

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-442

偏心円孔を有する円板の遠心および熱応力  
(有限要素法による計算)

松末勝利・橋本良作

1981 年 8 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 偏心円孔を有する円板の遠心および熱応力\*

## (有限要素法による計算)

松末勝利\*\* 橋本良作\*\*

### 1. ま え が き

航空用エンジンのタービンディスクには、圧縮機に駆動トルクを伝達するためのコーン型シャフトが多数のボルトで結合されており、このボルト穴の位置、大きさ及び個数等は穴縁に生ずる応力、伝達されるトルクの大きさ、圧縮機からディスクにわたる軸系の剛性及び軸系としての振動特性等、多数の機械的特性を考慮して決定されている。

偏心円孔を有するディスクの遠心応力については、すでに前報<sup>1)</sup>において偏心円孔の大きさ、個数及び位置等のパラメタによる円孔縁の応力集中の変化を有限要素法によって計算し、円孔縁の応力集中を最低にするパラメタの組合せを比較的簡単に決定できることを示した。しかし、タービンディスクのように高温中でしかも常時温度勾配が存在する状態で使用されるディスクの場合には、遠心応力のみでなく熱応力も考慮して、ディスク内の偏心円孔に関するパラメタを決定することが必要である。そこで本報では各パラメタと温度分布を変えた場合の円孔縁の応力を有限要素法で計算し、円孔縁の応力集中の変化を調べたので報告する。

### 2. 計算に使用した仮定

有限要素法による弾性応力解析および熱伝導解析については、すでに各方面で開発されており、三角要素を用いて行なう方法の具体的な計算手順については、著者等の報告<sup>2)</sup>あるいは文献(3)などに詳述さ

れているので本報では省略する。

ところで本報では計算に当り以下の仮定を設けた。まず形状に関しては、図1に示すように、1) 円板の内外周は滑らかで等厚(厚さ20mm)である。2) 内外半径 $R_1, R_2$ はそれぞれ一定である。3) 円板内には同一直径の偏心円孔を同一円周上に等間隔に設ける。

熱伝導計算に関しては、4) 円板の厚さ方向の温度勾配は無視する。5) 境界条件として内外周の温度 $T_1, T_2$ を指定し、円板表面では熱伝達率 $\alpha_\infty (= 150 + 50 \times (R - R_1) / (R_2 - R_1) \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C})$ および表面に接する流体の温度 $T_\infty (= 400^\circ\text{C})$ を指定する。

応力計算に関しては、6) 応力は平面応力である。7) 円板外周には回転による翼の遠心力に相当する応力が平均に分布する。ただし、円板の回転速度および翼の遠心力の大きさは当所で試作したFJRエンジンのタービンディスクを参考にして決定した。8) 非定常温度分布の計算には外周から急速加熱を受ける場合を想定して、外周の温度が $T_1$ から $T_2$ へとステップ状に変化するものと仮定した。

以上の仮定のもとに偏心円孔をもつ円板の遠心および熱応力を計算したが、特に円板内の偏心円孔による応力集中を調べることを目的としているので、本報では偏心円孔の直径 $d$ 、個数 $n$ 、偏心量 $R_0$ および内外周間の温度差 $\Delta T (= T_2 - T_1)$ がそれぞれ異なる円板について偏心円孔縁の応力に重点をおいて計算した。

なお、計算に使用した材料定数は以下に示すように密度 $\rho$ 、ポアソン比 $\nu$ および熱伝導率 $\lambda$ 等は温度に関して一定とし、縦弾性係数 $E$ および線膨張係数

\* 昭和56年7月23日受付

\*\* 原動機部

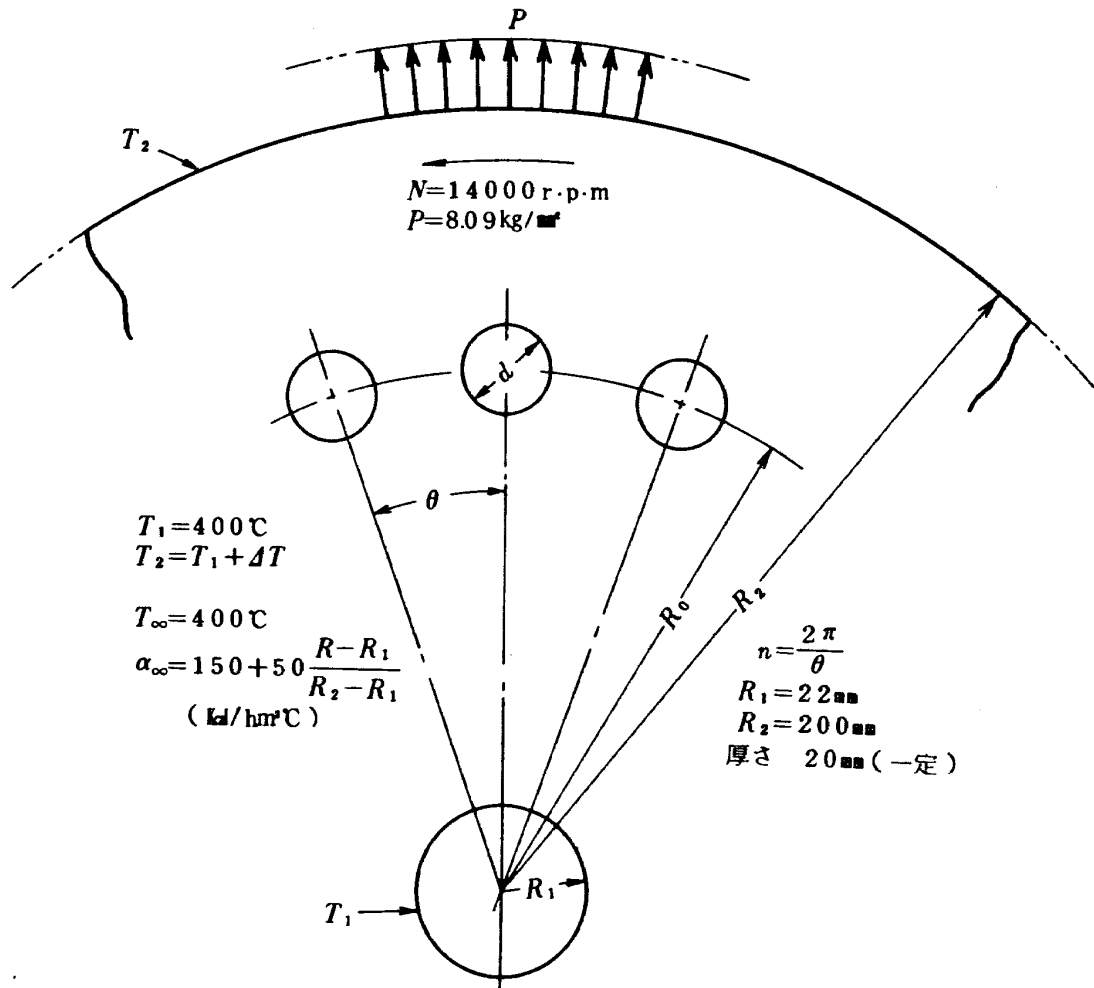


図1 偏心円孔を有する円板

$\alpha$ は温度の1次関数として用いた。

$$\rho = 8.21 \text{ g/cm}^3 \text{ (耐熱合金)}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\lambda = 20 \text{ Kcal/mh}^\circ\text{C}$$

$$E = 22140 - 7.66T \text{ kg/m}^2$$

$$\alpha = (12.99 - 0.00284T) \times 10^{-6}$$

### 3. 計算結果

#### 3.1 円板内の応力分布

偏心円孔のない中空円板について、直径断面上の円周方向応力分布を回転、熱および熱+回転の場合について図2に示す。これは内外周温度差 $\Delta T=200^\circ\text{C}$ の場合である。温度計算には前章で述べたように円板表面で外部流体との熱交換が考慮されている。図から明らかなように回転に熱が加わると外周で応力は負になる。以後偏心円孔をもつ円板の応力について述べるが、偏心円孔による応力集中を表わす場

合、図2の回転のみの応力分布を参考にして、偏心円孔の中心に相当する位置の応力を基準応力として用いることにする。

図3は偏心円孔をもつ円板の円周方向応力の分布である。この図は回転および熱が同時に加わった場合で、内外周温度差 $\Delta T=200^\circ\text{C}$ の場合である。また円孔の偏心量が三種類異なるものを同一グラフに描いた。図から明らかなように、偏心円孔の偏心量 $R_0$ によって円孔縁の応力は変わる。そして外周寄り( $R_0/R_2=0.89$ )の場合には応力集中は小さい。しかしこの図は円板の直径断面上の応力であるが、円孔縁全周に沿って応力を調べると図4~6に示すように、回転のみの場合(図4)に熱応力(図5)が加わると図6に示すように直径線上(A, A'点)の応力よりむしろ隣接円孔に近い位置(B点)の応力が高くなる。回転のみの場合、円孔の偏心量が小さい場合( $R_0/R_2=0.34$ )は最大応力は隣接円孔

