

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-614

位置、速度ベクトルから接触軌道要素を求める
包括的な計算アルゴリズム

志 甫 徹

1989 年 9 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

位置、速度ベクトルから接触軌道要素を求める 包括的な計算アルゴリズム*

志 甫 徹**

1. まえがき

本報告は、宇宙飛行体、或いは、彗星などのような天体の位置ベクトル、 \mathbf{r} 、及び速度ベクトル、 $\dot{\mathbf{r}}$ が与えられたときに、その軌道の接触軌道要素 (osculating orbital elements) を計算するアルゴリズム、及びその手順の体系化について記述するものである。

通常、軌道要素と言うと、Keplerの軌道6要素で代表されるような数値のセットで、基準座標系に対する軌道の位置関係、軌道の形状、及び軌道上の位置を表わして、軌道を規定する。二体問題の場合は、軌道要素は定数であり、時間が経過しても変化しないが、実際の軌道では、単純な二体運動ではないので、時間の経過とともに、その値は変化して行く。しかし、時々刻々の \mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$ が与えられても、軌道の位置関係、軌道の形状等に関する情報は直観的にはわからないので、各瞬間における宇宙飛行体（または天体）の位置を、実際の軌道に、その瞬間に接する二体問題の軌道で近似して軌道要素を計算して表現することが行われる。このある瞬間だけ適合する軌道要素を接触軌道要素と呼んでいる。

この接触軌道要素を、時間の関数として具体的に求めることは、一般にはそう簡単ではない。しかし、1週間位の比較的短い期間に対してだけ成立つように、時間の1次、2次式という形で近似式を作るとは割合に容易であるが、本格的には、一般摂動論により、例えば、Lagrangeの惑星方程式 (Lagrange's planetary equation) を用いて計算することになる⁸⁾。

本報告では、特殊摂動論によって計算された \mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$ を用いて、必要に応じて接触軌道要素を計算する立場を採る。本報告に述べる個々の式は、何らオリジナルなものではないが、 \mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$ が与えられた場合に、その値に応じて、楕円軌道、放物線軌道、双曲線軌道、或いは直線軌道 (rectilinear orbit) と場合を分けて軌道要素を計算する一般的アルゴリズムの体系について記述するものであり、航技研における多年にわたる軌道計算のノウハウの一端を、軌道要素の計算という形でまとめて報告するものである。

なお、上述の直線軌道とは、例えば、彗星の軌道の一部のように、殆んど直線運動を行なっているように見える軌道を言う。彗星の場合、太陽を中心とした長楕円軌道であり、明らかに楕円軌道であるが、近日点から遠く離れている場合、特に地球から観測した場合殆んど直線運動の軌道とみなすことができる。この場合は、通常の軌道の公式ではなく、その極限の形の直線軌道の公式を用いて軌道要素を計算しなければならない。

2. 記 号

- A : 動径ベクトルが掃引する面積
- a : 軌道長半径 (semi-major axis)
- b : 軌道短半径 (semi-minor axis)
- B : 放物線 (離心) 近点角 (parabolic eccentric anomaly, or parabolic anomaly)
- D : 軌道形状判別式 ((4.19)式参照)
- E : 離心近点角 (eccentric anomaly)
(離心近点離角と言う場合もある)
- e : 離心率 (eccentricity)
- \mathbf{e} : 離心率ベクトル, $e = |\mathbf{e}|$
- F : 双曲線離心近点角 (hyperbolic eccentric

*平成元年9月12日 受付

**制御部

- anomaly)
- f : 真近点角 (true anomaly)
- \mathbf{h} : 角運動量ベクトル (angular momentum vector), $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)^T$
- h : 角運動量, $h = |\mathbf{h}|$
- \bar{h} : $\bar{h} = (h_x^2 + h_y^2)^{1/2}$
- i : 軌道傾斜角 (inclination)
- M : 平均近点角 (mean anomaly)
- n : 平均運動 (mean motion, or mean angular motion)
- P : 周期 (period)
- p : 半直弦 (semi-latus rectum)
- q : 近点距離 (pericenter distance)
- \mathbf{r} : 位置ベクトル (position vector), $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$
- : 動径ベクトル (radius vector)
- r : 動径, $r = |\mathbf{r}|$
- t : 時刻
- v : 速度, $v = |\dot{\mathbf{r}}|$
- θ : 緯度引数 (argument of latitude)
- μ : 重力定数
- \mathcal{Q} : 昇交点経度 (longitude of ascending node)
- ω : 近点引数 (argument of pericenter)
- τ : 近点通過時刻 (time of pericenter passage)

x, y, z : 位置ベクトルの成分
 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: 速度ベクトルの成分
 h_x, h_y, h_z : 角運動量ベクトルの成分

- $(\dot{})$: 1 階の時間微分, $d()/dt$
- $||$: 変数の絶対値, ベクトルのノルム
- $() \times ()$: ベクトル積
- $() \cdot ()$: スカラー積

3. 基準座標系に対する軌道の位置関係

— 三次元軌道における \mathcal{Q} , i , θ の決定 —

本章では, 三次元軌道の基準座標系に対する位置関係を規定する三つのパラメータ, 昇交点経度 (the

longitude of the ascending node), \mathcal{Q} , 軌道傾斜角 (inclination), i , 及び緯度引数 (the argument of latitude), θ ($\theta = \omega + f$) について述べる。ここで, ω は近点引数 (the argument of pericenter) であり, f は真近点角 (true anomaly) である。

昇交点経度 \mathcal{Q} , 軌道傾斜角 i が与えられれば, 軌道面の位置が基準座標系の中ではっきりと決まる。しかし, まだ, この軌道面で, 宇宙飛行体 (或いは天体) の位置は決まっていない。そこで緯度引数 θ を与えれば, 位置が決定する。厳密には, 近点引数, ω によって, 軌道面の x 軸の方向を規定し, その軸から測った角の真近点角 f によって宇宙飛行体 (または天体) の位置を決定することになる。

以下では, 通常の軌道 (ordinary orbit) と直線軌道 (rectilinear orbit) に場合を分けて述べる。

3.1 通常の軌道 ($h \neq 0$ の場合)

宇宙飛行体 (または天体) が, 位置ベクトル \mathbf{r} で, 軌道面内を $\dot{\mathbf{r}} (= d\mathbf{r}/dt)$ の速度ベクトルを持って運動していると, 軌道面に垂直な角運動量ベクトル \mathbf{h} ($\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, angular momentum) を生ずる (次章参照)。

角運動量ベクトル \mathbf{h} の成分は, 図 3.1 から,

$$\begin{cases} h_x = h \sin i \sin \mathcal{Q}, & h = |\mathbf{h}| \\ h_y = -h \sin i \cos \mathcal{Q} \\ h_z = h \cos i \end{cases} \quad (3.1)$$

で与えられる。

従って, $\bar{h} \triangleq \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ と置けば,

$$\begin{cases} \cos i = \frac{h_z}{h} \\ \sin i = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \cos \mathcal{Q} = -\frac{h_y}{\bar{h}} \\ \sin \mathcal{Q} = \frac{h_x}{\bar{h}} \end{cases} \quad (3.3)$$

従って, (3.2), (3.3) 式から

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{h}}{h_z} \right) \quad (3.4)$$

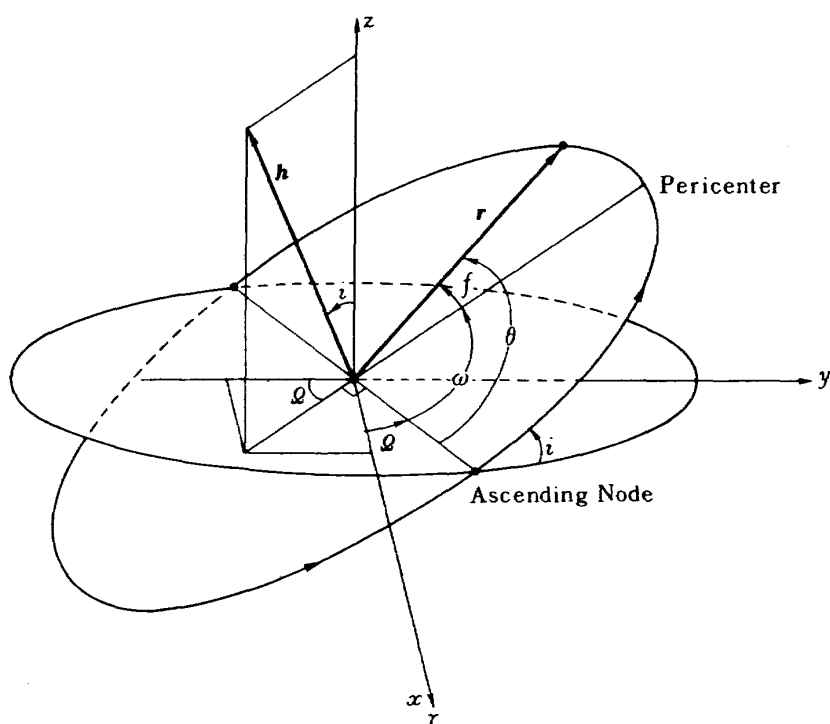


図 3.1 軌道の空間配置と角運動量ベクトル

$$\varrho = \tan^{-1}\left(\frac{h_x}{-h_y}\right), \quad (\bar{h} \neq 0) \quad (3.5)$$

が与えられ, i , ϱ が計算できる。

ここで, (3.2) の第 1 式, $\cos i = h_z/h$ から,

$$\begin{cases} h_z > 0 \rightarrow i < \pi/2 \\ h_z = 0 \rightarrow i = \pi/2 \\ h_z < 0 \rightarrow i > \pi/2 \end{cases}$$

の関係が与えられる。

また, $\bar{h} = 0$ の場合は, $\bar{h}^2 = h_x^2 + h_y^2$ であるから, $h_x = h_y = 0$ となり

$$\varrho = \tan^{-1}\left(\frac{h_x}{-h_y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{0}{0} \quad (3.6T)$$

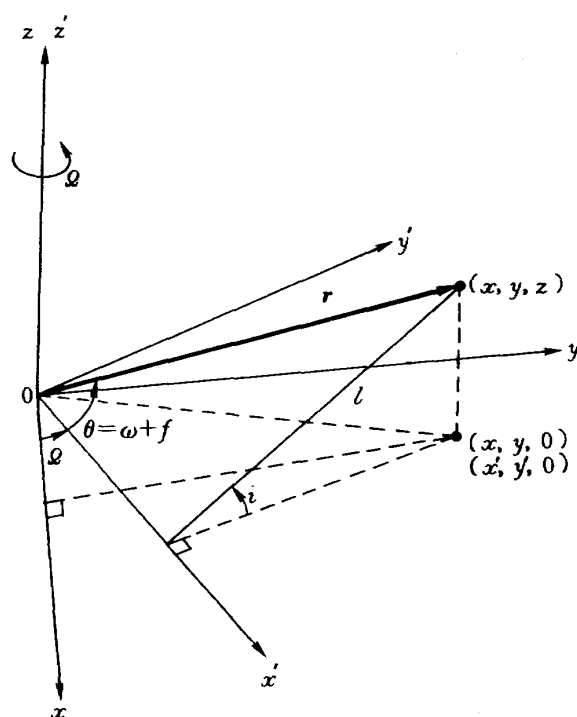
となって, ϱ は不定となる。この場合 $i = 0$ または π となり軌道面と基準座標面は一致する。従って, ϱ は確定できないので, 計算上, 次のように定義する。

$$\varrho \triangleq 0, \quad (\bar{h} = 0) \quad (3.6C)$$

(3.6) 式で, T を付したものは理論上, C を付したものは, 計算実行上の式を表わす。以下同様である。

緯度引数 (argument of latitude), $\theta (= \omega + f)$ は, 次のようにして求める。

図 3.2 において, 基準座標系 $0-xyz$ を z 軸回り

図 3.2 緯度引数 θ と座標の関係 ($\bar{h} \neq 0$)

に昇交点経度 ϱ だけ回転させて, $0-x'y'z'$ 座標系に変換すると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varrho & \sin \varrho & 0 \\ -\sin \varrho & \cos \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

従って,

$$\begin{cases} x' = x \cos \varrho + y \sin \varrho \\ y' = y \cos \varrho - x \sin \varrho \\ z' = z \end{cases} \quad (3.7)$$

となる。また、図から

$$\sin i = \frac{z}{l}$$

であるから、 $\sin i \neq 0$ ならば、次式が与えられる。

$$l = \frac{z}{\sin i} = \frac{hz}{h} \quad (3.8)$$

従って、

$\sin i \neq 0$ ならば、

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(\omega + f) = \frac{x'}{r} = \frac{x \cos \varrho + y \sin \varrho}{r} \\ \sin \theta = \sin(\omega + f) = \frac{l}{r} = \frac{z}{r \sin i} \end{cases} \quad (3.9)$$

$\sin i = 0$ ならば、

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(\omega + f) = \frac{x'}{r} = \frac{x \cos \varrho + y \sin \varrho}{r} \\ \sin \theta = \sin(\omega + f) = \frac{y'}{r} = \frac{y \cos \varrho - x \sin \varrho}{r} \end{cases} \quad (3.10)$$

