

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-434

分配関数に対する多項式近似とその応用

平林則明・松崎利一

1981年5月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 分配関数に対する多項式近似とその応用\*

平林 則明\*\* 松崎 利一\*\*

## Polynomial Approximations for Partition Functions and Their Application

By

Noriaki HIRABAYASHI and Ri'ichi MATSUZAKI

### ABSTRACT

Simple polynomial approximations for the internal partition functions and their derivatives up to the second order are obtained for typical species in high-temperature air. The species considered are  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $NO$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $NO^+$ ,  $O_2^+$ ,  $N_2^+$ ,  $Ar$ ,  $Ar^+$ , and  $Ar^{++}$ . All the polynomials include only up to the fourth order in temperature, and they cover from room temperature to  $20,000^\circ K$  (or  $25,000^\circ K$  for argon). The results are applied to the calculation of equilibrium flow properties behind incident and reflected normal shock waves at Mach numbers from 4 to 31. Saving of computational time is confirmed without loss of accuracy.

### 1. まえがき

多数の化学反応性成分を含む高温気流の研究には、その気体のエンタルピー、比熱等の熱力学状態量についての知識が不可欠となる。熱力学状態量は一般に二つの変数、例えば温度と圧力を指定すれば定まるのであるが、その依存性が極めて複雑である。高温気流の研究の際にはこれ等の状態量の数値表を用意するか、または近似多項式表示を用いる。広範囲の温度と圧力でのこの種の数値表（例えば文献1～3）は膨大すぎて実用上不便であり、また二つの変

数に対する状態量の近似多項式表示も困難である。

ところで熱力学状態量は次式で定義される分配関数あるいは状態和  $Z_s$  が計算されていれば、熱力学の公式にもとづいてすべて導かれる。

$$Z_s = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^s \exp(-\epsilon_n^s/kT) \quad (1.1)$$

但し  $T$  は温度、 $k$  は Boltzmann 定数、 $\epsilon_n^s$  は気体を構成する化学種  $s$  の単位  $n$  でのエネルギー、 $g_n^s$  はその単位の統計的重率である。 $Z_s$  も一般に温度  $T$  ともう一つの変数の関数である。ところで  $Z_s$  は気体粒子の並進運動の分配関数  $f_s^{tr}$  と、内部自由度の分配関数  $f_s^{in}$  の積で表わすことができる。

$$Z_s = f_s^{tr} f_s^{in}, \quad f_s^{tr} = V (2\pi m k T / h^2)^{3/2} \quad (1.2)$$

\* 昭和56年2月26日受付

\*\* 空気力学第1部

但し $V$ は系の全体積,  $m$ は粒子の質量,  $h$ はPlanck定数である。分配関数を式(1.2)のように表示すると内部分配関数は温度 $T$ のみの関数となる。したがってその多項式近似は容易に得られる。

本報告ではこの点に着目し, いくつかの応用上重要な化学種の $f_s^{in}$ を温度 $T$ の関数として計算し, その結果が $T$ についての簡単で精度の良い多項式で近似されることを示す。この種の試みは従来ほとんど試みられていないが, 高温気流の解析に有用な一方法となるものと考えられる。例えば空気の比熱を計算するのに, 後述の13の成分ガスについて従来の方法のように平衡定数とその温度微分, 成分ガスのエンタルピーと比熱を温度の多項式で表わす方法では合計44個の近似多項式が必要となるが, 上述の方法によれば, 次章で示すように36個の近似多項式でよい。また平衡流だけでなく, 非平衡流の計算にも有用である。得られた近似多項式を強い垂直衝撃波後方の平衡状態の計算に応用し, この種の近似法の有用さを検証する。

## 2 分配関数

### 2.1 単原子および原子イオン

単原子および原子イオンでは, 内部自由度は電子励起状態だけである。温度 $T$ の気体中のこれらの粒子の内部分配関数は電子励起状態に対するものだけであるから

$$f_s^{in} = f_s^e = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^s \exp(-\varepsilon_n^s/kT) \quad (2.1)$$

となる。 $f_s^e$ は電子励起状態の内部分配関数の意味である。 $\varepsilon_n^s$ ,  $g_n^s$ は粒子 $s$ の電子励起のエネルギー単位と統計的重率で, いくつかの応用上重要な原子およびイオンについて表Iのような値<sup>4)</sup>をとる。

### 2.2 2原子分子および2原子分子イオン

2原子分子とイオンについては単原子のような電子励起状態の他に, 分子回転と分子振動が考えられる。これらの各自由度はそれぞれ励起単位をもっており, 電子励起状態, 分子回転, 分子振動の各々に対応する内部分配関数をそれぞれ $f_s^e$ ,  $f_s^r$ ,  $f_s^v$ とすると

$$f_s^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} f_s^v f_s^r f_s^e \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \{1 - \exp(-\nu_n^s/kT)\}^{-1} \frac{(1 + \beta_n^s T) T}{(hc/k) B_n^s \sigma^s} \\ g_n^s \exp(-\varepsilon_n^s/kT) \quad (2.2)$$

と表わされる<sup>5)</sup>。但し $\sigma$ は分子の対称数で, 二つの原子が等核である場合は $\sigma=2$ , 異核の場合は $\sigma=1$ である。 $c$ は光速で,  $hc/k=1.43882 \text{ deg}\cdot\text{cm}$ となる。また $\beta_n$ は分子回転の非剛性と分子振動の非調和性を考慮した補正因子(Betheの補正因子)で

$$\beta_n = \frac{1}{(hc/k)\nu_n} \left\{ \frac{8(B_e)_n}{(\omega_e)_n} + \frac{(\alpha_e)_n}{(B_e)_n} + \frac{2(\omega_e x_e)_n}{(\omega_e)_n} \right\} \\ \text{となる}^7)。また$$

$$\nu_n = (\omega_e)_n - 2(\omega_e x_e)_n,$$

$$B_n = (B_e)_n - \frac{1}{2}(\alpha_e)_n$$

で,  $\omega_e$ ,  $\omega_e x_e$ ,  $B_e$ ,  $\alpha_e$ 等は分子振動の量子数 $v$ および回転の角運動量の量子数 $J$ での内部エネルギーの量子単位の項値 $T(\text{cm}^{-1})$ を

$$T = \omega_e \left( v + \frac{1}{2} \right) - \omega_e x_e \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \\ + \left\{ B_e - \alpha_e \left( v + \frac{1}{2} \right) \right\} J(J+1) + \dots$$

と表わした場合の常数<sup>6)</sup>で, 主要な分子について表IIのような値<sup>3~8)</sup>をとる。なお $B_n$ ,  $\nu_n$ ,  $\varepsilon_n$ の単位を $\text{cm}^{-1}$ として

$$T_{rn} = \frac{hc}{k} B_n, \quad T_{vn} = \frac{hc}{k} \nu_n, \quad T_{xn} = \frac{hc}{k} \varepsilon_n$$

とすると式(2.2)は

$$f_s^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \{1 - \exp(-T_{vn}^s/T)\}^{-1} \frac{(1 + \beta_n^s T) T}{\sigma^s T_{rn}^s} \\ g_n^s \exp(-T_{xn}^s/T) \quad (2.3)$$

となる。 $T_{rn}$ ,  $T_{vn}$ ,  $T_{xn}$ 等も表IIに示してある。

### 2.3 3原子分子

$\text{H}_2\text{O}$ や $\text{CO}_2$ のような3原子分子は一般に振動モードは三つある。各振動モードは調和振動するとし, 分子回転は剛体回転であるとする, 内部分配関数は近似的に

$$f_s^{in} = f_s^v f_s^r f_s^e \quad (2.4)$$

表 I 原子のエネルギー単位 ( $cm^{-1}$ ) と統計的重率

n	Ar		Ar <sup>+</sup>		Ar <sup>++</sup>		N		N <sup>+</sup>		O		O <sup>+</sup>		H		C		C <sup>+</sup>		
	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	g <sub>n</sub>	ε <sub>n</sub>	
0	1	0.0	4	0.0	5	0.0	4	0.0	1	0.0	5	0.0	4	0.0	2	0.0	1	0.0	2	0.0	
1	5	93143.800	2	1432.0	3	1112.4	6	19223.0	3	491	3	158.5	6	26808.4	2	82258.907	3	16.4	4	64.0	
2	3	93750.639	2	108722.5	1	1570.2	4	19231.0	5	131.3	1	226.5	4	26829.4	2	82258.942	5	43.5	2	43000.2	
3	1	9455.3707	8	132328.22	5	14010.0	5	28840.0	5	15315.7	5	15867.7	4	40466.9	4	82259.272	5	10193.70	4	43021.8	
4	3	95399.870	6	132482.12	1	33267.0	2	83285.5	1	32687.1	1	33792.4	2	40468.4	2	97492.198	1	21648.4	6	43050.7	
5	3	104102.144	4	132631.64	5	113800.7	4	83319.3	5	47167.7	5	73767.81	6	119837.7	2	97492.208	5	33735.2	6	74930.9	
6	7	105462.804	2	132738.60	3	114797.6	6	83366.0	3	114797.6	3	76794.69	4	120001.1	4	97492.306	1	60333.80	4	74933.2	
7	5	105617.315	6	134242.62	1	115328.4	2	86131.4	3	86625.35	2	120083.5	3	60353.00	2	96494.1	3	60353.00	2	96494.1	
8	3	106087.305	4	135086.88			4	86223.2	5	86627.37			5	60393.52	2	110625.1	5	60393.52	2	110625.1	
9	5	106237.957	2	135602.62			6	88109.5	7	88631.04			3	61982.20	4	110666.3	3	61982.20	4	110666.3	
10	1	107054.319	4	138244.51			4	88153.4	5	88630.84			5	64088.56	2	116537.88	7	64088.56	2	116537.88	
11	3	107131.755	2	139259.22			2	88173.0	3	88630.30			5	64093.19			5	64093.19			
12	5	107289.747						1	88631.00			1	88631.00			3	64092.01				
13	3	107496.463						5	95476.43			5	95476.43			3	68858				
14	1	108722.668						3	96225.5			3	96225.5			3	69689.79				
15	1	111667.87						9	97420.24			9	97420.24			5	69710.99				
16	3	111818.09						12	97420.37			12	97420.37			7	69744.40				
17	9	112750.22						10	97420.50			10	97420.50			3	70744.26				
18	7	113020.39						15	97488.14			15	97488.14			1	71352.81				
19	5	112138.98						3	99092.64			3	99092.64			3	71365.23				
20	3	114147.75						5	99093.31			5	99093.31			5	71385.70				
21	5	113426.05						7	99094.52			7	99094.52			5	72611.06				
22	7	113716.61						10	99680.4			10	99680.4			1	73976.23				
23	5	114641.04																			
24	7	114821.99																			
25	5	114805.18																			

文献4による。但しは文献11による。Arについては n = 26 以上は省略してある。

表 II 2原子分子の分光学的常数と、それから換算された特性温度と補正因子

分子	電子状態	n	g <sub>n</sub>	$\omega_e$	$\omega_e x_e$	$B_e$	$\alpha_e$	$\epsilon_n$	$B_n$	$\nu_n$	$T_{rn}$	$T_{vn}$	$T_{zn}$	$\beta_n$
O <sub>2</sub>	X <sup>3</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>-</sup>	0	3	1580.361	12.0730	1.44566	0.01579	0.0	1.4378	1556.22	2.069	2239.1	0.0	1.497 × 10 <sup>-5</sup>
	a <sup>1</sup> Δ <sub>g</sub>	1	2	1509.3	12.9	1.4264	0.0171	7882.39	1.4179	1483.5	2.040	2134.5	11341.3	1.717 "
	b <sup>1</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>+</sup>	2	1	1432.687	13.9500	1.40041	0.01817	13120.908	1.39133	1404.79	2.002	2021.2	18878.6	1.992 "
	A <sup>3</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup>	3	3	819.0	22.50	(1.05)	-	35713	1.05	774	1.51	1114	51385	5.855 "
	<sup>1</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>-</sup>	4	1	650.49	17.036	0.8261	0.02055	36210	0.8158	616.418	1.174	886.9	52100	9.856 "
B <sup>3</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>-</sup>	5	3	700.36	8.002	0.819	0.011	49363.1	0.814	684.36	1.171	984.7	71024.6	4.635 "	
O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	X <sup>2</sup> Π <sub>g</sub>	0	4	1876.4	16.53	1.6722	0.01984	0.0	1.6623	1843.34	2.392	2652.2	0.0	1.380 × 10 <sup>-5</sup>
	a <sup>4</sup> Π <sub>u</sub>	1	8	1035.69	10.39	1.10466	0.01575	31481	1.0968	1014.91	1.578	1460.3	45296	2.935 "
	A <sup>2</sup> Π <sub>u</sub>	2	4	900	13.4	1.0617	0.01906	38208	1.0522	873.2	1.514	1256.4	54974	4.550 "
	b <sup>4</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>-</sup>	3	4	1196.77	17.09	1.28729	0.02206	48567	1.27626	1162.59	1.836	1672.8	69879	3.246 "
N <sub>2</sub>	X <sup>2</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>-</sup>	0	1	2359.61	14.456	2.010	0.0187	0.0	2.001	2330.70	2.879	3353.5	0.0	0.846 × 10 <sup>-5</sup>
	A <sup>3</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup>	1	3	1460.37	13.891	1.440	0.013	49756.5	1.434	1432.6	2.063	2061.3	71590.6	1.744 "
	B <sup>3</sup> Π <sub>g</sub>	2	6	1734.11	14.47	1.6380	0.0184	59313.5	1.6288	1705.2	2.344	2453.3	85341.5	1.446 "
	a <sup>1</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>-</sup>	3	1	1527	11.5	1.48	0.015	59584	1.472	1504	2.118	2164	85731	1.523 "
	a <sup>1</sup> Π <sub>g</sub>	4	2	1692.01	12.791	1.637	0.0224	68956.6	1.626	1666.43	2.340	2397.7	99216.1	1.524 "
c <sup>3</sup> Π <sub>g</sub>	5	6	2035.1	17.08	1.8259	0.0197	88984.1	1.8161	2000.94	2.613	2879.0	128032.1	1.207 "	
N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	X <sup>2</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>+</sup>	0	2	2207.19	16.136	1.9322	0.0202	0.0	1.9221	2174.92	2.766	3129.3	0.0	1.025 × 10 <sup>-5</sup>
	A <sup>2</sup> Π <sub>u</sub>	1	4	1902.84	14.91	1.722	0.018	9016	1.713	1873.02	2.465	2694.9	12972	1.238 "
	B <sup>2</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup>	2	2	2419.84	23.19	2.083	0.0195	25566	2.0733	2373.46	2.983	3415.0	36785	1.037 "
C <sup>2</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup>	3	2	[2050]	-	1.65	[0.05]	64547	1.625	2050	2.338	2950	92872	1.246 "	
NO	X <sup>2</sup> Π <sub>1/2</sub>	0	2	1904.03	13.97	1.7046	0.0178	0.0	1.6957	1876.09	2.440	2699.4	0.0	1.196 × 10 <sup>-5</sup>
	X <sup>2</sup> Π <sub>3/2</sub>	1	2	1903.63	13.97	1.7046	0.0178	120.9	1.6957	1875.69	2.440	2698.8	174.0	1.196 "
	A <sup>2</sup> Σ <sup>+</sup>	2	2	2371.3	14.48	1.9952	0.0164	44138	1.9870	2342.34	2.859	3370.2	63507	0.806 "
	B <sup>2</sup> Π	3	4	1037.68	7.603	1.127	0.0152	45440	1.1194	1022.47	1.611	1471.2	65380	2.503 "
	C <sup>2</sup> Π	4	4	2347	-	(1.955)	-	52373	1.955	2347	2.813	3377	75355	0.2 "
	D <sup>2</sup> Σ <sup>+</sup>	5	2	2327	23	(1.9917)	-	53292	1.9917	2281	2.866	3282	76678	0.811 "
E <sup>2</sup> Σ <sup>+</sup>	6	4	2373.6	15.85	1.9863	0.0182	60802	1.9772	2341.9	2.845	3369.6	87483	0.867 "	
NO <sup>+</sup>	X <sup>1</sup> Σ <sup>+</sup>	0	1	2377.1	16.35	2.002	0.0202	0.0	1.9919	2344.4	2.866	3373.2	0.0	0.9067 × 10 <sup>-5</sup>
	a <sup>3</sup> Σ <sup>+</sup>	1	3	[1462.4]	[6.07]	[1.636]	[0.0102]	37759.4	1.6309	1450.2	2.347	2086.6	54329	1.126 "
	<sup>3</sup> Δ	2	6	[1382.4]	[5.01]	[1.480]	[0.0080]	51269.6	1.4760	1372.4	2.124	1974.6	73767.7	1.075 "
	<sup>3</sup> Σ <sup>-</sup>	3	3	[1269.0]	[4.22]	[1.229]	[0.0061]	58310.7	1.2260	1260.5	1.764	1813.6	83898.6	1.068 "
	<sup>3</sup> Π	4	6	[1470.7]	[5.67]	[1.693]	[0.0097]	63347.2	1.6882	1459.3	2.429	2099.7	91145.2	1.079 "
	<sup>1</sup> Σ <sup>-</sup>	5	1	[1260.4]	[4.17]	[1.211]	[0.0060]	64395.8	1.2080	1252.0	1.738	1801.4	92654.0	1.069 "
	A <sup>1</sup> Π	6	2	1608.9	23.3	1.587	0.024	73082.0	1.575	1562.3	2.266	2247.9	105151.8	2.312 "
<sup>1</sup> Δ	7	2	[1211.3]	[3.85]	[1.111]	[0.0053]	77155.1	1.1083	1203.6	1.589	1731.8	111012.3	1.069 "	