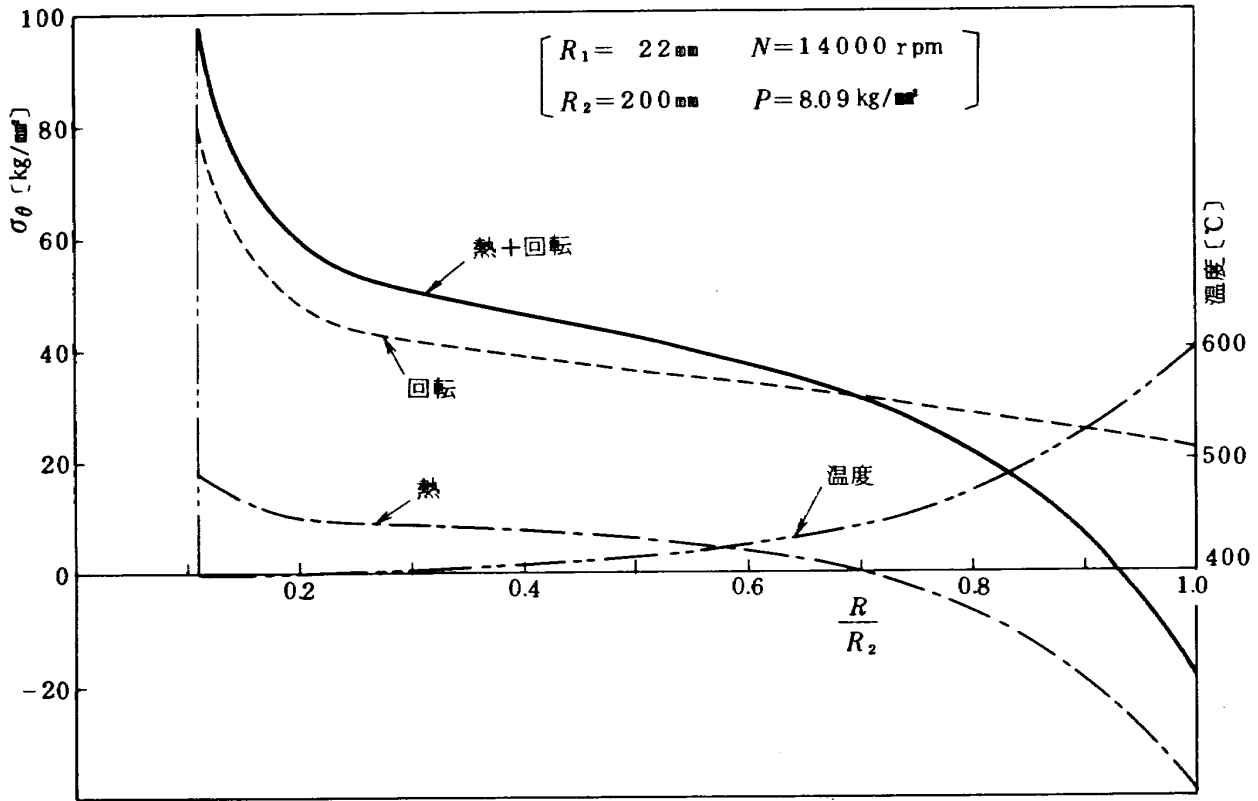


図2 中空円板の応力分布

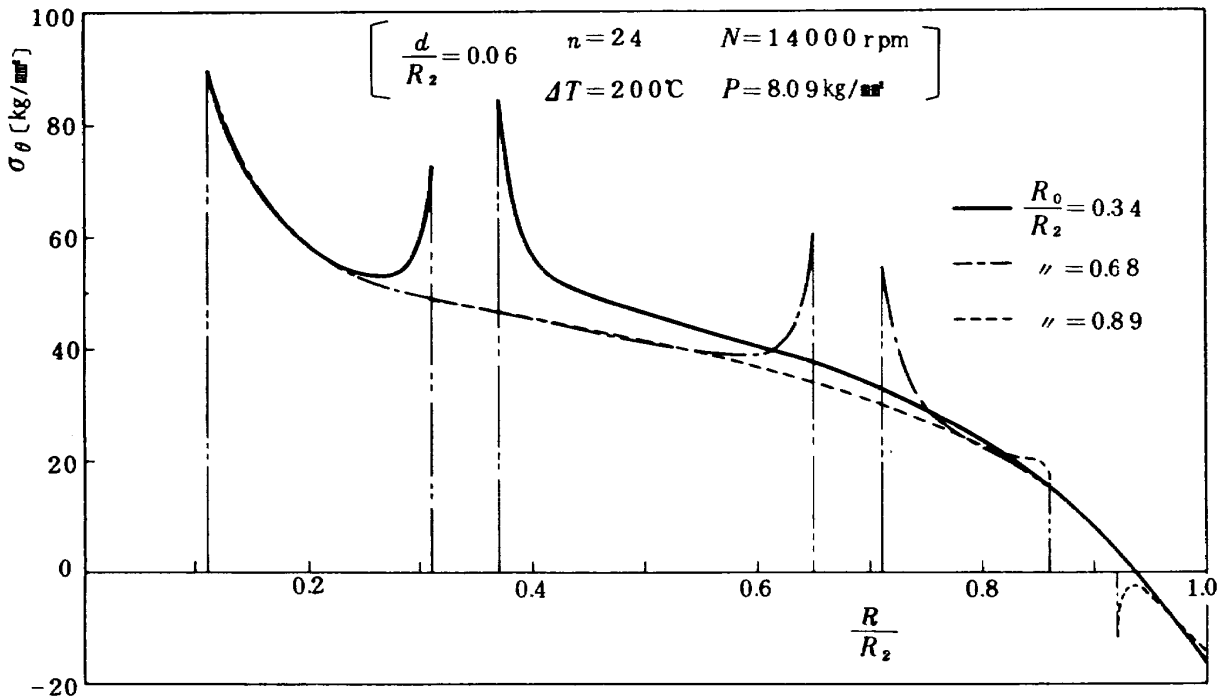


図3 円周方向応力分布

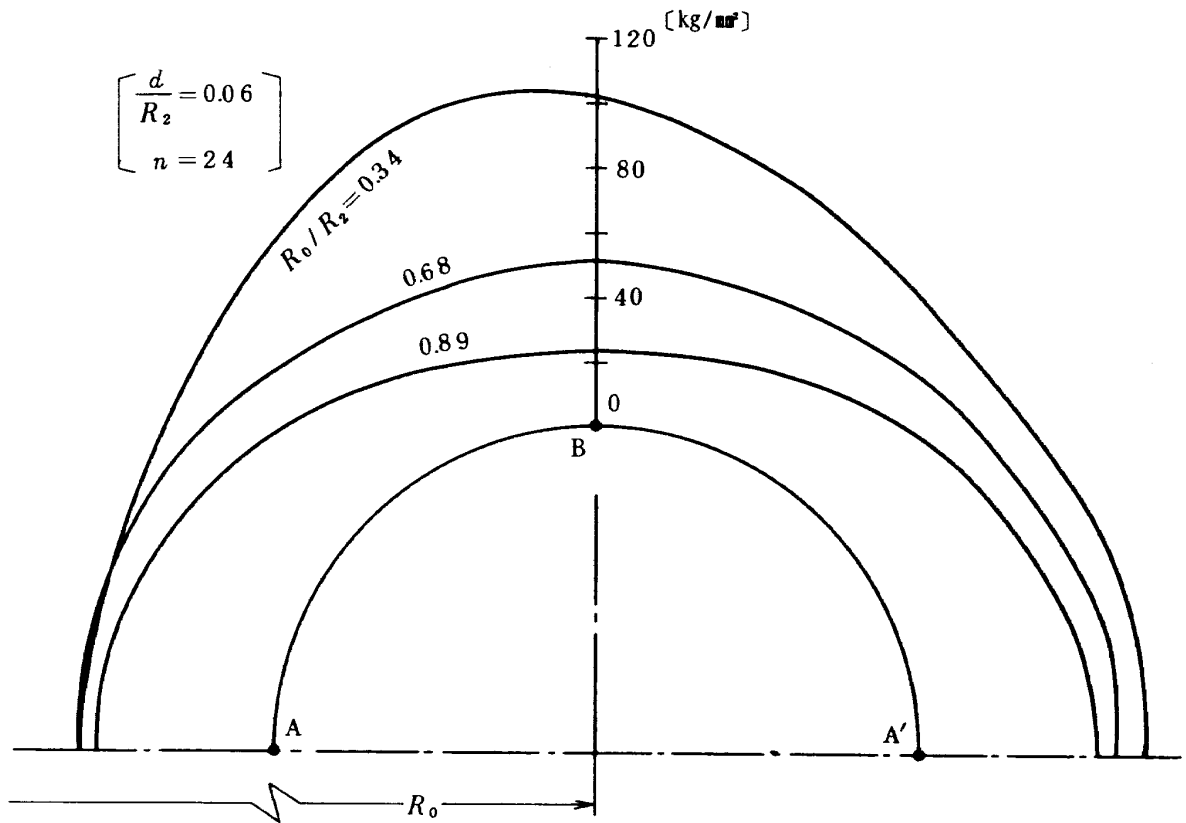


図4 偏心円孔縁の応力分布(回転)