であるが、 $\sin i = 0$ の場合は、軌道面が基準座標面と一致している場合であるから、(3.6C)式により $\varrho = 0$ である。よって、

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(\omega + f) = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \sin(\omega + f) = \frac{y}{r} \end{cases} \quad (3.10')$$

となる。

従って、(3.9)、(3.10')式から

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\omega + f) = \frac{\left(\frac{z}{\sin i}\right)}{x \cos \varrho + y \sin \varrho}, \quad (\sin i \neq 0) \\ \tan \theta &= \tan(\omega + f) = \frac{y}{x}, \quad (\sin i = 0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

なる関係が与えられ、 θ が計算できる。

3.2 直線軌道 ($h = 0$ の場合)

$h = 0$ の場合は、 $h_x = h_y = h_z = 0$ であり、この場合は、直線軌道*(rectilinear orbit)^{4,5,7)}となる。

軌道は直線となるので、軌道面は一意には定まらなくなる。

すなわち、前述の通常の軌道の場合の式で、

$$\varrho = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{-h_y} \right) = \frac{0}{0} \quad (3.12T)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{h}}{h_z} \right) = \frac{0}{0} \quad (3.13T)$$

となり、 ϱ 、 i を一意に決定できない。従って、計算上の便宜のために、 ϱ を次のように定義する。

$$\varrho \triangleq 0, \quad (h = 0) \quad (3.12C)$$

軌道傾斜角 i 、及び緯度引数 θ に関しては、以下のように場合を分けて、計算式、或いは定義式を求めることにする。図 3.3 は、以下の議論に用いる関係図である。

1) $y \neq 0, z \neq 0$ の場合

図 3.3 から、

$$\begin{cases} \cos i = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \sin i = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (3.14)$$

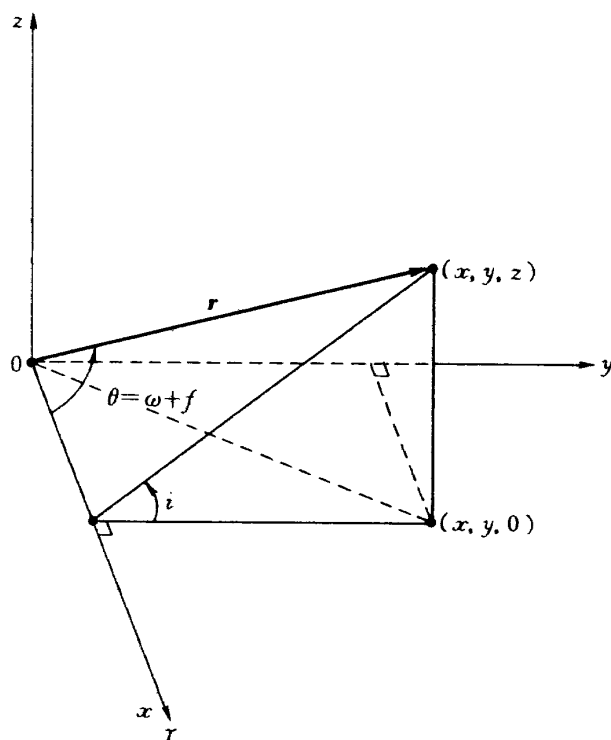


図 3.3 緯度引数 θ と座標の関係 ($h = 0$)

* 直線軌道の場合は、 \mathbf{r} と $\dot{\mathbf{r}}$ が同一直線内にあるので、ベクトル積の定義から、 $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ となる。

従って,

$$\tan i = \frac{z}{y} \quad (y \neq 0, z \neq 0) \quad (3.15)$$

また, 同様に図 3.3 から

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} = \frac{\left(\frac{z}{\sin i}\right)}{r} \end{cases} \quad (3.16)$$

従って,

$$\tan \theta = \tan(\omega + f) = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = \frac{\left(\frac{z}{\sin i}\right)}{x} \quad (3.17)$$

上式は, $h \neq 0, \sin i \neq 0$ の場合の (3.11,1) 式で, $\varrho = 0$ と置いたものと一致する。

ii) $y \neq 0, z \neq 0$ の場合

図 3.3 から,

$$\tan i = \frac{z}{y} = \frac{0}{y} = 0 \quad (3.18)$$

従って,

$$i = \begin{cases} 0, & (y > 0, z = 0) \\ \pi, & (y < 0, z = 0) \end{cases} \quad (3.19)$$

また,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \quad (3.20)$$

従って,

$$\tan \theta = \tan(\omega + f) = \frac{y}{x} \quad (3.21)$$

上式は, $h \neq 0, \sin i = 0$ の場合の (3.11,2) 式と一致する。

iii) $y = 0, z \neq 0$ の場合

図 3.3 から,

$$\begin{cases} \cos i = \frac{0}{\sqrt{0^2 + z^2}} = \frac{0}{|z|} = 0 \\ \sin i = \frac{z}{\sqrt{0^2 + z^2}} = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} +1, & (z > 0) \\ -1, & (z < 0) \end{cases} \end{cases} \quad (3.22)$$

の関係式が得られるから,

$$\tan i = \frac{z}{0} = \begin{cases} +\infty, & (z > 0) \\ -\infty, & (z < 0) \end{cases} \quad (3.23)$$

従って,

$$i = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & (y = 0, z > 0) \\ -\frac{\pi}{2}, & (y = 0, z < 0) \end{cases} \quad (3.23')$$

また, 同様に図 3.3 から

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{0^2 + z^2}}{r} = \frac{|z|}{r} \end{cases} \quad (3.24)$$

従って, 次式が与えられる。

$$\tan \theta = \tan(\omega + f) = \frac{|z|}{x} \quad (3.25)$$

上式は, $h \neq 0, \sin i \neq 0$ の場合の (3.11,1) 式において, $\varrho = 0, \sin i = \pm 1$ と置いた結果と一致する。

IV) $y = 0, z = 0$ の場合

この場合は

$$\tan i = \frac{z}{y} = \frac{0}{0} \quad (3.26T)$$

となって, i は不定となり一意には決定できないので, 計算の便宜上, i を次のように定義する。

$$i \triangleq \frac{\pi}{2}, \quad (y = z = 0) \quad (3.26C)$$

また,

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2}}{x} = \frac{0}{x} = 0 \quad (3.27)$$

であるから,

$$\theta = \omega + f = \begin{cases} 0, & (x > 0) \\ \pi, & (x < 0) \end{cases} \quad (3.27')$$

これは, $h \neq 0, \sin i \neq 0$ の場合の (3.11,1) 式において, $\varrho = i, i = \pi/2$ と置いた結果と一致する。

以上の i) ~ IV) の結果を整理すると, 次のように書き表わすことができる。

直線軌道 ($h = 0$):

$$\varrho \triangleq 0$$

$$i = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{z}{y}, & (y \neq 0) \\ \frac{\pi}{2}, & (y = 0, z \neq 0) \end{cases}$$

$$\tan \theta = \tan(\omega + f) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{z}{\sin i}\right)}{x} & (y \neq 0, z \neq 0) \\ y=0 & \\ \frac{y}{x} & (y \neq 0, z = 0) \end{cases}$$

4. 軌道の形状と大きさ

三次元空間における軌道面の位置と軌道の向きが決まれば、次に、軌道の形状と大きさを決めることが問題となる。本章では、長半径 (semi-major axis) a 、離心率 (eccentricity) e 、真近点角 (true anomaly) f 、平均近点角 (mean anomaly) M 、近点通過時刻 (time of pericenter passage) τ 等について述べる。

4.1 二体問題の軌道方程式

二体問題の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (4.1)$$

ここで、 \mathbf{r} は位置ベクトル、 μ は重力定数である。

上式の両辺に \mathbf{r} のベクトル積を考えると、

$$\mathbf{r} \times \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

ここで、ベクトル積の定義から、 $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ であるから、次式が得られる。

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad (4.2)$$

ここで、位置ベクトル \mathbf{r} と速度ベクトル $d\mathbf{r}/dt$ のベクトル積の時間微分を考えると、

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad (4.3)$$

となる。何故ならば、第1項はベクトル積の定義から0、第2項は(4.2)式から0となるからである。

(4.3)式を積分すれば、次式を得る。

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h} \quad (= \text{constant vector}) \quad (4.4)$$

ここで、 \mathbf{h} は定数ベクトルであり、角運動量ベクトルと呼ばれる (3.1 節参照)。

(4.1), (4.4) 式から

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{h} &= \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left[\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \\ &= \frac{\mu}{r^3} \left[r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{r} \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

ここで、スカラー積の定義から、

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2r \frac{dr}{dt}$$

従って、次の関係が得られる。

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt} \quad (4.6)^*$$

(4.5)式に(4.6)式の関係代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{h} &= \frac{\mu}{r^3} \left[r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} - r \frac{dr}{dt} \mathbf{r} \right] \\ &= \frac{\mu}{r^2} \left[r \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{dr}{dt} \mathbf{r} \right] = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (4.7) \end{aligned}$$

の関係が得られる。

(4.7)式を辺々積分すると、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \mu \left[\frac{\mathbf{r}}{r} + \text{constant vector} \right]$$

となる。上式で、constant vector を \mathbf{e} と置くと、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r} [\mathbf{r} + r\mathbf{e}] \quad (4.8)$$

なる関係式が得られる。ここで、 \mathbf{e} は離心率ベクトル (eccentricity vector) と呼ばれ、座標系原点から近点 (pericenter) 方向へのベクトルで表わされる (図 4.1 参照)。なお、離心率 e は、 $e = |\mathbf{e}|$ で表わされる。

(4.8)式の両辺に \mathbf{r} のスカラー積を考えれば、

* $\frac{dr}{dt} \equiv \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = v$

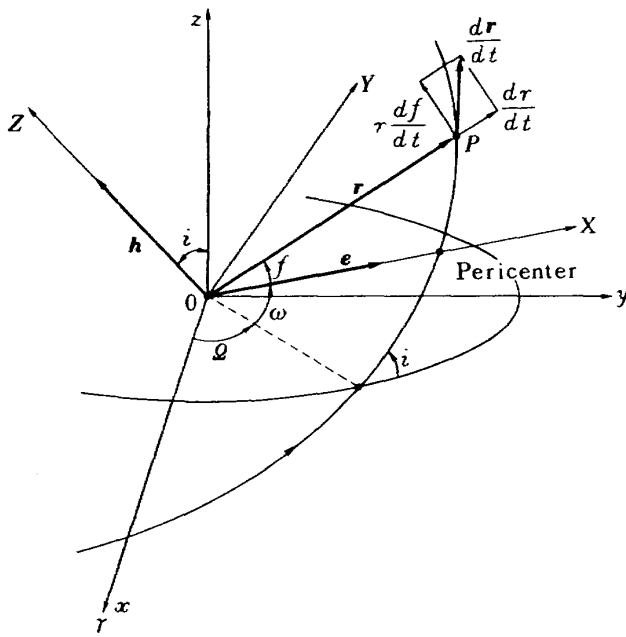


図 4.1 離心率ベクトルと角運動量ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right) &= \mathbf{h} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^* = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2 \\ &= \mathbf{r} \cdot \frac{\mu}{r} [\mathbf{r} + r\mathbf{e}] = \frac{\mu}{r} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + r\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}] \\ &= \frac{\mu}{r} [r^2 + r\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}] = \mu r (1 + e \cos f) \end{aligned}$$

従って,

$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + e \cos f} \quad (4.9)$$

なる関係が得られる。この式は、二体問題の軌道方程式 (equation of orbit) と呼ばれている。ここで f は真近点角 (true anomaly) であり、離心率ベクトル \mathbf{e} (近点方向の軸) と位置ベクトル \mathbf{r} のなす角である。

ここで,

$$p \triangleq \frac{h^2}{\mu} \quad (4.10)$$

と定義すると、(4.9)式は次のように書ける。

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (4.9')$$

p は半直弦 (semi-latus rectum, or semi parameter) と呼ばれ、後出の図 4.2, 4.3, 4.4 に示すように、座標原点 (円錐曲線の焦点) から軌道の中心軸に垂線を立てたときの軌道との交点と原点間の距離を表わしている。なお, Semi-latus rectum を半通径**と訳している文献もある。

軌道方程式 (4.9) 式 (または (4.9') 式) は、軌道の形状 (円, 楕円, 双曲線, 放物線) の如何にかかわらず成立する方程式である。

次に、極座標表示をした場合の速度ベクトルの成分 dr/dt , 及び rdf/dt を求める。

(4.8) 式の両辺に右側から \mathbf{r} のベクトル積を考えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right) \times \mathbf{r} &= \mathbf{h} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{\mu}{r} [\mathbf{r} + r\mathbf{e}] \times \mathbf{r} = \frac{\mu}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} + \mu \mathbf{e} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ を考慮すると,

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (4.11)$$

であるから、上式は次のように書ける。

$$\mathbf{h} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) = \mu \mathbf{e} \times \mathbf{r} \quad (4.12)$$

両辺のユークリッドノルムをとれば,

$$h \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) = h \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = r \mu e \sin f$$

従って,

$$\mu e \sin f = \frac{h}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (4.13)$$

となる。

(4.6) 式の関係 (4.13) 式に代入し、(4.10) 式を考慮して書直すと、動径方向の速度成分が得られる。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu}{h} e \sin f = \frac{h}{p} e \sin f \quad (4.14)$$

