $M_\infty=0.6$ のときは EM=0.6 と指定する。ただし、 $0.0 < x_1 < 1.0$ である x_1 を指定しなければならない。
省略したときは標準値 EM=0.75 になる。

$\begin{cases} \text{ALP} = x_2 \\ \text{CL} = x_3 \end{cases}$ 迎角を一定として計算するか、揚力係数を一定として計算するかの指定で、どちらか一方を指定する。値は自由に指定して良い。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ALP}=2.0 \cdots \cdots \text{迎角を} 2.0^\circ \text{で一定と} \\ \text{して計算する。} \\ \text{CL} = 0.4 \cdots \cdots \text{揚力係数を} 0.4 \text{で一} \\ \text{定として計算する。} \end{array} \right\}$$

省略したときは、標準値 $\text{ALP}=0.0$ になる。

$\text{XP}=x_4 \cdots \cdots$ 比較用 CP データを入力するか否かを指定する。

$$\text{XP} = \begin{cases} 0.0 \cdots \cdots \text{比較データは入力しない。} \\ 1.0 \cdots \cdots \text{比較データを入力する。} \end{cases}$$

省略したときは、標準値 $\text{XP}=0.0$ になる。

比較データを入力したとき、4.2.2 のカードで $\text{IPLT}(2)$ を 1 にすると、プロッターに比較データが出力される。なお $\text{XP}=1.0$ としたときには、JOB 制御文 $\$ \text{DISKWK} _ \text{F01, FILE} = \text{A}$ が必要である。4.3 節を参照のこと。

比較データの作り方に関しては 4.2.6 節を参照のこと。

$\text{NS1}=n_1 \cdots \cdots$ 境界層修正を iteration 何回に 1 度の割で行なうかの指定をする。

n_1 は $1 \leq n_1$ である整数である。NS1=5 が一番収束が早いので、これを標準値としてあるので、通常は省略して良い。

(2.8 節参照)

次のパラメータ $\text{RN}=0.0$ のときは無意味である。

$\text{RN}=x_6 \cdots \cdots$ レイノルズ数を指定する。粘性計算か非粘性計算かの指示にもなる。

$$\text{RN} = \begin{cases} 0.0 \cdots \cdots \text{非粘性計算} \\ \text{実数値} \cdots \cdots \text{粘性計算 (レイノルズ数が } 2 \times 10^6 \text{ のときは } \text{RN}=2.E6 \text{ とする。)} \end{cases}$$

省略したときは標準値 $\text{RN}=0.0$ (非粘性計算) になる。

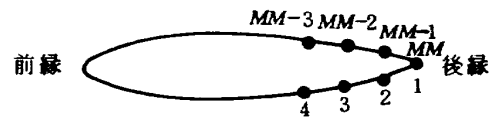
$\text{XU}=x_6 \cdots \cdots$ 粘性計算において翼上面の CP の線形補間を始める位置を X/C で与える。省略したときは標準値 $\text{XU}=0.95$ となる。

(注) 線形補間を行なうときは、指定された位置より直前の (前縁よりの) 格子点の傾きにより後縁までの格子点に関して外挿する。

傾きを求めるときは、前後を含む合計 3 点より中央の点の傾きを求める。後縁 (MM 点) における CP はこの 3

点には含ませないため、XU で指定したときの格子点の位置が $\text{MM}-2$ より大きいときは強制的に $\text{MM}-2$ にする。

$\text{XL}=x_7 \cdots \cdots$ 粘性計算において翼下面の CP の線形補間を始める位置を X/C で与える。省略したときは標準値 $\text{XL}=1.0$ となるが、このとき傾きを求める格子点の位置は XU の場合と同様の条件で強制的に 3 番目になる。



翼面上の格子点の番号

以下のパラメータは必要に応じて指定すればよい。

$\text{BETA}=x_8 \cdots$ 減衰項の係数 $\hat{\beta}$, 微分方程式を差分近似としたとき、音速点での理論的安定性を確保するために減衰項を付加する。