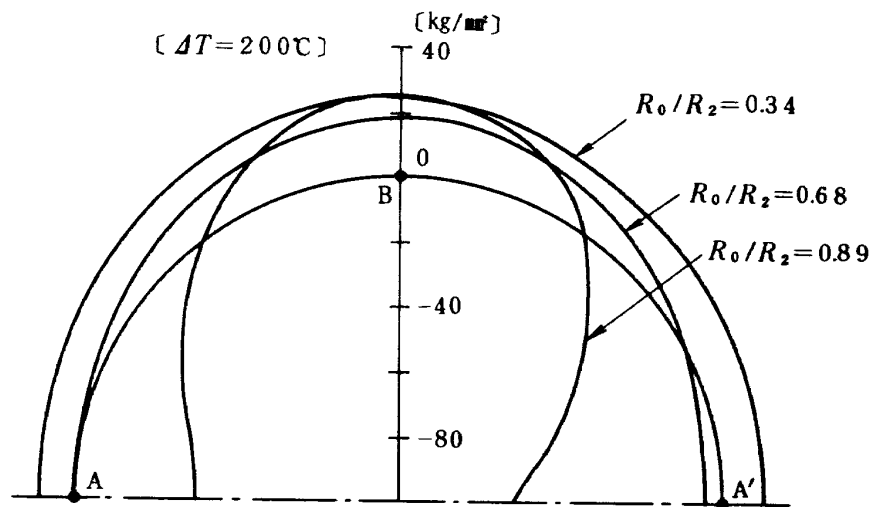


図5 偏心円孔縁の応力分布(熱)

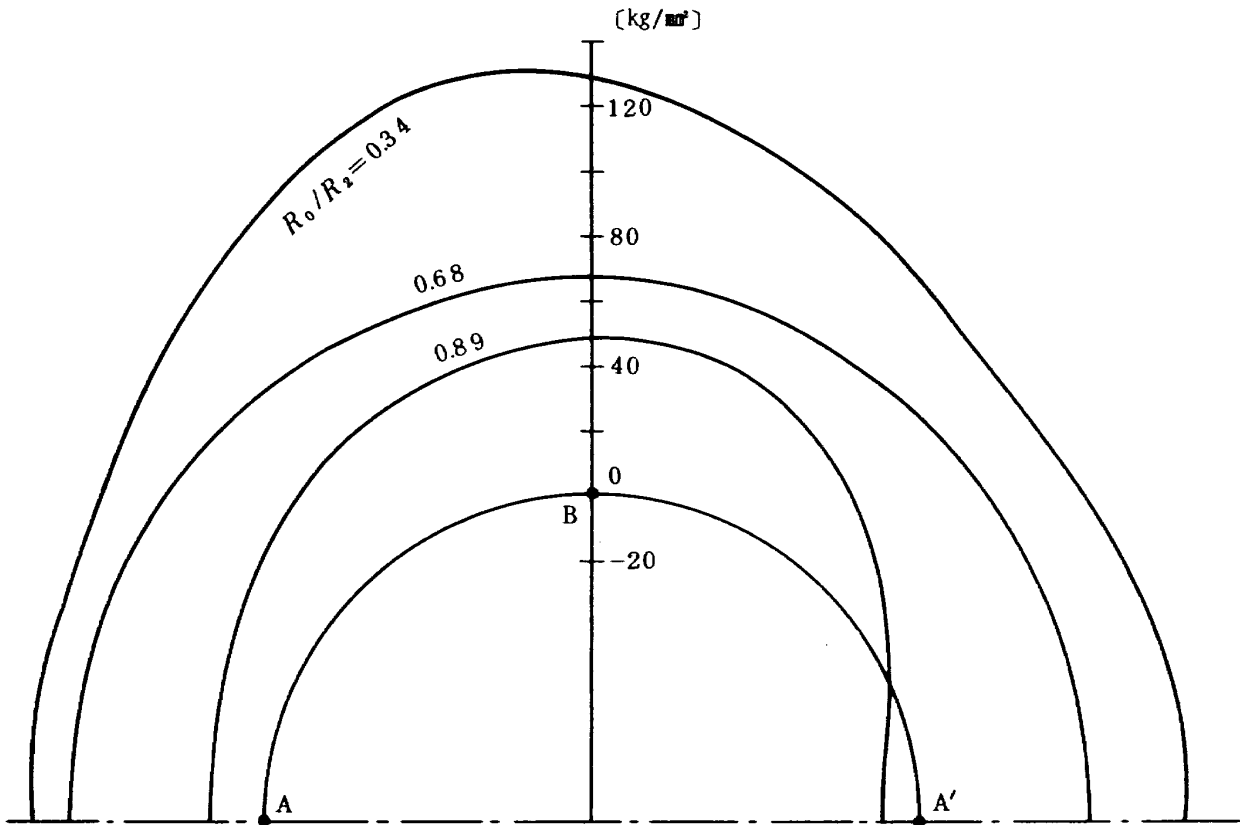


図6 偏心円孔縁の応力分布（熱+回転）

に近い点に生じ、円孔縁に沿って総て引張応力であるが、熱応力のみの場合には円孔の偏心量に無関係に引張り最大応力は隣接円孔に近い点に生ずる。そして円孔の偏心量が大きい場合 ( $R_0/R_2=0.89$ ) には、円板の直径線上 (A, A' 点) では圧縮応力となる。したがって両者の和 (図6) は回転のみに比較してB点の応力は高く、A, A' 点の応力は低くなる傾向となる。

### 3.2 偏心円孔縁の応力集中

偏心円孔縁の応力を無次元化するために、偏心円孔の無い円板の回転のみによる偏心円孔の中心に相当する位置の円周方向応力を基準応力により、円孔縁の最大応力をその基準応力との比で表わすことにする。この表示法による応力比は一種の応力集中係数と見なせる。そこで本節ではこの応力集中係数に影響をおよぼすパラメータとして、円孔の偏心量  $R_0$ 、直径  $d$ 、個数  $n$  および円板の内外周温度差  $\Delta T$  等を選びこれらと応力集中との関係を調べた。

#### 3.2.1 円孔の偏心量による影響

偏心円孔の個数  $n$  および直径  $d$  が一定であっても円孔の偏心量  $R_0$  が異なれば円孔縁に生ずる応力は大きく変わることは、前述の図3より明らかである。本項では円孔縁の最大応力を応力集中係数として表わし、これと偏心量との関係を調べた。

図7に円孔数  $n=24$ 、直径  $d/R_2=0.06$  の場合について、円孔の偏心量による応力集中の変化を示す。内外周温度差  $\Delta T=200, 100, 0^\circ\text{C}$  の場合である。 $\Delta T=0^\circ\text{C}$  は回転のみに相当する。定常状態における応力集中は偏心量が小さい場合はほぼ  $\Delta T$  に比例しているが、偏心量が大きくなると比例関係は成立しなくなりむしろ回転のみの場合 (点線) より熱応力が付加された場合の方が低下する。すなわちこの場合、熱応力は円孔縁の強度を向上させる作用をする。しかし非定常熱応力を考慮すると一点鎖線のように回転のみの場合より大きくなる。図8は円孔数  $n=12$ 、直径  $d/R_2=0.17$  の場合について同様に図示したものである。この場合