分子	電子状態	$n$	$g_n$	$\omega_e$	$\omega_e x_e$	$B_e$	$\alpha_e$	$\epsilon_n$	$B_n$	$\nu_n$	$T_{rn}$	$T_{vn}$	$T_{zn}$	$\beta_n$
$H_2$	$X^1 \Sigma_g^+$	0	1	4395.24	117.90	60.80	2.993	0.0	59.304	4159.44	85.33	5984.7	0.0	$3.568 \times 10^{-5}$
	$B^1 \Sigma_u^+$	1	1	1356.90	19.932	20.0159	1.1933	90196.1	19.419	1317.04	27.94	1895.0	129776	10.924 //
	$\sigma=2$ $C^1 \Pi_u$	2	2	2442.72	(67.03)	31.340	1.626	99080.3	30.527	2308.66	43.92	3321.8	142558.7	6.304 //
	$E^1 \Sigma_g^+$	3	1	2588.9	(130.5)	32.68	(1.818)	99157.3	31.771	2327.9	45.71	3349.4	142669.5	7.686 //
$H_2^+$	$X^2 \Sigma_g^+$	0	2	2297	62	29.8	1.4	0.0	29.1	2173	41.9	3127	0.0	$6.548 \times 10^{-5}$
$\sigma=2$		1												
OH	$X^2 \Pi_{1/2}$	0	2	3735.21	82.81	18.871	0.714	0.0	18.514	3569.59	26.638	5136.0	0.0	$2.387 \times 10^{-5}$
	$X^2 \Pi_{3/2}$	1	2	3735.21	82.81	18.871	0.714	139.7	18.514	3569.59	26.638	5136.0	201.0	2.387 //
	$A^2 \Sigma^+$	2	2	3180.56	94.93	17.355	0.807	35472.5	16.952	2990.7	24.391	4303.1	51038.5	3.482 //
CO	$X^1 \Sigma^+$	0	1	2170.21	13.461	1.9313	0.01748	0.0	1.9226	2143.29	2.766	3083.8	0.0	$0.9266 \times 10^{-5}$
	$a^3 \Pi_\gamma$	1	6	1739.25	14.47	1.6810	0.0193	48473.9	1.6714	1710.31	2.405	2460.8	69745.2	1.457 //
	$a'^3 \Sigma^+$	2	3	1218	9.5	1.331	0.016	55380	1.323	1199	1.904	1725.0	79682	2.108 //
	$d^3 \Pi_\delta$	3	6	1137.79	7.624	1.2615	0.0170	61785	1.253	1122.54	1.803	1615.1	88898	2.213 //
	$A^1 \Pi$	4	2	1515.61	17.2505	1.6116	0.02229	64746.5	1.6005	1481.11	2.303	2131.1	93158.6	2.116 //
$CO^+$	$X^2 \Sigma^+$	0	2	2214.24	15.164	1.9772	0.01896	0.0	1.9677	2183.91	2.831	3142.3	0.0	$0.9684 \times 10^{-5}$
	$A^1 \Pi_i$	1	4	1562.06	13.532	1.5894	0.01942	20407.5	1.5797	1535.00	2.273	2208.6	29362.7	1.706 //
	$B^2 \Sigma^+$	2	2	1734.18	27.927	1.7999	0.03025	45633.5	1.7848	1678.33	2.568	2414.8	65658.4	2.374 //
$C_2$	$X^1 \Sigma_g^+$	0	1	1854.71	13.34	1.81984	0.01765	0.0	1.8110	1828.03	2.606	2630.2	0.0	$1.214 \times 10^{-5}$
	$X^3 \Pi_u$	1	6	1641.35	11.67	1.63246	0.01661	610	1.6242	1018.07	2.337	2328.1	878.0	1.390 //
	$A'^3 \Sigma_g^-$	2	3	1470.45	11.19	1.49852	0.01634	6243.5	1.4904	1448.07	2.144	2083.5	8983.3	1.645 //
	$b^1 \Pi_u$	3	2	1608.35	12.078	1.61634	0.01686	8268.33	1.6071	1584.07	2.312	2279.2	11896.6	1.469 //
	$A'^3 \Sigma_u^+$	4	3	1961.6	13.65	1.87	(0.018)	13365	1.861	1934.30	2.678	2783.1	19230	1.120 //
	$A^3 \Pi_g$	5	6	1788.2	16.44	1.7527	0.01608	19916	1.7447	1755.32	2.510	2525.6	28656.0	1.402 //
	$c^1 \Pi_g$	6	2	1809.1	15.81	1.7334	0.018	34262	1.7244	1777.48	2.481	2557.5	49297.0	1.389 //
	$B^3 \Pi_g$	7	6	1106.56	39.26	1.1922	0.0242	40690	1.1801	1028.04	1.698	1479.2	58546.0	6.752 //
	$d^1 \Sigma_u^+$	8	1	1829.57	13.97	1.8334	0.0204	43240	1.8232	1801.63	2.623	2592.2	62215.0	1.328 //

主として文献3によるほか、文献4～8を参考にした。

$\omega_e \sim \nu_n$ の単位は $cm^{-1}$ ,  $T_{rn}$ ,  $T_{vn}$ ,  $T_{zn}$ の単位は $K$ ,  $\beta_n$ の単位は $K^{-1}$ である。

( )内は不確実な値であることを示す。

表Ⅲ 3原子分子の分光学的常数から換算  
された特性温度

分子	$n$	$g_n$	$T_{v_1}(K)$	$T_{v_2}(K)$	$T_{v_3}(K)$	$T_r(K)$
H <sub>2</sub> O ( $\sigma=2$ )	0	1	5261.8	2294.3	5403.9	15336
HO <sub>2</sub> ( $\sigma=1$ )	0	(2)	1999.1	1584.1	4912.1	3187.2
*CO <sub>2</sub> ( $\sigma=2$ )	0	1	1932.1	960.1	3380.2	0.5617
*C <sub>2</sub> O ( $\sigma=1$ )	0	1	1545.3	548.2	2846.0	[0.5887]
NO <sub>2</sub> ( $\sigma=2$ )	0	2	1953.6	1088.9	2396.4	1.1054
*N <sub>2</sub> O ( $\sigma=1$ )	0	1	1836.7	847.8	3199.5	0.6059
O <sub>3</sub> ( $\sigma=2$ )	0	1	1597.1	1014.4	1500.7	[0.8398]

文献11による値から換算。〔 〕内は不確実な数値であることを示す。

\*印は直線状分子、その他は非直線状分子。

と表わされ、 $f_s^e$  は式(2.1)と同様であるが、 $f_s^v$  と  $f_s^r$  は H<sub>2</sub>O のような非直線状3原子分子については、それぞれ

$$f_s^v = [1 - \exp(-T_{v_1}^s/T)]^{-1} [1 - \exp(-T_{v_2}^s/T)]^{-1} [1 - \exp(-T_{v_3}^s/T)]^{-1} \quad (2.5)$$

$$f_s^r = \frac{1}{\sigma_s} \left(\frac{T}{T_r}\right)^{3/2}, \quad T_r = \frac{h^2}{8\pi^{7/3} k (ABC)^{1/3}} \quad (2.6)$$

となる。但し  $T_{v_j} = (hc/k)\omega_j$  は固有振動数  $\omega_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) の三つの固有振動の温度、 $T_r$  は回転温度で、 $A, B, C$  は分子の各慣性主軸のまわりの回転モーメントである。 $\sigma$  は分子の対称数である。

また CO<sub>2</sub> のような直線状分子については

$$f_s^v = [1 - \exp(-T_{v_1}^s/T)]^{-1} [1 - \exp(-T_{v_2}^s/T)]^{-2} [1 - \exp(-T_{v_3}^s/T)]^{-1} \quad (2.5a)$$

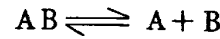
$$f_s^r = \frac{1}{\sigma_s} \frac{T}{T_r}, \quad T_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I k} \quad (2.6a)$$

となる。但し  $I$  は分子回転モーメントである。いくつかの3原子分子について  $T_{v_j}$  ( $j=1, 2, 3$ ) および  $T_r$  の値を表Ⅲに示す。

### 3. 多項式近似

高温気体の熱力学状態量は、式(2.1)~(2.6)の内部分配関数から計算されるが、これらは複雑な温度の関数である。もしこれらが温度  $T$  の簡単な多項式で近似されるならば応用上有用である。

例えば、ある2原子分子  $AB$  の解離平衡状態の系



を考えると、この系の温度  $T$  における粒子数密度

$n_{AB} = N_{AB}/V$ ,  $n_A = N_A/V$ ,  $n_B = N_B/V$  は

$$\frac{N_A N_B}{N_{AB}} = \frac{Z_A Z_B}{Z_{AB}},$$

即ち

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = K, \quad (3.1)$$

$$K = (2\pi\mu kT/h^2)^{3/2} f_A^e f_B^e / f_{AB}^{in} \cdot \exp(-D_{AB}/kT),$$

$$\mu = m_A m_B / (m_A + m_B),$$

但し  $m_A, m_B$  は原子  $A, B$  の質量。これと状態方程式

$$p = (n_A + n_B + n_{AB}) kT$$

と核種の保存則  $n_A = n_B$  を連立させれば、温度  $T$ 、圧力  $p$  を与えることにより計算される。但し  $D_{AB}$  は  $AB$  の生成熱、または解離電圧である。また系の内部エネルギー  $e$  は単位質量当たり

$$e = \sum_s \gamma_s e_s, \quad \gamma_s = n_s / \rho, \quad (3.2)$$

$$e_s = 3kT/2 + kT^2 d \ln f_s / dT + e_{s,0}$$

となる。但し  $\rho$  は密度、 $e_{s,0}$  ( $s=AB, A, B$ ) は  $s$  の生成熱である。さらに系の比熱は次のようになる。

$$C_v = (\partial e / \partial T)_\rho = \sum_s e_s (\partial \gamma_s / \partial T)_\rho + \sum_s C_{vs} \gamma_s, \quad (3.3)$$

$$C_{vs} = 3k/2 + 2kT d \ln f_s / dT + kT^2 d^2 \ln f_s / dT^2,$$

$$C_p = (\partial h / \partial T)_p = \sum_s h_s (\partial \gamma_s / \partial T)_p + \sum_s C_{ps} \gamma_s \quad (3.4)$$

但し、

$$h = e + p/\rho, \quad h_s = e_s + kT, \quad C_{ps} = C_{vs} + k \quad (3.5)$$

上の各式により  $n_s, e, h, C_v, C_p$  等を計算するには粒子1コ当たりの電離エネルギー、解離エネルギーあるいは生成熱の値が心要となるが、それらは気体力学的な応用上興味のあるいくつかの化学種について表Na, Nb, Ncにまとめてある。

式(3.1)~(3.5)には分配関数  $f_s$  とその温度微分が含まれている。いま

表Na 主な原子および分子の電離電圧

反応	電離電圧 (eV)	文献
$A_r \rightarrow A_r^+ + e$	15.755	4, 7, 12, 13, 14
$A_r^+ \rightarrow A_r^{++} + e$	27.62	4, 7
$N \rightarrow N^+ + e$	14.54	4, 7, 12, 13, 14
$O \rightarrow O^+ + e$	13.614	4, 7, 12, 13, 14
$H \rightarrow p + e$	13.595	4, 12, 14
$C \rightarrow C^+ + e$	11.26	4, 7, 12, 13, 14
$N_2 \rightarrow N_2^+ + e$	15.58	7, 12, 13, 14
$O_2 \rightarrow O_2^+ + e$	12.05	7, 12, 13, 14
$NO \rightarrow NO^+ + e$	9.25	7, 12, 13, 14
$H_2 \rightarrow H_2^+ + e$	15.422	12, 14
$CO \rightarrow CO^+ + e$	14.00	7, 12, 13, 14

表Nb 主な2原子分子の解離電圧

反応	解離電圧 (eV)	文献
$N_2 \rightarrow 2N$	9.76	6, 7, 13, 14
$O_2 \rightarrow 2O$	5.12	6, 7, 13, 14
$NO \rightarrow N + O$	6.49	6, 7, 13, 14
$H_2 \rightarrow 2H$	4.476	6, 14
$CO \rightarrow C + O$	11.108	7, 13, 14
$OH \rightarrow O + H$	4.36	6, 14

表Nc 主な気体分子の生成熱

反応	生成熱 (kcal/mol)	文献
$C(\text{固体}) \rightarrow C$	$169.58 \pm 0.45$	7, 11
$2C(\text{固体}) \rightarrow C_2$	$198.2 \pm 0.9$	11
$C(\text{固体}) + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO$	$-27.20 \pm 0.04$	7, 11
$C(\text{固体}) + O_2 \rightarrow CO_2$	$-93.965 \pm 0.011$	7, 11
$2C(\text{固体}) + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow C_2O$	$67.5 \pm 1.5$	11
$\frac{1}{2}H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow OH$	$9.29 \pm 0.3$	11
$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$	$-57.103$	11
$\frac{1}{2}H_2 + O_2 \rightarrow HO_2$	$6 \pm 2$	11
$\frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow NO$	$21.46 \pm 0.04$	7, 11
$\frac{1}{2}N_2 + O_2 \rightarrow NO_2$	$8.59 \pm 0.2$	7, 11
$N_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow N_2O$	$20.43 \pm 0.1$	

度の微分を得る必要がある。著者等はいくつかの代表的な化学平衡系について、この種の微分に対する厳密な解析的表示を得ている。これについては別報<sup>15)</sup>。