標準値は 0.0 であり、一様流マッハ数が 1 に近いときには、 $x_8 > 0.0$ なる値を指定する。ただし、準保存形の場合には、指定値または標準値に 0.2 を加えた値に変更される。(2.4 節図式参照)

$\text{GAMMA}=x_9 \cdots$ 比熱比で標準値は 1.4 である。

$\text{IS}=n_2 \cdots \cdots$ 翼型及び排除厚さを smoothing する回数。標準値は 2 である。

$\text{IZ}=n_4 \cdots \cdots$ マッハ数分布図出力のときの横幅。(後縁から数えた θ 方向のメッシュの数を指定する。)

標準値は 125 である。(この場合は後縁から数えて 125 個の点について出力する。) 120 を指定した場合には画像したときのフーリエ係数の出力も行なう。

$\text{KP}=n_5 \cdots \cdots$ 各 iteration ごとの情報の出力を何行ごとに出力するか指定。標準値は 1 である。

$\text{LL}=n_6 \cdots \cdots$ 前縁近傍の位置。標準値は $M/2 + 1$ である。

迎角が大きいときは少し小さめにする。

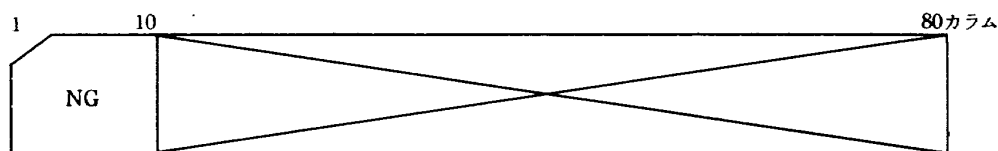
$\text{M}=n_7 \cdots \cdots$ θ 方向のメッシュの数。標準値は 160 である。あらいメッシュのときは自動的に 80 になる。

$\text{N}=n_8 \cdots \cdots$ r 方向のメッシュの数。標準値は 30 である。あらいメッシュのときは自動的に 15 になる。

- NFC= n_9 …… 写像のときに使われるフーリエ係数の個数。標準値は80である。
- NPTS= n_{10} …… Nash-Macdonald法によって境界層方程式を解くときの格子点の数。標準値は81である。
- PCH= x_{10} …… 乱流境界層の計算を始める位置。この位置が遷移点になる。標準値は0.07である。(2.8節参照)
- RCL= x_{11} …… 循環 Γ の Relaxation parameter。標準値は1.0である。(2.6節参照)
- RDEL= x_{12} …… 境界層の排除厚さの Relaxation parameter。標準値は0.05である。(2.8節参照)
- RFLO= x_{13} …… 流れの計算の際の速度ポテンシャルの亜音速流に対する緩和係数 ω 。標準値は1.4である。(2.4節(式)参照)
- SEPM= x_{14} …… 剥離パラメータでSEPがこの値より大きいときに剥離しているとみなす。標準値は0.04である。
- ST= x_{15} …… 反復計算の収束判定のための誤差許容範囲。標準値は0.0である。
- XSEP= x_{16} …… SEP>SEPM(剥離状態)で、 $X < |XSEP|$ までのSEPに対してSEPM(0.04)で置き換える。このときのX座標を指示する。標準値は0.93である。
- XSEP>0.0 …… 翼上面のみ上記方法で、下面は剥離状態のすべての点に対して置き換える。
- XSEP<0.0 …… 翼上面・翼下面共上記方法で置き換える。
- NX= n_{11} …… 結果を出力するときの x/c 座標を指定するか否か。
- NX = $\begin{cases} 0 & \cdots \cdots \text{標準の } x/c \text{ を用いる。} \\ 1 & \cdots \cdots 4.2.4 \text{ で入力する } x/c \text{ カードによって指定する。} \end{cases}$
- 省略したときは、標準値 NX=0 になる。