接線方向の速度成分は、次のようにして導く。即

* $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ の公式を用いて変形する。

** 数学辞典 (第2版); 岩波書店 (1968), p.134
守屋富次郎; 力学概論, 培風館 (1953), p.40

ち, (4.9') 式を時間微分を考えると,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{pe \sin f}{(1+e \cos f)^2} \frac{df}{dt} = \frac{r^2}{p} e \sin f \frac{df}{dt} \quad (4.15)$$

従って, (4.14), (4.15) 式から,

$$r \frac{df}{dt} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p} (1+e \cos f) \quad (4.16)$$

として求められる。

従って,

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{df}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{h^2}{p^2} (1+2e \cos f + e^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。なお,

$$v \triangleq \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

である。

4.2 軌道長半径 (semimajor axis)

速度ベクトルのスカラー積を考えると,

$$v^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

であるから, 両辺を時間微分すると,

$$\frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

ここで, (4.1), (4.6) 式を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (v^2) &= 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) = -\frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) \\ &= -\frac{2\mu}{r^3} \left(r \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = 2\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

従って, 上式の両辺を積分すると, 次式を得る。

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + c$$

ここで, c は積分定数である。積分定数を求めるには, 近点 (pericenter, perifocus) に於ける境界条件を用いる。即ち, $f=0$, $dr/dt=0$, $r=q$ として, (4.9'), (4.14), (4.16), (4.17) を用いればよい。なお, q は近点距離である (後出の図 4.2, 4.3, 4.4 参照)。

$$q = \frac{p}{1+e}, \quad v^2 = \frac{h^2}{p^2} (1+e)^2 = \frac{\mu p}{q^2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} c &= v^2 - \frac{2\mu}{q} = \frac{\mu p}{q^2} - \frac{2\mu}{q} = \frac{\mu}{q^2} [q(1+e) - 2q] \\ &= -\frac{\mu}{q} (1-e) = -\frac{\mu(1-e)}{a(1-e)} = -\frac{\mu}{a} \end{aligned}$$

ここで, a は軌道長半径であり, $a > 0$ ならば楕円, $a < 0$ ならば双曲線, $a = \infty$ ならば放物線と定義して置くと統一的に扱うことができる。

従って, 次式が得られる。

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.18)$$

この式はエネルギー積分 (energy integral), または vis-viva 方程式と呼ばれる。

(4.18) 式を書き換えると,

$$D \triangleq \frac{1}{a} = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) \quad (4.19)$$

の関係式が得られる。ここで, $1/a$ を D と定義したのは, 判別式 (discriminator) の意味であり,

$$\begin{cases} D > 0 \rightarrow a > 0, e < 1 & \text{楕円軌道} \\ D = 0 \rightarrow a = \infty, e = 1 & \text{放物線軌道} \\ D < 0 \rightarrow a < 0, e > 1 & \text{双曲線軌道} \end{cases}$$

のように, 軌道の形状が判定できるからである。

軌道長半径 a は, 軌道の大きさを示す目安になるが, 放物線の場合は $a = \infty$ となるので, 比較ができない。従って, 放物線軌道の場合は, 近点距離 q をもって軌道の大きさの目安とする。

(4.9') 式で, $f=0$, $r=q$, $e=1$ と置けば,

$$q = \frac{p}{2} \quad (4.20)$$

なる関係が得られ, 近点距離と軌道の開き具合が規定されることになる。

4.3 離心率 (eccentricity)

離心率を計算するには, (4.13) 式と, (4.9') 式を書き換えた式を用いる。即ち,

$$\mu e \sin f = \frac{h}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (4.13)$$

$$\mu e \cos f = \frac{h^2}{r} - \mu \quad (4.21)$$

上の 2 式を辺々二乗して, 辺々加えると,

$$e^2 = \left(\frac{h^2}{\mu r} - 1 \right)^2 + \left(\frac{h}{\mu r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \quad (4.22)$$

となる。ここで、

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2$$

の公式において、 $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, $\mathbf{B} = d\mathbf{r}/dt$ と置き、(4.4) 式を考慮すれば、

$$\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + h^2 = r^2 v^2$$

となり、次の関係が得られる。

$$\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = r^2 v^2 - h^2 \quad (4.23)$$

従って、(4.10), (4.19) 式を考慮すれば、(4.22) 式は次のように書換えられる。

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{p}{r} - 1 \right)^2 + \frac{p}{\mu r^2} (r^2 v^2 - h^2) \\ &= 1 - p \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) = 1 - p D = 1 - \frac{p}{a} \end{aligned} \quad (4.24)$$

従って、

$$e = \sqrt{1 - p D} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (4.25)$$

となり、離心率が求められる。

なお、 $h = 0$ の場合は直線軌道 (rectilinear orbit) であり、 $p = 0$ であるから、 $e = 1$ となるが、この場合にも上の式は成立つ。

4.4 真近点角 (true anomaly)

前節の(4.13)式と(4.21)式を辺々割算すると、

$$\tan f = \frac{\frac{h}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\frac{h^2}{r} - \mu} = \frac{\frac{h}{\mu} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\frac{h^2}{\mu} - r}$$

ここで、(4.10) 式を考慮すると、

$$\tan f = \frac{\frac{h}{\mu} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{p - r} = \frac{\frac{h}{\mu} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{p - r} \quad (4.26)$$

の関係が得られ、逆正接をとれば、真近点角 f が求められる。ただし、逆正接をとる場合、主値ではなく、 $-\pi \leq f \leq \pi$ の範囲で計算することが必要である。また、(4.26) 式右辺の分子で、(4.23) 式を用いず、 \mathbf{r} 及び $d\mathbf{r}/dt$ の成分を用いているのは、開平演算に

よる桁落ちの誤差を避けるためである。

なお、(4.26) 式は円軌道 ($e = 0$, 即ち $r = p$) の場合には成立たない。(4.13), (4.21) 式に戻って考えると $e = 0$ であれば、 f は不定 (任意) となる。ただし、(3.11) 式で与えられる $\theta = \omega + f$ の制限の下で任意に選べる訳である。一方、円軌道の場合には半径 r は一定であるから、近点をどこに選んでもよい。従って、計算の便宜上、次のように定義することにする。

$$\omega \triangleq 0, f \triangleq \theta \quad (e = 0) \quad (4.27C)$$

また、 $h = 0$ の場合は直線軌道であり、 $p = 0$, $e = 1$ であるから、(4.13), (4.21) 式より、 $\sin f = 0$, $\cos f = -1$ となり、 $f = \pi$ を得るが、直線軌道の場合にも(4.26)式が成立ち、同じ解が得られる。

さて、真近点角 f が求められれば、前章で求められた緯度引数 θ との差を計算して、近点引数 ω を確定することができる。即ち、

$$\omega = \theta - f$$

となり、基準座標系における近点の位置関係が定まることになる。

4.5 離心近点角 (eccentric anomaly)

4.5.1 楕円軌道と離心近点角

図 4.2 に示すように、楕円の焦点 (基準座標系の原点 0) を O , 楕円の中心を C とし、 C を中心に半径 a の補助円を描く。 P は楕円軌道上の飛行体の位置、 Q は、 P を通る長軸に対する垂線と補助円との交点とする。 $\angle POA$ は真近点角 f であり、 $\angle QCA = E$ を離心近点角 (eccentric anomaly) と定義する。

図 4.2 から、

$$\begin{aligned} CO &= ae = a \cos E + r \cos(\pi - f) \\ &= a \cos E - r \cos f \end{aligned}$$

楕円軌道の場合、 $p = a(1 - e^2)$ であることを考慮して、(4.9') 式を用いて、上式から $\cos f$ を消去すると、

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.28)$$

が得られる。

(4.28), (4.9') 式を等置して計算すれば、

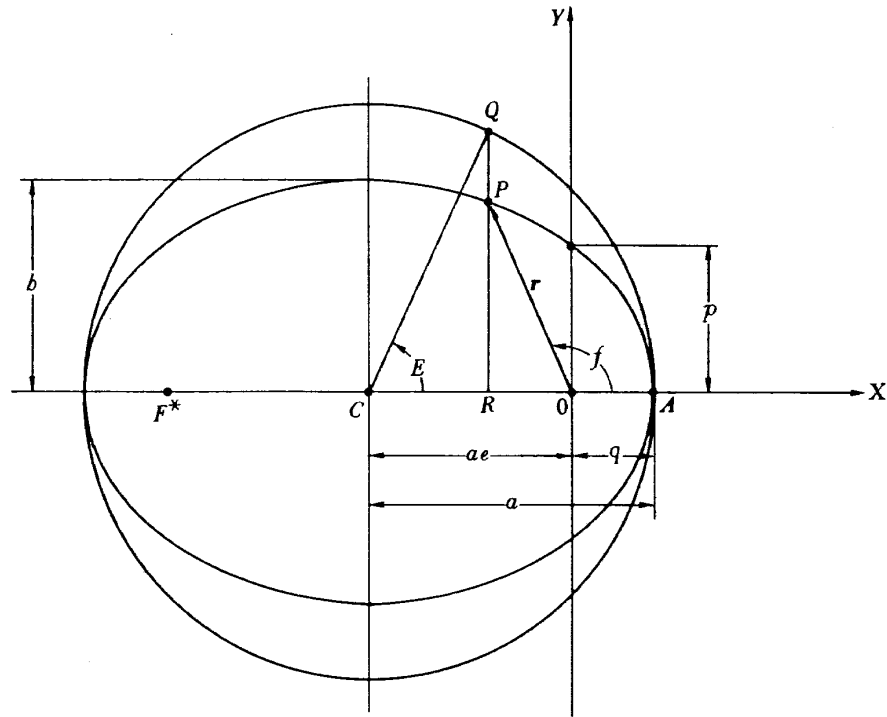


図 4.2 楕円軌道

$$\begin{cases} \cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} \cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \\ \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f} \end{cases} \quad (4.30)$$

なる恒等式が得られる。

ここで、半角の公式から、

$$\begin{aligned} \cos f &= \cos^2 \frac{f}{2} - \sin^2 \frac{f}{2} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{f}{2} = 2 \cos^2 \frac{f}{2} - 1 \end{aligned}$$

従って、上式を変形し、(4.28), (4.29) を考慮すれば、

$$\begin{cases} 2 \sin^2 \frac{f}{2} = 1 - \cos f = \frac{a(1+e)}{r} (1 - \cos E) \\ 2 \cos^2 \frac{f}{2} = 1 + \cos f = \frac{a(1-e)}{r} (1 + \cos E) \end{cases} \quad (4.31)$$

となる。ここで、 f と同様にして、半角の公式を考えると、

$$\begin{cases} 1 - \cos E = 2 \sin^2 \frac{E}{2} \\ 1 + \cos E = 2 \cos^2 \frac{E}{2} \end{cases}$$

であるから、(4.31)式は

$$\begin{cases} 2 \sin^2 \frac{f}{2} = \frac{2a(1+e)}{r} \sin^2 \frac{E}{2} \\ 2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{2a(1-e)}{r} \cos^2 \frac{E}{2} \end{cases} \quad (4.32)$$

となる。(4.32)式の辺々を割算すると

$$\tan^2 \frac{f}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \tan^2 \frac{E}{2}$$

となる。 $f/2$ と $E/2$ は常に同じ象限にあるから、上式を開平すると、

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2}, \quad (h \neq 0) \quad (4.33)$$

が得られる。

通常の楕円軌道では、真近点角 f が与えられれば、(4.33)式から離心近点角 E が求められる。

$h=0$ の場合、即ち直線軌道(rectilinear ellipse)の場合は、 $e=1$, $p=0$ であり、 $f=\pi$ であるから(4.33)式では、 $\tan f/2 = \infty$ となり、 E は計算できない

いので、別の方法で求めなければならない。

(4.13)式に戻って、

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)$$

を考慮すれば

$$\mu e \sin f = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

(4.28), (4.29) 式から、

$$\sin f = \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} \sin E$$

であるから、

$$\mu e \sin f = \mu e \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} \sin E = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

従って、上式を変形して、 $e=1$ と置けば、

$$\sin E = \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (4.34)$$

が得られる。直線軌道の場合には、 $h=0$ であるから、(4.23)式から、

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r v \quad (4.35)$$

の関係式が得られ、(4.34)式に代入すると、最終的に次式が求められる。

$$\sin E = \frac{r v}{\sqrt{\mu a}} \quad (4.36)$$

一方、(4.28)式で、 $e=1$ と置いて変形すると

$$\cos E = 1 - \frac{r}{a} \quad (4.37)$$

が得られる。(4.36)式を(4.37)式で辺々割算すると、

$$\tan E = \frac{\frac{r v}{\sqrt{\mu a}}}{1 - \frac{r}{a}} = \frac{r v \sqrt{\frac{D}{\mu}}}{1 - r D}, \quad (h=0) \quad (4.38)$$

が得られ、この式から E が計算できる。ここで、 D は(4.19)式で与えられる。

4.5.2 双曲線軌道と双曲線離心近点角(hyperbolic eccentric anomaly)

