

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-636

クオータニオンとオイラー角による
キネマティックス表現の比較について

山 口 功 ・ 木 田 隆

岡 本 修 ・ 狼 嘉 彰

1991年6月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

概 要	1
1. はじめに	2
2. 座標系とベクトルの定義	2
3. 方向余弦行列 (DCM)	4
3.1 DCM の定義	4
3.2 オイラー角による DCM 表現	4
3.3 DCM からオイラー角への変換	5
3.4 1軸回転による DCM 表現	6
3.5 DCM から1軸回転への変換	7
4. クォータニオン	7
4.1 クォータニオンによる DCM 表現	7
4.2 DCM からクォータニオンへの変換	8
4.3 その他のクォータニオンの性質	8
5. 角速度ベクトル	9
5.1 角速度の定義	9
5.2 角速度ベクトルとオイラー角の関係	10
5.3 角速度ベクトルとクォータニオンの関係	11
6. 剛体の運動方程式	13
6.1 オイラー角による運動方程式	13
6.2 クォータニオンによる運動方程式	14
7. おわりに	15
参考文献	15

クオータニオンとオイラー角による キネマティックス表現の比較について*

山 口 功*¹ 木 田 隆*¹
岡 本 修*¹ 狼 嘉 彰*²

Quaternion and Euler Angles in Kinematics*

Isao YAMAGUCHI*¹, Takashi KIDA*¹, Osamu OKAMOTO*¹
and Yoshiaki OHKAMI*²

ABSTRACT

A summary of quaternion in the kinematics of rigid body dynamics is presented. Quaternion is a four-parameter system for specifying the orientation of a rigid body. Four parameters of quaternion are updated by integrating linear differential equations whose coefficients are the angular velocity of the body.

After describing the coordinate systems and vectors, quaternion is introduced. Then, using a comparison with the Euler angles, typical presentation of body orientation and the relationships between quaternion and angular velocity are discussed. Finally, a computer simulation algorithm is derived to solve rigid body dynamics using quaternion.

Keywords: Kinematics, Quaternion, Euler Angles, Direction Cosine Matrix (DCM), Orientation, Rigid body Dynamics

概 要

本資料は剛体の運動方程式におけるクオータニオンによるキネマティックス表現についてまとめたものである。クオータニオンは4つのパラメータで構成され、物体のオリエンテーションを規定するものであり、オイラー・パラメータ、4元数とも呼ばれる。

本資料ではまず座標系やベクトル量が定義された後、クオータニオンが導入される。従来の手法であるオイラー角による物体の姿勢の記述方法と比較しながら、方向余弦行列との関連や物体の角速度ベクトルによるクオータニオンの微分方程式の構成など、クオータニオンの様々な特徴について計算機プログラムのためのアルゴリズムを念頭において考察する。最後に剛体の運動方程式の中でクオータニオンがどのように組み込まれて剛体のキネマティックスを表現するのかについて論じる。

* 平成3年5月1日受付 (received 1 May 1991)

*¹ 宇宙研究グループ (Space Technology Research Group)

*² 新型航空機実験グループ (Advanced Aircraft Research Group)

1. はじめに

本資料で用いるキネマティクス“Kinematics”とは、位置と速度、姿勢角と姿勢角速度の関係を規定するものである。一般的に力学の分野では、位置や姿勢角を単純に時間微分すれば速度や角速度を得られるとは限らない。これは、位置や姿勢角を規定する座標系の移動・回転まで考慮して時間微分を行わなければならないためである。このようなことを避けるために、通常、位置ベクトルは慣性空間上で定義される場合が多い。慣性空間で定義されれば座標系の移動・回転は考えなくてよいからである。しかし、姿勢角はこのようにはならず、例えば、航空機などでよく用いられるオイラー角では角速度ベクトルとの関係が非線形で特異点を持つことになる。一般に、オイラー角ではその定義にもよるが機体が宙返りなどの運動を行うと、計算機シミュレーションにおいてオイラー角の積分が特異点に落ち込む。民間航空機のように激しい運動を行わないような場合ではこのようなことは問題にならないが、スペース・シャトルのように地球周回軌道上で機体の上下が逆さまになるような場合には、特異点回避の問題が発生する。オイラー角の特異点回避は一般には、特異点付近でオイラー角の定義を変更する方法¹⁾等があるが、現在ではクォータニオンと呼ばれる別のパラメータを導入して特異点を回避している。

本資料ではこのクォータニオンの導入について参考となるようにまとめたものである。まず2章で各種座標系を定義し、3章で2つの座標系のオリエンテーションに関する関係を規定する方向余弦行列(DCM: Direction Cosine Matrix)を定義する。4章ではクォータニオンと呼ばれる物体の回転に関するパラメータを導入する。その後、5章において、クォータニオンと角速度ベクトルとの関係を明らかにして、6章で剛体の運動方程式のキネマティクスの部分をクォータニオンで置き換えて記述することを検討する。

2. 座標系とベクトルの定義

本資料では座標系はその基底ベクトル列で表現されるものとする。即ち、3つの正規直交基底ベクトル \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 及び \mathbf{a}_3 で決定される座標系を $\{\mathbf{a}\}$ と記述する。

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

ここで $\mathbf{a}_1 \sim \mathbf{a}_3$ についてはそれぞれの内積について以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

次にこの座標系 $\{\mathbf{a}\}$ で定義されるベクトル \mathbf{x} があるとき、以下のような表記を行う²⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 \\ &= \{\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

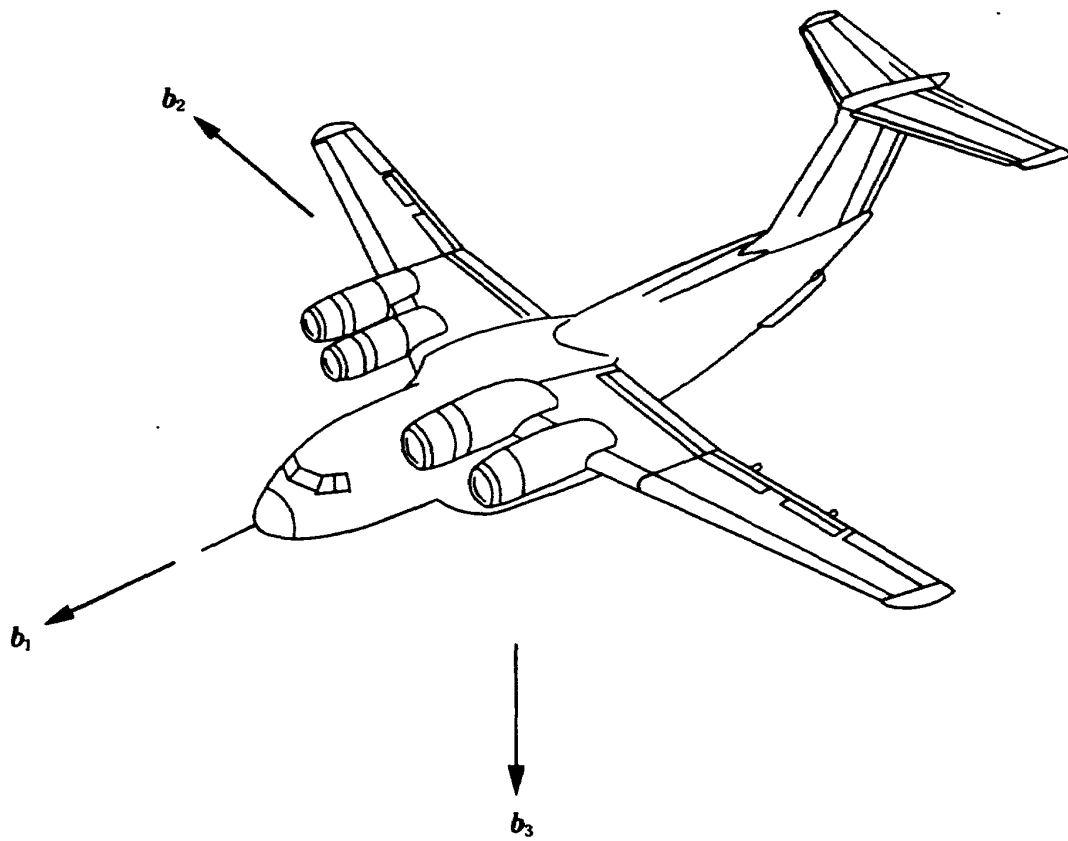
\mathbf{x} をベクトル \mathbf{x} の座標系 $\{\mathbf{a}\}$ における行列表現と呼ぶ。 \mathbf{x} は 3×1 のコラム行列であり、座標系の選び方により値が変わるものであるから、ベクトル \mathbf{x} とは区別される。また、肩付き $(*)^T$ は転置を表す。