以下では上記三つの量を温度範囲  $T=T_1 \sim T_{max}$  において、次のような4次の多項式で表示する。

$$F_0 = \sum_{n=0}^4 a_n x^n, \quad (3.6)$$

$$F_1 = \sum_{n=0}^4 b_n x^n, \quad (3.7)$$

$$F_2 = \sum_{n=0}^4 c_n x^n, \quad (3.8)$$

但し

$$x = \ln(T/T_1) / \ln(T_{max}/T_1) \quad (3.9)$$

とし、 $T_1 = 0^\circ C = 273.15^\circ K$ 、また  $T_{max} = 20,000^\circ K$  は温度範囲の上限で、 $T=T_1 \sim T_{max}$  で  $x=0 \sim 1$  となる。ただしアルゴンのように高温で実在気体効果を示すものについては  $T_{max} = 25,000^\circ K$  とする。

図1~10に気体力学的応用上興味あるいくつかの気体、即ちアルゴン、窒素、酸素、空気等の高温における熱力学状態量の計算の際に必要な化学種の分配関数の温度変化を示す。また式(3.6)~

$F_0 = \ln f$ ,  
 $F_1 = T d \ln f / dT$ ,  
 $F_2 = T^2 d^2 \ln f / dT^2$ ,  
 とおくと式(3.1)~(3.5)から明らかのように、数密度  $n_s$  や  $\rho$  は  $F_0$  (または  $f = \exp(F_0)$ ) から、内部エネルギー  $e$ 、エンタルピー  $h$  のような量は  $F_0$  と  $F_1$  から、比熱  $C_v$ ,  $C_p$  や等エントロピー指数  $\gamma = d \ln p / d \ln \rho$  [式(4.23)] 等は  $F_0, F_1, F_2$  から導かれる。前述のようにこれらは各種の分光学的常数をパラメータとして含む温度の複雑な関数であるが、もしこれらの三つの量が温度  $T$  の簡単な近似多項式で表わされていれば、粒子密度、内部エネルギー、エンタルピー、比熱等の熱力学状態量の計算は著しく簡単化される。

なお式(3.3), (3.4)によって比熱を計算するには、 $(\partial \gamma_s / \partial T)_\rho, (\partial \gamma_s / \partial T)_p$  のような濃



(3.8)の近似多項式の係数  $a_n, b_n, c_n$  はそれぞれ表 V-1 ~ V-6 に示す。

図1~10において、実線は式(3.6)~(3.8)による近似多項式で求めた値、丸や三角等で表わした点は前節の式(2.1), (2.2), (2.4)等を用いて計算した値である。近似多項式を作成するに当っては、先ずこれらの式により厳密な分配関数とその温度微分の計算式を作り、電子計算機により正確な値を計算し、次にこれらを式(3.6)~(3.8)に代入して、Gaussの消去法により係数  $a_n, b_n, c_n$  を決定した。その際により精度のよい近似を行なうため、かつ振動解の発生を回避するために温度範囲  $T_1 \sim T_{max}$  の間を化学種により2~4分割して係数を求めた。分配関数の厳密な値と近似多項式による値との一致は温度範囲の全域で満足すべきものであり、多項式近似は5項からなるべき級数で実用上十分であることがわかる。

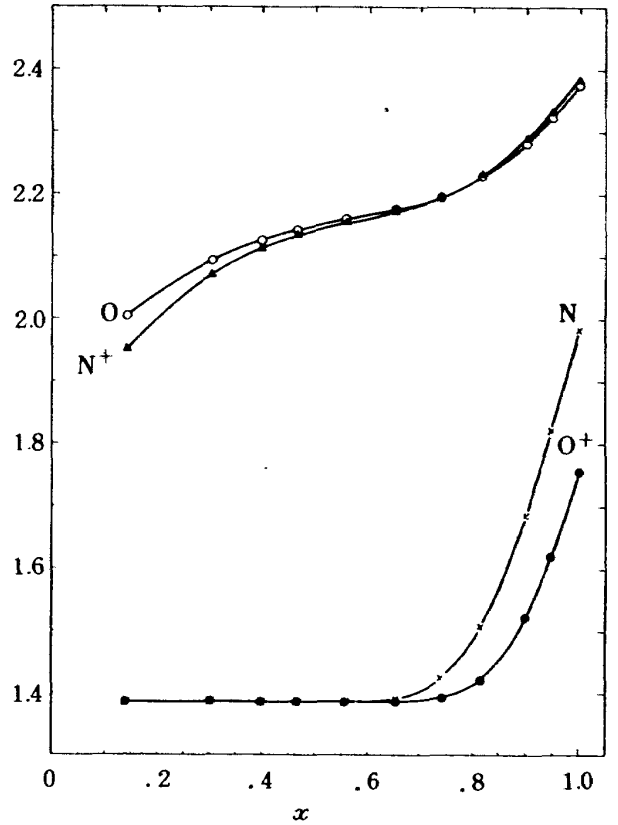


図2.  $\ln f(O, N, O^+, N^+)$ ,  
 $T_{max}=20,000^\circ\text{K}, T_1=273.15^\circ\text{K}_0$

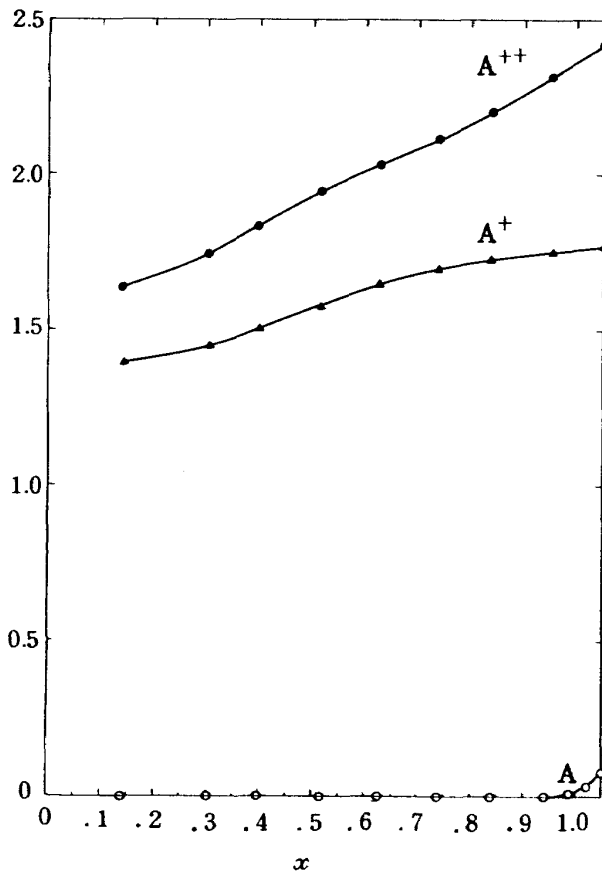


図1.  $\ln f(A_r, A_r^+, A_r^{++})$ 。実線は近似多項式による値、○▲●は厳密な計算値(以下同じ)  
 $T_{max}=25,000^\circ\text{K}, T_1=273.15^\circ\text{K}_0$

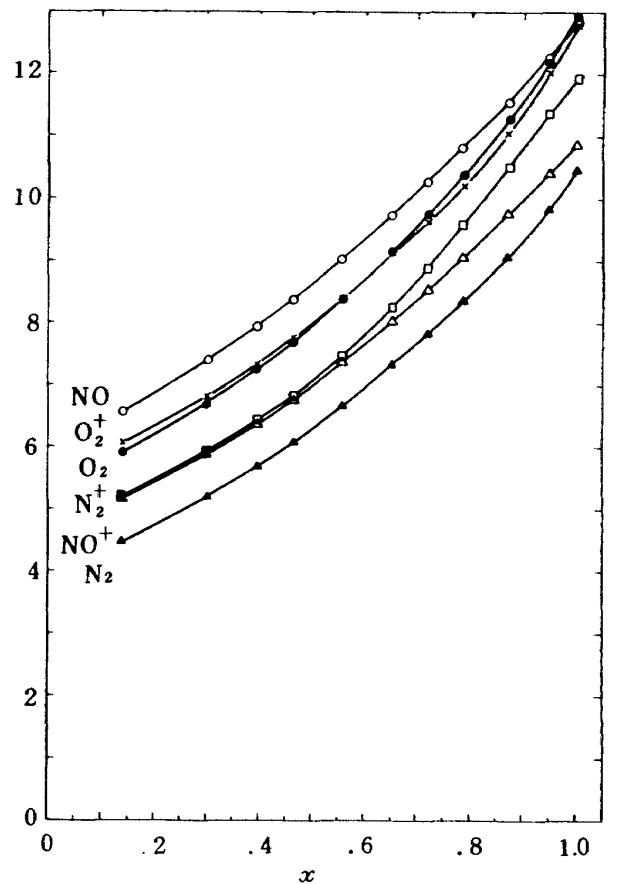


図3.  $\ln f(O_2, N_2, NO, O_2^+, N_2^+, NO)$ ,  
 $T_{max}=20,000^\circ\text{K}, T_1=273.15^\circ\text{K}_0$

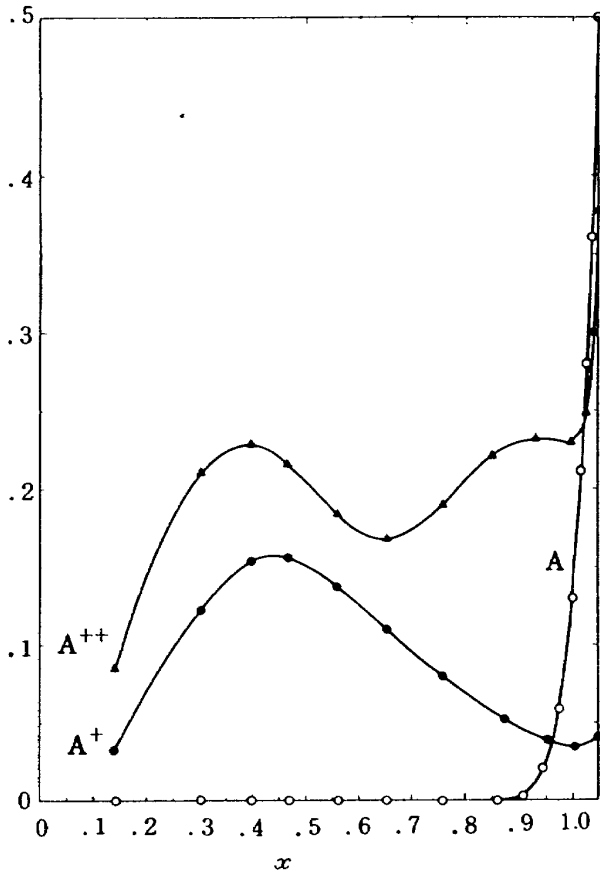


図4.  $Td \ln f / dT(A_r, A_r^+, A_r^{++})$ ,  
 $T_{max}=25,000^\circ K, T_1=273.15^\circ K_0$

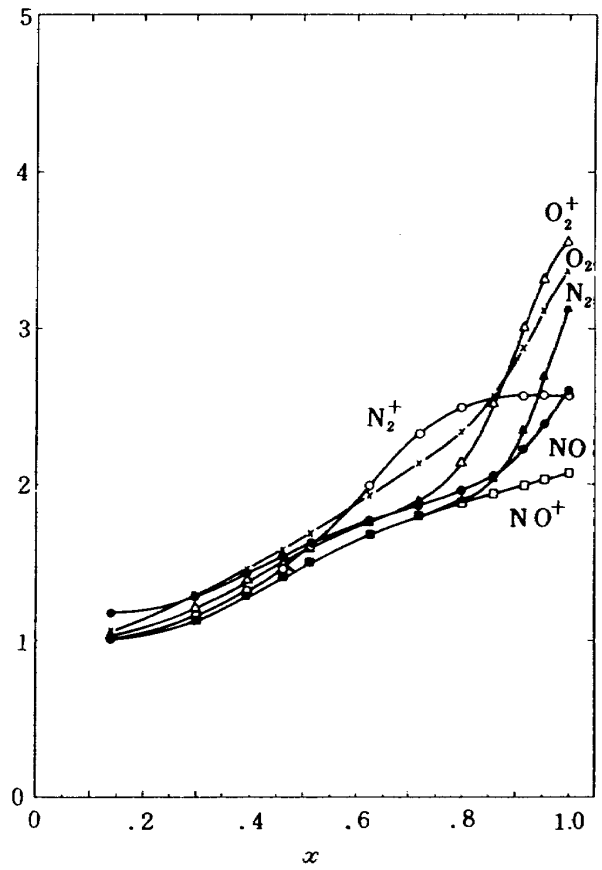


図6.  $Td \ln f / dT(O_2, N_2, NO, O_2^+, N_2^+, NO^+)$ ,  
 $T_{max}=20,000^\circ K, T_1=273.15^\circ K_0$

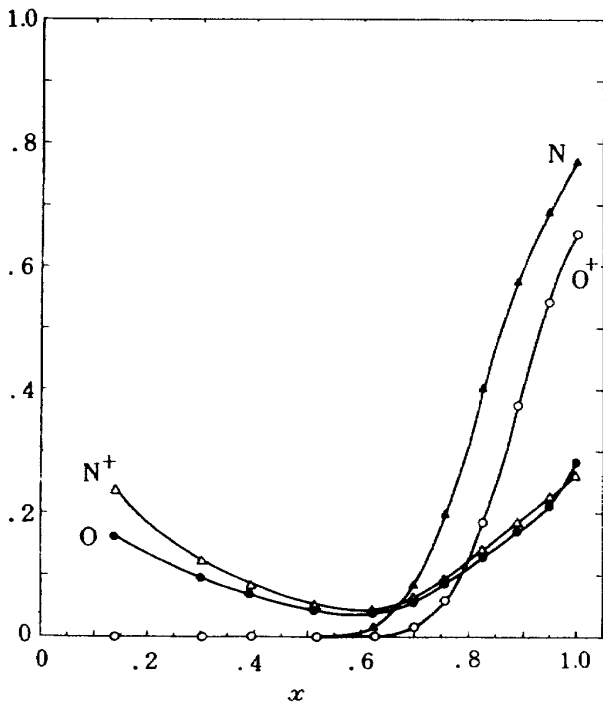


図5.  $Td \ln f / dT(O, N, O^+, N^+)$ ,  
 $T_{max}=20,000^\circ K, T_1=273.15^\circ K_0$

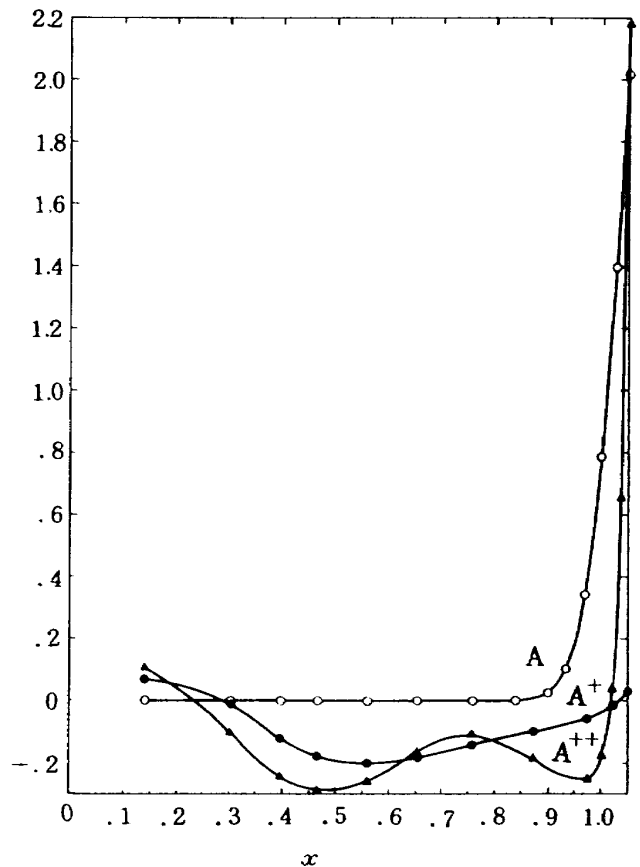


図7.  $T^2 d^2 \ln f / dT^2(A_r, A_r^+, A_r^{++})$ ,  
 $T_{max}=25,000^\circ K, T_1=273.15^\circ K_0$