図4.3に示すように、双曲線の焦点(基準座標系の原点)を O とし、双曲線の中心(漸近線の交点)を C とする。点 A は双曲線の頂点(vertex)であり、近点位置を示す。 P は双曲線軌道上の飛行体の位置とし、 Q は P を通る長軸に対する垂線と、補助的な直角双曲線(equilateral hyperbola)との交点とすると、双曲線関数の定義から、二つの直線 CA 、 CQ と補助双曲線の弧 AQ の囲む面積 CAQ は、

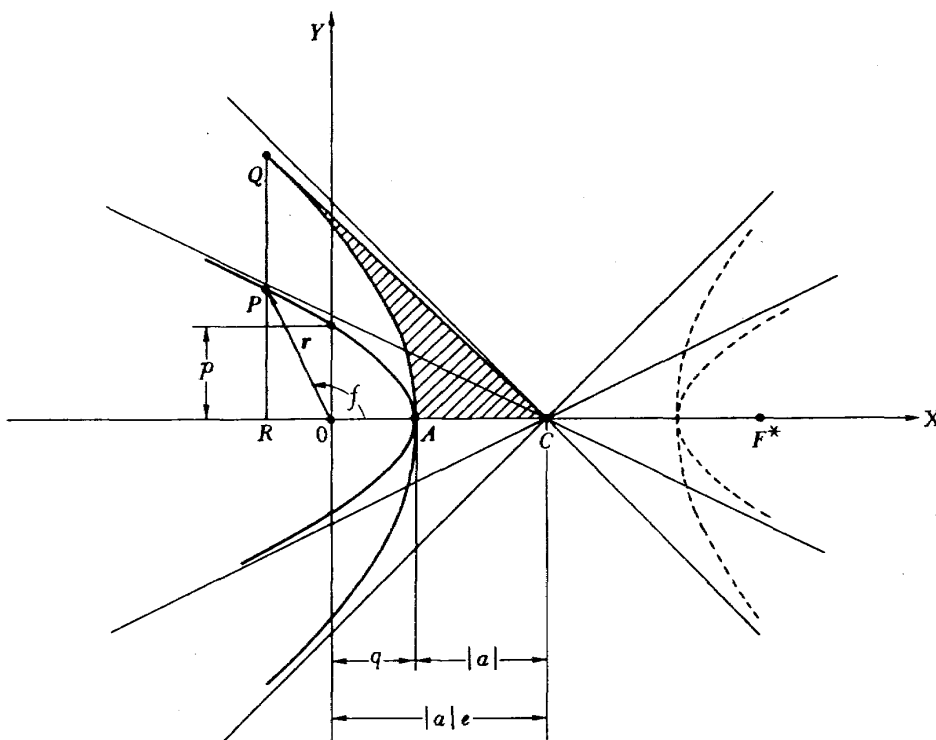


図 4.3 双曲線軌道

$$\text{面積 } CAQ = \frac{a^2}{2} F$$

であり (付録 1 参照),

$$CR = |a| \cosh F = -a \cosh F^{(*)}$$

$$PR = b \sinh F$$

$$(QR = |a| \sinh F)$$

と書き表わすことができる。また, $\angle COP$ は真近点角 f である。

図 4.3 から

$$\begin{aligned} CR &= -a \cosh F = r \cos(\pi - f) - ae \\ &= -r \cos f - ae \end{aligned}$$

従って,

$$r \cos f + ae = a \cosh F \quad (4.39)$$

となる。

(4.9') 式で, $f = \pi/2$ と置くと, 近点距離 q は

$$q = \frac{p}{1+e}$$

として表わされ, 一方, 図 4.3 から,

$$q = |a| e - |a| = -ae + a = a(1-e)$$

であるから,

$$p = q(1+e) = a(1-e^2) \quad (4.40)$$

となる。従って, (4.9') 式は

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (4.41)$$

と表わせる。

(4.41) 式を用いて, (4.39) 式から $\cos f$ を消去すると,

$$r = a(1 - e \cosh F) \quad (4.42)$$

が得られる。ここで, $a < 0$ として表示しているの、() 中の第 1 項と第 2 項が, 通常の文献とは逆になっていることに注意して置く。

(4.41) 式と (4.42) 式を等置して計算すれば,

$$\begin{cases} \cos f = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1} \\ \cos f = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{e \cosh F - 1} \end{cases} \quad (4.43)$$

及び

$$\begin{cases} \cosh F = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \\ \sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f} \end{cases} \quad (4.44)$$

なる恒等式が得られる。

楕円の場合と同様にして, 三角関数及び双曲線関数の半角の公式を用いれば, (4.33) 式と類型の次式を導くことができる。

$$\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{f}{2} \quad (4.45)$$

しかし, 逆双曲線正接関数で F を求める場合に,

$$-1 \leq \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \leq 1$$

なる制限がつき, 一般的ではないので, ここでは採用しない。

代りに, 逆双曲線正弦公式

$$\sinh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{1+x^2})$$

を用いて, (4.44) 式の第 2 式から,

$$\begin{aligned} F &= \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f} \right] \\ &= \log_e \left[\frac{e + \cos f + \sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

なる式を導く。真近点角 f が与えられれば, 上式によって双曲線離心近点角 F が計算できる。

$h = 0$ の場合は, 直線双曲線軌道 (rectilinear hyperbola) の場合で, $e = 1$, $p = 0$, $f = \pi$ であるから, (4.45) 式では, r , $d\mathbf{r}/dt$ の如何にかかわらず, 定数になってしまうので具合が悪い。

そこで, (4.13) 式に戻って, $p = h^2/\mu = a(1-e^2)$ を考慮すると,

$$\mu e \sin f = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

(4.42), (4.43) 式から,

$$\sin f = -\frac{a}{r} \sqrt{e^2 - 1} \sinh F$$

であるから,

$$\mu e \sin f = -\frac{\mu e a}{r} \sqrt{e^2 - 1} \sinh F$$

* (4.19) 式で定義したように, 双曲線の半長径 a は $a < 0$ としていることに注意。

$$= \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

従って、上式を変形して、 $e=1$ と置き、(4.35)式を考慮すれば、

$$\sinh F = \frac{rv}{\sqrt{-a\mu}} \quad (4.46)$$

が得られる。

従って、

$$F = \sinh^{-1} \left[\frac{rv}{\sqrt{-a\mu}} \right] = \log_e \left[\frac{rv + \sqrt{r^2 v^2 - a\mu}}{\sqrt{-a\mu}} \right] \quad (4.47)$$

が得られ、双曲線離心近点角 F が計算できる。

4.5.3 放物線軌道と放物線(離心)近点角(parabolic eccentric anomaly or parabolic anomaly)

図4.4で示すように、放物線の焦点(基準座標系の原点)を O とし、放物線の中心軸と準線(directrix)の交点を C とする。 A は放物線の頂点であり、近点であり、 $AO=q$ で近点距離を表わす。また、 P は放物線軌道上の飛行物体の位置を示している。放物線の場合は、焦点に立てた垂線の軌道までの距離(semi-latus rectum) p は、 $p=2q$ の関係がある。

放物線軌道の場合、楕円軌道の離心近点角 E 、あるいは、双曲線軌道の双曲線離心近点角 F のようなはっきりした補助変数は定義されていない。

そこで、計算の便宜上、次のような量を定義する。

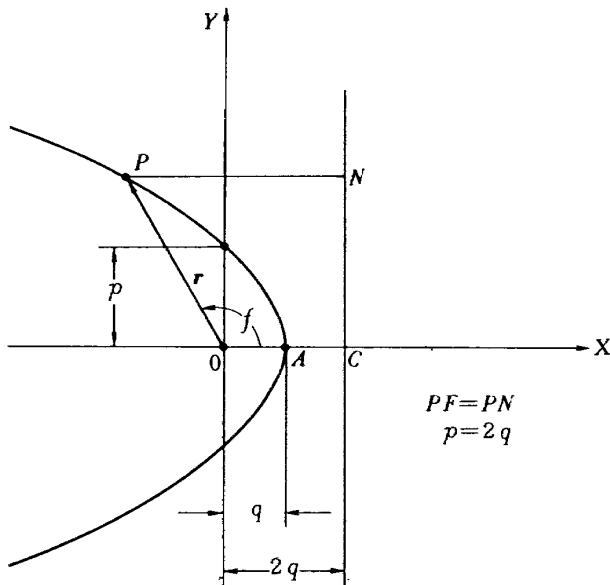


図4.4 放物線軌道

$$B \triangleq \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} \quad (4.48)$$

ここで、 B を放物線離心近点角(parabolic eccentric anomaly)、または、放物線近点角(parabolic anomaly)と呼ぶ。この定義は、S. Herrick⁵⁾ や R.M.L. Baker, Jr.⁴⁾ らによるものである。

放物線軌道では、 $e=1$ であるから、(4.9') 式は、

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \cos f} = \frac{p}{1 + \left(\cos^2 \frac{f}{2} - \sin^2 \frac{f}{2} \right)} \\ &= \frac{p}{2 \cos^2 \frac{f}{2}} = \frac{p}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{f}{2} \right) \end{aligned}$$

従って、 $p=2q$ を考慮すれば、次式を得る。

$$r = q \left(1 + \tan^2 \frac{f}{2} \right) \quad (4.49)$$

これは、放物線の軌道方程式である。

次に、(4.13) 式で、 $e=1$ と置いて、書直すと、

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} &= \frac{\sqrt{\mu} r}{h} \sin f = \frac{2\sqrt{\mu} r}{h} \sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2} \\ &= 2 \frac{\sqrt{\mu} r}{h} \cdot \frac{\sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2}}{\cos^2 \frac{f}{2} + \sin^2 \frac{f}{2}} = 2 \frac{\sqrt{\mu} r}{h} \cdot \frac{\tan \frac{f}{2}}{1 + \tan^2 \frac{f}{2}} \end{aligned}$$

ここで、上式に(4.49)式を代入すると、

$$\frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\sqrt{\mu} q}{h} \tan \frac{f}{2}$$

となる。ここで、 $p=h^2/\mu=2q$ の関係を考慮すれば、 $h=\sqrt{2\mu q}$ であるから、上式は、次のように書ける。

$$B \triangleq \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{2q} \tan \frac{f}{2} = \sqrt{p} \tan \frac{f}{2} \quad (4.50)$$

この式によって、真近点角 f が与えられれば、放物線近点角 B が計算できる。また、 f を介さなくても、 \mathbf{r} 、 $d\mathbf{r}/dt$ の成分を用いて、直接、

$$B = \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{\mu}} \quad (4.50')$$

としても計算できる。

直線軌道 (rectilinear parabola) の場合は, $h=0$ であるから, (4.23) 式を考慮すれば, (4.50') 式から,

$$B = \frac{rv}{\sqrt{\mu}}, \quad (h=0) \quad (4.51)$$

が得られる。

4.6 平均近点角 (mean anomaly)

4.6.1 楕円軌道の場合

(4.4) 式において, $d\mathbf{r}/dt$ を極座標表示すると, 次式が得られる*。

$$r^2 \frac{df}{dt} = h \quad (4.52)$$

ここで, $p = h^2/\mu = a(1-e^2)$ を考慮して, (4.28) 式を用いて r を消去して書直すと, 次式を得る。

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1-e \cos E)^2 df \quad (4.53)$$

(4.9') 式を時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{pe \sin f}{(1+e \cos f)^2} \frac{df}{dt} \\ &= \frac{ae(1-e^2) \sin f}{(1+e \cos f)^2} \frac{df}{dt} \end{aligned}$$

ここで, 上式に (4.29) 式を代入すると,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin E (1-e \cos E) \frac{dE}{dt}$$

一方, (4.28) 式を時間微分すると,

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt}$$

上の 2 式を等置して書直すと, 次式を得る。

$$df = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE$$

従って, (4.53) 式は, 次のように書ける。

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt = (1-e \cos E) dE \quad (4.54)$$

上式を積分すると,

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t-\tau) = E - e \sin E \quad (4.55)$$

が得られる。ここで, τ は近点通過時刻 (the time of pericenter passage) であり, $\sqrt{\mu/a^3} \tau$ の項が積分定数に相当している。

ここで,

$$M \triangleq n(t-\tau) \quad (4.56)$$

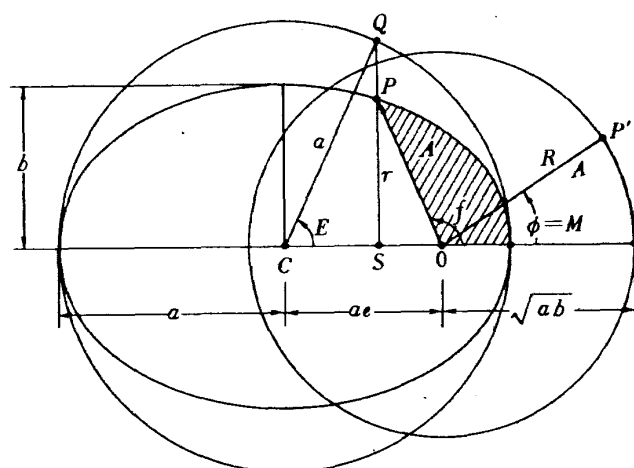
$$n \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (4.57)$$