さて本資料では以下のような座標系を用意する。

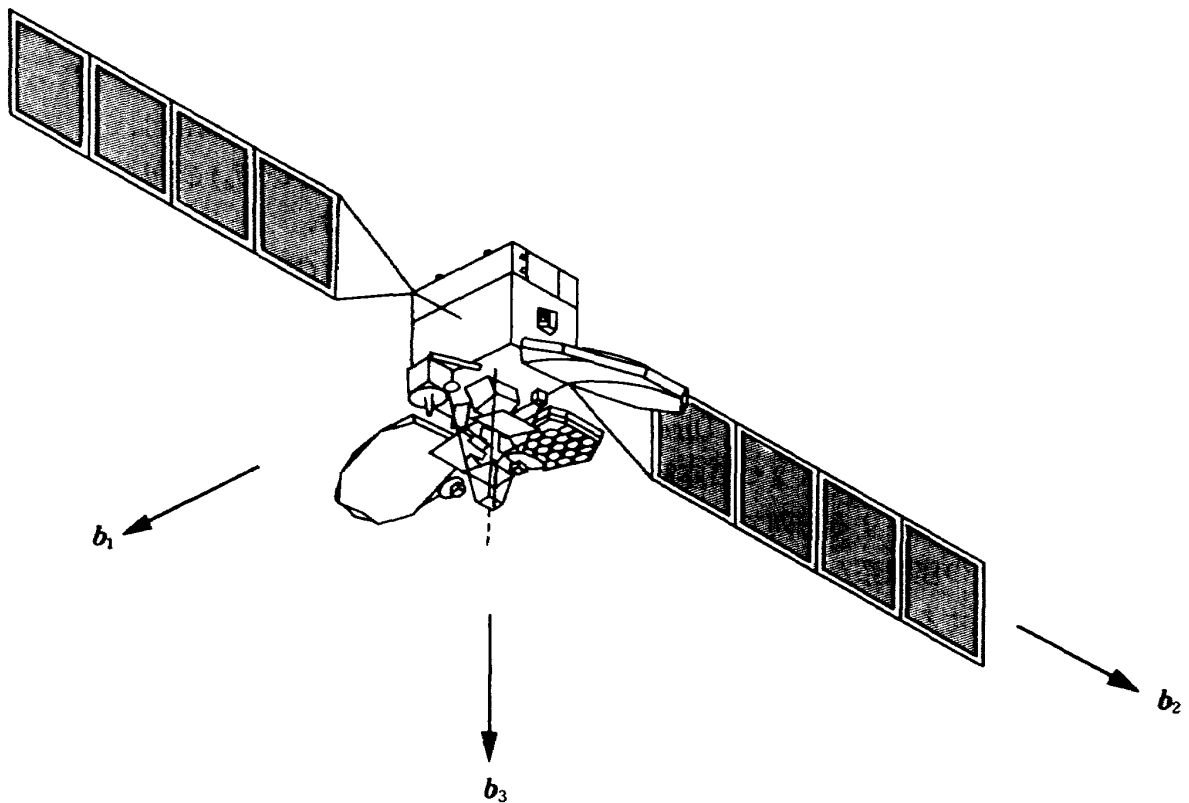
慣性座標系 $\{i\}$

物体座標系 $\{b\}$

慣性座標系は慣性空間に固定された座標系であり、物体座標系は航空機、人工衛星等の物体の重心や基準点に原点をおいて固定され、慣性空間内を移動・回転する座標系である(図1)。物体座標系は機体座標系、機体軸とも呼ばれる。物体座標系は航空機の場合、機軸方向に \mathbf{b}_1 、鉛直下向きに \mathbf{b}_3 、そして右手系をなすように \mathbf{b}_2 の方向が定められる。また、人工衛星や宇宙構造物では軌道上の速度ベクトル方向に \mathbf{b}_1 、地球中心方向が \mathbf{b}_3 、そして同様に右手系をなすように \mathbf{b}_2 の方向が定められる。一般に物体座標系では \mathbf{b}_1 軸をロール軸、 \mathbf{b}_2 軸をピッチ軸、 \mathbf{b}_3 軸をヨー軸と呼んでいる。



(a) 航空機の物体座標系



(b) 人工衛星の物体座標系

図1 物体座標系の例

3. 方向余弦行列 (DCM)

3.1 DCM の定義

次に慣性座標系と物体座標系のオリエンテーションに関する関係について考えてみよう。物体座標系を規定する3つの基底ベクトル $b_1 \sim b_3$ も慣性座標系から見ればそれぞれひとつのベクトルであるから、慣性座標系の基底ベクトル $i_1 \sim i_3$ を用いて表現できる。

$$\begin{aligned} b_1 &= C_{11} i_1 + C_{12} i_2 + C_{13} i_3 \\ b_2 &= C_{21} i_1 + C_{22} i_2 + C_{23} i_3 \\ b_3 &= C_{31} i_1 + C_{32} i_2 + C_{33} i_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

これらを以下のように書き直してみる。

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

式(3.2)を便宜上、次のように書き表すことにする。

$$\{b\} = C\{i\} \quad (3.3)$$

行列 C の要素 C_{ij} については

$$C_{i1} C_{j1} + C_{i2} C_{j2} + C_{i3} C_{j3} = \delta_{ij} \quad (3.4)$$

$$C_{1i} C_{1j} + C_{2i} C_{2j} + C_{3i} C_{3j} = \delta_{ij} \quad (3.5)$$

の関係がある。ここで δ_{ij} はクロネッカーの記法であり、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.6)$$