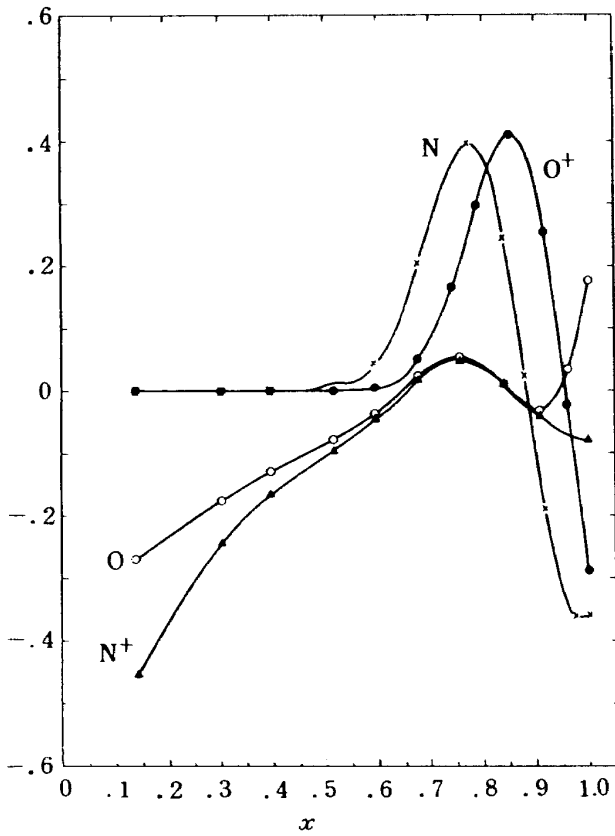


図 8.  $T^2 d^2 \ln f / dT^2 (O, N, O^+, N^+)$ ,  
 $T_{max} = 20,000^\circ K, T_1 = 273.15^\circ K_0$

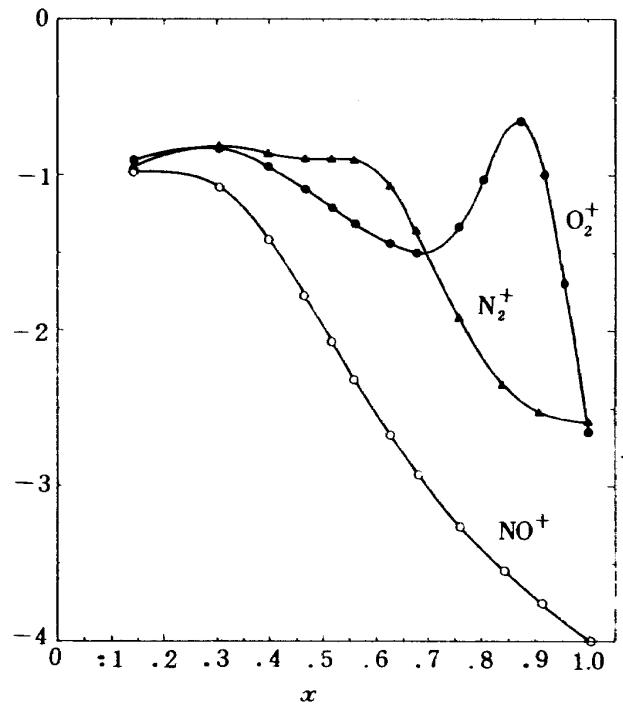


図 10.  $T^2 d^2 \ln f / dT^2 (O_2^+, N_2^+, NO^+)$ ,  
 $T_{max} = 20,000^\circ K, T_1 = 273.15^\circ K_0$

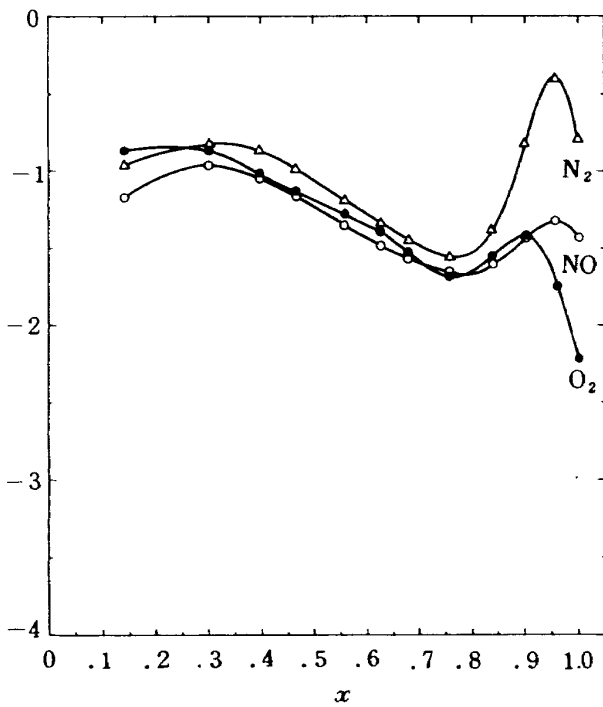


図 9.  $T^2 d^2 \ln f / dT^2 (O_2, N_2, NO)$ ,  
 $T_{max} = 20,000^\circ K, T_1 = 273.15^\circ K_0$

表V-1  $F_0$  の係数 (単原子およびイオン)

SPECIES	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	TEMP. RANGE(°K)
Ar	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 15000$
	3.930557308D+01	-1.883974848D+02	3.363992043D+02	-2.653922069D+02	7.810101750D+01	$15000 < T \leq 25000$
O	1.892382985D+00	9.025003209D-01	-6.911616799D-01	-5.684878675D-01	8.129874575D-01	$500 \leq T \leq 5000$
	4.178450058D+00	-9.477626403D+00	1.660304823D+01	-1.312861695D+01	4.202932228D+00	$5000 < T \leq 20000$
N	1.386000000D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 3500$
	-7.934894474D+00	5.110702098D+01	-1.025280778D+02	8.818644011D+01	-2.684786008D+01	$3500 < T \leq 20000$
Ar <sup>+</sup>	1.450180927D+00	-9.039813667D-01	4.232551425D+00	-4.687813239D+00	1.661688650D+00	$500 \leq T \leq 7000$
	3.101953833D+00	-7.973947971D+00	1.539694514D+01	-1.239715594D+01	3.631142771D+00	$7000 < T \leq 25000$
O <sup>+</sup>	1.386000000D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 5000$
	-1.718802307D+01	9.067735622D+01	-1.629258042D+02	1.267606992D+02	-3.556961798D+01	$5000 < T \leq 20000$
N <sup>+</sup>	1.777983829D+00	1.480428951D+00	-1.917301706D+00	6.503149047D-01	3.582984340D-01	$500 \leq T \leq 5000$
	1.735920447D+00	2.732237043D+00	-6.248954253D+00	5.799784230D+00	-1.631132784D+00	$5000 < T \leq 20000$
Ar <sup>++</sup>	1.707598871D+00	-1.433006164D+00	8.032668683D+00	-1.129820378D+01	5.493106585D+00	$500 \leq T \leq 7000$
	2.495577634D+01	-1.035723591D+02	1.734249956D+02	-1.275479480D+02	3.509855462D+01	$7000 < T \leq 25000$

D+0.2等は  $\times 10^2$  等をあらわす。以下同じ。

表V-2  $F_1$  の係数 (単原子およびイオン)

SPECIES	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	TEMP. RANGE(°K)
Ar	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 10000$
	1.300800268D+02	-6.052060637D+02	1.056323992D+03	-8.197700321D+02	2.386799312D+02	$10000 < T \leq 15000$
	2.275813737D+02	-1.082206532D+03	1.917310095D+03	-1.501725674D+03	4.391712352D+02	$15000 < T \leq 25000$
O	2.746092515D-01	-1.118302106D+00	2.912462192D+00	-4.878538691D+00	3.379270991D+00	$500 \leq T \leq 5000$
	1.831727981D+00	-6.023040877D+00	4.322265241D+00	2.977152651D+00	-2.906872695D+00	$5000 < T \leq 12000$
	5.187453978D+01	-2.508615425D+02	4.519789394D+02	-3.597161557D+02	1.070073204D+02	$12000 < T \leq 20000$
N	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 2500$
	-9.276685887D+00	5.950507912D+01	-1.390512328D+02	1.390485811D+02	-4.933680051D+01	$2500 < T \leq 10000$
	1.210834885D+02	-5.634506863D+02	9.712135614D+02	-7.351421105D+02	2.070662034D+02	$10000 < T \leq 20000$
Ar <sup>+</sup>	6.370209960D-02	-1.158754916D+00	9.135826796D+00	-1.911222955D+01	1.234674472D+01	$500 \leq T \leq 3000$
	-2.649877164D-01	2.772861422D+00	-6.031661455D+00	5.067090387D+00	-1.511045290D+00	$3000 < T \leq 15000$
	4.164411340D+01	-1.756993681D+02	2.793484570D+02	-1.980158935D+02	5.275793298D+01	$15000 < T \leq 25000$
O <sup>+</sup>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 3500$
	-7.352367411D+00	3.799729271D+01	-6.960615579D+01	5.129289692D+01	-1.131162887D+01	$3500 < T \leq 10000$
	1.278104239D+02	-5.298576672D+02	8.103318428D+02	-5.412802420D+02	1.336479808D+02	$10000 < T \leq 20000$
N <sup>+</sup>	4.427428745D-01	-2.050250221D+00	5.109428800D+00	-7.400657860D+00	4.549082969D+00	$500 \leq T \leq 5000$
	9.059219011D+00	-4.322348529D+01	7.604434005D+01	-5.838635224D+01	1.676704218D+01	$5000 < T \leq 20000$
	1.820463997D-03	-4.176434072D-02	6.988686306D+00	-1.952016851D+01	1.466043798D+01	$500 \leq T \leq 3000$
Ar <sup>++</sup>	-6.563006368D-01	8.114537146D+00	-2.393541874D+01	2.797048355D+01	-1.130903266D+01	$3000 < T \leq 12000$
	2.662804927D+02	-1.140794048D+03	1.832030178D+03	-1.305966558D+03	3.486801867D+02	$12000 < T \leq 20000$
	2.053355311D+04	-8.175352251D+04	1.220772580D+05	-8.102731132D+04	2.017025298D+04	$20000 < T \leq 25000$

表 V-3  $F_2$  係数 (単原子およびイオン)

SPECIES	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	TEMP. RANGE(°K)
Ar	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 10000$
	6.919845148D+02	-3.247217198D+03	5.718105133D+03	-4.478396283D+03	1.316298774D+03	$10000 < T \leq 15000$
	-5.292695349D+03	2.166876434D+04	-3.317112653D+04	2.249138682D+04	-5.695541648D+03	$15000 < T \leq 25000$
O	-2.661718763D-01	-6.743675428D-01	6.339517295D+00	-1.314835117D+01	9.237527892D+00	$500 \leq T \leq 3500$
	2.724452865D+01	-1.535815301D+02	3.181375997D+02	-2.870851269D+02	9.531049906D+01	$3500 < T \leq 11000$
	-4.369348406D+02	1.854723642D+03	-2.930889998D+03	2.041331289D+03	-5.280544479D+02	$11000 < T \leq 20000$
N	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 2000$
	-3.268476141D+01	2.277254160D+02	-5.871787754D+02	6.622799981D+02	-2.744611683D+02	$2000 < T \leq 7500$
	3.555743191D+02	-1.830321895D+03	3.503065557D+03	-2.950066724D+03	9.216998533D+02	$7500 < T \leq 15000$
$Ar^+$	-1.297712583D+03	5.501011534D+03	-8.697963401D+03	6.081452626D+03	-1.587146100D+03	$15000 < T \leq 20000$
	-4.593289474D-01	7.378885952D+00	-3.235763317D+01	5.074283301D+01	-2.681416107D+01	$500 \leq T \leq 3000$
	2.296985295D+00	-1.314524358D+01	2.491007070D+01	-2.018522630D+01	6.070764757D+00	$3000 < T \leq 15000$
$O^+$	-1.777791323D+01	4.689273666D+01	-2.981486413D+01	-1.097563366D+01	1.163617641D+01	$15000 < T \leq 25000$
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$500 \leq T \leq 2500$
	-1.531750565D+01	9.493516105D+01	-2.157786325D+02	2.115266485D+02	-7.444711111D+01	$2500 < T \leq 8000$
$N^+$	4.431756337D+02	-2.071730904D+03	3.599061778D+03	-2.750232896D+03	7.794375850D+02	$8000 < T \leq 20000$
	-7.409578462D-01	2.424746961D+00	-2.621360891D+00	-4.567970080D-01	2.206498865D+00	$500 \leq T \leq 5000$
	5.941902651D-01	-1.390980633D+01	4.518609817D+01	-5.140034805D+01	1.945088443D+01	$5000 < T \leq 20000$
$Ar^{++}$	-3.855631984D-01	8.070400204D+00	-4.185701192D+01	7.296338241D+01	-4.147255102D+01	$500 \leq T \leq 3000$
	1.471777129D+01	-8.846178086D+01	1.896500020D+02	-1.745665077D+02	5.842462577D+01	$3000 < T \leq 17500$
	1.044239166D+05	-4.240326316D+05	6.457158956D+05	-4.370338632D+05	1.109264719D+05	$17500 < T \leq 25000$

表 V-4  $F_0$  の係数 (2 原子分子およびイオン)

SPECIES	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	TEMP. RANGE(°K)
O <sub>2</sub>	5.322613283D+00	3.928282805D+00	1.421881536D+00	3.016554158D+00	-9.742274133D+01	500 ≤ T ≤ 8000
	-4.181811904D+01	2.144667135D+02	-3.464593481D+02	2.540078822D+02	-6.726463914D+01	8000 < T ≤ 20000
N <sub>2</sub>	3.889214801D+00	4.166002811D+00	-1.210962270D+00	6.797754553D+00	-3.527250202D+00	500 ≤ T ≤ 8000
	-5.713480559D+00	2.719634929D+01	2.033950506D+00	-3.441977853D+01	2.139151572D+01	8000 < T ≤ 20000
NO	5.919844006D+00	4.449505338D+00	4.468111464D+01	4.111477003D+00	-2.294504355D+00	500 ≤ T ≤ 8000
	1.047477613D+00	1.872405521D+01	-6.981879753D+00	-6.279493721D+00	6.319366133D+00	8000 < T ≤ 20000
O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	5.447262357D+00	4.280637431D+00	-1.141066551D+00	7.877021815D+00	-4.637210981D+00	500 ≤ T ≤ 5000
	-4.766969155D+01	2.578499514D+02	-4.452838595D+02	3.433620093D+02	-9.548148787D+01	5000 < T ≤ 20000
N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	4.633294486D+00	3.844454187D+00	1.534473825D+00	-7.746932167D+01	3.755088158D+00	500 ≤ T ≤ 5000
	1.502895872D+01	-4.681445661D+01	8.867948101D+01	-6.034155693D+01	1.538135398D+01	5000 < T ≤ 20000
NO <sup>+</sup>	4.520657455D+00	5.015161305D+00	-4.578604994D+00	1.210454472D+01	-6.443642358D+00	500 ≤ T ≤ 5000
	5.482055901D+00	-1.516476884D+00	1.219614375D+01	-7.144685015D+00	1.863211209D+00	5000 < T ≤ 20000