と定義すると, (4.55) 式は,

$$M = E - e \sin E \quad (4.58)$$

となる。この式を Kepler の方程式という。 M は平均近点角 (mean anomaly), n は平均運動 (mean angular motion) と呼ばれる。

平均近点角 M の幾何学的意味を図 4.5 を用いて説明する。軌道上を飛行物体が動くにつれて, 動径ベクトルが掃引 (sweep) する面積を A (図のハッチングした部分) としたとき, 焦点 O を中心とする, 楕円と同面積の補助円を設定し, その円で面積 A の扇形を考えたときの扇形の中心角に相当する。いま,



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^f r^2 df = \frac{ab}{2} M = \pi R^2 \cdot \frac{\phi}{2\pi} = \frac{ab}{2} \phi \\ \therefore \quad \phi &= M \end{aligned}$$

図 4.5 平均近点角の幾何学的解釈

* $\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$, $d\mathbf{r}/dt = dr/dt \mathbf{i}_r + r df/dt \mathbf{i}_f$ とすると, $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = r dr/dt \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r + r^2 df/dt \mathbf{i}_h = h \mathbf{i}_h$
 $\therefore r^2 df/dt = h$, ($\because \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r = 0$, $\mathbf{i}_h = \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_f$)

この円の半径を R , 中心角を ϕ と置けば, 楕円の面積は $\pi a b$ であるから,

$$A = \pi R^2 (\phi/2\pi) = \pi a b (\phi/2\pi) = a b \phi/2 \quad (4.59)$$

である。

一方, 軌道の動径ベクトル \mathbf{r} が掃引する面積速度は

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{df}{dt} \quad (4.60)$$

で与えられる。従って, (4.28) 式を考慮すると,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^f r^2 df = \frac{a^2}{2} \int_0^f (1 - e \cos E)^2 df$$

ここで, (4.53) 式の一つ前の式を考慮すると,

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} \int_0^E (1 - e \cos E) dE \\ &= \frac{a b}{2} \int_0^E (1 - e \cos E) dE \\ &= \frac{a b}{2} (E - e \sin E) = \frac{a b}{2} M \end{aligned} \quad (4.61)$$

となる。 b は楕円の短半径で, $b = a \sqrt{1-e^2}$ である。

(4.59), (4.61) 式を等置すれば, $\phi = M$ であることがわかる。

さて, (4.60) 式は, (4.52) 式を考慮すると

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{df}{dt} = h \quad (4.62)$$

となる。なお, この式が Kepler の面積速度一定の法則 (第 2 法則) である。

ここで, 楕円軌道を一周する時間を周期 (period) P として, (4.62) 式を積分すると, 楕円の面積が計算され, 次の関係が得られる。

$$\pi a b = \frac{h}{2} P$$

ここで, $p = h^2/\mu = a(1-e^2)$, $b = a \sqrt{1-e^2}$ の関係を考慮して, 上式を変形すると

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (4.63)$$

の関係が求められ, 周期が計算できる。

また, (4.57) 式を考慮すると,

$$P = \frac{2\pi}{n} \quad (4.64)$$

となる。なお, (4.63), (4.64) 式から

$$\mu = n^2 a^3 \quad (4.65)$$

が得られる。この式は Kepler の第 3 法則と言われる式である。

また, 近点通過時刻 (time of pericenter passage) τ は, (4.56) 式から

$$\tau = t - \frac{M}{n} \quad (4.66)$$

として計算できる。

直線軌道 (rectilinear ellipse) の場合には, Kepler 方程式は, $e = 1$ と置いて

$$M = E - \sin E, \quad (h=0) \quad (4.67)$$

とすればよい。平均運動, 周期, 近点通過時刻の諸式は, 直線軌道の場合も, そのまま成立する。

4.6.2 双曲線軌道の場合

楕円軌道の場合と同様, (4.52) 式から出発する。

ここで, $p = h^2/\mu = a(1-e^2)$ を考慮する際に, $a < 0$, $e > 1$ であることに注意すると,

$$h = \sqrt{\mu a (1-e^2)} = \sqrt{-\mu a} \sqrt{e^2 - 1}$$

であるから, (4.52) 式は, 書き直すことができる。

$$r^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{-\mu a} \sqrt{e^2 - 1} \quad (4.68)$$

(4.42) 式を用いて r を消去して書直すと,

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} dt = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} (1 - e \cosh F)^2 df \quad (4.69)$$

となる。

(4.9') 式を時間微分して, (4.43) 式を代入すると,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ae}{\sqrt{e^2 - 1}} \sinh F (1 - e \cosh F) \frac{dF}{dt}$$

一方, (4.42) 式を時間微分すると

$$\frac{dr}{dt} = -ae \sinh F \frac{dF}{dt}$$

上の 2 式を等置して書直すと,

$$dF = \frac{-\sqrt{e^2 - 1}}{1 - e \cosh F} dF$$

従って, (4.69) 式は, 次のように書ける。

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} dt = (e \cosh F - 1) dF \quad (4.70)$$

上式を積分すると

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} (t-\tau) = e \sinh F - F \quad (4.71)$$

が得られる。

楕円の場合と同様に、

$$M \triangleq n(t-\tau) \quad (4.72)$$

$$n \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} \quad (4.73)$$

と定義すると、(4.71)式は、

$$M = e \sinh F - F \quad (4.74)$$

と書ける。この式は双曲線軌道に対する、Kepler 方程式に対応する方程式であり、これにより平均近点角 M が、双曲線離心近点角 F から計算できる。

4.2 節で述べたように、長半径に符号を導入したために負号が入るだけで、平均運動 n の (4.73) 式は楕円の場合の (4.57) 式と全く同一内容である。

双曲線軌道は開かれた軌道なので、周期 P は考えにくい、一応の目安として、(4.64) 式で計算できる。また、近点通過時刻は (4.66) 式から計算できる。

直線軌道 (rectilinear hyperbola) の場合には、(4.74) 式で、 $e=1$ と置いて、

$$M = \sinh F - F, \quad (h=0) \quad (4.75)$$

として計算すればよい。平均運動、周期、近点通過時刻に関しては、通常、双曲線軌道の場合と同じである。

4.6.3 放物線軌道の場合

放物線の場合、 $e=1$ であるから、(4.9') 式は

$$r = \frac{p}{1+\cos f} = \frac{p}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{f}{2} \right) = \frac{p}{2} \sec^2 \frac{f}{2} \quad (4.76)$$

と変形できる。

$p = h^2/\mu$ の関係を考慮すると、(4.52) 式は、

$$r^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{\mu p}$$

となり、(4.76) 式を代入して変形すると

$$4 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \sec^4 \frac{f}{2} df \quad (4.77)$$

となる。積分すると次式が得られる。

$$2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t-\tau) = \tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \quad (4.78)$$

この式は Barker の方程式と呼ばれ、 f を引数とした表 (Barker 表) ができており、放物線軌道の彗星の位置計算に用いられている。

ここで、(4.50) 式で定義した放物線 (離心) 近点角 (parabolic eccentric anomaly, or parabolic anomaly) を用いて、(4.78) 式を書き換えると、

$$\sqrt{\mu} (t-\tau) = \frac{p}{2} B + \frac{1}{6} B^3 \quad (4.79)$$

あるいは、近点距離 (pericenter distance) $q (=p/2)$ を用いて、

$$\sqrt{\mu} (t-\tau) = q B + \frac{1}{6} B^3 \quad (4.79')$$

となる。ここで、

$$B = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \sqrt{p} \tan \frac{f}{2} = \sqrt{2q} \tan \frac{f}{2}$$

である。

ここで、

$$M \triangleq n(t-\tau) \quad (4.80)$$

$$n \triangleq \sqrt{\mu} \quad (4.81)$$

と定義すると、(4.79) 式は、

$$M = \frac{p}{2} B + \frac{1}{6} B^3 \quad (4.82)$$

$$= q B + \frac{1}{6} B^3 \quad (4.82')$$

と書ける。この式は Barker の方程式の別表現であり、放物線軌道に対する、Kepler 方程式に対応する式である。この表現は q の値が小さい場合にも有効であり、直線軌道 (rectilinear parabola) にも同じ定義と同じ方程式を使うことができる。

ただし、楕円や双曲線の場合、 E , F , M は無次元量であり、 n の次元は $[T^{-1}]$ であるのに対して、放物線の場合には、 B の次元は $[L^{1/2}]$, M の次元は $[L^{3/2}]$, n の次元は $[L^{3/2} T^{-1}]$ であることに注意を要する。

近点通過時刻 (time of pericenter passage) は、楕円、双曲線の場合と同じく (4.66) 式で計算できる。

即ち,

$$\tau = t - \frac{M}{n}$$

を用いればよい。なお、周期に関しては、開かれた軌道なので計算しても無意味である。

なお、直線軌道の場合は、(4.50), (4.79) 式が簡略化されて,

$$M = \frac{1}{6} B^3, \quad (h=0) \quad (4.83)$$

$$B \triangleq \frac{\tau v}{\sqrt{\mu}}, \quad (h=0) \quad (4.84)$$

となる。

5. 軌道要素の計算手順

本章では、ある時刻 t における宇宙飛行体、あるいは天体の位置ベクトル \mathbf{r} 、及び速度ベクトル $d\mathbf{r}/dt$ が与えられたとき、その軌道要素 $a, e, i, \Omega, \omega, M$ 、その他を求める計算手順について述べる。軌道要素は、通常 $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ 、または $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau)$ の6つの量で表わされる。 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ の6変数成分では、軌道の形状、大きさ、基準座標系における空間的配置を明確に知ることはできないので、軌道要素の6要素に変換する必要がある場合が多い。

軌道の形状と適用例との対応は、次の通りである。

楕円軌道 : 人工衛星軌道

($e < 1$) 惑星、小惑星、周期彗星の軌道

放物線軌道 : 彗星軌道

($e = 1$) 惑星間飛行体の脱出軌道

双曲線軌道 : 惑星間飛行体軌道

($e > 1$) 彗星軌道 (殆んど, $e \simeq 1$)

直線軌道 : 彗星軌道

($e = 1$)

本章に述べる計算手順は、与えられた $\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt$ から計算して行く過程において、自動的に上述の軌道の種類 (形状) を決定し、振分けて軌道要素を求めて行く計算公式の体系を提案するものである。

計算の順序、使用する公式の選択等に関しては、計算機を用いるという立場から、次の点に留意した。

1) 電子計算機の中では、計算誤差によって、恒

等式は必ずしも恒等式とはならないので、二次的、三次的な計算量を用いずに、できるだけ $\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt$ を用いるような公式を選択する。

2) 理論的には不定 (任意) となる量を、計算の便宜上、ある特定値に定義することにより、自動的に計算を続行できるように配慮する。

3) 使用公式中で、値が0か否かを判定する箇所は、計算上では十分小さな値 ϵ と比較して、絶対値が ϵ より小さければ0と判定する。

4) 理論上は、一つの公式に統一できる場合でも、計算するまでもないときは、値を設定する形式を採用する。

以上の諸点を考慮すると、軌道要素の計算手順は、以下のようになる。

(1) 予備的計算

$$r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$v^2 = |d\mathbf{r}/dt|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (5.2)$$

(2) 角運動量成分の計算

$$\begin{cases} h_x = y\dot{z} - z\dot{y} \\ h_y = z\dot{x} - x\dot{z} \\ h_z = x\dot{y} - y\dot{x} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\bar{h}^2 = h_x^2 + h_y^2 \quad (5.4)$$

$$h^2 = \bar{h}^2 + h_z^2 \quad (5.5)$$

$$\bar{h} = (h_x^2 + h_y^2)^{1/2} \quad (5.6)$$

$$h = (\bar{h}^2 + h_z^2)^{1/2} \quad (5.7)$$

(3) 昇交点経度 Ω の計算

$$1) \quad h \neq 0, \quad \bar{h} \neq 0 \quad (|h| > \epsilon_h, |\bar{h}| > \epsilon_h)$$

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{-h_y} \right) \quad (5.8.1)$$

$$2) \quad h \neq 0, \quad \bar{h} = 0 \quad (|h| > \epsilon_h, |\bar{h}| \leq \epsilon_h)$$

$$\Omega \triangleq 0 \quad (5.8.2)$$

$$3) \quad h = 0 \quad (|h| \leq \epsilon_h)$$

$$\Omega \triangleq 0 \quad (5.8.3)$$

註 逆正接は主値ではなく、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で θ が求められる組込関数を用いる。