この関係から行列 C は

$$C^{-1} = C^T \quad (3.7)$$

となる。

以下、行列 C を方向余弦行列 (DCM : Direction Cosine Matrix) と呼ぶ。DCM は2つの座標系のオリエンテーションを規定する行列であり、一般には ${}^b C^i$ のようにどの座標系からどの座標系への変換であるかを明記する必要があるが、本資料で DCM といえば、慣性座標系から物体座標系への変換を表すものだけであるので、簡単のためただ単に C と記述する。以下、DCM の表現について考えよう。

3.2 オイラー角による DCM 表現

まず基底ベクトル軸回りの回転を表現すると、 i_1 軸回りに角度 θ の回転移動を行う座標変換は

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

となるので、DCM は

$$C^1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ここで、 $s\theta = \sin\theta$, $c\theta = \cos\theta$ とした。

同様に i_2 軸、 i_3 軸回りの回転による変換は、

$$C^2(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$C^3(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

さて、任意のオリエンテーションに置かれた物体座標系 $\{b\}$ は、以上の基底ベクトル軸回りの回転変換を3つ組み合わせることですべて表現できる。例えば、慣性座標系 $\{i\}$ から i 軸 - j 軸 - k 軸の順に各々 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の回転移動を行って、物体座標系 $\{b\}$ に変換される場合は、

$$\{b\} = C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^i(\theta_1) \{i\} \quad (3.12)$$

つまり DCM は、

$$C = C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^i(\theta_1) \quad (3.13)$$

と表現できる。この時の $\theta_1 \sim \theta_3$ をオイラー角と呼ぶ。式(3.13)において、 i, j, k の組み合わせの種類は表1のように12通りあるが、例えば、3-2-1系の場合で具体的に DCM を計算してみると、

$$i=3, j=2, k=1$$

であるから式(3.13)より、

$$\begin{aligned} C &= C^1(\theta_3) C^2(\theta_2) C^3(\theta_1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_3 & s\theta_3 \\ 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

表1 オイラー角による DCM ($(i)=C(b)$) の表現

(a) i-j-k タイプ

1-2-3 系	1-3-2 系
$\begin{bmatrix} c_2c_3 & s_1s_2c_3 + c_1s_3 & -c_1s_2c_3 + s_1s_3 \\ -c_2s_3 & -s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_1s_2s_3 + s_1c_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_2c_3 + s_1s_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_1c_2 & s_1c_2 \\ c_2s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$
2-3-1 系	2-1-3 系
$\begin{bmatrix} c_1c_2 & s_2 & -s_1c_2 \\ -c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_2c_3 & s_1s_2c_3 + c_1s_3 \\ c_1s_2s_3 + s_1c_3 & -c_2s_3 & -s_1s_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_2s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & c_2c_3 & c_1s_2c_3 + s_1s_3 \\ s_1c_2 & -s_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
3-1-2 系	3-2-1 系
$\begin{bmatrix} -s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_1s_2s_3 + s_1c_3 & -c_2s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2 & s_2 \\ s_1s_2c_3 + c_1s_3 & -c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1c_2 & -s_2 \\ c_1s_2s_3 - s_1c_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_2s_3 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

(b) i-j-i タイプ

1-2-1 系	1-3-1 系
$\begin{bmatrix} c_2 & s_1s_2 & -c_1s_2 \\ s_2s_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & c_1c_2s_3 + s_1c_3 \\ s_2c_3 & -s_1c_2c_3 - c_1s_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2 & c_1s_2 & s_1s_2 \\ -s_2c_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & s_1c_2c_3 + c_1s_3 \\ s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - s_1c_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$
2-1-2 系	2-3-2 系
$\begin{bmatrix} -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - s_1c_3 \\ s_1s_2 & c_2 & c_1s_2 \\ s_1c_2c_3 + c_1s_3 & -s_2c_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & s_2c_3 & -s_1c_2c_3 - c_1s_3 \\ -c_1s_2 & c_2 & s_1s_2 \\ -c_1c_2s_3 + s_1c_3 & s_2s_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$
3-1-3 系	3-2-3 系
$\begin{bmatrix} -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & c_1c_2s_3 + s_1c_3 & s_2s_3 \\ -s_1c_2c_3 - c_1s_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & s_2c_3 \\ s_1s_2 & -c_1s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & s_1c_2c_3 + c_1s_3 & -s_2c_3 \\ -c_1c_2s_3 - s_1c_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & s_2s_3 \\ c_1s_2 & s_1s_2 & c_2 \end{bmatrix}$

表中、 $s_1 = \sin \theta_1$, $c_1 = \cos \theta_1$ 等を表す。

$$= \begin{bmatrix} c\theta_2c\theta_1 & c\theta_2s\theta_1 & -s\theta_2 \\ s\theta_3s\theta_2c\theta_1 - c\theta_3s\theta_1 & s\theta_3s\theta_2s\theta_1 + c\theta_3c\theta_1 & s\theta_3c\theta_2 \\ c\theta_3s\theta_2c\theta_1 + s\theta_3s\theta_1 & c\theta_3s\theta_2s\theta_1 - s\theta_3c\theta_1 & c\theta_3c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

となる。このようにオイラー角による DCM の表現は一般によく用いられている。

3.3 DCM からオイラー角への変換

次に与えられた DCM の要素からオイラー角の値を計算してみよう。表1を見ればわかるように DCM の構成要素にはある規則性が存在する。そこでその規則性について調べてみる。回転変換の

3軸がともに異なる i-j-k タイプと第1軸と第3軸が等しい i-j-i タイプ(以下、回転変換を行わない軸を便宜上、k軸と呼ぶ)に分けてみると、

- i-j-k タイプでは C_{ik} が $s\theta_2$ あるいは $-s\theta_2$ である。
- i-j-i タイプでは C_{ii} が $c\theta_2$ である。
- DCM の第 i 列と第 k 行の要素は θ_1 と θ_2 あるいは θ_3 と θ_2 の2つの三角関数の積で表され

表2 DCM からオイラー角への変換アルゴリズム

(a) i-j-k タイプ

i-j-k	θ_2	θ_1	θ_3
1-2-3 系 2-3-1 系 3-1-2 系	$\sin^{-1}(C_{ki})$	$\text{atan2}(-C_{kj}/c_2, C_{kk}/c_2)$	$\text{atan2}(-C_{ji}/c_2, C_{ii}/c_2)$
1-3-2 系 2-1-3 系 3-2-1 系	$\sin^{-1}(-C_{ki})$	$\text{atan2}(C_{kj}/c_2, C_{kk}/c_2)$	$\text{atan2}(C_{ji}/c_2, C_{ii}/c_2)$

(b) i-j-i タイプ

i-j-i	θ_2	θ_1	θ_3
1-2-1 2-3-2 3-1-3	$\cos^{-1}(C_{ii})$	$\text{atan2}(C_{ij}/s_2, -C_{ik}/s_2)$	$\text{atan2}(C_{ji}/c_2, C_{ki}/s_2)$
1-3-1 2-1-2 3-2-3	$\cos^{-1}(C_{ii})$	$\text{atan2}(C_{ij}/s_2, C_{ik}/s_2)$	$\text{atan2}(C_{ji}/s_2, -C_{ki}/s_2)$