表 V-5  $F_1$  の係数 (2 原子分子およびイオン)

SPECIES	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	TEMP. RANGE(°K)
O <sub>2</sub>	8.718792897D+01	1.345734210D+00	-4.715485878D+01	2.680191628D+00	-1.670042616D+00	500 ≤ T ≤ 8000
	-1.887610716D+02	9.088814989D+02	-1.618448062D+03	1.274105985D+03	-3.724064325D+02	8000 < T ≤ 20000
N <sub>2</sub>	1.325924627D+00	-4.323828819D+00	1.776717896D+01	-2.168822679D+01	9.185244376D+00	500 ≤ T ≤ 8000
	-3.981334830D+02	1.825476421D+03	-3.104723172D+03	2.327544816D+03	-6.470341392D+02	8000 < T ≤ 20000
NO	1.434778824D+00	-3.712541553D+00	1.587848592D+01	-1.998782434D+01	8.714158778D+00	500 ≤ T ≤ 8000
	-1.109629952D+02	5.161362233D+02	-8.799470992D+02	6.606656710D+02	-1.832908986D+02	8000 < T ≤ 20000
O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	1.201444755D+00	-2.975004262D+00	1.538380463D+01	-2.078512212D+01	9.708598069D+00	500 ≤ T ≤ 5000
	-1.883648061D+02	9.715594369D+02	-1.847745746D+03	1.546046031D+03	-4.779366471D+02	5000 < T ≤ 20000
N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	8.669387243D+01	1.733328622D+00	-7.031273931D+00	1.772220322D+01	-1.012157651D+01	500 ≤ T ≤ 5000
	-9.817145217D+00	3.700894255D+01	-3.599123161D+01	1.057517377D+01	7.957304521D-01	5000 < T ≤ 20000
NO <sup>+</sup>	1.216850576D+00	-2.937097269D+00	1.230918256D+01	-1.313009257D+01	4.510928436D+00	500 ≤ T ≤ 5000
	-4.403852004D+01	6.17381998D+00	-5.804543685D+00	2.403671864D+00	-2.045382257D-01	5000 < T ≤ 20000

表V-6  $F_2$  の係数 (2原子分子およびイオン)

SPECIES	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	TEMP. RANGE (°K)
$O_2$	-1.690387705D+00	1.038060316D+01	-3.973596463D+01	5.664000340D+01	-2.937927913D+01	$500 \leq T \leq 3500$
	-1.680986491D+02	9.231941148D+02	-1.889215036D+03	1.692949346D+03	-5.610182697D+02	$3500 < T \leq 12500$
	1.994200378D+03	-8.671834976D+03	1.406041278D+04	-1.007688497D+04	2.691886421D+03	$12500 < T \leq 20000$
$N_2$	-8.264710572D+01	-3.822807085D+00	2.903293087D+01	-6.837258364D+01	4.752670524D+01	$500 \leq T \leq 3500$
	4.021320463D+01	-2.542185165D+02	5.923415984D+02	-6.184629650D+02	2.421579484D+02	$3500 < T \leq 12000$
	4.727383233D+03	-1.953472157D+04	3.007329122D+04	-2.043631951D+04	5.169564669D+03	$12000 < T \leq 20000$
NO	-1.941755776D+00	7.946739628D+00	-1.970930749D+01	1.415810689D+01	-1.755265472D+00	$500 \leq T \leq 8000$
	-1.619312367D+02	8.418655587D+02	-1.634607389D+03	1.391415538D+03	-4.381836829D+02	$8000 < T \leq 20000$
$O_2^+$	-1.258929439D+00	2.989620401D+00	-1.676056162D+00	-1.712936979D+01	1.831868960D+01	$500 \leq T \leq 3500$
	-1.278406787D+02	7.223600614D+02	-1.520067499D+03	1.392137959D+03	-4.663813012D+02	$3500 < T \leq 9000$
	2.613995685D+03	-1.193921390D+04	2.031145089D+04	-1.525326455D+04	4.264370399D+03	$9000 < T \leq 20000$
$N_2^+$	-1.293192196D+00	2.748139248D+00	6.041890775D+01	-2.362723468D+01	2.906980761D+01	$500 \leq T \leq 2500$
	6.932150152D+01	-4.822691306D+02	1.225112857D+03	-1.358939725D+03	5.520791468D+02	$2500 < T \leq 5000$
	-3.909453328D+01	2.167156049D+02	-4.314362929D+02	3.590408308D+02	-1.078200262D+02	$5000 < T \leq 20000$
NO <sup>+</sup>	-1.093701617D+00	-3.217649895D-01	1.548748012D+01	-6.296688334D+01	5.224024690D+01	$500 \leq T \leq 3500$
	1.852756171D+00	-7.110558427D+00	-5.954869975D+00	1.247050500D+01	-5.263030171D+00	$3500 < T \leq 20000$



#### 4. 垂直衝撃波後方の状態量の計算への応用

前章の分配関数の近似多項式は高温気流の状態量の計算に応用することができる。その一例として、空気中の強い垂直衝撃波後方の流れの熱力学状態量の計算を示す。

図11に示すように例えば温度  $T_1 = 300^\circ\text{K}$ 、圧力  $p_1 = 0.01$  気圧、マッハ数 20 (流速  $v_1 = 6630$  m/s) の気流中の垂直衝撃波 (二本の線で示す) があるとす。Rankine-Hugoniot 関係式によると波面後方の圧力は  $p_2 = 4665$  気圧、温度  $T_2 = 21500^\circ\text{K}$ 、流速  $v_2 = 1119$  m/s となるが、空気の解離、電離により生ずる熱平衡状態では最終的に圧力  $p = 5.293$  気圧、温度  $T = 7074^\circ\text{K}$ 、流速  $v = 5118$  m/s となる。途中にごく狭い非平衡流領域が生ずる (図の点線で示す) が、この途中の流れは rate 方程式を解くことにより簡単に計算される (例えば文献9)。

以下では垂直衝撃波後方の流れおよび伝搬する垂直衝撃波が壁面で反射して生ずる静止状態での  $p$ 、 $v$ 、 $T$  やエンタルピー、比熱等の状態量の計算結果を示す。

##### 4.1 基礎方程式

垂直衝撃波前後の状態量について次式が成り立つ。

$$\rho v = A \quad (\text{一定}) \quad (4.1)$$

$$\rho v^2 + p = B \quad (\text{一定}) \quad (4.2)$$

$$h + \frac{1}{2} v^2 = C \quad (\text{一定}) \quad (4.3)$$

$$p = \sum_s n_s k T \quad (4.4)$$

$$h = \sum_s n_s h_s / \rho \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{O}}^2 &= n_{\text{O}_2} K_1, \\ K_1 &= (\pi m_{\text{O}} k T / h^2)^{3/2} \cdot (f_{\text{O}}^e)^2 / f_{\text{O}_2}^{in} \cdot \exp(-D_{\text{O}_2} / k T) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{N}}^2 &= n_{\text{N}_2} K_2, \\ K_2 &= (\pi m_{\text{N}} k T / h^2)^{3/2} \cdot (f_{\text{N}}^e)^2 / f_{\text{N}_2}^{in} \cdot \exp(-D_{\text{N}_2} / k T) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{O}} n_{\text{N}} &= n_{\text{NO}} K_3, \\ K_3 &= (2 \pi m_{\text{O}} m_{\text{N}} k T / (m_{\text{O}} + m_{\text{N}}) k^2)^{3/2} \cdot f_{\text{O}}^e f_{\text{N}}^e / f_{\text{NO}}^{in} \\ &\quad \cdot \exp(-D_{\text{NO}} / k T) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{O}} n_e &= n_{\text{O}} K_4, \\ K_4 &= 2 (2 \pi m_e k T / h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{O}}^e / f_{\text{O}}^e \cdot \exp(-I_{\text{O}} / k T) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{N}} n_e &= n_{\text{N}} K_5, \\ K_5 &= 2 (2 \pi m_e k T / h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{N}}^e / f_{\text{N}}^e \cdot \exp(-I_{\text{N}} / k T) \end{aligned} \quad (4.10)$$

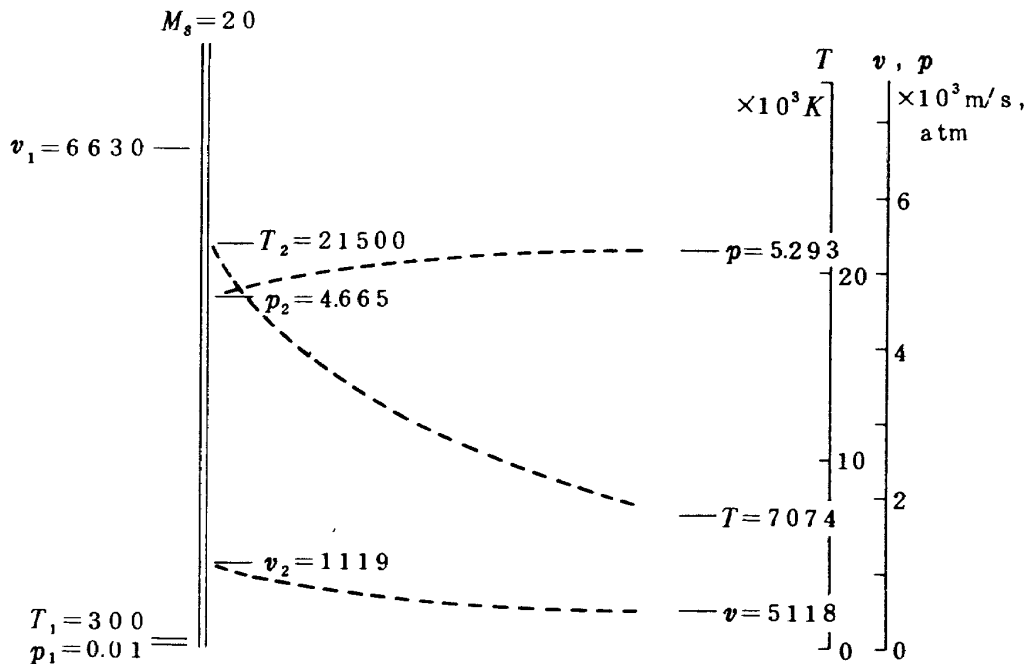


図11. マッハ数  $M_s = 20$ 、上流温度  $300^\circ\text{K}$ 、圧力  $0.01$  気圧の場合の垂直衝撃波直後の Rankine-Hugoniot 値とそれに続く平衡状態量の関係。

$$n_{\text{NOI}} n_e = n_{\text{NO}} K_6, \\ K_6 = 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{NOI}}^{\text{in}} / f_{\text{NO}}^{\text{in}} \cdot \exp(-I_{\text{NO}}/kT) \quad (4.11)$$

$$n_{\text{O}_2\text{I}} n_e = n_{\text{O}_2} K_7, \\ K_7 = 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{O}_2\text{I}}^{\text{in}} / f_{\text{O}_2}^{\text{in}} \cdot \exp(-I_{\text{O}_2}/kT) \quad (4.12)$$

$$n_{\text{N}_2\text{I}} n_e = n_{\text{N}_2} K_8, \\ K_8 = 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{N}_2\text{I}}^{\text{in}} / f_{\text{N}_2}^{\text{in}} \cdot \exp(-I_{\text{N}_2}/kT) \quad (4.13)$$

$$n_{\text{AI}} n_e = n_{\text{A}} K_9, \\ K_9 = 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} \cdot f_{\text{AI}}^e / f_{\text{A}}^e \cdot \exp(-I_{\text{A}}/kT) \quad (4.14)$$

$$(2n_{\text{O}_2} + n_{\text{O}} + n_{\text{NO}} + n_{\text{OI}} + n_{\text{NOI}} + 2n_{\text{O}_2\text{I}}) / \rho \\ = 2(n_{\text{O}_2})_1 / \rho_1 \quad (\text{一定}) \quad (4.15)$$

$$(2n_{\text{N}_2} + n_{\text{N}} + n_{\text{NO}} + n_{\text{NI}} + n_{\text{NOI}} + 2n_{\text{N}_2\text{I}}) / \rho \\ = 2(n_{\text{N}_2})_1 / \rho_1 \quad (\text{一定}) \quad (4.16)$$

$$(n_{\text{A}} + n_{\text{AI}}) / \rho = (n_{\text{A}})_1 / \rho_1 \quad (\text{一定}) \quad (4.17)$$

$$n_{\text{OI}} + n_{\text{NI}} + n_{\text{NOI}} + n_{\text{O}_2\text{I}} + n_{\text{N}_2\text{I}} + n_{\text{AI}} = n_e \quad (4.18)$$

但し、 $n_s$  ( $s = \text{O}_2, \text{N}_2, \text{O}, \text{N}, \text{NO}, \text{O}^+, \text{N}^+, \text{NO}^+, \text{O}_2^+, \text{N}_2^+, \text{A}_r, \text{A}_r^+, e^-$ ) は粒子密度で、添字 OI 等で  $\text{O}^+$  等を示す。また添字 1 は垂直衝撃波上流の状態量を示す。 $D_{\text{O}_2}, I_{\text{O}}$  等は  $\text{O}_2$  の解離電圧、 $\text{O}$  の電離電圧等を表わす。式(4.5)の  $h_s$  は式(3.5)で与えられる。式(4.6)~(4.14)の  $K_1 \sim K_9$  は平衡定数である。式(4.1)~(4.18)から上流の状態を指定すれば、反復解法により 18 個の量  $p, T, \rho, v, h, n_s$  が計算される。解法の手順の一例は下記の通りである。

- 1) マッハ数  $M_s$  と上流の状態を与えて、式(4.1)~(4.3)の  $A, B, C$  を計算する。
- 2)  $T$  を仮定する。
- 3)  $\rho$  を仮定する。
- 4) 式(4.1), (4.2) から  $p$  と  $v$  を計算する。
- 5) 式(4.4)~(4.18) から  $n_s, \rho, h$  を計算する。ここで  $h_c = h$  とする。得られた  $\rho$  と仮定した  $\rho$  とが一致しない場合は 4) にもどる。
- 6) 式(4.3) から  $h$  を計算し、 $h \neq h_c$  ならば 2) 以下を繰り返す。 $h = h_c$  であれば計算を終了する。

反射衝撃波後方の状態量については、静止座標系でみた入射衝撃波の速度を  $w_s$ 、反射衝撃波の速度を  $w_r$ 、入射衝撃波後方の粒子速度を  $u_2$  とすると  $u_2 = w_s - v$  で、 $v$  は前節で計算した入射衝撃波を静止させた座標系での衝撃波後方の流速である。また反射衝撃波後方の粒子速度は 0 であるから、反射衝撃波を静止させた座標系において波面の前後で

$$\rho(w_r + u_2) = \rho_r w_r \quad (4.19)$$

$$\rho(w_r + u_2)^2 + p = \rho_r w_r^2 + p_r \quad (4.20)$$

$$h + \frac{1}{2}(w_r + u_2)^2 = h_r + \frac{1}{2}w_r^2 \quad (4.21)$$

が式(4.1)~(4.3)の代りに成立つ。添字  $r$  は反射衝撃波後方の状態量を示す。これらの式を式(4.6)~(4.18)と連立させて  $p_r, T_r, \rho_r, w_r, h_r, (n_s)_r$  を計算する。計算手順は入射衝撃波の場合と同様である。