(4) 軌道傾斜角 i の計算

$$1) \quad h \neq 0, \quad \bar{h} \neq 0 \quad (|h| > \epsilon_h, \quad |\bar{h}| > \epsilon_h)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{h}}{h_z} \right) \quad (5.9.1)$$

$$2) \quad h \neq 0, \quad \bar{h} = 0 \quad (|h| > \epsilon_h, \quad |\bar{h}| \leq \epsilon_h)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{h}}{h_z} \right) \triangleq \begin{cases} 0 & (h_z > 0) \\ \pi & (h_z < 0) \end{cases} \quad (5.9.2)$$

$$3) \quad h=0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0 \quad (|h| \leq \epsilon_h, \quad |y| > \delta, \quad |z| > \delta)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right) \quad (5.9.3)$$

$$4) \quad h=0, \quad y \neq 0, \quad z=0 \quad (|h| \leq \epsilon_h, \quad |y| > \delta, \quad |z| \leq \delta)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right) \triangleq \begin{cases} 0 & (y > 0) \\ \pi & (y < 0) \end{cases} \quad (5.9.4)$$

$$5) \quad h=0, \quad y=0, \quad z \neq 0 \quad (|h| \leq \epsilon_h, \quad |y| \leq \delta, \quad |z| > \delta)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right) \triangleq \begin{cases} \pi/2 & (z > 0) \\ -\pi/2 & (z < 0) \end{cases} \quad (5.9.5)$$

$$6) \quad h=0, \quad y=0, \quad z=0 \quad (|h| \leq \epsilon_h, \quad |y| \leq \delta, \quad |z| \leq \delta)$$

$$i \triangleq \frac{\pi}{2} \quad (5.9.6)$$

註 1 逆正接に関しては(3)の場合と同じ。

註 2 1), 2)は通常の軌道, 3)~6)は直線軌道。

註 3 ϵ_h, δ は微小量。

註 4 (5.9.3), (5.9.4), (5.9.5)式は, 理論上は1つの式に統一できる。即ち

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right), \quad \begin{pmatrix} y \neq 0 \\ y=0, \quad z \neq 0 \end{pmatrix} \quad (5.9.7T)$$

(5) 緯度引数 $\theta = \omega + f$ の計算

$$1) \quad \sin i \neq 0 \quad (|\sin i| > \epsilon)$$

$$\theta = \omega + f = \tan^{-1} \left[\frac{\left(\frac{z}{\sin i} \right)}{x \cos \varrho + y \sin \varrho} \right] \quad (5.10.1)$$

$$2) \quad \sin i = 0 \quad (|\sin i| \leq \epsilon, \quad \text{即ち } i=0 \text{ or } \pi)$$

$$\theta = \omega + f = \tan^{-1} \left[\frac{y}{x} \right] \quad (5.10.2)$$

註 ϵ は微小量(無次元)

(6) 判別式 D の計算(軌道形状の判別)

$$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) \left(= \frac{1}{a} \right) \quad (5.11)$$

$$\text{註 1} \quad D = \frac{1}{a} \quad \begin{cases} > 0 & \text{楕円軌道} \\ = 0 & \text{放物線軌道} \\ < 0 & \text{双曲線軌道} \end{cases}$$

註 2 μ は重力定数であり, 次式で定義される。

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

ここで, G は万有引力定数, m_1 は中心天体の質量, m_2 は飛行物体の質量である。 $m_2 \ll m_1$ のときは, $\mu \approx Gm_1$ と近似できる。

(7) 半直弦 p の計算

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (5.12)$$

註 $p > \delta$ なら通常の軌道(ステップ(8)へ)

$p \leq \delta$ なら直線軌道(ステップ(8R)へ)

<通常の軌道の場合>

(8) 離心率 e の計算

$$1) \quad |D| > \epsilon_D \quad (\text{楕円または双曲線軌道})$$

$$e = \sqrt{1 - pD} \quad \left(= \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \right) \quad (5.13.1)$$

$$2) \quad |D| \leq \epsilon_D \quad (\text{放物線軌道})$$

$$e \triangleq 1 \quad (5.13.2)$$

註 ϵ_D は微小量

(9) 真近点角 f の計算

$$1) \quad e \neq 0 \quad (|e| > \epsilon)$$

$$f = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{h}{\mu} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{p - r} \right] \quad (5.14.1)$$

$$2) \quad e = 0 \quad (|e| \leq \epsilon, \quad \text{円軌道})$$

$$f \triangleq \theta \quad (5.14.2C)$$

$$\text{註 1} \quad x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

註 2 円軌道の場合は, θ は確定するが, 近点引数 ω は任意となる。従って f も $f = \theta - \omega$ の範囲で任意となるので, 計算上 $f = \theta$ と定義する。

(10) 長半径 a の計算

- 1)
- $|D| > \epsilon_D$
- (楕円, 双曲線)

$$a = \frac{1}{D} \left(= \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)^{-1} \right) \quad (5.15.1)$$

- 2)
- $|D| \leq \epsilon_D$
- (放物線)

$$a \triangleq q = \frac{p}{2} \quad (5.15.2)$$

註1 放物線軌道の場合は, 近点距離 q をもって, 長半径 a の代りにする。

註2 長半径 a に符号を考慮して, $a > 0$ なら楕円軌道, $a < 0$ なら双曲線軌道と定義する。

- (1) 離心近点角
- E
- の計算

- 1) 楕円軌道

- i)
- $f \neq \pi$
- (
- $|f - \pi| > \epsilon$
-)

$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \right) \quad (5.16.1)$$

- ii)
- $f = \pi$
- (
- $|f - \pi| \leq \epsilon$
-)

$$E = \pi \quad (5.16.2)$$

- 2) 双曲線軌道

$$E \triangleq F = \log_e \left[\frac{e + \cos f + \sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f} \right] \quad (5.17)$$

- 3) 放物線軌道

$$E \triangleq B = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{\mu}} \left(= \sqrt{p} \tan \frac{f}{2} \right) \quad (5.18)$$

註 (5.17)式は(4.45)式, (5.18)式は(4.50)式をそれぞれ参照せよ。

- (2) 平均近点角
- M
- の計算

- 1) 楕円軌道

$$M = E - e \sin E \quad (5.19)$$

- 2) 双曲線軌道

$$M = e \sinh E - E, \quad (E \triangleq F) \quad (5.20)$$

- 3) 放物線軌道

$$M = \frac{p}{2} E + \frac{1}{6} E^3, \quad (E \triangleq B) \quad (5.21)$$

註1 (5.19)式は(4.58)式, (5.20)式は(4.74)式で, $F = E$ と置いたもの, (5.21)式は(4.82)

式で, $B = E$ と置いたものである。

註2 (5.19), (5.20)式の M の次元は無次元,

(5.21)式の M の次元は $[L^{3/2}]$ である。

- (13) 平均運動
- n
- の計算

- 1) 楕円軌道

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (5.22)$$

- 2) 双曲線軌道

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} \quad (5.23)$$

- 3) 放物線軌道

$$n = \sqrt{\mu} \quad (5.24)$$

註 (5.22), (5.23)式では, n の次元は $[T^{-1}]$,

(5.24)式では n の次元は $[L^{3/2} T^{-1}]$ である。

- (14) 近点通過時刻
- τ
- の計算

$$\tau = t - \frac{M}{n} \quad (5.25)$$

- (15) 近点引数
- ω
- の計算

$$\omega = \theta - f \quad (5.26)$$

<直線軌道の場合>

- (8R) 離心率
- e
- の計算

$$e \triangleq 1 \quad (5.27)$$

註 直線軌道 (rectilinear arbit) の場合, 楕円, 双曲線軌道では $e \neq 1$, 放物線軌道では $e = 1$ である。

- (9R) 真近点角
- f
- の計算

$$f = \pi \quad (5.28)$$

註 (4.9)式から,

$$h^2 = \mu r (1 + e \cos f)$$

となり, $h=0$, $e=1$, $r \neq 0$ であるから,

$$\cos f = -1 \quad \therefore f = \pi$$

となる。

- (10R) 長半径
- a
- の計算

$$1) \quad |D| > \varepsilon_D$$

$$a = \frac{1}{D} \quad (5.29)$$

$$2) \quad |D| \leq \varepsilon_D$$

$$a \triangleq q = \frac{p}{2} = 0 \quad (5.30)$$

(11R) 離心近点角 E の計算

1) 楕円軌道

$$E = \tan^{-1} \left[\frac{rv \sqrt{\frac{D}{\mu}}}{1 - rD} \right] \quad (5.31)$$

2) 双曲線軌道

$$E \triangleq F = \log_e \left[\frac{rv + \sqrt{(rv)^2 - a\mu}}{\sqrt{-a\mu}} \right] \quad (5.32)$$

3) 放物線軌道

$$E \triangleq B = \frac{rv}{\sqrt{\mu}} \quad (5.33)$$

(12R) 平均近点角 M の計算

1) 楕円軌道

$$M = E - \sin E \quad (5.34)$$

2) 双曲線軌道

$$M = \sinh E - E \quad (E \triangleq F) \quad (5.35)$$

3) 放物線軌道

$$M = \frac{1}{6} E^3 \quad (E \triangleq B) \quad (5.36)$$

註 1 直線軌道の場合、 $e=1$, $p=0$ であるから、理論上は、(5.34) 式は (5.19) 式に、(5.35) 式は (5.20) 式に、(5.36) 式は (5.21) 式に統合できる。

註 2 ステップ(12)の註 2 に同じ。

(13R) 平均運動 n の計算

ステップ(13)の計算に同じであるから、ステップ(13)に戻る。

なお、判定のための微小量 ε_h , δ , ε_D , ε に関しては、二倍長計算で、一応

$$\varepsilon_h = \delta = \varepsilon_D \approx 0.1 \times 10^{-15}$$

$$\varepsilon = 0.1 \times 10^{-4}$$

程度に設定しておけばよい。この数値に関しては、まだ検討の余地が残っている。

また、参考のために、付録 2 に軌道要素の計算手順のフローチャートを、付録 3 に採用した計算公式の一覧表をつけておく。

6. あとがき

位置天文学、天体力学の分野では、惑星、小惑星、周期彗星の軌道解析には楕円軌道論が用いられ、これには Kepler 以来の伝統があり、人工衛星の軌道解析に連なっている。また、多くの非周期彗星の軌道解析の中心は放物線軌道論である。彗星のなかには双曲線軌道をとるものも存在するが、離心率が殆んど 1 に近い軌道、即ち、放物線軌道に極めて近い軌道をとっている。天体力学においては、対象によって軌道の形状が明確に区別されているが、宇宙工学の分野では、人工衛星は楕円軌道で処理できるが、惑星間飛行体の場合は、待期軌道は楕円軌道、脱出軌道は放物線軌道、惑星間軌道は双曲線軌道と、飛行の各フェーズにおいて軌道の形状が変化して行く。

本報告では、楕円軌道、双曲線軌道、放物線軌道の極限 ($e \rightarrow 1$) の形として、主として彗星軌道に適用される直線軌道 (rectilinear orbit) をも含んだ形で、ある時刻 t における飛行物体の位置ベクトル \mathbf{r} 、及び速度ベクトル \mathbf{v} が与えられたとき、そのデータに基き計算を行ない、計算過程において、軌道の形態を判定し、接触軌道要素を求めるシステムティックを計算手順の体系を報告するものである。個々の式は全て先人の業績であるが、与えられたデータに基づき軌道要素を計算し、かつ、軌道の形態を決定して行く計算アルゴリズムの体系は、著者の提案である。この体系は、唯一解である保証はないが、少くとも一つの解である。

ここで提案する計算アルゴリズムの体系を構築するに当たって留意した点は、以下の通りである。

- (1) 軌道要素のそれぞれを与える公式には、それと等価な表現が種々あるが、理論的には等価であつても、電子計算機による計算においては、恒等式は必ずしも恒等式ではないので、できる

限り，2次，3次計算量を用いずに， \mathbf{r} ， $\dot{\mathbf{r}}$ を用いるような表現の式を採用した。つまり，計算誤差による桁落ちを防ぐためである。

(2) 理論上は不定（任意）となるような量を，計算の便宜上，ある値に定義して統一的に計算が継続できるようにした。

(3) 観測点の位置，観測方向と関連して，軌道のフェーズによっては，位置ベクトル \mathbf{r} と速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ が，殆んど同一直線上にあるように観測される場合があり，その場合，角運動量ベクトル \mathbf{h} が0と計算される場合があるので，直線軌道も考慮するようにした。

本報告は，航技研における多年にわたる軌道解析，軌道推定の研究により得られたノウハウの一端を，軌道要素の計算という形でまとめて報告するもので，まだ完全とはいえないが，何らかの参考にはなるかと思う。

参考文献

- 1) R. H. Battin ; Astronautical Guidance, McGraw-Hill, New York, (1964).
- 2) P. R. Escobal ; Methods of Orbit Determination, John Wiley & Sons, Inc. New York, (1965).
- 3) R. M. L. Baker, Jr. and M. W. Makeson; An Introduction to Astrodynamics (2nd Edition), Academic Press, New York (1967).
- 4) R. M. L. Baker, Jr. ; Astrodynamics, Academic Press, (1967).
- 5) S. Herrick ; Astrodynamics Vol.1, Van Nostrand Reinhold Co., London, (1967).
- 6) S. Herrick ; Astrodynamics Vol.2, Van Nostrand Reinhold Co., London, (1967).
- 7) A. E. Roy ; Orbital Motion, Adam Hilger, Ltd., Bristol, (1978).
- 8) 長沢工；天体の位置計算 増補版，地人書館（1985）。
- 9) 武内澄夫；地球の人工衛星の軌道運動に関する研究，航技研報告 TR-807，（1984）。