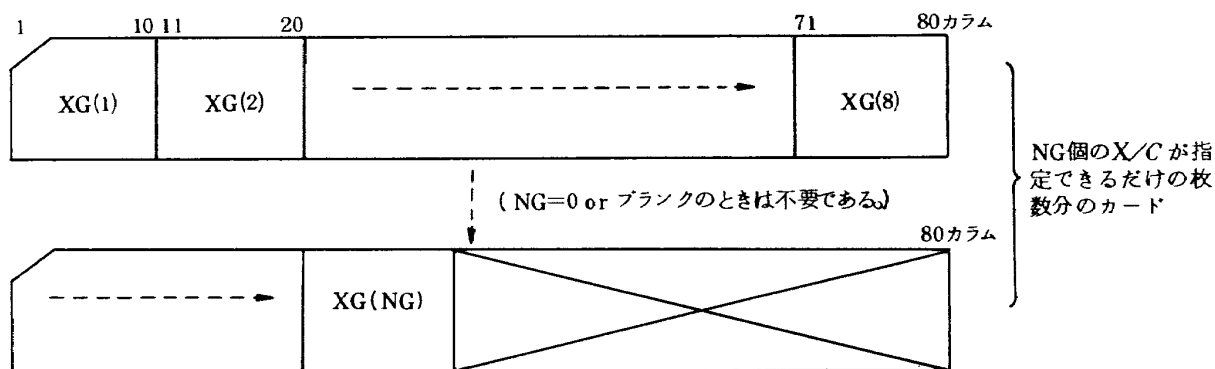
4.2.4 結果を出力するときの x 座標を指定する X/C データカード。(このカードを入力するときは4.2.3のカードでNX=1と指定しなければならない。)

Smoothingされた翼型の x, y 座標及び最終結果を、ユーザーが望む X/C 座標に対してLP出力するように X/C の指定を行なう。



フォーマット形式は(I 10)でコラム指定である。

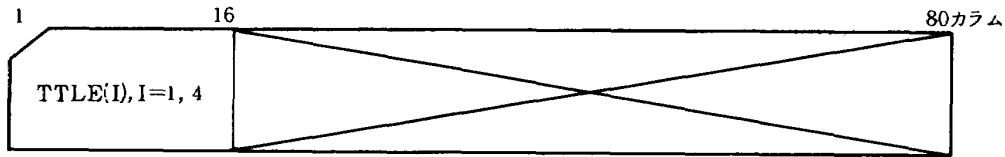
NG …… X/C 座標の数を整数で指定する。



フォーマット形式は(8F10.5)でコラム指定である。

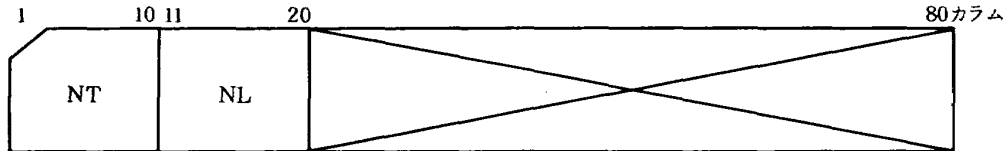
XG(I), I=1, NG …… NG個分の X/C 座標で、0.0より始まり1.0で終わらなければならない。