注)

- DCM の (ij) 成分を C_{ij} とする。
- $s_2 = \sin \theta_2$, $c_2 = \cos \theta_2$ とする。
- 関数 $\text{atan2}(x, y)$ は Fortran 77 の標準外部組込関数のひとつであり、 $\theta = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta)$ を表す。
- i-j-i タイプでは回転移動を行わない軸を k 軸とする。
- i-j-k タイプでは $c_2 = 0$ の場合、i-j-i タイプでは $s_2 = 0$ の場合、オイラー角は不定となる。

ている。

以上のような規則性を利用してオイラー角を求めるアルゴリズムを、表2のように4つのグループに分類できる³⁾。

以上のアルゴリズムからわかるようにi-j-kタイプでは $c\theta_2 = 0$ の時、またi-j-iタイプでは $s\theta_2 = 0$ の時 DCM からオイラー角 (θ_1, θ_3) が計算できないことになる。実際、この時は第1軸と第3軸の回転の区別がつけられないのでオイラー角が不定となる。

3.4 1軸回転による DCM 表現

オイラー角による DCM の表現では3つの回転

軸が必要であるが、実はこれはひとつの軸回りの回転移動に置き換えることが可能である⁴⁾。そこで、次に基底ベクトルではなく、ある適当なひとつの軸回りの回転だけで座標変換を行うときの DCM を考える。今、物体の回転軸の方向を単位ベクトル λ の方向とし、そのときの回転角度を θ とすれば、

$$\lambda = \{b\}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

である。この場合の DCM の要素は次の通りである。

$$C = \begin{bmatrix} c\theta + \lambda_1^2(1-c\theta) & \lambda_3 s\theta + \lambda_1 \lambda_2(1-c\theta) & -\lambda_2 s\theta + \lambda_3 \lambda_1(1-c\theta) \\ -\lambda_3 s\theta + \lambda_1 \lambda_2(1-c\theta) & c\theta + \lambda_2^2(1-c\theta) & \lambda_1 s\theta + \lambda_2 \lambda_3(1-c\theta) \\ \lambda_2 s\theta + \lambda_3 \lambda_1(1-c\theta) & -\lambda_1 s\theta + \lambda_2 \lambda_3(1-c\theta) & c\theta + \lambda_3^2(1-c\theta) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

これらの式は3つのオイラー角の一般形であるから、例えば、

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

とすれば、回転軸は i_1 に一致するので、式(3.16)で計算されるDCMは式(3.9)に等しくなる。なお、 λ 軸を一般にはオイラー軸と呼ぶが、本資料ではオイラー角との混同を避けるために、単に λ 軸と呼ぶことにする。

3.5 DCM から1軸回転への変換

最後にDCMから1軸回転への変換を求めよう。1軸回転を規定するパラメータは回転軸方向を表す $\lambda_1 \sim \lambda_3$ とその回りの回転角を表す θ の4つである。式(3.16)で与えられるDCMの対角要素より、

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \text{tr}(C)}{2} \right) \quad (3.18)$$

が求められる。ここで、 $\text{tr}(C)$ は行列 C のトレースを表す。またこれより、 $s_\theta \neq 0$ の場合、

$$\lambda_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{2s\theta} \quad (3.19)$$

$$\lambda_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{2s\theta} \quad (3.20)$$

$$\lambda_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{2s\theta} \quad (3.21)$$

となる。一方、 $s\theta = 0$ の場合は $\theta = 0$ であるから λ 軸は不定である。

4. クォータニオン

4.1 クォータニオンによるDCM表現

3.4～3.5節で導入された物体の瞬時の回転方向の単位ベクトル λ と回転角度 θ よりクォータニオン(Quaternion)と呼ばれる4つのパラメータを定義する。なお、クォータニオンは四元数あるいはオイラー・パラメータ(Euler Parameters)⁵⁾とも呼ばれるが、本資料ではオイラー角と区別しにくいのでクォータニオンに統一して呼ぶことにする。

$$q_1 = \lambda_1 \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.1)$$

$$q_2 = \lambda_2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.2)$$

$$q_3 = \lambda_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.3)$$

$$q_4 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.4)$$

$q_1 \sim q_3$ はベクトルの形でも表現できる。

$$q = \{\mathbf{b}\}^T \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \lambda \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.5)$$

ところで、クォータニオンは定義式からも明らかのように式(4.1)～(4.4)の4つの式が独立ではなく、

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = |q|^2 + q_4^2 = 1 \quad (4.6)$$

という関係が常に満足されなければならない。さて、ここでDCMをクォータニオンで表現してみると、式(3.16)における $\lambda_1 \sim \lambda_3, \theta$ を $q_1 \sim q_4$ で置き換えればよいので次のようになる。

$$C = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_3 q_1 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & q_2^2 - q_3^2 - q_1^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

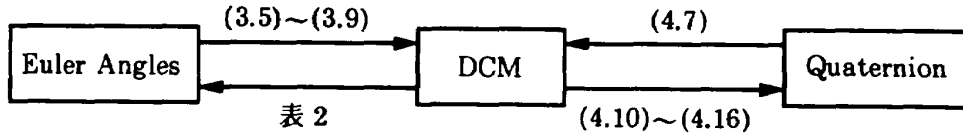


図2 オイラー角, クォータニオンと DCM の関係
(図中の () は本文での式番号を表す。)

以上の関係式を用いることによりクォータニオンから DCM への変換が行える。この時次のような関係式が導き出せる⁶⁾。

$$q_4 q_i = \frac{1}{4} (C_{jk} - C_{kj}) \quad (4.8)$$

i, j, k はサイクリックに与える

$$q_i q_j = \frac{1}{4} (C_{ij} - C_{ji}) \quad i \neq j \quad (4.9)$$

ここで, i, j, k がサイクリックとは,

$$i = 1 \text{ の時 } \quad j = 2, \quad k = 3$$

$$i = 2 \text{ の時 } \quad j = 3, \quad k = 1$$

$$i = 3 \text{ の時 } \quad j = 1, \quad k = 2$$

であることを意味する。

4.2 DCM からクォータニオンへの変換

逆に DCM からクォータニオンへの変換アルゴリズムは以下のようになる⁵⁾。

Step 1

$|q_1| \sim |q_3|$ 及び q_4 の値を決定する。

$$|q_i| = \sqrt{\frac{C_{ii}}{2} + \frac{1 - \text{tr}(C)}{4}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.10)$$

$$q_4 = \frac{\sqrt{1 + \text{tr}(C)}}{2} \quad (4.11)$$

Step 2

$|q_1|, |q_2|, |q_3|$ の中から最大の値のものをさがし, それを $|q_\alpha|$ とすると, α, β, γ がサイクリックになるように決める。