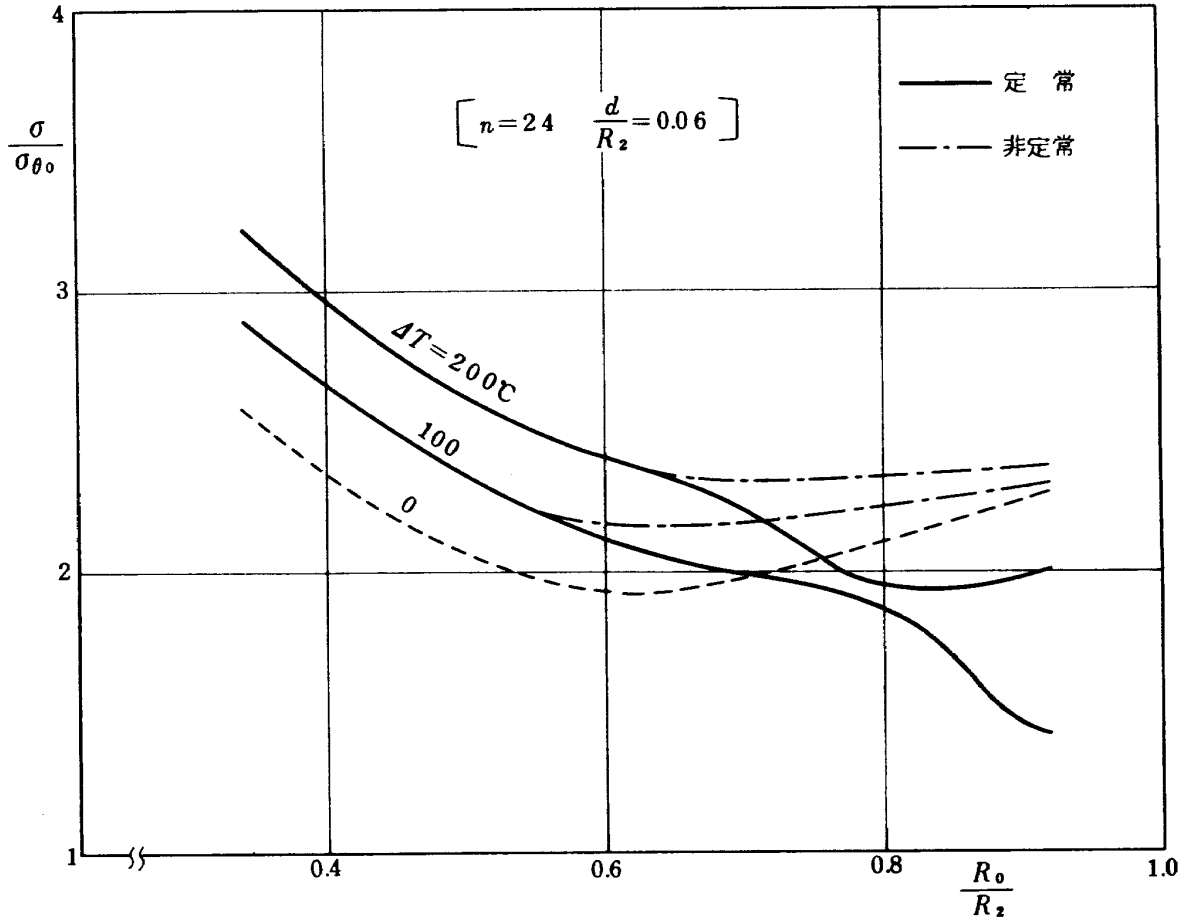


図7 偏心円孔縁の応力集中と偏心率との関係

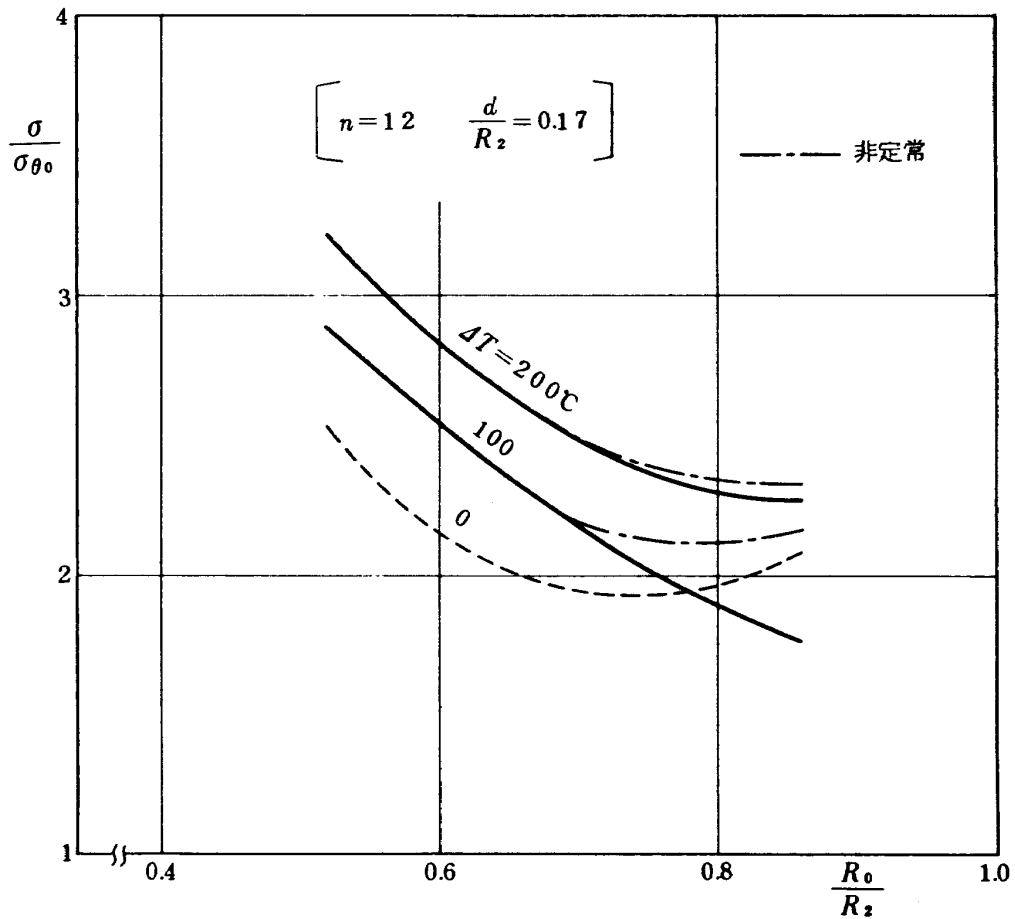


図8 偏心円孔縁の応力集中と偏心率との関係

にも  $R_0/R_2$  が大きくなると定常応力は回転のみの場合より低くなる。

### 3.2.2 内外周温度差の影響

前項で述べたように偏心円孔の偏心量  $R_0$  が大きくなると、内外周温度差  $\Delta T$  と応力集中との関係が一様ではなく相互関係が複雑となる。したがって本項では  $R_0$  が大きい場合について円孔縁の応力分布と  $\Delta T$  との関係調べた。

偏心量が大きい場合の例として  $R_0/R_2=0.89$  を選び、 $d/R_2=0.06$ 、 $n=24$  の場合について円孔縁の定常応力分布を図9に示す。回転のみの場合 ( $\Delta T=0$ ) はA点の応力が最大であるが、 $\Delta T$  の増加とともに熱応力のためにA、A'点の応力が減少するのに対して、B点の応力は増加し  $\Delta T=250^\circ\text{C}$  ではB点の応力が最大となる。

以上の応力変化を明確にするため、円孔の偏心量が大きい場合について、A、B点の応力  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  と  $\Delta T$  との関係を図示すると図10のようになる。 $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  とも  $\Delta T$  に比例している。この図には  $R_0/R_2=0.79$  の場合を一点鎖線で示し、偏心円孔の直径および個数が異なる場合の例として、 $d/R_2=0.17$ 、

$R_0/R_2=0.85$ 、 $n=12$  の場合を点線で示した。図に示すように  $\Delta T$  の変化とともに  $\sigma_A$  と  $\sigma_B$  の変化は傾向が逆になる。ここで円孔縁の最大応力を調べる観点から  $\Delta T$  による影響を考察すると、円孔縁の応力集中は  $\Delta T$  の変化に対して極値をもつことがわかる。そしてこの極値をとる  $\Delta T$  の値は偏心円孔に関するパラメタ（円孔の直径、個数、偏心量など）によって変化する。図10に関して云えば、応力集中が最低となる  $\Delta T$  の値は実線および点線では  $100^\circ\text{C}$ 、一点鎖線の場合は  $150^\circ\text{C}$  である。

### 3.2.3 偏心円孔縁の非定常応力

本項では2章で仮定したように一様な温度 ( $400^\circ\text{C}$ ) の流体中を一定速度 ( $14,000\text{ rpm}$ ) で回転している円板の外周が急激に  $\Delta T$  だけ上昇したと仮定した場合の非定常応力について述べる。したがって本項で述べる非定常応力とは、定常遠心応力と非定常熱応力との和のことである。

3.2.1で述べたように非定常応力が問題となるのは偏心円孔の偏心量が大きい場合である（図7、図8参照）。したがって主として偏心量が大きい場合を重点的に調べることにした。