位置 P から軌道の長軸に立てた垂線 PR の延長が、補助双曲線の等辺双曲線 ($|a|=b$, 直角双曲線) と交わる点を Q としたとき、漸近線の交点 C と Q を結ぶ直線と補助双曲線の弧と、 C と軌道の近点 A を結ぶ直線に囲まれた図形の面積 CAQ を2倍して、軌道長半径の二乗で割った値で定義されるということが、一つの幾何学的解釈である。なお Escobal (参考文献2, pp.89~90) は、軌道上の飛行体の位置 P と漸近線の交点 C を結んだ直線と軌道の弧と、 C と軌道近点 A を結ぶ直線に囲まれた図形の面積 CAP を考え、

$$F = 2 \times \text{面積} CAP / a^2$$

と定義しているが、上述の計算からすぐわかるように、

$$\text{面積} CAP = \frac{|a|b}{2} F$$

であるから、Escobal の定義は明らかに不注意な誤りである。

ここで、 F の別の幾何学的解釈について述べる。図A1でわかるように、漸近線の交点 C を中心に半径 $|a|$ の補助円を描くと、その円は近点で双曲線に接する。双曲線軌道上の飛行体の位置 P から、軌道長軸に垂線 PR を立て、その足 R から補助円に接線 RN を引き、接点を N とし、扇形 CNA の中心角を φ とすると、図からわかるように、

$$\cosh F = \sec \varphi \quad (\text{A8})$$

$$\sinh F = \tan \varphi \quad (\text{A9})$$

従って、

$$\tanh F = \sin \varphi \quad (\text{A10})$$

さらに、

$$\tanh \frac{F}{2} = \tan \frac{\varphi}{2} \quad (\text{A11})$$

が与えられる。

表A1 Gudermann関数 (Gudermannian) 表

F	$\varphi = gd F$ rad.
0.0	0.00000 (0.0°)
0.1	0.09948 (5.7°)
0.2	0.19897 (11.4°)
0.3	0.29496 (16.9°)
0.4	0.38921 (22.3°)
0.5	0.47997 (27.5°)
0.6	0.56723 (32.5°)
0.7	0.64926 (37.2°)
0.8	0.72606 (41.6°)
0.9	0.79762 (45.7°)
1.0	0.86568 (49.6°)
1.5	1.13097 (64.8°)
2.0	1.30202 (74.6°)
∞	1.57080 (90.0°)

F そのものは図示できないが、図A1に示す φ と密接に結びついていることがわかる。 F と φ の関係は、

$$\varphi = \sin^{-1}(\tanh F) = gd F \quad (\text{A12})$$

で表わされ、 $gd F$ は F の Gudermann関数* (Gudermannian) と言われ、これは C. Gudermann (1798~1851) が双曲線関数を三角関数で表わすのに考え出したものである。付表A-1に、Gudermann関数の概略値を参考のために示しておく。

また、図A1からわかるように、補助円の接点 N は、補助双曲線と垂線 PR の延長との交点 Q を考え、垂線の足 R を中心に半径 $RQ (=|a| \sinh F)$ の円弧を描いたときの円弧と補助円との交点になっていることは、 $\triangle CNR$ に三平方の定理を適用すれば明らかである。

なお、 F の幾何学的意味として、図A1で示す中心角 φ そのものを F であると記述した文献**があるが、これも明らかに不注意による誤りである。

* 数学辞典(第2版), 岩波書店, (1968), p.679

** 例えば, 虎尾正久, 宇宙航行の数学, 森北出版, (1970), p.17

付録 2 軌道要素計算手順のフローチャート

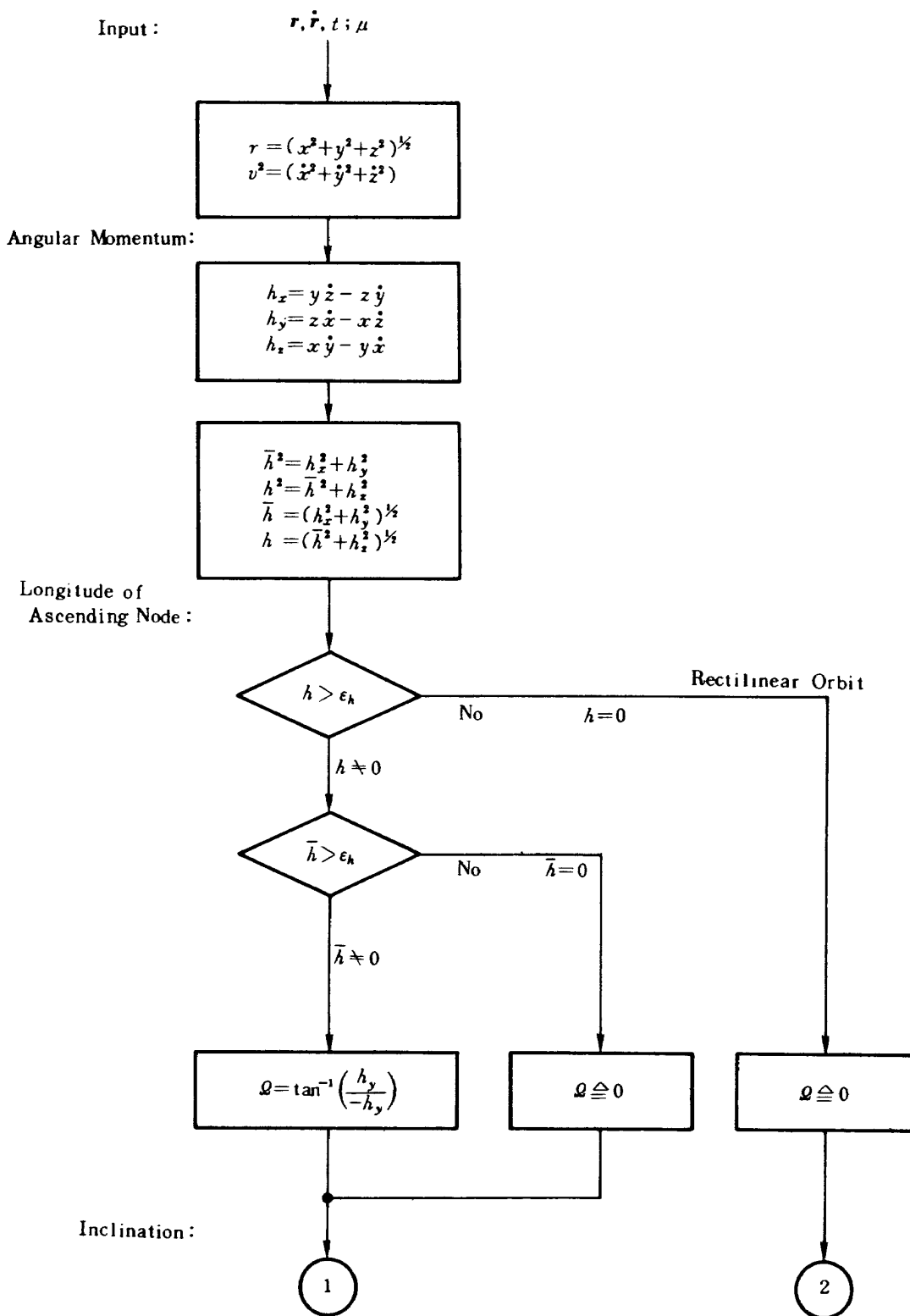


図 A2 (1) 軌道要素計算手順(1)

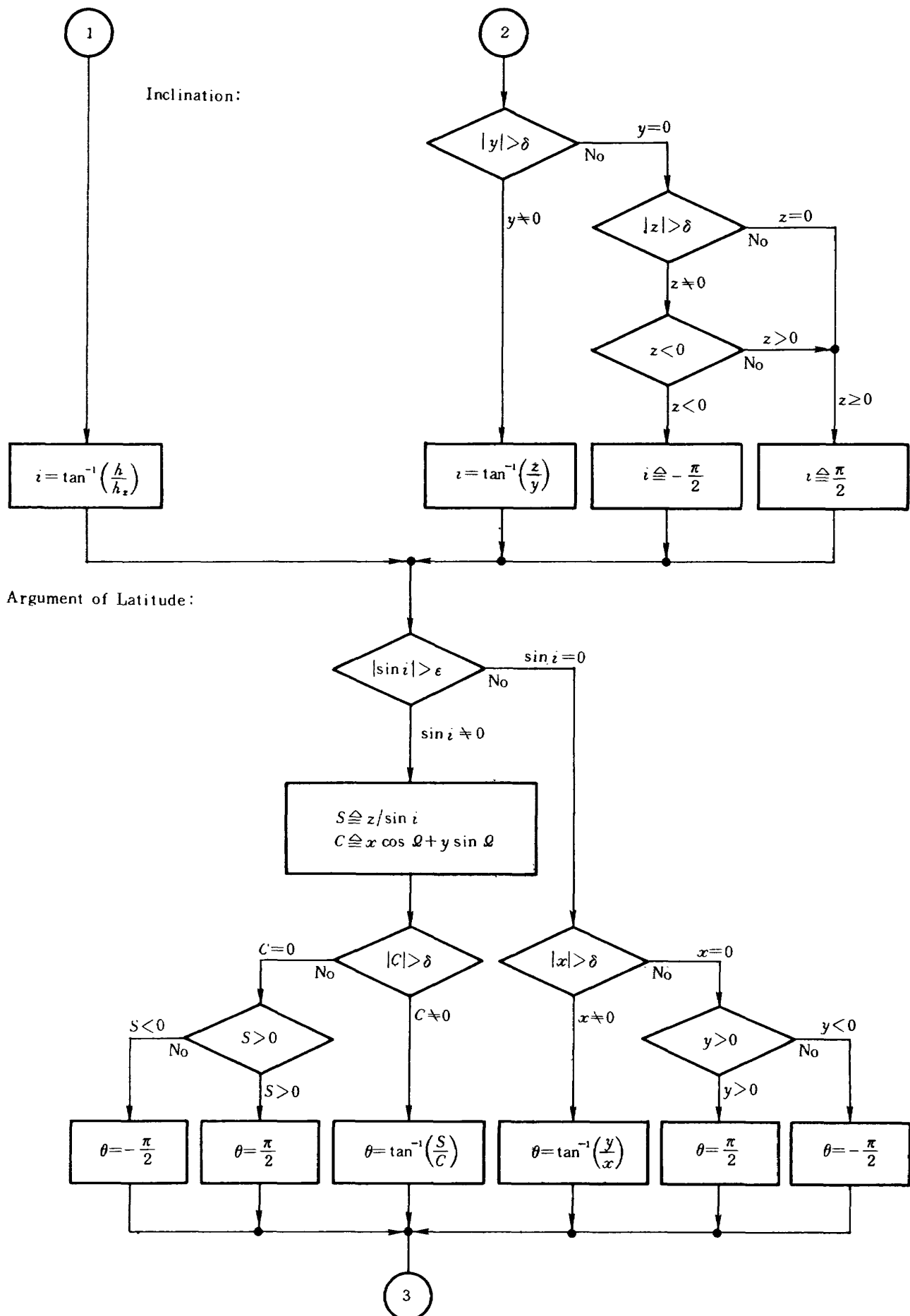


図 A2 (2) 軌道要素計算手順(2)