## 4.2 計算結果

図 1 2 ~ 1 6 に垂直衝撃波後方の流れの温度、圧力、密度、流速、マッハ数の、上流のマッハ数  $M_s$  による変化を、上流圧力  $p_1$  をパラメータとして示す。上流の温度は一定 ( $T_1 = 0^\circ\text{C}$ ) とした。点線は Rankin-Hugoniot 値を示し、これにより完全気体からのずれの程度を知ることができる。

なお図 1 6 のマッハ数  $M$  は

$$M = v/a_{eq}, \quad a_{eq}^2 = \gamma p / \rho \quad (4.22)$$

で定義される。上式の  $\gamma$  は等エントロピー指数で、 $\gamma_s = n_s / \rho$  として

$$\gamma = (C_p / C_v) \{ 1 + (\rho / \sum_s \gamma_s) (\partial \gamma_s / \partial \rho)_T \} \quad (4.23)$$

から計算される<sup>15)</sup>。また  $C_p, C_v$  は式(3.3), (3.4) から計算される。前述のように  $C_p, C_v, \gamma$  の式に現われる微分  $(\partial \gamma_s / \partial T)_\rho, (\partial \gamma_s / \partial \rho)_T$  は著者等の文献<sup>15)</sup> に解析的表示を与えてある。図 1 7 ~ 1 9 にこれを用いて、また式(3.3)の  $T d \ln f_s / dT$  と  $T^2 d^2 \ln f_s / dT^2$  に前章の近似多項式を用いて  $C_p, C_v, \gamma$  を計算した結果を示す。

また図 2 0 ~ 2 4 に壁面で反射した垂直衝撃波後方の静止した気体の温度、圧力、比熱、等エントロピー指数の値を入射マッハ数  $M_s$  の関数として示す。これらの計算は近似多項式(3.6)~(3.8)を

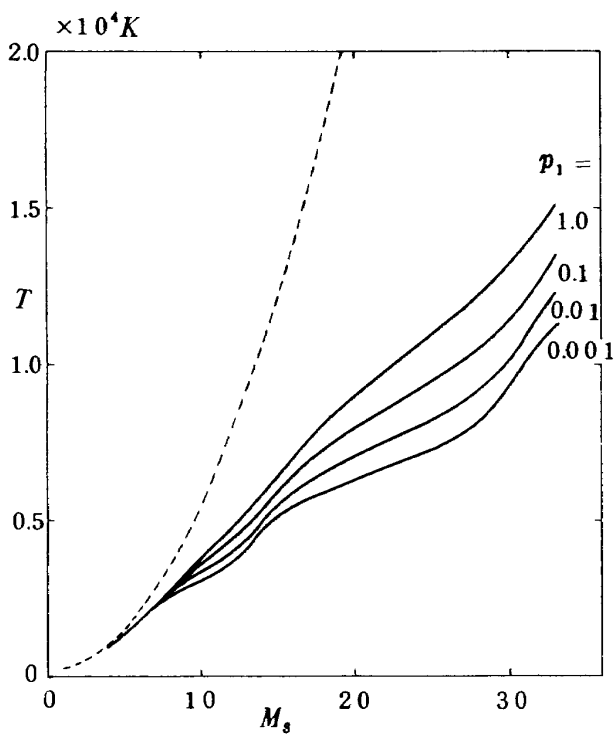


図12. 垂直衝撃波後方の温度のマッハ数による変化。  
点線は Rankine-Hugoniot 値 (以下同じ)。  
 $T_1 = 0^\circ C$  の場合 (以下同じ)