4.2.5 翼型データカード



フォーマット形式は(4A4)でカラム指定である。

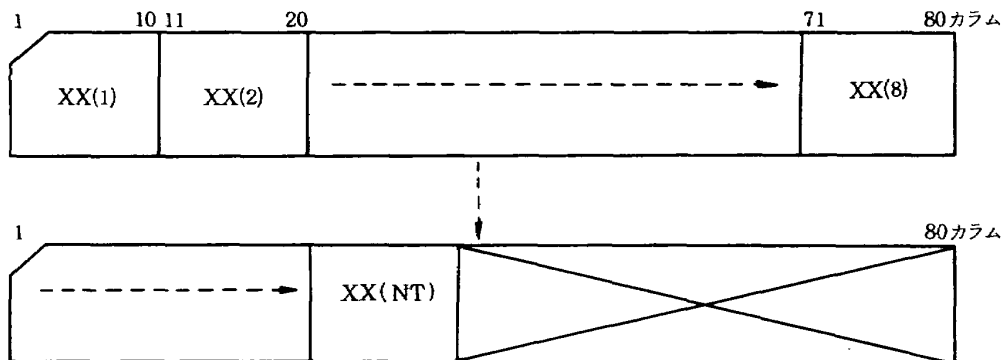
TTLE(I), I=1, 4……翼型の名称を16文字以内で指定する。



フォーマット形式は(2I10)でカラム指定である。

NT……翼型の入力座標の数で整数で指定する。(下図参照)

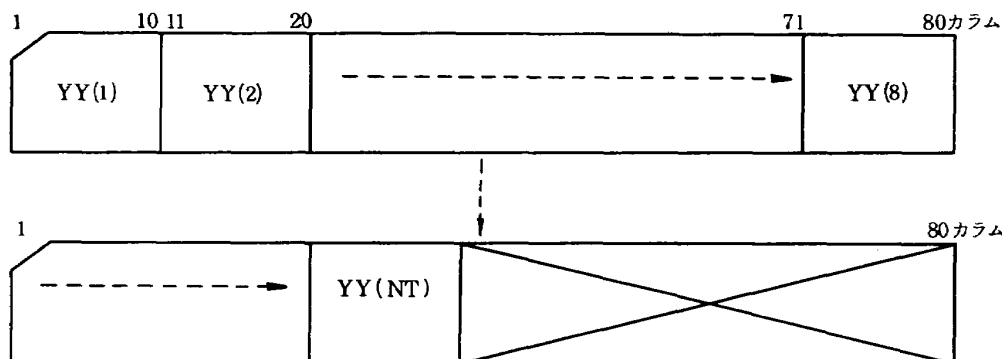
NL……前縁の位置。後縁より翼上面を動かして前縁の位置を整数で指定する。(下図参照)



フォーマット形式は(8F10.5)でカラム指定である。

XX(I), I=1, NT……翼型のx座標を実数で指定する。

後縁 → 翼上面 → 前縁 → 翼下面 → 後縁 の順序で指定する。

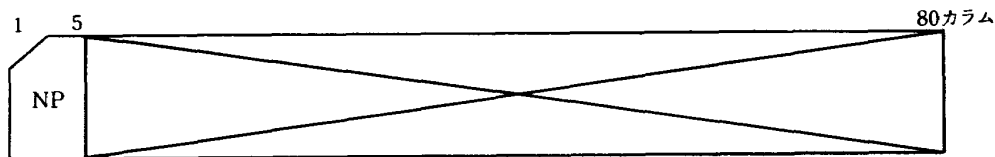


フォーマット形式は(8F10.5)でカラム指定である。

YY(I), I=1, NT………翼型の y 座標を実数で指定する。

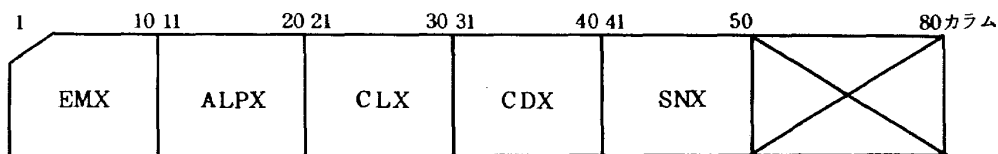
後縁 → 翼上面 → 前縁 → 翼下面 → 後縁 の順序で指定する。

4.2.6 比較用CPデータカード(このカードを入力するときは4.2.3のカードでXP=1.0としなければならない。)