Step 3

$q_4 \neq 0$ の場合, 式(4.8)より $|q_\alpha|$ の符号を決定し, 式(4.9)より $|q_\beta|$ と $|q_\gamma|$ の符号を決定する。

$$q_\alpha = \text{sgn}(C_{\beta\gamma} - C_{\gamma\beta}) |q_\alpha| \quad (4.12)$$

$$q_\beta = \text{sgn}(q_\alpha(C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha})) |q_\beta| \quad (4.13)$$

$$q_\gamma = \text{sgn}(q_\alpha(C_{\alpha\gamma} - C_{\gamma\alpha})) |q_\gamma| \quad (4.14)$$

ここで, sgn 関数は 0 以外の引数についてその符

号を出力する関数である。一方, $q_4 = 0$ の場合は, $\theta = 180^\circ$ の回転であるから回転方向として $+\lambda$ 方向と $-\lambda$ 方向の 2 通りの解がある。つまり, q_α として

$$q_\alpha = +|q_\alpha| \quad (4.15)$$

あるいは

$$q_\alpha = -|q_\alpha| \quad (4.16)$$

の 2 通りが考えられるが, どちらの場合でも, q_β, q_γ は式(4.13), (4.14) で計算できる。

以上, 3.2 節から本節においてオイラー角, クォータニオンと DCM の関係についてまとめた。それぞれの変換の関係を図 2 に示す。

4.3 その他のクォータニオンの性質

図 3 に示すようにベクトル a を回転軸 λ 回りに角度 θ だけ回転させることによって, ベクトル b になったとする。この時 a と b の関係は,

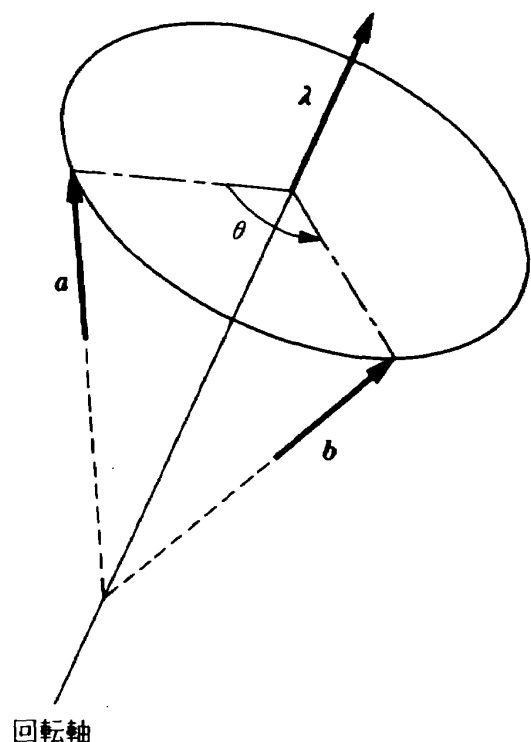


図3 1軸回転によるベクトルの移動

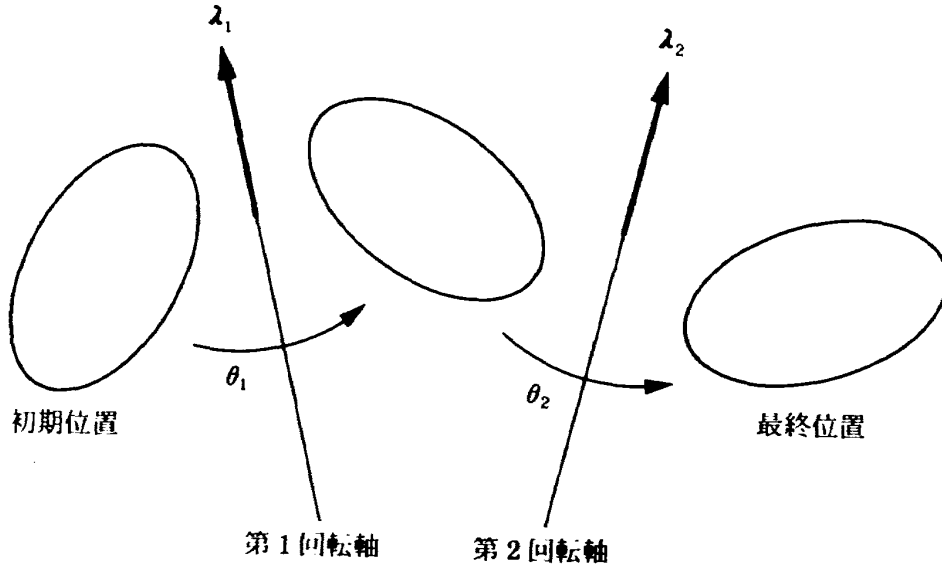


図4 連続回転移動とクォータニオンの関係

$$b = a \cos \theta - a \times \lambda \sin \theta + a \cdot \lambda \lambda (1 - \cos \theta) \quad (4.17)$$

$$= a + \lambda \times a \sin \theta + \lambda \times (\lambda \times a) (1 - \cos \theta) \quad (4.18)$$

これはクォータニオンを用いても表現できる⁵⁾。

$$b = a + 2q \times a \cos \frac{\theta}{2} + 2q \times (q \times a) \quad (4.19)$$

$$b = a + 2[q_4 q \times a + q \times (q \times a)] \quad (4.20)$$

また、図4に示すように2回の有限の大きさの回転移動を続けて行うような場合、この移動を1回の回転移動で置き換えることが可能である。図のように λ_1 軸回りの回転をクォータニオンで $q_{11} \sim q_{14}$ 、 λ_2 軸回りの回転を $q_{21} \sim q_{24}$ と表し、1回の回転移動に対応するクォータニオンを $q_1 \sim q_4$ とすれば、これらの関係は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{14} & -q_{13} & q_{12} & q_{11} \\ q_{13} & q_{14} & -q_{11} & q_{12} \\ -q_{12} & q_{11} & q_{14} & q_{13} \\ -q_{11} & -q_{12} & -q_{13} & q_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

さらにまとめて、

$$q = q_{24} q_1 + q_{14} q_2 + q_2 \times q_1 \quad (4.22)$$

$$q_4 = q_{14} q_{24} - q_1 \cdot q_2 \quad (4.23)$$

となる⁴⁾。

5. 角速度ベクトル

ここでは物体の角速度を定義して、これとオイ

ラー角やクォータニオンとの関係について調べてみよう。

5.1 角速度の定義

物体の角速度ベクトルはその物体座標系で定義され、

$$\omega = \{b\}^T \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

となるが、これは物体の瞬時の回転軸 λ とその回転角速度 θ を用いると、

$$\omega = \lambda \dot{\theta} \quad (5.2)$$

とも書き表せる。

角速度 ω とDCMの関係は、DCMの時間微分を

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

とすると、

$$\tilde{\omega} = C \dot{C}^T \quad (5.4)$$

という関係がある。ここで、 $\tilde{\omega}$ は ω から生成される歪対称行列 (Skew-symmetric matrix) を表し、

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

である。式(5.4)よりDCMの時間微分はDCMと角速度 ω より次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \dot{C} &= -\tilde{\omega} C \\ &= \begin{bmatrix} C_{21}\omega_3 - C_{31}\omega_2 & C_{22}\omega_3 - C_{32}\omega_2 & C_{23}\omega_3 - C_{33}\omega_2 \\ C_{31}\omega_1 - C_{11}\omega_3 & C_{32}\omega_1 - C_{12}\omega_3 & C_{33}\omega_1 - C_{13}\omega_3 \\ C_{11}\omega_2 - C_{21}\omega_1 & C_{12}\omega_2 - C_{22}\omega_1 & C_{13}\omega_2 - C_{23}\omega_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