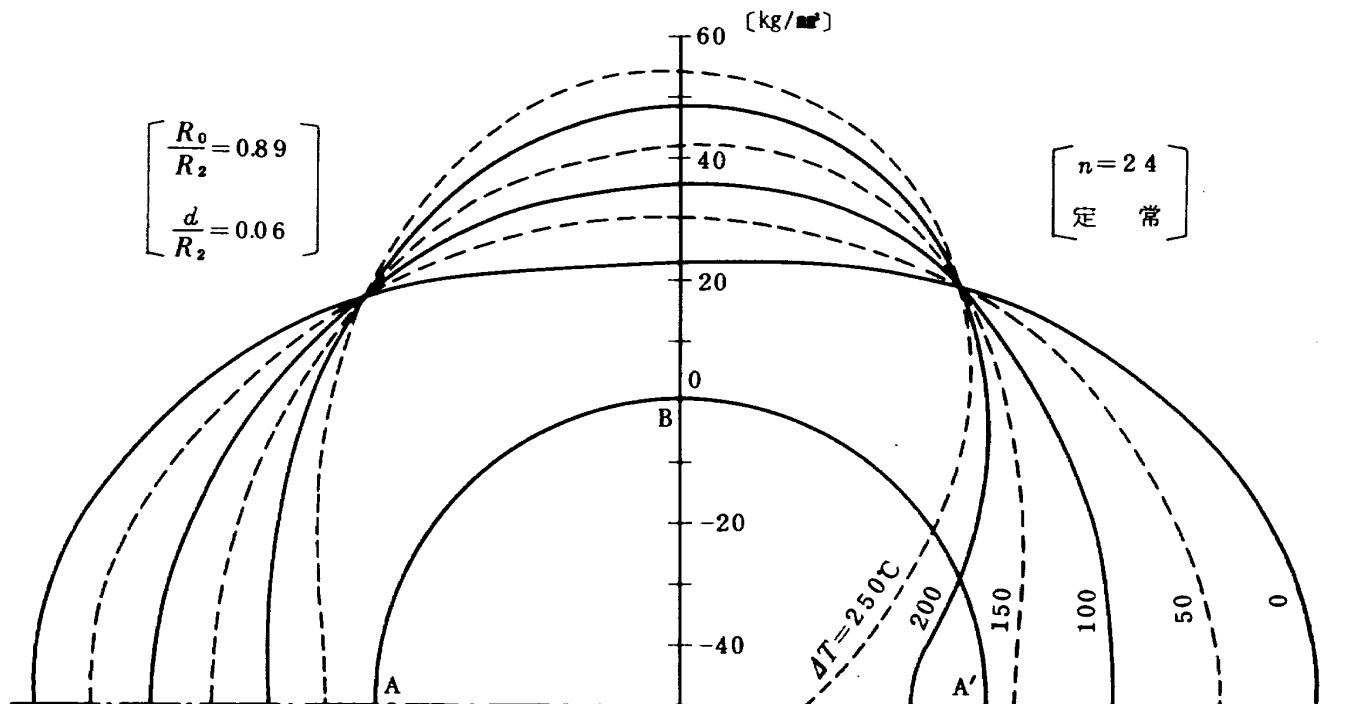


図9 偏心円孔縁の応力分布



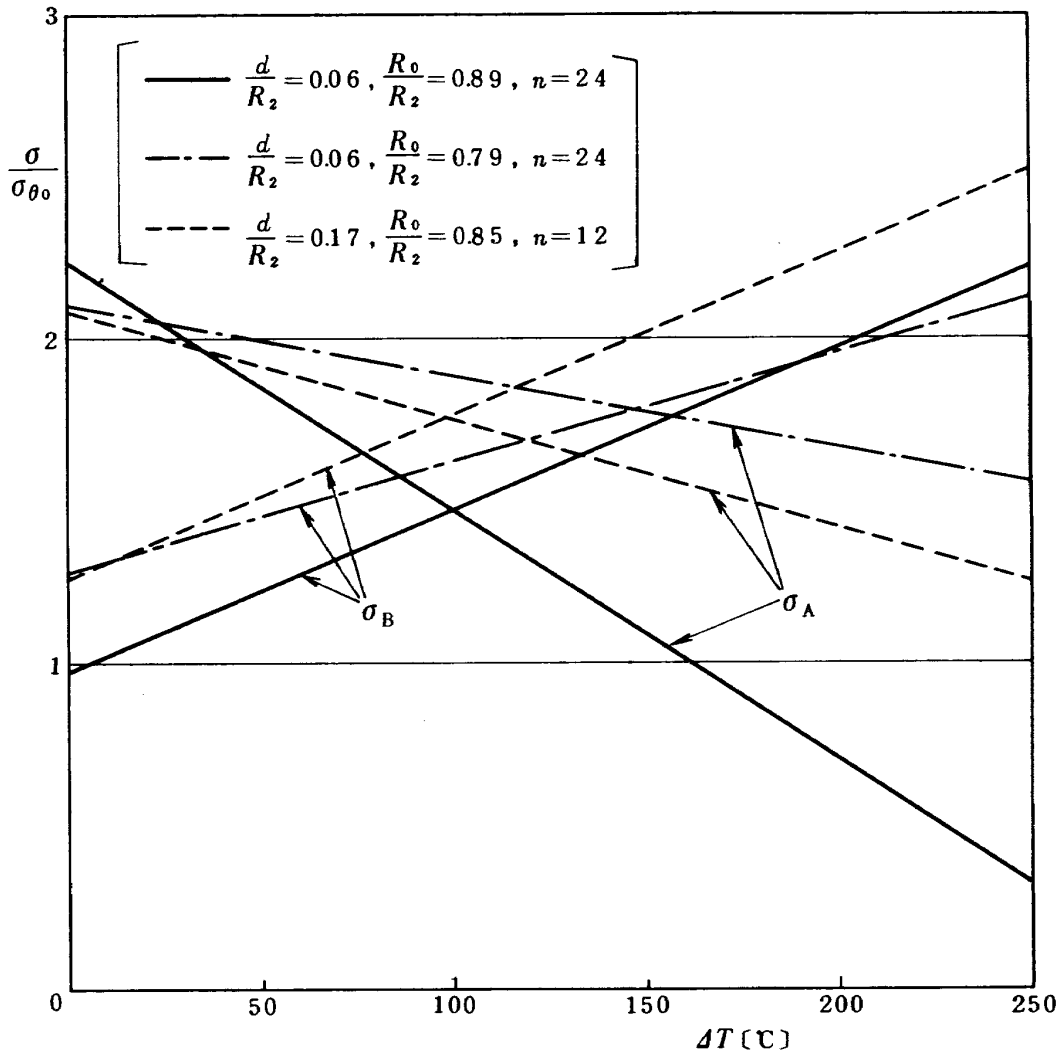


図10 偏心円孔縁の応力集中と内外周温度差との関係

図11に  $R_0/R_2=0.89$ ,  $d/R_2=0.06$ ,  $n=24$ ,  $\Delta T=200^\circ\text{C}$  の場合の偏心円孔縁の非定常応力分布を示す。図中  $t$  は急速加熱後の経過時間を示し,  $t=0$  は回転のみの場合,  $t=\infty$  は定常の場合の応力分布である。

偏心円孔縁のA, B点の非定常応力は時間とともに図12に示すように変化する。円孔の偏心量が大きい場合(実線), A点の応力は加熱1秒以内にピークに達し, その後時間の経過とともに減少するが, B点では加熱後約6秒後に最大応力を示す。そして両応力の大小関係は加熱1~2秒後に逆転する。ところが点線で示すように偏心量が小さい場合には, 両応力の大小関係は同一のまま増加し, 定常状態に達したときのB点の応力が最大応力となる。一点鎖線は偏心量が両者の中間の場合である。

### 3.2.4 偏心円孔の直径の影響

偏心円孔の個数  $n$  および偏心量  $R_0$  をそれぞれ一定として円孔の直径を変えた場合, 円孔縁の応力集中は図13に示すように変化する。これは遠心および熱応力が同時に作用した場合の定常応力を示したものである。偏心量  $R_0/R_2=0.68$  のときの円孔数  $n=12$  および  $24$  の場合について図示した。両者とも円孔直径  $d$  が小さくなると内外周温度差すなわち熱応力の影響が少なくなる。そして円孔縁の応力集中は直径の変化に対して極値をとる。ただし  $n=12$  の点線はこの図の範囲では単調に減少しているが, もっと  $d$  が大きくなると隣接円孔縁間の距離が接近して来るので応力集中の増大が予想される。また, 図から明らかのように  $\Delta T$  が大きくなるにしたがって, 応力集中が最低となる位置が左側に寄る。つまり小さい  $d$  で極値をとる。