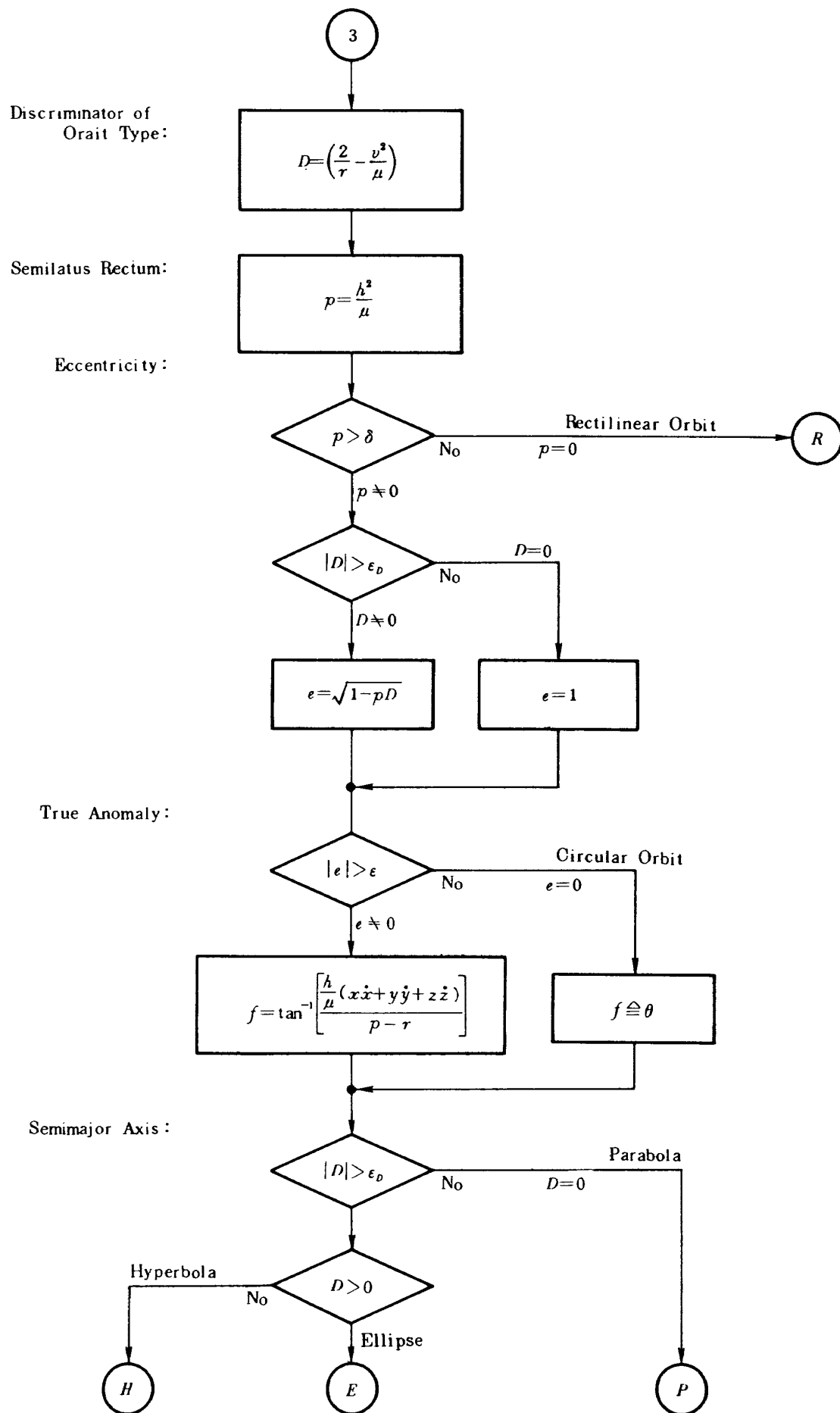
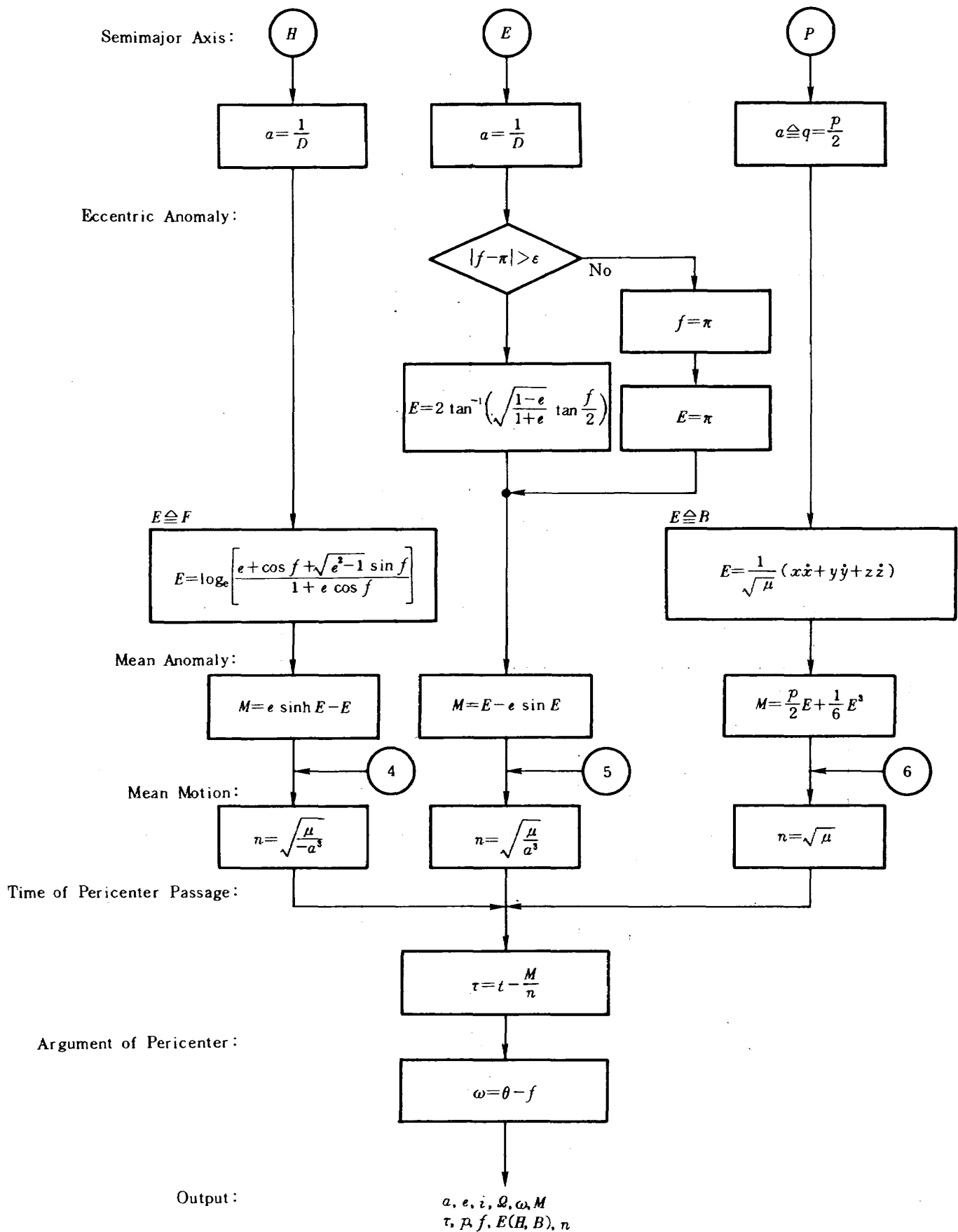


図 A 2 (3) 軌道要素計算手順(3)



図A2(4) 軌道要素計算手順(4)

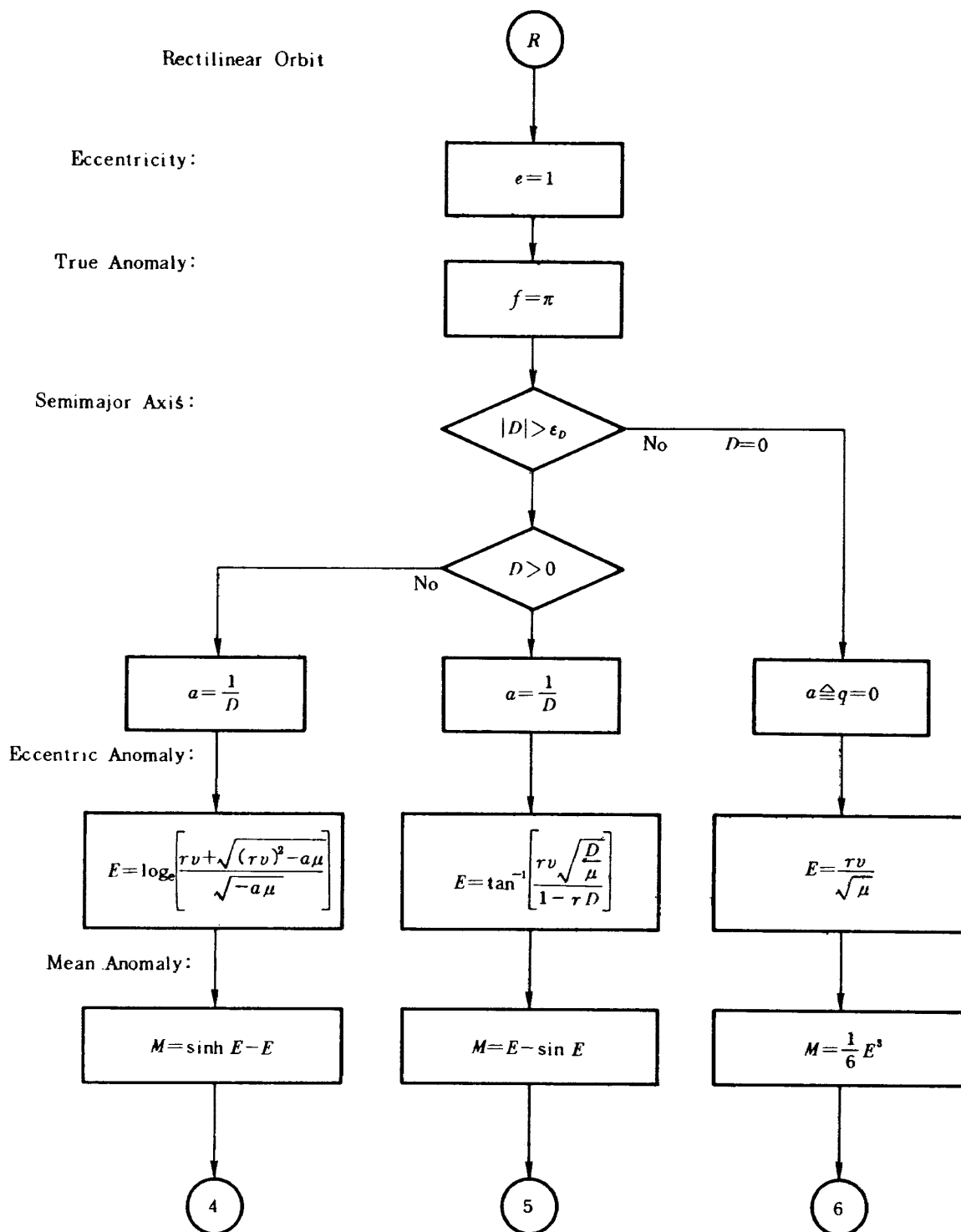


図 A2 (5) 軌道要素計算手順 (5)

付録3 計算公式一覧

表A 3.1 通常軌道の公式

	楕円軌道	双曲線軌道	放物線軌道
角運動量 h	$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \bar{h} &= (h_x^2 + h_y^2)^{1/2} \\ h &= (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{1/2} \end{aligned}$		
昇交点経度 ϱ	$\varrho = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{-h_y} \right) \quad (h \neq 0, \bar{h} \neq 0)$ $\varrho \triangleq 0 \quad (h \neq 0, \bar{h} = 0)$		
軌道傾斜角 i	$i = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{h}}{h_z} \right)$		
緯度引数 θ	$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \left[\frac{(z/\sin i)}{x \cos \varrho + y \sin \varrho} \right] & (\sin i \neq 0) \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (\sin i = 0) \end{cases}$		
半直弦 p	$p = \frac{h^2}{\mu}$	$p = \frac{h^2}{\mu}$	$p = \frac{h^2}{\mu} = 2q$
軌道形状判別式 D	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) > 0$	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) < 0$	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) = 0$
離心率 e	$e = \sqrt{1 - pD} < 1$	$e = \sqrt{1 - pD} > 1$	$e = 1$
軌道長半径 a	$a = \frac{1}{D} > 0$	$a = \frac{1}{D} < 0$	$a \triangleq q = \frac{p}{2}$
近点距離 q	$q = a(1 - e)$	$q = a(1 - e)$	$q = \frac{p}{2}$
真近点角 f	$f = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{h}{\mu} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{p - r} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{h}{\mu} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{p - r} \right] \quad (e \neq 0)$ $f \triangleq \theta \quad (e = 0)$		
離心近点角 E, F, B	$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \right)$	$F = \log_e \left[\frac{e + \cos f + \sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f} \right]$	$B \triangleq \frac{\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)}{\sqrt{\mu}} \equiv \sqrt{2q} \tan \frac{f}{2}$
平均近点角 M	$M = E - e \sin E$	$M = e \sinh F - F$	$M = \frac{p}{2} B + \frac{1}{6} B^3$
平均運動 n	$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$	$n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}$	$n = \sqrt{\mu}$
近点通過時刻 τ	$\tau = t - \frac{M}{n}$		
近点引数 ω	$\omega = \theta - f$		
軌道半径 r	$r = a(1 - e \cos E)$	$r = a(1 - e \cosh F)$	$r = \frac{1}{2} (p + B^2)$

表 A 3.2 直線軌道の公式

	楕円軌道	双曲線軌道	放物線軌道
角運動量 h	$h = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0, \quad h \neq 0$		
昇交点経度 ϱ	$\varrho \triangleq 0$		
軌道傾斜角 i	$i = \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right)$		
緯度引数 θ	$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{z/\sin i}{x} \right) & (\sin i \neq 0) \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (\sin i = 0) \end{cases}$		
半直弦 p	$p \neq 0$		
軌道形状判別式 D	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) > 0$	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) < 0$	$D = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) = 0$
離心率 e	$e \neq 1$	$e \neq 1$	$e = 1$
軌道長半径 a	$a = \frac{1}{D} > 0$	$a = \frac{1}{D} < 0$	$a \triangleq q = \frac{p}{2} \neq 0$
近点距離 q	$q \neq 0$		
真近点角 f	$f \neq \pi$		
離心近点角 E, F, B	$E = \tan^{-1} \left[\frac{rv \sqrt{D/\mu}}{1 - rD} \right]$	$F = \log_e \left[\frac{rv + \sqrt{(rv)^2 - a\mu}}{\sqrt{-a\mu}} \right]$	$B = \frac{rv}{\sqrt{\mu}}$
平均近点角 M	$M = E - \sin E$	$M = \sinh F - F$	$M = \frac{1}{6} B^3$
平均運動 n	$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$	$n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}$	$n = \sqrt{\mu}$
近点通過時刻 τ	$\tau = t - \frac{M}{n}$		
近点引数 ω	$\omega = \theta - f$		
動 径 r	$r = a (1 - \cos E)$	$r = a (1 - \cosh F)$	$r = \frac{1}{2} B^2$

航空宇宙技術研究所資料614号

平成元年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話 三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182

印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