これらはポアソンのキネマティック方程式として知られている⁵⁾。

5.2 角速度ベクトルとオイラー角の関係

3.2節で定義したオイラー角を用いて物理的解釈によって角速度を表現してみよう。一般性を失わないように、ここでは慣性座標系 $\{i\}$ から、 i 軸 - j 軸 - k 軸の順に各々 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の回転移動を行って、物体座標系 $\{b\}$ に変換されるものとする。このような場合、慣性座標系と物体座標系の関係は

$$\{b\} = C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^i(\theta_1) \{i\} \quad (5.7)$$

と表すことができる。以下、便宜上3つの回転移動を分けて考えるために新たな座標系 $\{b'\}$ と $\{b''\}$ を用意して、

$$\{b'\} = C^i(\theta_1) \{i\} \quad (5.8)$$

$$\{b''\} = C^j(\theta_2) \{b'\} \quad (5.9)$$

$$\{b\} = C^k(\theta_3) \{b''\} \quad (5.10)$$

あるいは、

$$\{i\} = C^{iT}(\theta_1) \{b'\} \quad (5.11)$$

$$\{b'\} = C^{jT}(\theta_2) \{b''\} \quad (5.12)$$

$$\{b''\} = C^{kT}(\theta_3) \{b\} \quad (5.13)$$

となる。さて、物体の角速度とオイラー角の時間微分の関係は次式で定義される。

$$\omega = \dot{\theta}_1 i_i + \dot{\theta}_2 b'_j + \dot{\theta}_3 b''_k \quad (5.14)$$

この時、右辺の各基底ベクトルは回転移動による変換では回転の軸となるため変化しないことに注目すると次のようにも書き直せる。

$$\omega = \dot{\theta}_1 b'_i + \dot{\theta}_2 b''_j + \dot{\theta}_3 b_k \quad (5.15)$$

右辺に現れる基底ベクトル b'_i, b''_j は物体座標系 $\{b\}$ では次のように表現できる。

$$b'_i = C^{iT}(\theta_2) \{b''\} = C^{iT}(\theta_2) C^{kT}(\theta_3) \{b\} \quad (5.16)$$

$$b''_j = C^{jT}(\theta_3) \{b\} \quad (5.17)$$

ここで、

$C^{iT}(\theta_2) = C^j(\theta_2)$ の第 i 列

$C^{kT}(\theta_3) = C^k(\theta_3)$ の第 j 列

であり、どちらも 3×1 の列行列である。さらに第 k 列の各成分のみが1の 3×1 行列を定義する。

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

ここで、 δ_{ij} は式 (3.6) と同様、クロネッカーの記法である。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.19)$$

これらの関係を式 (5.15) に代入すると、

$$\begin{aligned} \omega &= (\dot{\theta}_1 C^{iT}(\theta_2) C^{kT}(\theta_3) + \dot{\theta}_2 C^{jT}(\theta_3) + \dot{\theta}_3 \delta_k) \{b\} \\ &= \{b\}^T (\dot{\theta}_1 C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) + \dot{\theta}_2 C^k(\theta_3) + \dot{\theta}_3 \delta_k) \\ &= \{b\}^T [C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^k(\theta_3) \delta_k] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

これより ω の物体座標系 $\{b\}$ での行列表現 ω は、

$$\begin{aligned} \omega &= [C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^k(\theta_3) \delta_k] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \pi^{-1}(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (5.21)$$

と表現できる。つまり $\pi^{-1}(\theta)$ は、

$$\pi^{-1}(\theta) = [C^k(\theta_3) C^j(\theta_2) C^k(\theta_3) \delta_k] \quad (5.22)$$

オイラー角の微分方程式の形に書き直せば、

$$\dot{\theta} = \pi(\theta) \omega \quad (5.23)$$

このオイラー角の微分方程式も i, j, k の組み合わせで12通りが考えられるが(表3, 4), 例えば3-2-1系の場合で具体的に $\pi^{-1}(\theta)$ や $\pi(\theta)$ を計算すると、

$$i = 3, \quad j = 2, \quad k = 1$$

であるので式 (5.22) より、

$$\pi^{-1}(\theta) = [C^1(\theta_3) C_3^2(\theta_2) C_2^1(\theta_3) \delta_1] \quad (5.24)$$

ここで、

$$C^1(\theta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_3 & s\theta_3 \\ 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

表3 $\pi(\theta)$: オイラー角の時間微分と角速度の関係 ($\dot{\theta} = \pi(\theta)\omega$)

(a) i-j-k タイプ

1-2-3 系	1-3-2 系
$\begin{bmatrix} c_3/c_2 & -s_3/c_2 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ -c_3s_2/c_2 & s_3s_2/c_2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_3/c_2 & 0 & s_3/c_2 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ c_3s_2/c_2 & 1 & s_3s_2/c_2 \end{bmatrix}$
2-3-1 系	2-1-3 系
$\begin{bmatrix} 0 & c_3/c_2 & -s_3/c_2 \\ 0 & s_3 & c_3 \\ 1 & -c_3s_2/c_2 & s_3s_2/c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_3/c_2 & c_3/c_2 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3s_2/c_2 & c_3s_2/c_2 & 1 \end{bmatrix}$
3-1-2 系	3-2-1 系
$\begin{bmatrix} -s_3/c_2 & 0 & c_3/c_2 \\ c_3 & 0 & s_3 \\ s_3s_2/c_2 & 1 & -c_3s_2/c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & s_3/c_2 & c_3/c_2 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 1 & s_3s_2/c_2 & c_3s_2/c_2 \end{bmatrix}$

(b) i-j-i タイプ

1-2-1 系	1-3-1 系
$\begin{bmatrix} 0 & s_3/s_2 & c_3/s_2 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 1 & -s_3c_2/s_2 & -c_3c_2/s_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -c_3/s_2 & s_3/s_2 \\ 0 & s_3 & c_3 \\ 1 & c_3c_2/s_2 & -s_3c_2/s_2 \end{bmatrix}$
2-1-2 系	2-3-2 系
$\begin{bmatrix} s_3/s_2 & 0 & -c_3/s_2 \\ c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3c_2/s_2 & 1 & c_3c_2/s_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_3/s_2 & 0 & s_3/s_2 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ -c_3c_2/s_2 & 1 & -s_3c_2/s_2 \end{bmatrix}$
3-1-3 系	3-2-3 系
$\begin{bmatrix} s_3/s_2 & c_3/s_2 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 \\ -s_3c_2/s_2 & -c_3c_2/s_2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -c_3/s_2 & s_3/s_2 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ c_3c_2/s_2 & -s_3c_2/s_2 & 1 \end{bmatrix}$

$$C_3^2(\theta_2) = \begin{bmatrix} -s\theta_2 \\ 0 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$C_2^1(\theta_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ c\theta_3 \\ -s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