フォーマット形式は(I5)でカラム指定である。

NP………比較用CPデータの点数。



フォーマット形式は(5F10.3)でカラム指定である。

EMX………一様流マッハ数を実数で指定する。

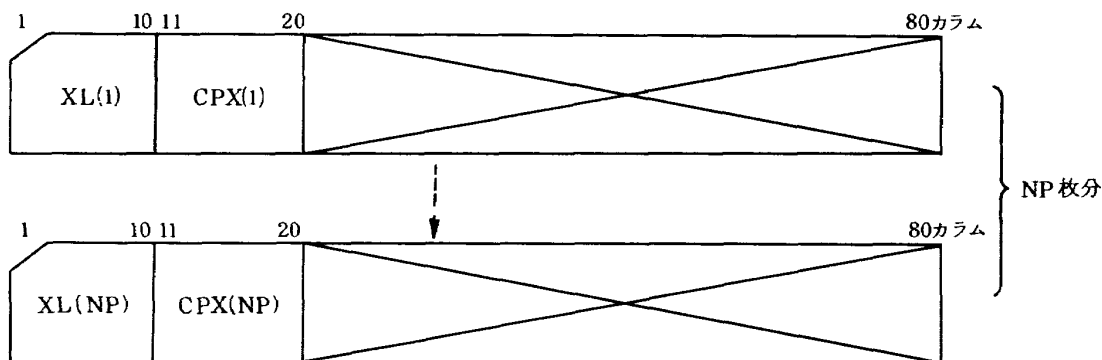
ALPX………迎角を実数で指定する。(度)

CLX………揚力係数を実数で指定する。

CDX………抗力係数を実数で指定する。

SNX………プロットシンボルの選択。

$$\begin{cases} \text{SNX} \geq 0.0 & \text{……… EXPERIMENT } \triangle \\ \text{SNX} < 0.0 & \text{……… DESIGN } + \end{cases}$$



フォーマット形式は(2F10.5)でカラム指定である。

XL(I), I=1, NP………比較CPデータの x 座標で $0.0 \leq \text{XL}(I) \leq 1.0$ の範囲で実数で指定する。

このデータは、プロッターで出力されるため連続的に並べた方がよい。

(例) $0.0 \rightarrow \text{翼面上} \rightarrow 1.0 \rightarrow \text{翼下面} \rightarrow 0.0$
 $\text{XL}(I) \qquad \qquad \qquad \text{XL}(NP)$

CPX(I), I=1, NP……… x 座標に対応した点の圧力分布を実数で指定する。

4.2.7 あらいメッシュに関する指示を与えるカード

1 80カラム
 P NS=-1, ITYP=1
 (NS<0 .AND. ITYP>0 Cruder Grid)

NAME LIST 形式である。

このカードにより、あらいメッシュ (80×15) になる。

4.2.8 あらいメッシュで計算を始める指示を与えるカード

1 80カラム
 P NS= n_1 , ITYP=4
 (NS>0 .AND. ITYP>0 Flow Computation)

NAME LIST 形式である。

NS= n_1 あらいメッシュにおける反復計算の回数を整数で指定する。

NS = 400 は 400 回の反復計算を行なう。

4.2.9 細かいメッシュに関する指示を与えるカード

1 80カラム
 P NS=1, ITYP=-1
 (NS>0 .AND. ITYP<0 Finer Grid)

NAME LIST 形式である。

このカードにより、細かいメッシュ (160×30) になる。

4.2.10 細かいメッシュで計算を始める指示を与えるカード

1 80カラム
 P NS= n_1 , ITYP=1
 (NS>0 .AND. ITYP>0 Flow Computation)