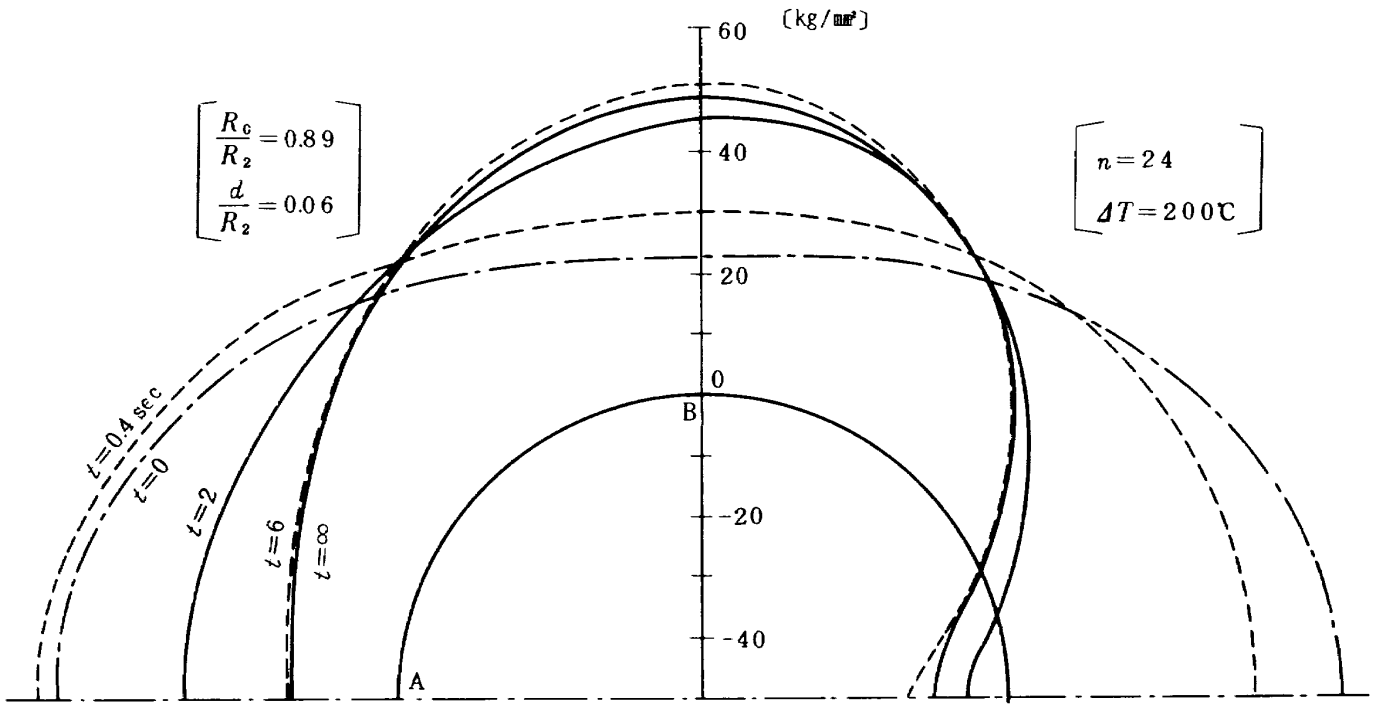


図 1 1 偏心円孔縁の非定常応力分布

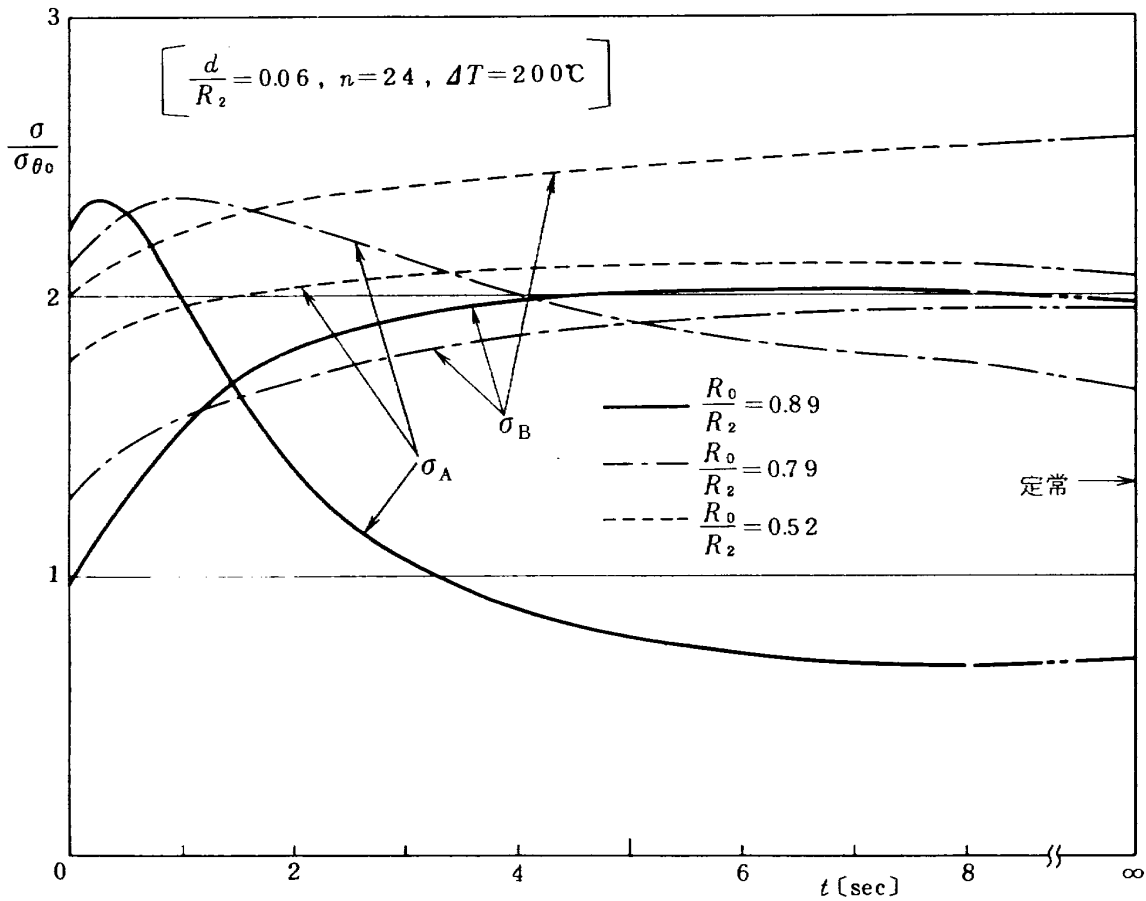


図 1 2 偏心円孔縁の非定常応力変化

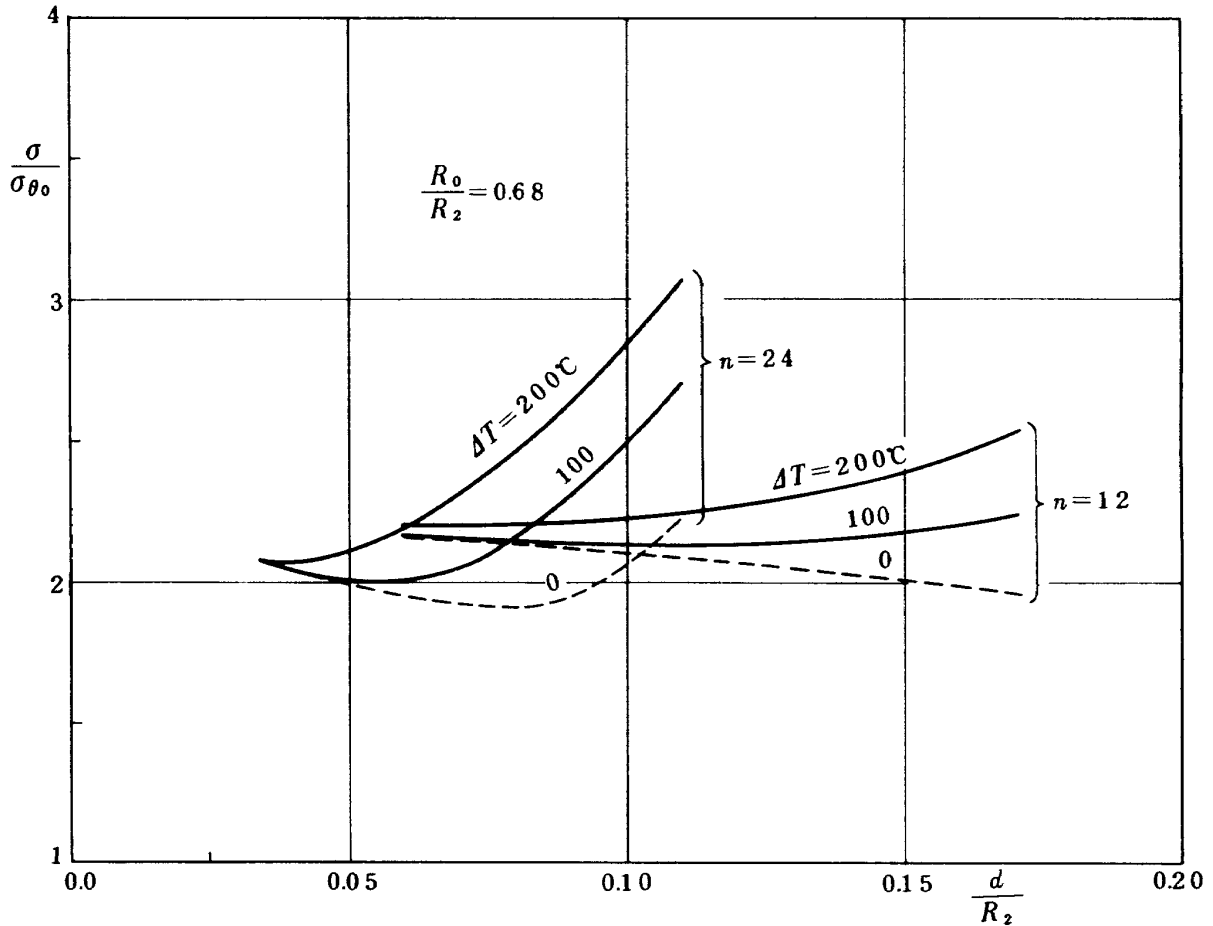


図 1 3 偏心円孔縁の応力集中と円孔直径との関係

以上の結果から定性的結論として次のように述べることができる。すなわち、外周から加熱を受ける円板の偏心円孔縁の応力集中を軽減するには、内外周温度差に見合った大きさの円孔を設けることが必要であり、また、温度差の影響を少なくするには小さい円孔の方が有利である。

### 3.2.5 偏心円孔の個数の影響

円孔の偏心量  $R_0$ 、直径  $d$  を一定として円孔数  $n$  が変化した場合の円孔縁の応力集中は図 1 4 のようになる。図には円孔の直径が二種異なる場合 ( $d/R_2 = 0.17$  および  $0.06$ ) を図示した。前項と同様に適当な  $n$  に対して応力集中は最低となり、極値をとる  $n$  は内外周温度差  $\Delta T$  の増加とともに小さくなる。また  $n$  が小さくなると  $\Delta T$  の影響が小さい。

以上の現象は前述の円孔の偏心量および直径などとも関連があるが、とにかく偏心円孔の個数が少なくなることは、隣接円孔縁間の距離が長くなって回転のみの場合の最大応力は円板の直径線上(図 1 1

の A 点)に生ずるのに対して、熱応力の方は同位置で最低になるか、あるいは  $\Delta T$  が大きくなると逆に圧縮応力が生ずることもあるので、速心および熱応力が同時に作用した場合の円孔縁の最大応力が直径線上に生ずるような場合には、 $\Delta T$  の影響は少なくなる。一方逆に円孔数が多く回転による最大応力が隣接円孔に近い位置に生ずる場合には、これに熱応力が作用するとその位置の応力は内外周温度差  $\Delta T$  にほぼ比例して増大する。

### 3.3 偏心円孔縁の最大応力

前節では偏心円孔縁の最大応力を応力集中係数として無次元化して表わし、偏心円孔に関する各パラメタの相違による応力集中の変化を調べて来た。このように円孔縁の応力を応力集中係数で表示する方法は円板の寸法あるいは回転速度が異なる場合にも適用できるのである程度一般性はある。しかしこの表示法は円孔の偏心量が一定の場合には基準応力が等しいので応力集中と応力の値は比例していて都合