を式 (5.24) に代入する。

$$\pi^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} -s\theta_2 & 0 & 1 \\ c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ c\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

また、この式の逆行列を計算することで、

$$\pi(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & s\theta_3/c\theta_2 & c\theta_3/c\theta_2 \\ 0 & c\theta_3 & -s\theta_3 \\ 1 & s\theta_2 s\theta_3/c\theta_2 & s\theta_2 c\theta_3/c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

が得られる。この式をみればわかるように、 $\theta_2 = \pm \pi/2$ で $\pi(\theta)$ が有界でなくなるので、そのような運動を行う場合には始めに述べたように、オイラー角の定義等を変更して特異点を回避しなければならない¹⁾。

5.3 角速度ベクトルとクオータニオンの関係

クオータニオンと DCM の関係式(4.7)を角速度と DCM の関係式(5.6)に代入することによって、

表 4 $\pi^{-1}(\theta)$: 角速度とオイラー角の時間微分の関係 ($\omega = \pi^{-1}(\theta)\dot{\theta}$)

(a) i-j-k タイプ

1-2-3系	1-3-2系
$\begin{bmatrix} c_2c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & -s_3 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \\ c_2s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$
2-3-1系	2-1-3系
$\begin{bmatrix} s_2 & 0 & 1 \\ c_2c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2s_3 & c_3 & 0 \\ c_2c_3 & -s_3 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3-1-2系	3-2-1系
$\begin{bmatrix} -c_2s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \\ c_2c_3 & s_3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s_2 & 0 & 1 \\ c_2s_3 & c_3 & 0 \\ c_2c_3 & -s_3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) i-j-i タイプ

1-2-1系	1-3-1系
$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & 1 \\ s_2s_3 & c_3 & 0 \\ s_2c_3 & -s_3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & 1 \\ -s_2c_3 & s_3 & 0 \\ s_2s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$
2-1-2系	2-3-2系
$\begin{bmatrix} s_2s_3 & c_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ -s_2c_3 & s_3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_2c_3 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ s_2s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$
3-1-3系	3-2-3系
$\begin{bmatrix} s_2s_3 & c_3 & 0 \\ s_2c_3 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s_2c_3 & s_3 & 0 \\ s_2s_3 & c_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

次のような関係が得られる。

$$\omega_1 = 2(\dot{q}_1 q_4 + \dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2 - \dot{q}_4 q_1) \quad (5.30)$$

$$\omega_2 = 2(\dot{q}_2 q_4 + \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_4 q_2) \quad (5.31)$$

$$\omega_3 = 2(\dot{q}_3 q_4 + \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_4 q_3) \quad (5.32)$$

この式を行列で表現すると、

$$\omega = 2 \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

またベクトルで表現すれば、

$$\omega = 2(q_4 \dot{q} - \dot{q}_4 q - q \times \dot{q}) \quad (5.34)$$

ここで(*)はそのベクトルの定義座標系での微分を表す。ここでは \dot{q} であるから物体座標系での q の時間微分を表す。次にクォータニオンについての微分方程式は

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(q_4 \omega + q \times \omega) \quad (5.35)$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}\omega \cdot q \quad (5.36)$$

これを行列の形でまとめると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

まとめると、

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega q \quad (5.38)$$

ここで、 q 及び Ω は

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Ω はブロック行列を用いて、以下のようにも表現できる。

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

式(5.38)は最も標準的なクォータニオン q の微分方程式である。またこの式は以下のようにも書き直せる。

$$\dot{q} = \frac{1}{2} E \omega \quad (5.41)$$

ここで E は、クォータニオンで構成される 4×3 の行列であり、

$$E = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

である。

6. 剛体の運動方程式

本章では剛体に対する運動方程式においてクォータニオンがどのように適用されるかについてまとめてみたい。

6.1 オイラー角による運動方程式

図5に示すように、物体座標系の原点を剛体の重心として、剛体の質量を m 、慣性モーメントを $I(=\{b\}^T I \{b\})$ 、剛体に加わる外力を $f_i(=\{b\}^T f_i)$ 、重心から外力の作用点までのベクトルを $\rho_i(=\{b\}^T \rho_i)$ 、外部から加わるトルクを $t_i(=\{b\}^T t_i)$ とする。 f_i 、 ρ_i 、 t_i は物体座標系で定義することが自然である。この時、剛体の運動方程式をダイナミクスとキネマティクスに分けてベクトルで表すと、

$$m\dot{v} = \sum_i f_i \quad (6.1)$$

$$I \cdot \dot{\omega} = \sum_i \rho_i \times f_i + \sum_i t_i \quad (6.2)$$

オイラー角によるキネマティクス

$$\dot{r} = v \quad (6.3)$$

$$\dot{\theta} = \pi(\theta)\omega \quad (6.4)$$

最後の式はオイラー角の時間微分方程式であるが、オイラー角はベクトルで定義されるわけではないので、行列表現とした。次にこれらの式を行列表現しなければならないわけであるが、最も簡単には物体の位置や速度ベクトル (r, v) を慣性座標系で定義すればよい。

$$r = \{i\}^T r^* \quad (6.5)$$

$$v = \{i\}^T v^* \quad (6.6)$$

物体座標系と慣性座標系での行列表現を区別するために、慣性座標系での行列表現には肩付き r^* 、 v^* とした。角速度ベクトル ω は本資料で既に述べたように通常、 $\omega = \{b\}^T \omega$ のように物体座標系で表現される。さて、このような場合にはダイナミクスやキネマティクスの行列表現は、

ダイナミクス

$$m\dot{v}^* = \sum_i C^T f_i \quad (6.7)$$

$$I\dot{\omega} = -\dot{\omega} I \omega + \sum_i \tilde{\rho}_i f_i + \sum_i t_i \quad (6.8)$$

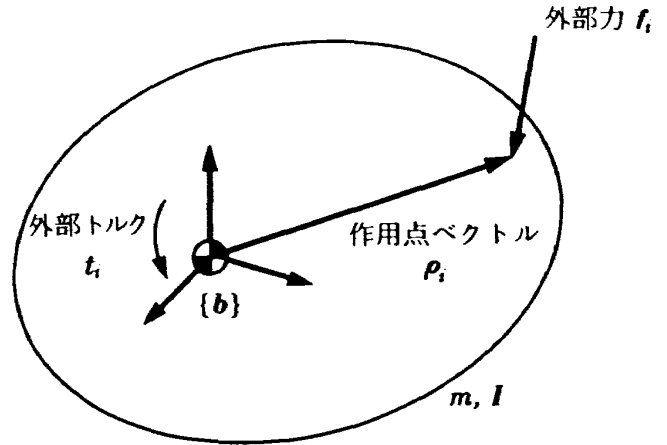


図5 剛体に加わる外部力 f と外部トルク t の関係

オイラー角によるキネマティクス

$$\dot{r}^* = v^* \quad (6.9)$$

$$\dot{\theta} = \pi(\theta)\omega \quad (6.10)$$

以上が最も簡単な剛体の運動方程式である。このように位置や速度ベクトルを慣性座標系で定義すると、ダイナミクスの右辺の外力項に DCM による変換が必要となり、計算に当たっては DCM も同時に求めなければならなくなる。そこで、このようなことを避けるために、物体の位置や速度ベクトルを物体座標系で表現する方法もよく用いられる。式(6.5)、(6.6)の代わりに位置、速度ベクトルを物体座標系で定義すると、

$$r = \{b\}^T r \quad (6.11)$$

$$v = \{b\}^T v \quad (6.12)$$

この場合は、位置や速度ベクトルの定義が物体座標系で行われるので、これらのベクトルの時間微分は物体座標系の回転まで考慮しなければならない。この時の行列表による運動方程式は次のようになる。