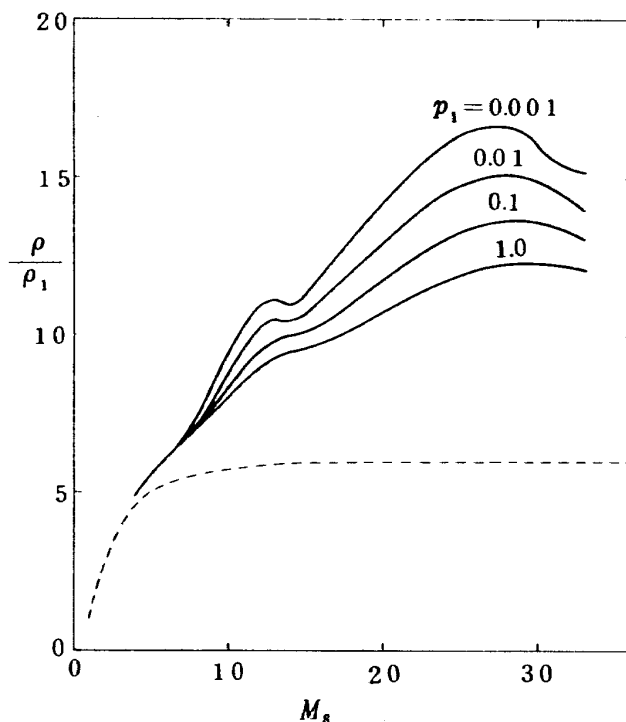


図14. 垂直衝撃波後方の密度のマッハ数による変化。

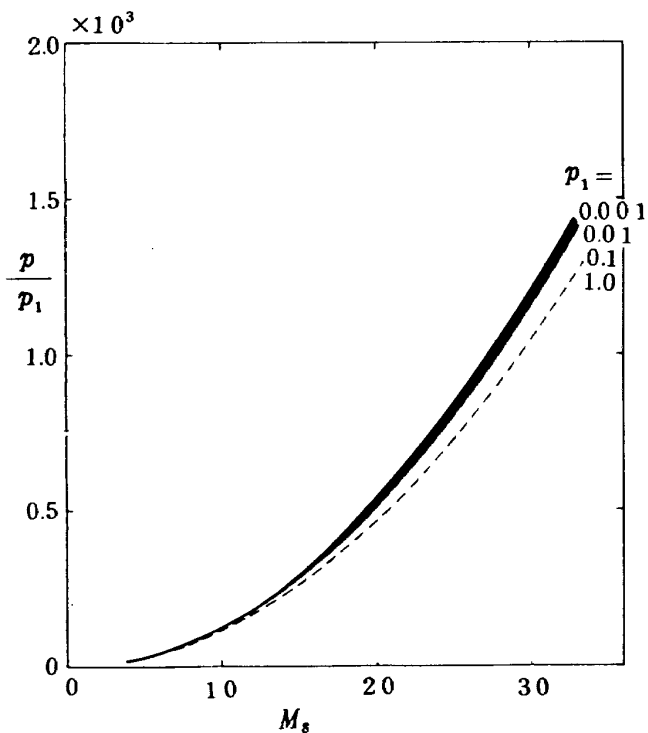


図13. 垂直衝撃波後方の圧力のマッハ数による変化。

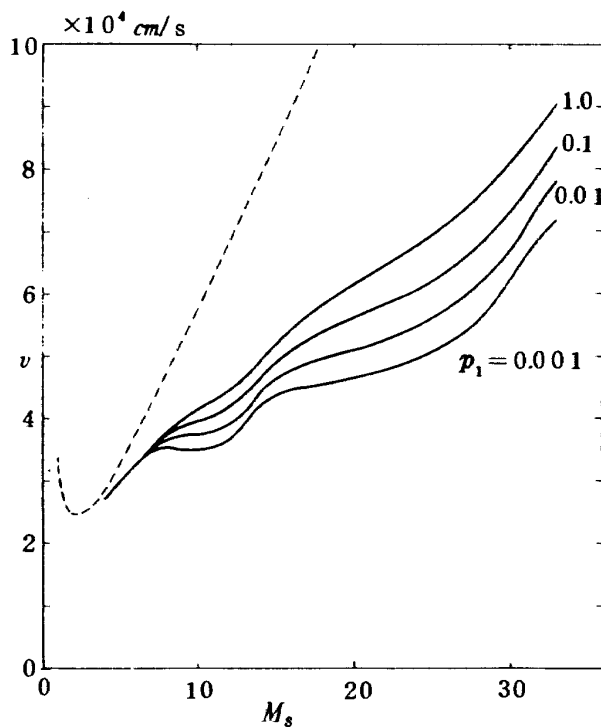


図15. 垂直衝撃波後方の流速のマッハ数による変化。

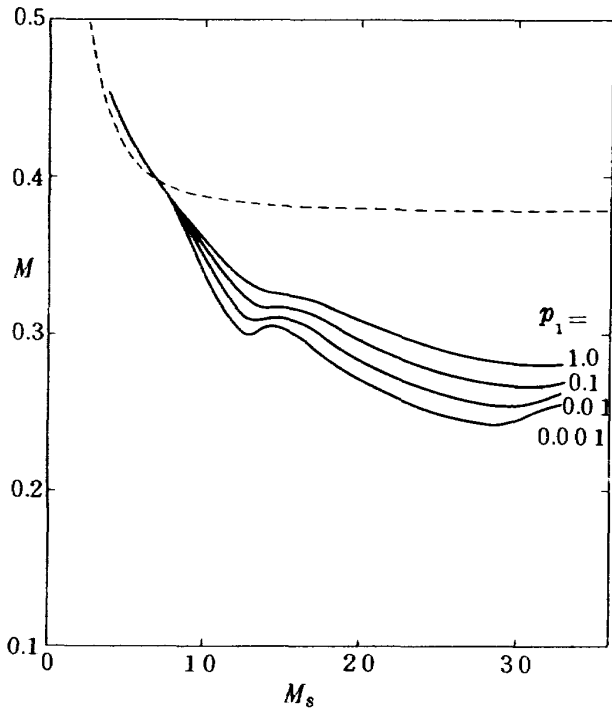


図 16. 垂直衝撃波後方の流れのマッハ数の上流マッハ数による変化。

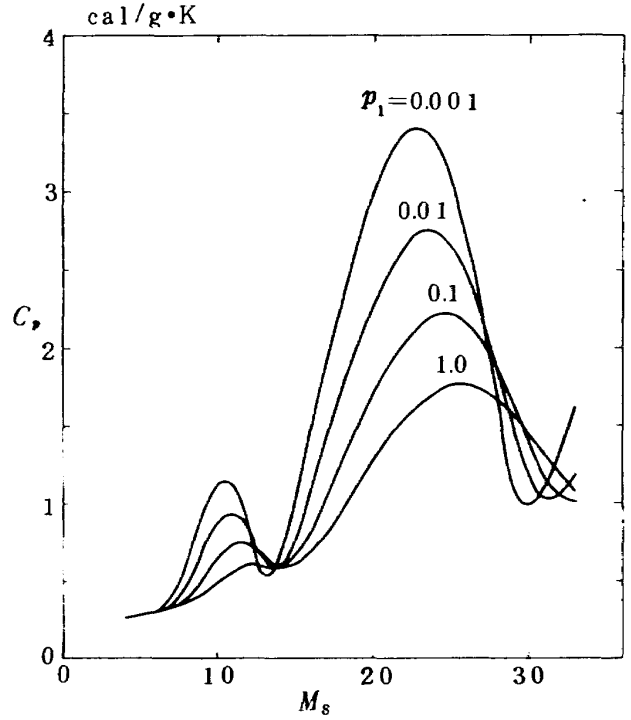


図 18. 垂直衝撃波後方の比熱  $C_p$  のマッハ数による変化。

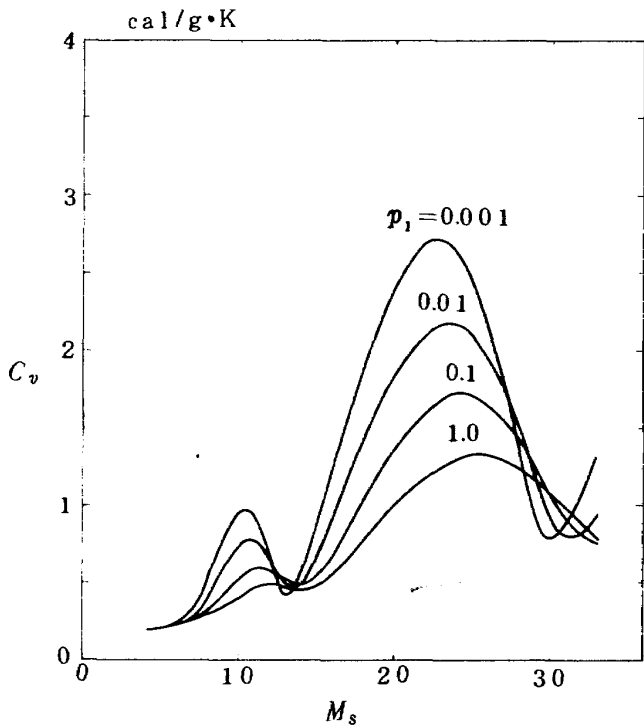


図 17. 垂直衝撃波後方の比熱  $C_v$  のマッハ数による変化。

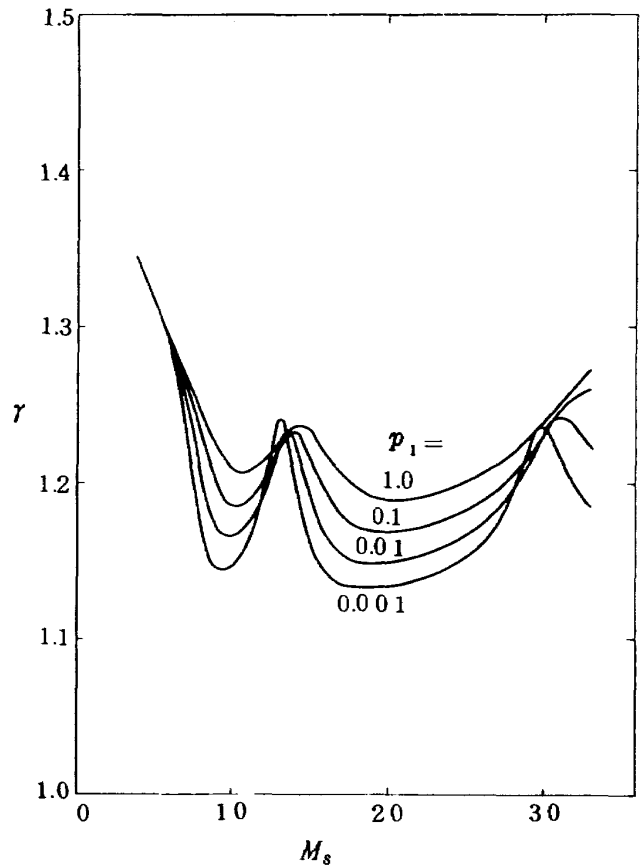


図 19. 垂直衝撃波後方の等エントロピー指数のマッハ数による変化。

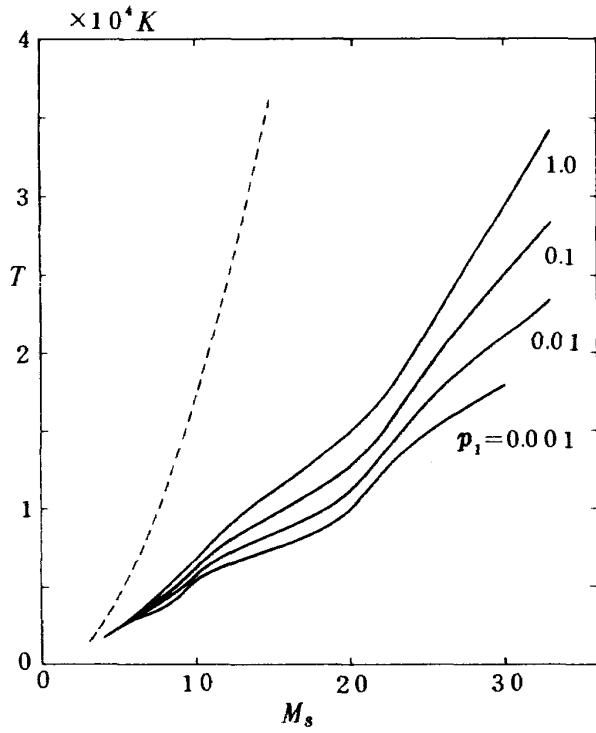


図 20. 反射衝撃波後方の温度のマッハ数による変化。

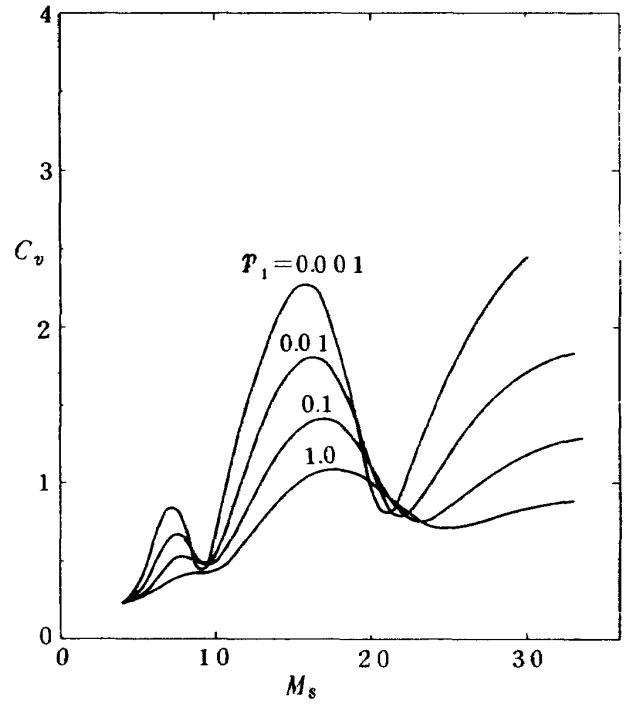


図 22. 反射衝撃波後方の比熱  $C_v$  のマッハ数による変化。

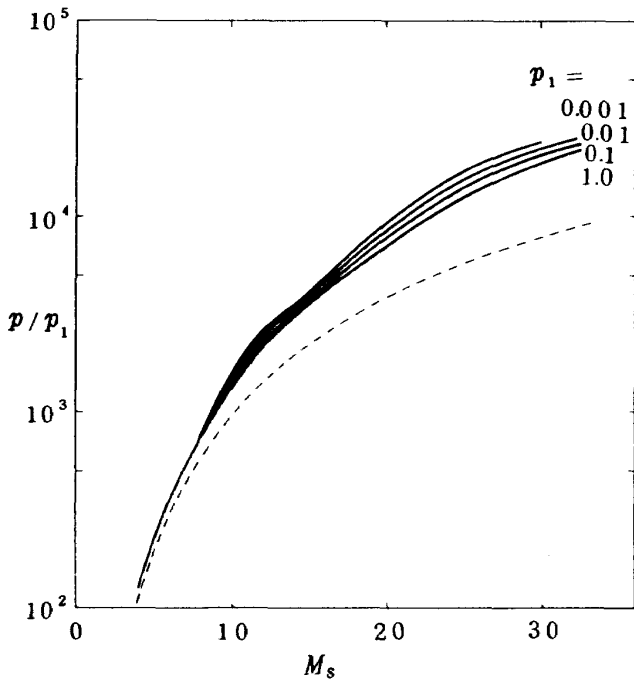


図 21. 反射衝撃波後方の圧力のマッハ数による変化。

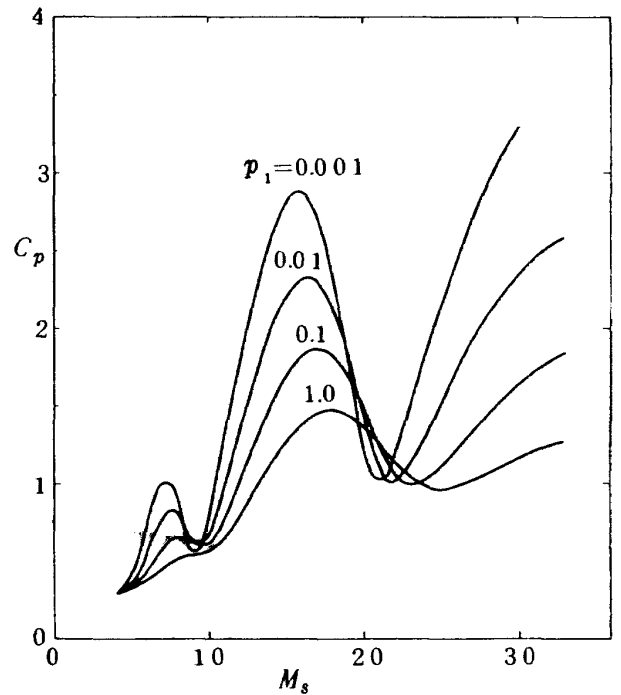


図 23. 反射衝撃波後方の比熱  $C_p$  のマッハ数による変化。

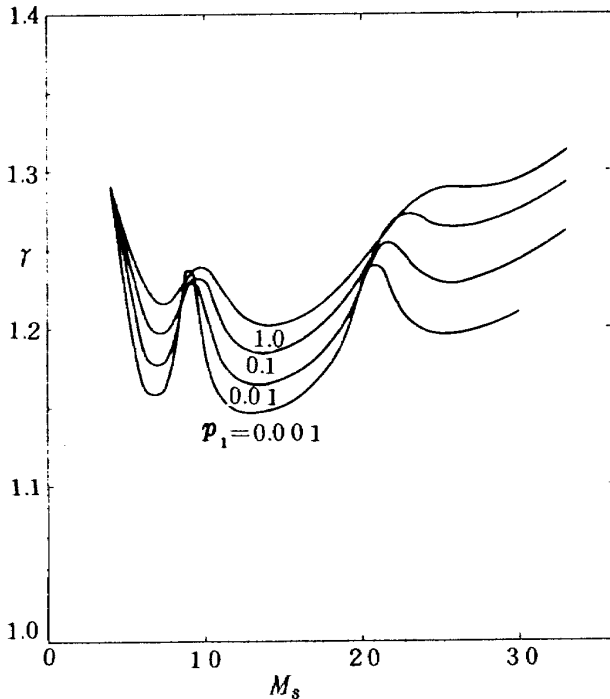


図 24. 反射衝撃波後方の等エントロピー指数のマッハ数による変化。

用いて行なったほか、厳密な分配関数(2.1)～(2.4)とその温度微分を用いても行なった。結果はすべて十分な精度で一致する。近似多項式による分配関数の利点は計算時間の高速化に寄与する点である。例えば、 $T_1 = 0^\circ\text{C}$ 、 $p_1 = 0.01$  気圧の空气中を伝わる  $M_s = 4 \sim 13$  の垂直衝撃波後方の状態量(流速、マッハ数、圧力、密度、温度、粒子数密度、比熱、音速等)を計算する場合の演算処理時間を大型計算機(FACOM 230-60/75)のランタイムで比較すると、厳密な分配関数を用いた場合 619 秒かかるが、近似多項式分配関数を用いると 376 秒に短縮される。しかも両者の結果は流速、マッハ数、温度、圧力等についてはほとんど一致(0.1%以下の差異)し、粒子数密度についても 1～2%以内の差異がみられるだけである。

#### 4.3 高度による変化

高空を極超音速で飛行する際に生ずる垂直衝撃波後方の状態量の高度とマッハ数による変化を計算した。結果は図 25～33 に示す。

図 25～27 はそれぞれ高度 20 km, 40 km, 60 km で発生した垂直衝撃波後方の粒子数密度が

マッハ数  $M_s$  と共に変化する様子を示す。

図 28 は特に電子密度だけを取り出して示したもので、飛行高度とマッハ数による電離の変化の様子を示す。図の左に MHz で示す縦のスケールは、電子密度  $n_e$  を

$$f_{cr} = 8.97 \times 10^3 \cdot n_e^{1/2} \quad (\text{H}_2)$$

により臨界周波数  $f_{cr}$  に換算したものである。但し、 $n_e$  の単位は  $\text{cm}^{-3}$  である。また慣用の通信周波数帯を X, C, S, UHF で示す。

図 29～32 は温度、圧力、密度、流速の変化を、Rankine-Hugoniot 値  $T_2$ ,  $p_2$ ,  $\rho_2$ ,  $v_2$  との比により示す。特に気流温度が Rankine-Hugoniot 値より著しく低下することがわかる。これらの計算は前節の多項式近似分配関数を用いて行なったもので、熱力学状態量について既存の数値表を用いる計算<sup>16)</sup>や、汎用プログラムを用いる計算<sup>17)</sup>と比較して著しく容易で、計算速度も向上する。

## 5. あとがき

高温気体の熱力学状態量の計算に必要な分配関数のうち気体粒子の内部自由度に関する内部分配関数は温度の関数である。本報告では気体力学的な応用上興味のあるいくつかの粒子について、内部分配関数とその微分係数の温度による変化を厳密に計算し、次にこれらを温度の多項式で近似した。厳密な分配関数が多数の分光パラメータを含む複雑な関数であるのに対して、多項式近似された分配関数およびその温度微分は、いずれも僅か 5 項からなるべき級数で、常温から 20,000 °K (アルゴンについては 25,000 °K) の広い温度範囲にわたって十分精度のよい近似式となることを示した。これらを用いることにより熱力学状態量が精度を落とさなく簡単に計算される。

これらの近似多項式分配関数を用いて空気中の強い垂直衝撃波の後方の流れの状態量を計算した。計算は入射衝撃波と反射衝撃波について行ない、マッハ数 4～31 の範囲で流れの状態量の、完全気体の場合からのずれの程度を明らかにした。これらの計算例により厳密な分配関数を用いた場合と同程度の精度の計算結果がより速く得られることを確認した。