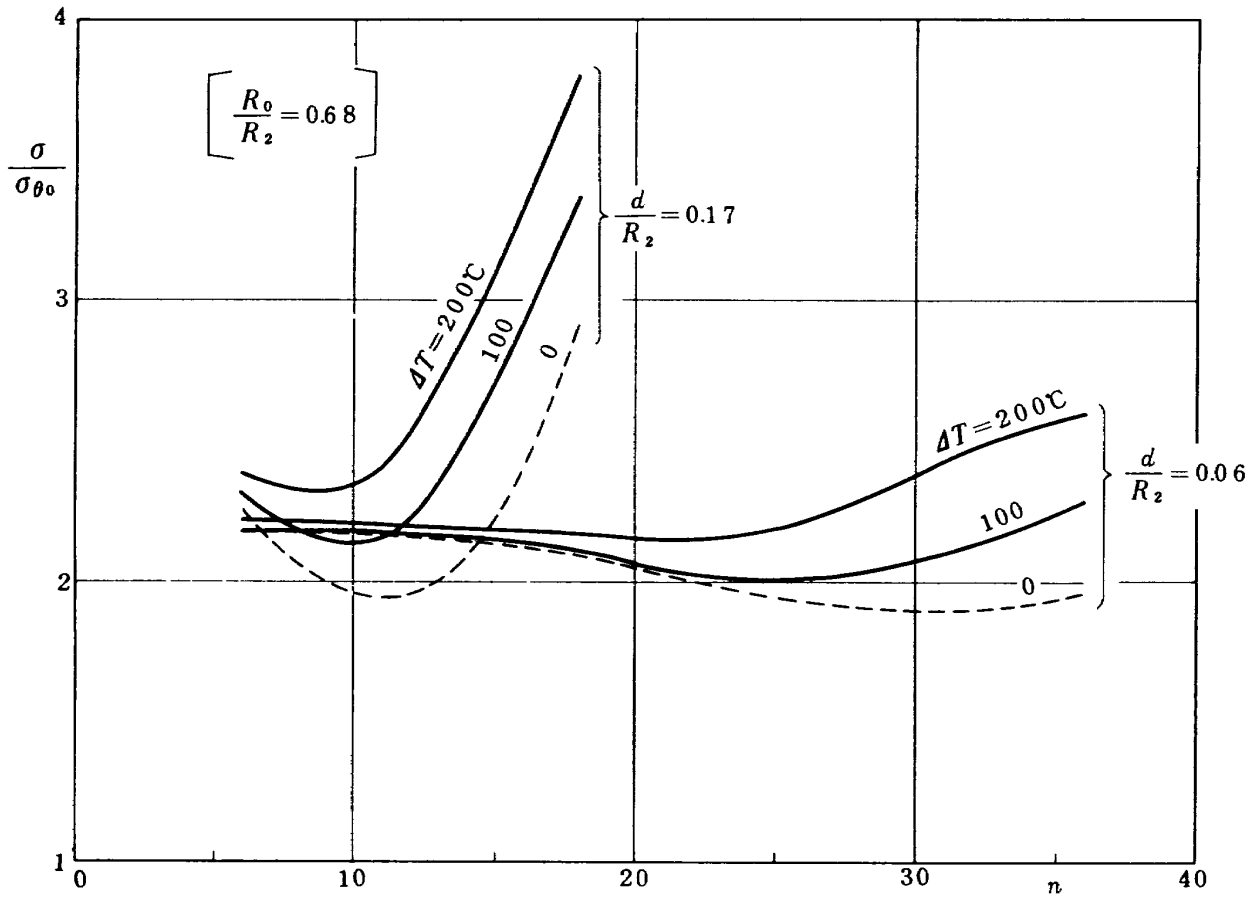


図14 偏心円孔縁の応力集中と円孔数との関係

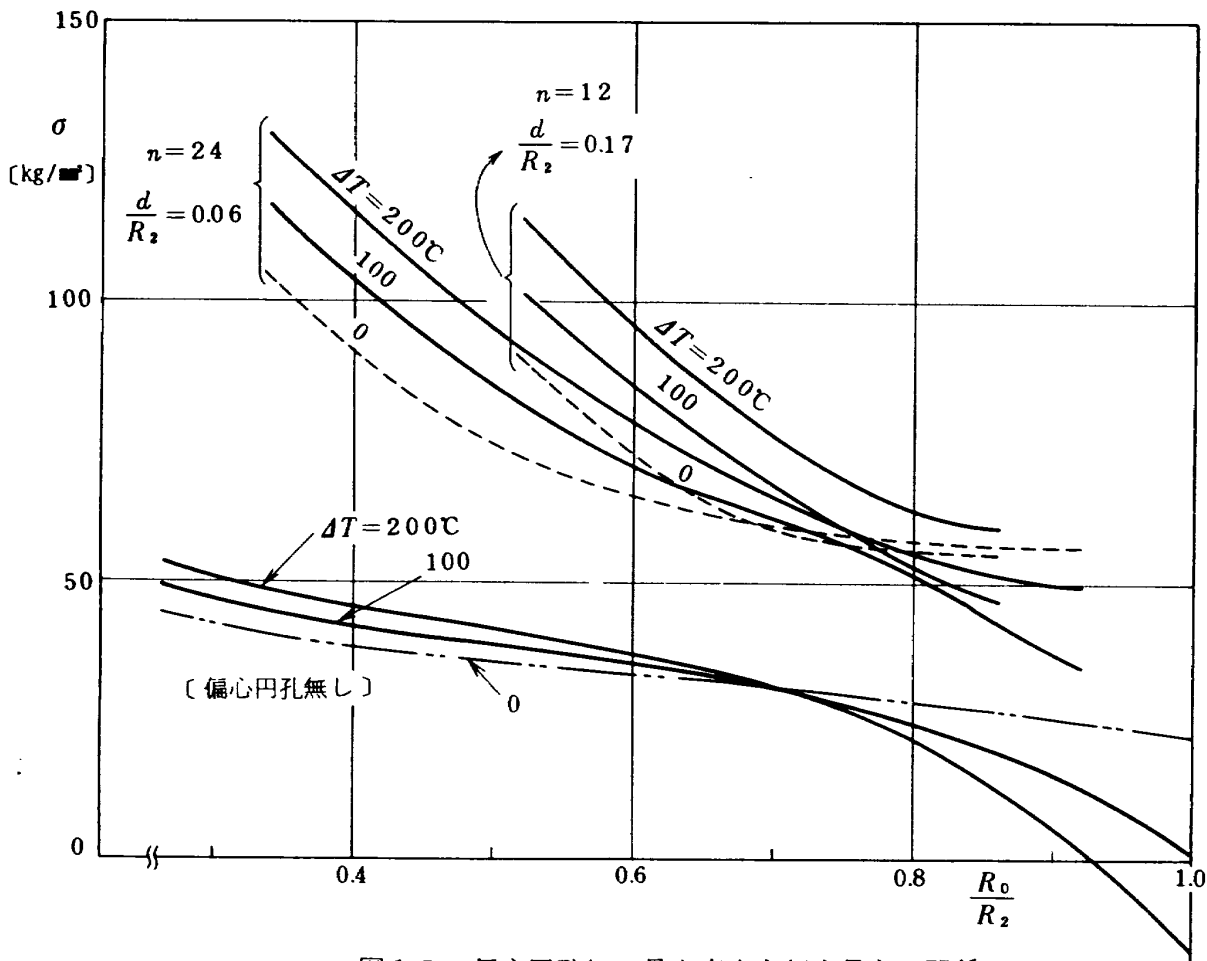


図15 偏心円孔縁の最大応力と偏心量との関係

がよいが、図7、図8のように偏心率と応力集中との関係を調べる場合は、偏心率によって基準応力が変化するので、表示された応力集中は必ずしも応力と比例していない。したがって本節では、円孔縁の最大応力そのものに着目して偏心率による変化を調べた。

図15は横軸に偏心円孔の偏心率をとり、定常状態における円孔縁の最大応力の変化を示したものである。図の下方の線図は偏心円孔がない円板の円周方向応力の分布である。図から明らかなように円孔の偏心率が大きいほど円孔の最大応力は低下する。図7、図8のように応力集中で表わすと回転のみの場合、ある偏心率で極値をとるが、実際の応力はほぼ一定値に近づくのみである。ただし本資料では、これ以上偏心率が大きい場合を計算していないので断言できないが、もっと偏心率を大きくすると円孔縁が円板外周に接近するので外周に作用する遠心力の影響を受けて円孔縁の最大応力は上昇することも考えられる。しかし実用面（例えば、ガスタービン

ディスクに適用する場合）では極端に外周寄りに円孔を設けることはなさそうなので円孔の偏心率としては本計算の範囲で十分と思われる。

#### 4. 実用タービンディスクへの適用

実機ディスクの外周にはクリスマスツリー型の結合方式でタービン翼が取り付けられているので外周部は複雑な形状となっているが、本節では平均外半径を用い外周はなめらかな円板と仮定して検討する。また、前節までに述べた結果と対比するためにディスクは等厚と仮定する。

FJRエンジンのタービンディスクは内・外半径60mm、200mmの円板の $R_0 = 172\text{ mm}$ の位置に6.8mmの円孔が38個設けられている。前節と同様に円孔の位置を無次元化して表示すると $R_0/R_2 = 0.86$ となる。