NAME LIST 形式である。

NS= n_1 細かいメッシュにおける反復計算の回数を整数で指定する。

NS = 800 は 800 回の反復計算を行なう。

4.2.11 プログラムの終了の指示を与えるカード

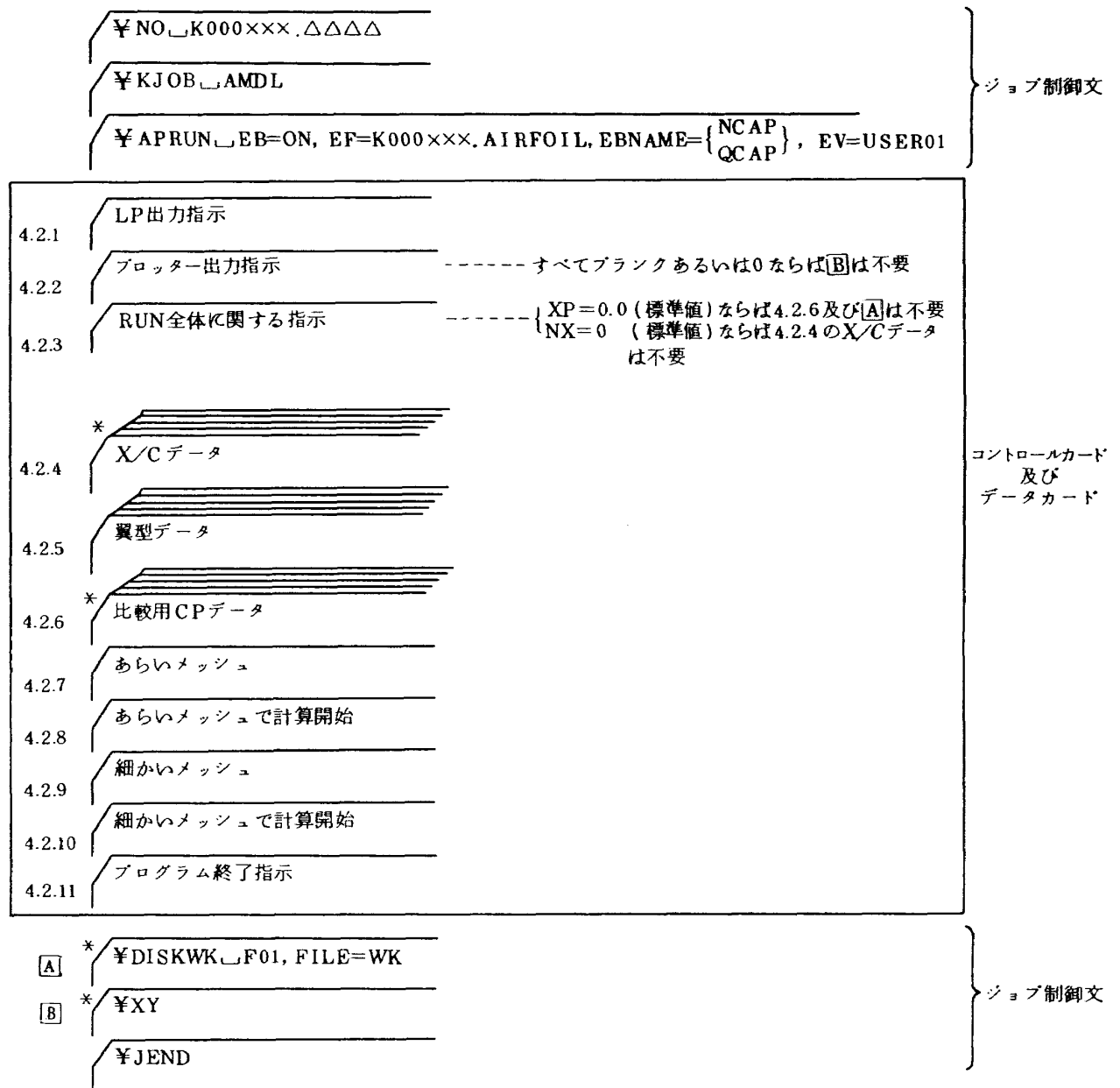
1 80カラム
 P ITYP=0
 (ITYP=0 Terminate Program)