ダイナミクス

$$m\dot{v} = -m\tilde{\omega} v + \sum_i f_i \quad (6.13)$$

$$I\dot{\omega} = -\tilde{\omega} I \omega + \sum_i \tilde{\rho}_i f_i + \sum_i t_i \quad (6.14)$$

オイラー角によるキネマティクス

$$\dot{r} = -\tilde{\omega} r + v \quad (6.15)$$

$$\dot{\theta} = \pi(\theta)\omega \quad (6.16)$$

この方法では右辺には DCM は現れないが、この最後の式(6.16)や式(6.10)で $\pi(\theta)$ は特異点を有

することは既に述べた。キネマティックスを表現する微分方程式の中にこのような特異点が存在することは一般に好ましいことではない。もちろん、オイラー角の定義を変更する等の手法によりこのような特異点を回避することは可能であるが、アルゴリズムが複雑となることは避けられない。

6.2 クォータニオンによる運動方程式

次にクォータニオンによるキネマティックス表示を行うと、慣性座標系において行列表現した剛体の運動方程式は以下のようになる。

ダイナミックス

$$m\dot{v}^* = \sum_i C^T f_i \tag{6.17}$$

$$I\dot{\omega} = -\tilde{\omega} I \omega + \sum_i \tilde{p}_i f_i + \sum_i t_i \tag{6.18}$$

クォータニオンによるキネマティックス

$$\dot{r}^* = v^* \tag{6.19}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega q \tag{6.20}$$

一方、物体座標系において行列表現した剛体の運動方程式は、

ダイナミックス

$$m\dot{v} = -m\tilde{\omega} v + \sum_i f_i \tag{6.21}$$

$$I\dot{\omega} = -\tilde{\omega} I \omega + \sum_i \tilde{p}_i f_i + \sum_i t_i \tag{6.22}$$

クォータニオンによるキネマティックス

$$\dot{r} = -\tilde{\omega} r + v \tag{6.23}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega q \tag{6.24}$$

以上がクォータニオンによる運動方程式の記述で

あるが、これらの式の中には特異点は存在しないので、物体のどのような運動に対しても方程式系は発散しない。また、DCMもダイナミックスの計算途中では陽に必要ではない。

ここで注意しなければならないことは、式(6.20)そのものは正しいのであるが、この式を計算機シミュレーションにおいてルンゲクッタ法等の数値積分アルゴリズムによって積分すると、クォータニオンの正規化条件：

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{6.25}$$

を損なう可能性があることである。そこで、積分終了後にクォータニオンの正規化を行わなければならない。そのためのアルゴリズムとして、次のような方法が考えられる。

$$\hat{q}_1 = q_1 \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \tag{6.26}$$

$$\hat{q}_2 = q_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \tag{6.27}$$

$$\hat{q}_3 = q_3 \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \tag{6.28}$$

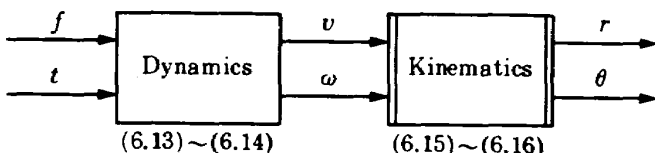
$$\hat{q}_4 = q_4 \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \tag{6.29}$$

この方法はクォータニオンの大きさに注目して正規化を行う方法であり、一般的な手法ではあるが、積分による4つのパラメータの誤差がもとのパラメータの大きさに比例して発生するとは限らないので、この方法は便法である。

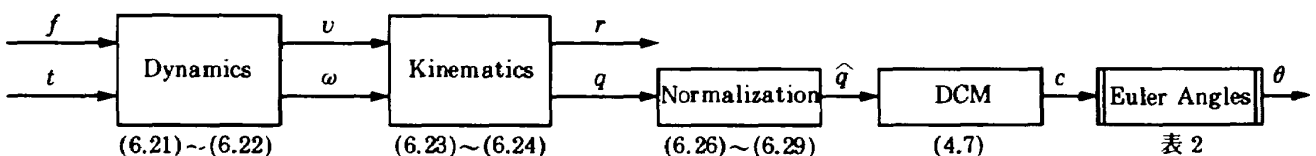
また、クォータニオンによるアルゴリズムにおいてオイラー角の値が必要となった時には、クォータニオンからDCMを構成して、DCMからオイラー角を求めるといった手順となり、DCMからオイラー角を計算する時に表2の注のようにオ

注)

- 図中の () は本文での式番号を表す。
- ブロックには特異点が存在する。



(a) オイラー角によるキネマティックス表現の場合



(b) クォータニオンによるキネマティックス表現の場合

図6 物体座標系での剛体の運動方程式のブロック線図

イラー角が不定となる場合がある。

参考として、物体座標系での剛体の運動方程式においてオイラー角とクォータニオンを用いたキネマティックスの表現を比較するために、それぞれのブロック線図を図6に示す。

7. おわりに

座標系の定義に始まりDCMやクォータニオンの導入、物体の角速度の定義、そして最後に剛体の運動方程式への適用とかなり詳細にわたってまとめてみた。本資料中、必ずしも明らかとはいえないようなことまでも証明なしに記述してきたが、その詳細は以下の参考文献を参照して頂きたい。クォータニオンによるキネマティックスの記述は計算機アルゴリズムとしてコード化され、その有用性が実証されている。一方、クォータニオンはその物理的意味がやや抽象的であるため、実際のハードウェア、例えば多軸ジンバルの記述においてはクォータニオンからオイラー角への変換が必要になる場合がある。

参 考 文 献

- 1) 狼 嘉彰：“オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム,” 航空宇宙技術研究所報告, TR-305, 1972及び305T, 1977.
- 2) P. W. Likins：“Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles,” Jet Propulsion Laboratory, Technical Report 32-1329, 1970.
- 3) J. R. Wertz (ed.)：“Spacecraft Attitude Determination and Control,” D. Reidel Publishing Company, 1980.
- 4) C. Grubin：“Derivation of the Quaternion Scheme via the Euler Axis and Angle,” Journal of Spacecraft, Vol.7, No.10, 1970.
- 5) T. R. Kane, P. W. Likins and D. A. Levinson：“Spacecraft Dynamics,” MacGraw Hill, 1983.
- 6) A. R. Klumpp：“Singularity-free Extraction of a Quaternion from a Direction-Cosine Matrix,” Journal of Spacecraft, Vol.13, No.12, 1976.

航空宇宙技術研究所資料 636号

平成3年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 三興印刷
東京都新宿区西早稲田 2-1-18