ところで、円孔に関するパラメタによって円板内の応力集中の大きさが変化することは前節までに述べた。しかし、これらのパラメタの値を共通の一変

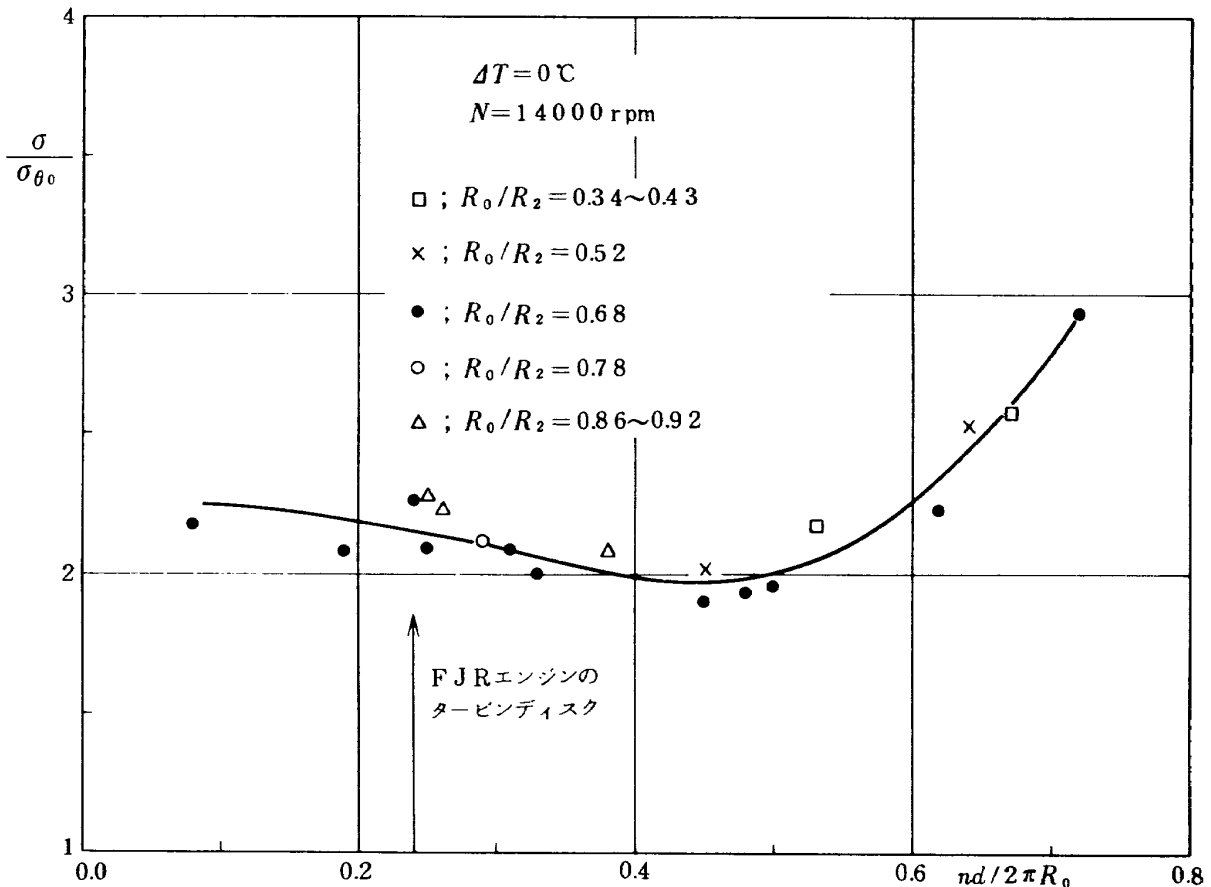


図16 偏心円孔縁の最大応力

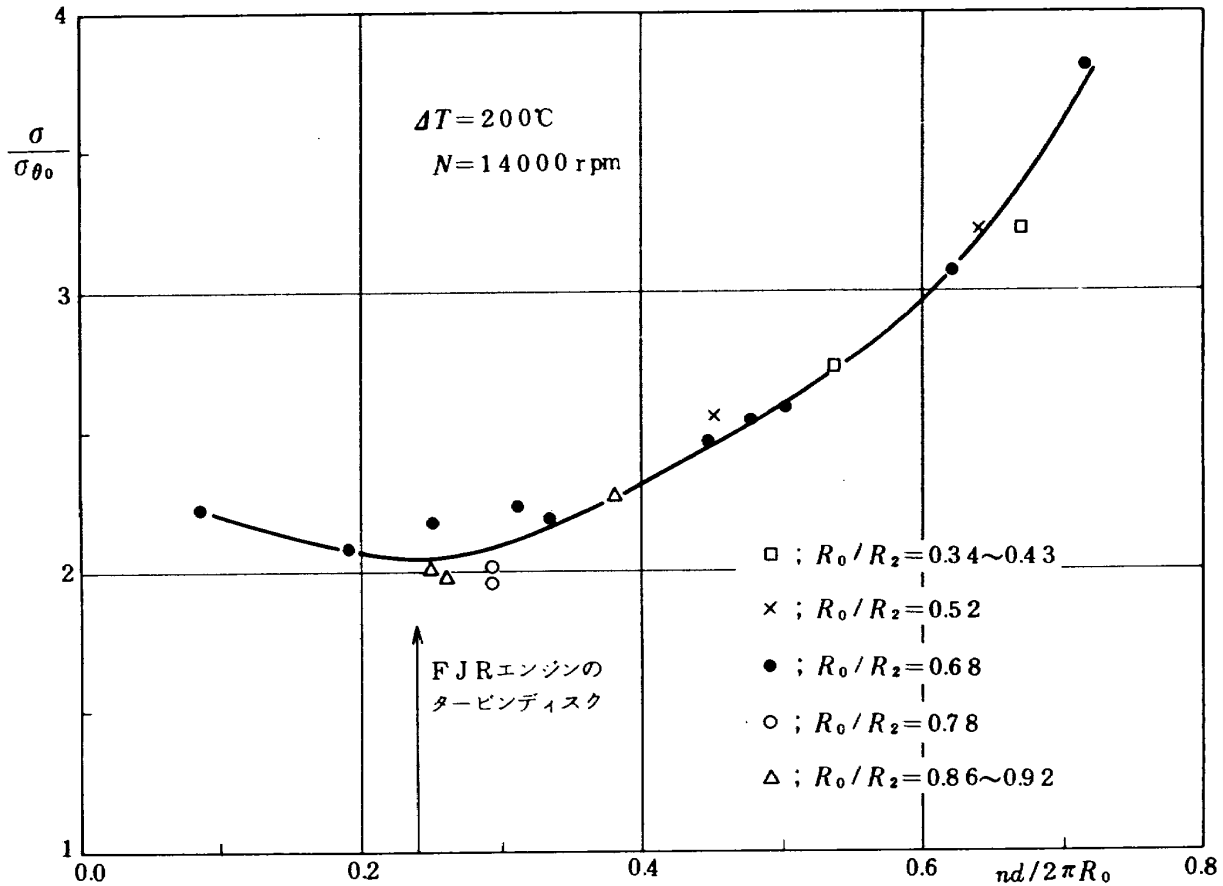


図17 偏心円孔縁の最大応力

数で表示して、この変数に対する応力集中の値の変化がわかれば、与えられた有孔円板の応力集中を直ちに知ることができて実用上便利である。以上の目的のために共通変数として、隣接偏心円孔間の距離に関する量を採用する。即ち、偏心円孔の大きさ、個数及び位置をそれぞれ  $d$ 、 $n$ 、 $R_0$  として共通変数  $p$  が  $p = nd/2\pi R_0$  で表わされるものとする。この  $p$  の値は偏心円孔の直径の合計長さとして偏心円孔の中心を通る円周長さとの比である。上記の変数を用いて円孔縁の応力集中との関係を図示すると図16、図17のようになる。これは総ての結果をプロットしたものである。図16は回転応力のみの場合であり、図17は遠心応力と熱応力が同時に加わった場合である。また、図17は内外温度差  $\Delta T = 200^\circ\text{C}$  の場合の例であるが、実機例え航空用エンジンのタービンディスクに関して云えば、 $\Delta T = 200^\circ\text{C}$  は適当な値と考えられる。

FJRエンジンについて適用すると図16、図17の矢印の位置 ( $p = 0.24$ ) に相当する。この位置に

おいて、回転応力のみの場合（図16）は応力集中は最低ではないが、熱応力を考慮すると図17のようにほぼ最低の応力集中を示すようになり、円孔の設計としては良好であることがわかる。

### 5. あとがき

外周に一樣に分布する遠心負荷と熱負荷を受けて回転する多数の偏心円孔を有する円板の強度を検討するために、偏心円孔の個数、大きさおよび偏心量等が異なり、かつ内外周間に温度勾配をもつ円板の応力分布を有限要素法によって計算した。その結果、偏心円孔の個数、大きさ、偏心量などによって円孔縁の応力は変化すること、さらに外周に遠心負荷が作用しかつ外周から熱を受けて内外周間の温度差による熱応力が生ずると、その変化の様子が異なることなどが明らかになった。以下にその結果を要約する。

1) 偏心円孔の偏心量、個数および大きさ等を適当に選ぶことにより円孔縁の応力集中を大幅に軽減

することが可能である。

2) 外周に作用する遠心力は円板の直径線上に位置する偏心円孔縁の応力を軽減する作用がある。

3) 外周から熱を受け円板内外周間に温度勾配が生ずると偏心円孔縁の応力は、隣接円孔縁では上昇し、逆に円板直径線上では減少する。また、円孔の偏心量が大きい場合は、熱応力の影響により定常時の応力集中は減少するが、非定常熱応力を考慮すると、逆に増加する。

4) 偏心円孔の個数、偏心量、大きさなどの変化を共通の変数として表示するために、円孔直径の合計(円孔の直径と個数の積)と円孔中心を通る円周長さとの比を導入し、この値と応力集中との関係を図示した結果、円孔の個数、大きさ、偏心量などに無関係に一つの曲線で表示することができた。この

グラフから円孔縁の応力集中の値を推定できる。

5) 本報で得られた結果をFJRエンジンのタービンディスクに適用した結果、偏心円孔の設計としては、大変良好であることが推測された。

### 参 考 文 献

- 1) 松末勝利ほか、多数の偏心円孔を有する回転円板の応力、航空宇宙技術研究所報告、TR 390, 1974
- 2) 松末勝利ほか、有限要素法による二次元熱伝導計算とタービン翼およびディスクの熱応力解析、TR-481, 1976
- 3) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung; 吉識訳マトリックス有限要素法、培風館、(昭和45年)

---

## 航空宇宙技術研究所資料 442 号

昭和56年 8 月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社実業公報社  
東京都千代田区九段南4-2-12

---