NAME LIST 形式である。

このカードによりプログラムは終了する。

4.3 JOB制御文及びコントロールカードの配列

下記のように、JOB制御文及びコントロールカードをセットしてRUNする。



(注) *印は必ずしも必要ではないものである。

×××は個人番号, △△△△はパスワード。

4.4 計算時間・容量

二次元遷音速流の典型的な例として、図8、図10に示した翼型、一様流マッハ数、揚力係数に対して数値計算を実行し、使用するプロセッサの相違、差分型式の相違による計算時間の違いを調べた。CPU、APUともにFORTRANのパラメータはOPT 2として高速化を計った。また、AP-FORTRANのコードでは、ベクトル型

命令をできるだけ多く使用した。

表2には、FACOM 230 75における計算時間の実測値を示す。非粘性計算の場合には、非保存形・準保存形ともにAPUの効果が表われ、計算時間が16%から22%短縮されている。しかしこれは満足すべき結果ではない。なぜなら、平均的な問題に対してAPUは80%程度時間短縮する能力をもつからである。本プログラムでは、粗

表2 計算時間(単位, 秒)の比較。NACA
64₁-212 翼型, $M_{\infty}=0.728$, $C_L=0.425$,
繰返し400回(粗格子)+600回(細格子),
XYプロッター出力あり。

番号	プロセッサ	差 分	非粘性	粘 性 ($R_e=2 \times 10^6$)
(i)	CPU	非保存形	225	586
(ii)		準保存形	240	605
(iii)	APU + CPU	非保存形	189	599
(iv)		準保存形	197	604

いメッシュのとき15元, 細かいメッシュのとき30元の三項方程式を解くのに, APU効果の期待できない Gauss 消去法を用いていることに起因している。なお 2^7 元以上の三項方程式には cyclic reduction algorithm²⁰⁾を用いるとAPU効果が発揮される。

粘性計算ではAPUの効果は全くあがらず, むしろ非保存形ではAPUの方が逆に2%余計に時間を費やしている。これは, 境界層修正に伴う複雑な演算命令をAPUに適した形に変換するのがなかなか困難であるからである。

また, 準保存形の差分にすると, 非保存形より若干計算時間が増すことがわかる。非粘性計算の場合には4%~7%, $R_e=2 \times 10^6$ の場合には1%~3%程度それぞれ計算時間が余計にかかる。

おおむね境界層修正する計算は非粘性計算の3倍の時間を要することがわかる。もっともこの比率(3倍)はNS1=5に対応するのであり(4.2.3節NS1参照), NS1の値を変えれば別の比率となる。

以上の比較は, 一定な計算繰返し回数に対してのものであり, 収束までに要する計算時間についてはない点に注意されたい。

(i), (ii)の使用コアはオーバーレイせずに, 78 kWである。(iii), (iv)のプログラムはオーバーレイしてあり96 kWであり, これらのオーバーレイしないものは114 kWになる。

5. ま と め

この汎用プログラムを使用した経験から, 次のようなことがわかった。

- 1) C_p 分布(図8), M_{DD} 特性(図14), R_e の影響(図16~18)のどれを見ても, 粘性の効果は絶大であるから, 境界層修正を行なう数値計算をしなければならない。
- 2) 後縁における境界層はく離が弱い場合には, 境界層修正した計算結果は, 非保存形, 準保存形差分ともに, C_p 分布は実験に良く一致する(図8)。しかし M_{DD} 特性では準保存形差分の方が優れている(図14)から, 結局境界層修正・準保存形とする計算が経験的にも, 理論的にも最も良いと結論することができる。
- 3) しかし, 境界層修正には解の一意性の問題(図11~12)があり, 後縁はく離が強い場合には, 数値解が大きく振動し, あるいは発散するという問題がある。これは, 今後の境界層はく離流の計算法の発展を待ちたい。
- 4) 準保存形の差分を用いると若干安定性に欠ける。(図7の説明)。また準保存形は非保存形より計算時間を余計に消費するが, その差はわずかである(表2)。
- 5) プログラムの利用者に対して特に注意すべき点は, まず実験値と比較する時は, 必ず揚力係数 C_L を一致させること。 C_p 分布のプロットは当然必要であろうが, 収束状況のプロットの指示も忘れずに。解の収束の状況が許容できない状態であるのに, 出て来た結果を平気で数値解であると称するようなミスは犯してはならない。