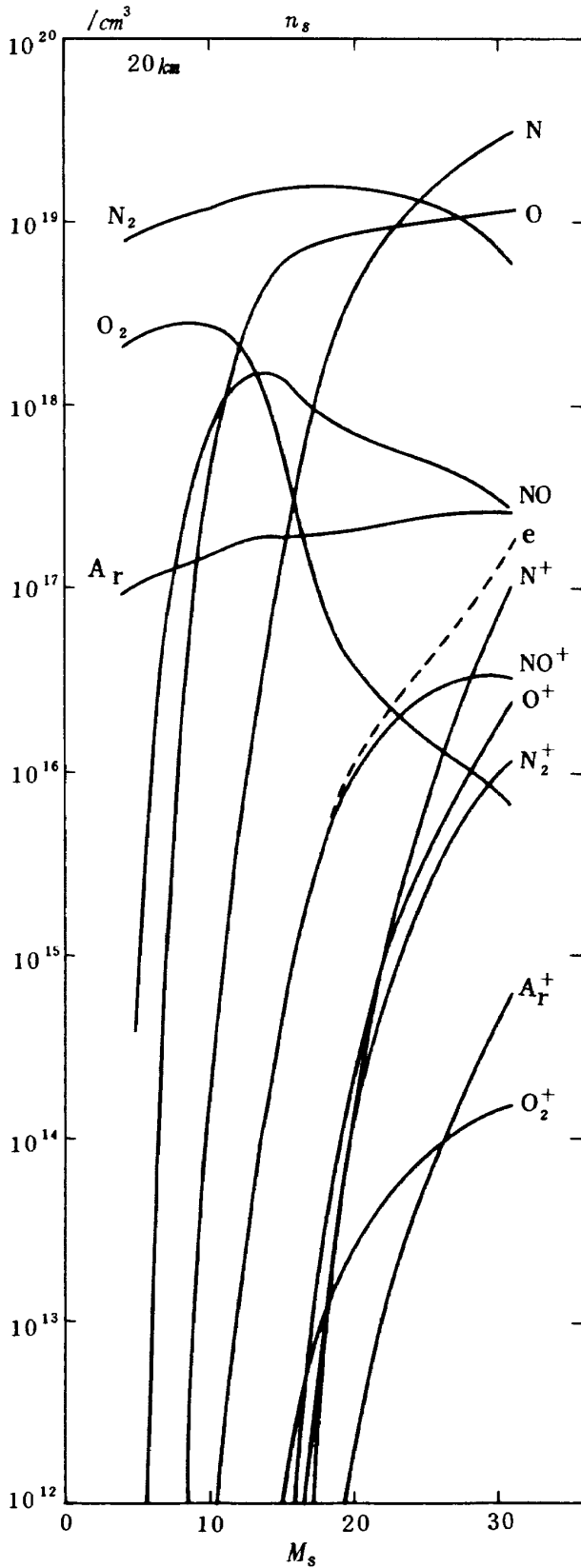


図 25. 高度 20 km で発生した垂直衝撃波後方の粒子数密度のマッハ数による変化。

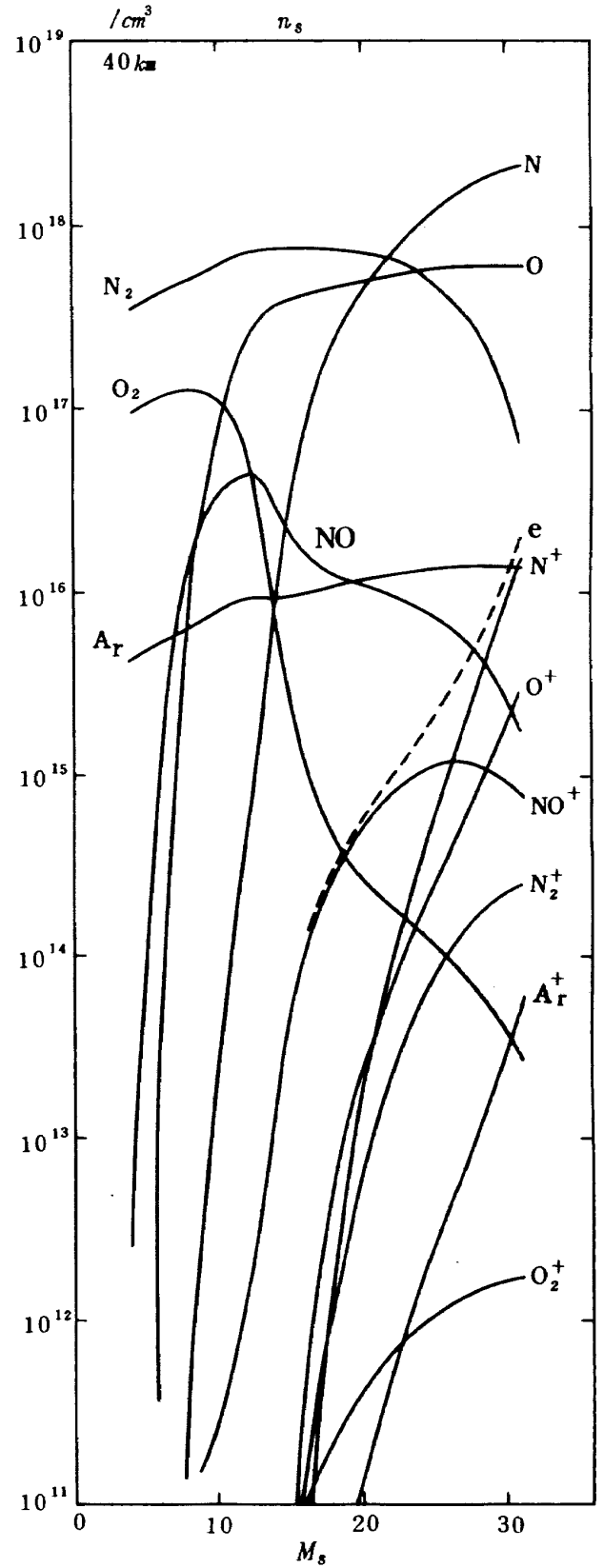


図 26. 高度 40 km で発生した垂直衝撃波後方の粒子数密度のマッハ数による変化。

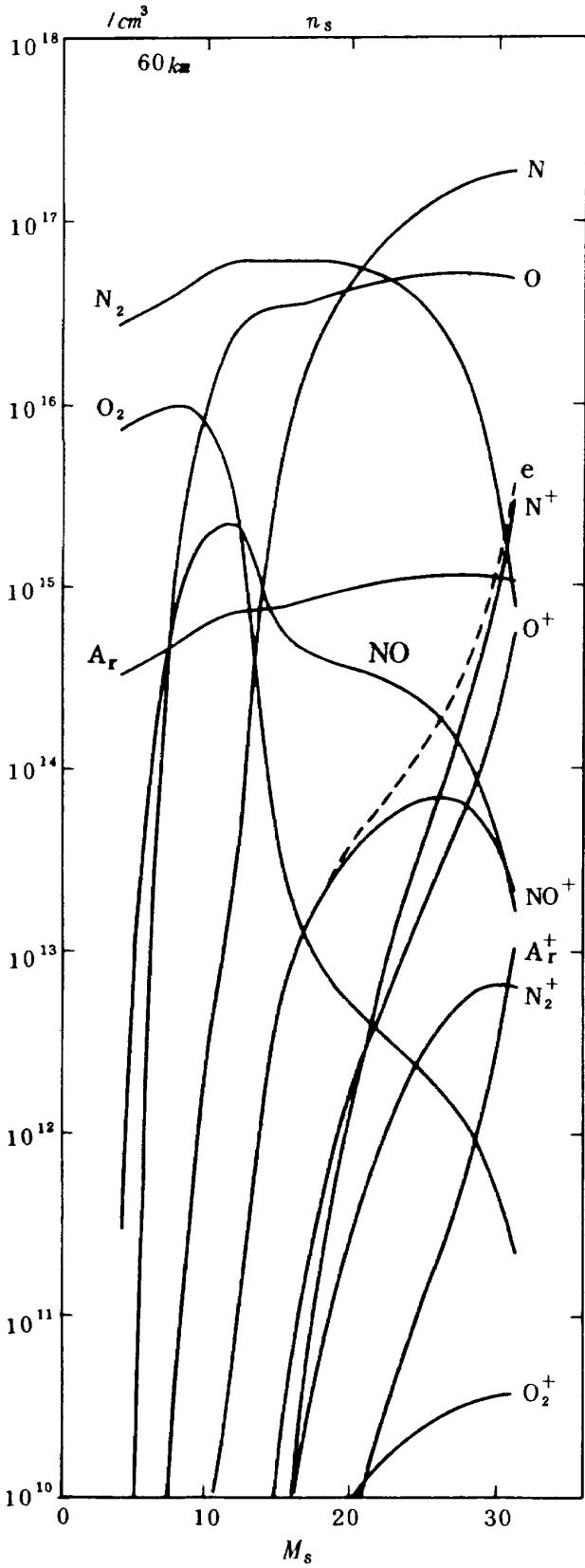


図 27. 高度 60 km で発生した垂直衝撃波後方の粒子数密度のマッハ数による変化。

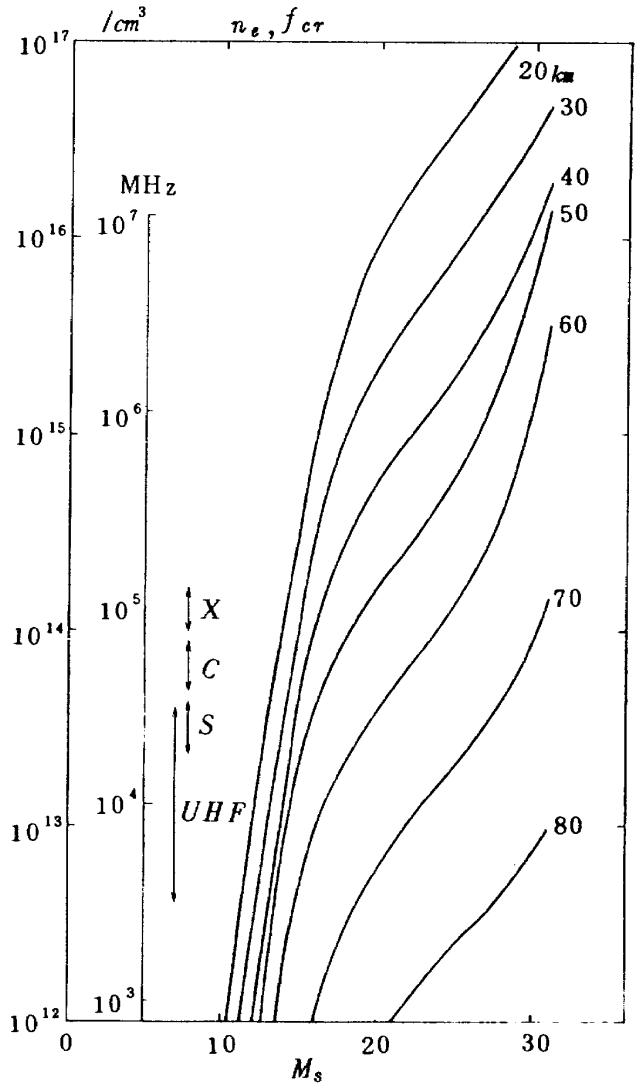


図 28. 垂直衝撃波後方の電子密度の高度、マッハ数による変化

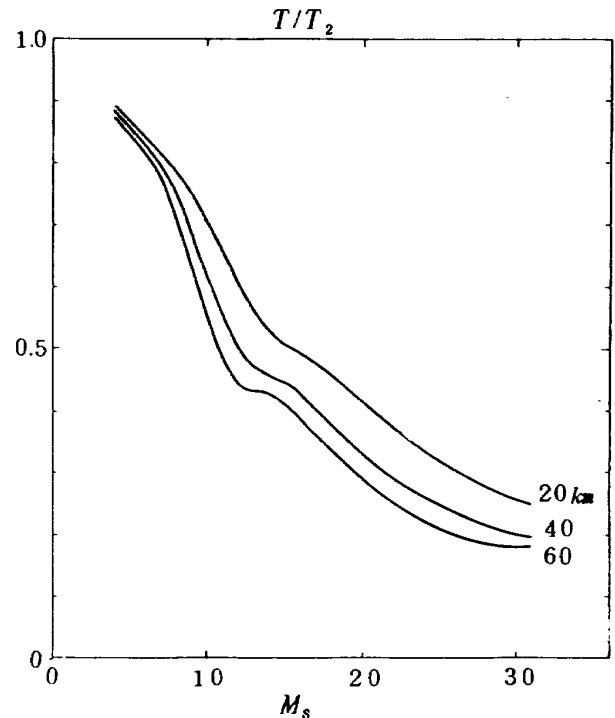


図 29. 垂直衝撃波後方の温度と Rankine-Hugoniot 値  $T_2$  との比の高度、マッハ数による変化。



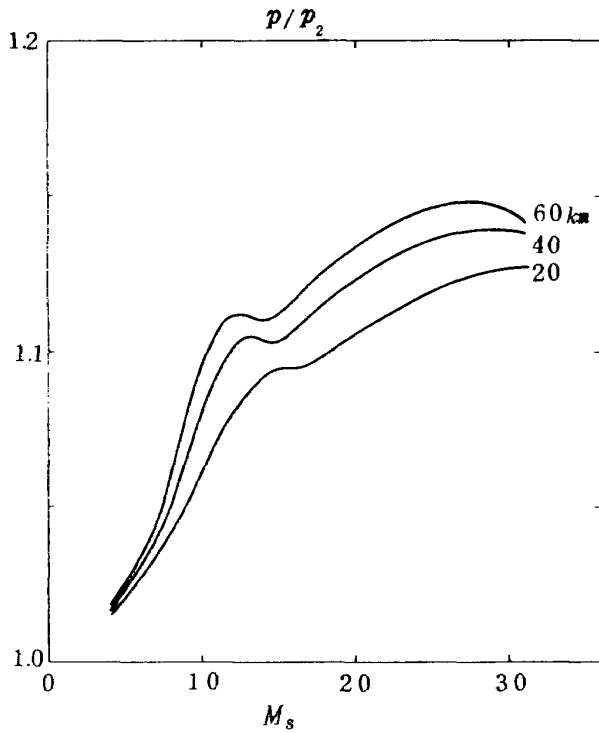


図 30. 垂直衝撃波後方の圧力と Rankine - Hugoniot 値  $p_2$  との比の高度, マッハ数による変化

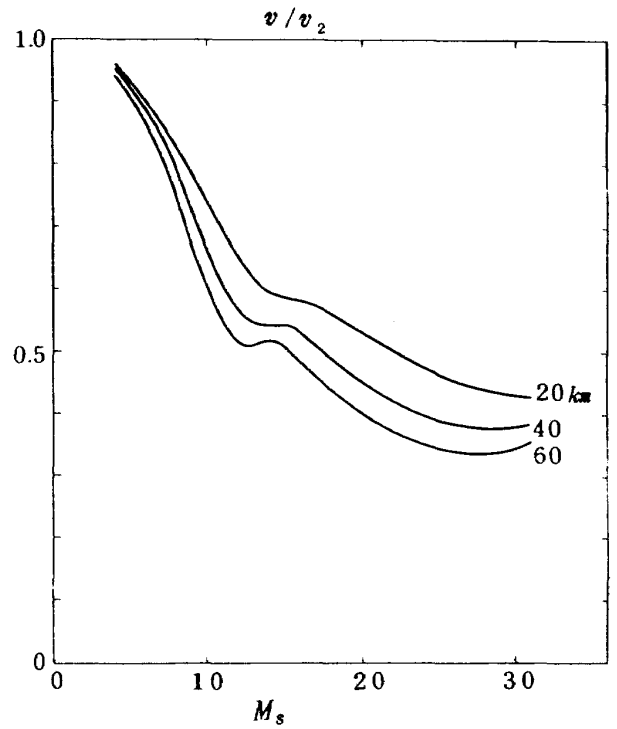


図 32. 垂直衝撃波後方の流速と Rankine - Hugoniot 値  $v_2$  との比の高度, マッハ数による変化。

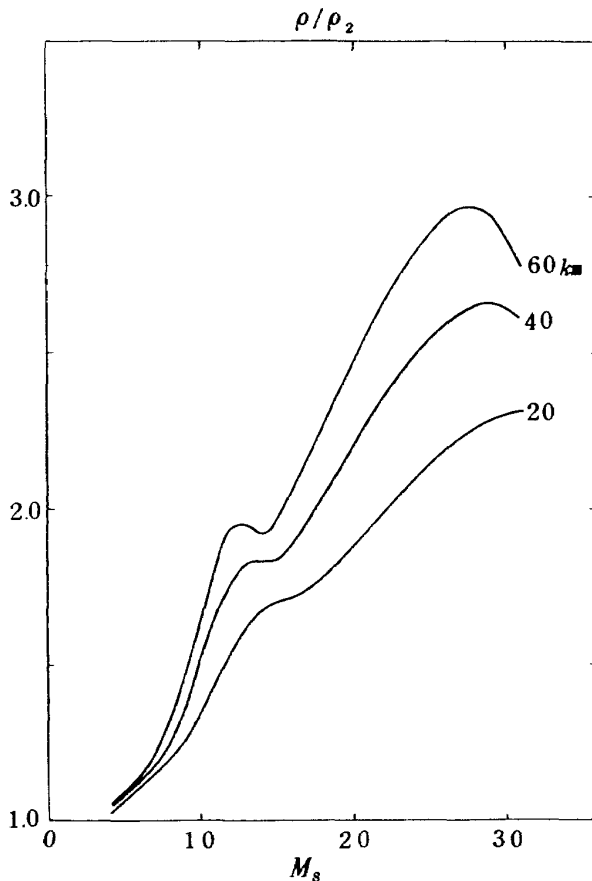


図 31. 垂直衝撃波後方の密度と Rankine - Hugoniot 値  $\rho_2$  との比の高度, マッハ数による変化。

参 考 文 献

- 1) H.S. Brahinsky and C.A. Neel; Tables of Equilibrium Thermodynamic Properties of Argon, Vols. I-IV. AEDC-TR-69-19 (1969)
- 2) C.A. Neel and C.H. Lewis; Interpolations of Imperfect Nitrogen Thermodynamic Data, Vols. I-IV. AEDC-TDR-64-213 (1964)
- 3) H.S. Brahinsky and C.A. Neel; Tables of Equilibrium Thermodynamic Properties of Air, Vols. I-IV. AEDC-TR-69-89 (1969)
- 4) C.E. Moore; Atomic Energy Levels, Vol. 1, NBS Circular 467 (1949)
- 5) J.E. Mayer and M.G. Mayer; Statistical Mechanics, John Wiley and Sons, (1959) p.163.
- 6) G. Herzberg; Spectra of Diatomic Molecules, 2nd ed., D. Van Nostrand, (1950) pp. 501-581.
- 7) F.R. Gilmore; Equilibrium Composition and Thermodynamic Properties of Air to 24,000 K, Rand Corp. (USA) RM-1543 (1955)
- 8) A.R. Hochstim; Approximations to High-

- Temperature Thermodynamics of Air in Closed Form, in Kinetics, Equilibria and Performance of High Temperature Systems, Butterworths, (1960) pp. 39-52.
- 9) P.V. Marrone; Inviscid, Nonequilibrium Flow behind Bow and Normal Shock Waves, Part 1, General Analysis and Numerical Examples, CAL Report No. QM-1626-A-12 (I) (1963)
- 10) J.E. Collin and P. Natalis; Electronic States of the Nitric Oxide Ion, Chem. Phys. Letters, Vol. 2 (1968) pp. 194-196.
- 11) D.R. Stull and H. Prophet; JANAF Tables of Thermochemical Data, 2nd ed., Dow Chemical Co. (1971)
- 12) A. von Engel, 山本賢三, 奥田孝美訳; 電離気体, 第2版, コロナ社 (1968) p.52
- 13) J. Hilsenrath and M. Klein; Tables of Thermodynamic Properties of Air in Chemical Equilibrium Including Second Virial Corrections from 1,500 K to 15,000 K, AEDC-TR-65-58 (1965)
- 14) 電気学会, 放電ハンドブック, 第2版 (1975) pp. 12-13.
- 15) 松崎利一, 平林則明; 高温気体の比熱と等エントロピー指数に対する解析的表示とその応用, 航技研報告 TR-671 (1981)
- 16) P.W. Huber; Hypersonic Shock-Heated Flow Parameter for Velocities to 46,000 Feet per Second and Altitudes to 323,000 Feet, NASA TR-R-163 (1963)
- 17) S. Gordon and B.J. McBriede; Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonations, NASA SP-173 (1971)

---

## 航空宇宙技術研究所資料 434 号

昭和56年 5 月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社実業公報社  
東京都千代田区九段南4-2-12

---