最後に, この汎用プログラムの開発に御尽力いただいた, 大興電子通信株式会社, システム開発部の主任, 田中正樹氏に厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) C. C. L. Sells: Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil, Proc. Roy. Soc., Vol. A-308, pp. 377 ~ 401 (1968).
- 2) E. M. Murman, J. D. Cole: Calculation of Plane Steady Transonic Flows, AIAA J., Vol. 9, pp. 114 ~ 121 (1971).
- 3) P. R. Garabedian, D. G. Korn: Analysis of Transonic Airfoils, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 24, pp. 841 ~ 851 (1971).
- 4) A. Jameson: Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 27, pp. 283 ~ 309 (1974).
- 5) E. M. Murman: Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods, AIAA J., Vol. 12, pp. 626 ~ 633 (1974).
- 6) F. Bauer, P. Garabedian, D. Korn, A. Jameson: Supercritical Wing Section II, Lect. Notes Econ. Math. Syst., Vol. 108, Springer-Verlag (1975).
- 7) 航技研, フェコム・ハイタック, 大興電子: 二次元遷音速流解析の汎用プログラム, 航空宇宙技術研究所 (1977). (改訂版 1978)
- 8) 河合伸坦, 田中正樹, 石黒登美子, 神谷信彦: 二次元翼まわりの遷音速流の数値計算, 第9回流体力学講演会・講演集, pp.86 ~ 89(1977).
- 9) 河合伸坦, 神谷信彦, 石黒登美子: 二次元翼まわりの遷音速流数値計算の汎用プログラム, 航技研ニュース, No. 224, pp.2 ~ 3 (1978).
- 10) G. S. S. Ludford: The Behavior at Infinity of the Potential Function of a Two Dimensional Subsonic Compressible Flow, J. Math. Phys., Vol. 30, pp. 117 ~ 130 (1951).
- 11) 石黒登美子: 二次元翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算, 航技研報告 TR-489 (1977).
- 12) J. F. Nash, A. G. Macdonald: The Calculation of Momentum Thickness in a Turbulent Boundary Layer at Mach Numbers up to Unity, ARC CP-963 (1967).
- 13) L. A. Carlson: Transonic Airfoil Analysis and Design Using Cartesian Coordinates, J. Aircraft, Vol. 13, pp. 349 ~ 356 (1976).
- 14) 石黒登美子: 二次元翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算, 航空宇宙学会誌, Vol.25, pp.118 ~ 124 (1977).
- 15) 西 武徳, 神谷信彦, 高梨 進: 遷音速における Y X の翼断面試験, 発表予定.
- 16) M. D. Van Dyke: High-Speed Subsonic Characteristics of 16 NACA 6-Series Airfoil Sections, NACA TN 2670 (1952).
- 17) 重見 孝: 二次元風洞の計画について, 航技研ニュース, No. 169, pp.4 ~ 6 (1973).
- 18) 東京天文台編: 理科年表, 丸善 (1976).
- 19) K. Tuzla, J. C. Wai, D. A. Russell: γ -effects on 2-Dimensional Transonic Aerodynamics, Proc. AIAA 9th Aerodyn. Test. Conf., pp. 50 ~ 58 (1976).
- 20) 富士通未公表資料.

航空宇宙技術研究所資料357号

昭和53年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

Printed in Japan