

UDC 539.4.012

621-25

# 航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-4

回 転 円 板 の 強 度

佐 藤 和 郎 ・ 永 井 文 雄

1960年9月

航 空 技 術 研 究 所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

# 回 転 円 板 の 強 度

佐 藤 和 郎・永 井 文 雄

## Strength of Rotating Discs

Yasuo SATO and Fumio NAGAI

In this paper, the deformation and the strength of rotating discs are discussed and the results of the experiments on the burst of rotating discs are presented.

The plastic deformation of the rotating disc varies with the stress distribution, which depends on  $\gamma_0$ , the ratio of inner to outer diameter of the disc. The strength, when the rotating disc of ductile material bursts in a diametral section, is considered as a function of  $\gamma_0$ , and the function is to be expressed approximately by the following formulas.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sigma_R' && \text{for } \gamma_0 \doteq 1, \\ \bar{\sigma} &\doteq \frac{8}{7} \sigma_B' && \text{" } \gamma_0 \doteq 0, \\ \bar{\sigma} &= \sigma_B' \sim \frac{8}{7} \sigma_B' && \text{" } 0 < \gamma_0 < 1,\end{aligned}$$

where,  $\bar{\sigma}$  is the mean value of the circumferential stress on the diametral section,

$\sigma_B'$  is the strength of rotating ring.

These relations agreed with the experiments, as shown in Fig. 7.

## 結 言

この論文は、一様な厚さをもった円板が回転によって破壊するとき、その形が強度に及ぼす影響について調べたものである。円板の内径と外径の比を  $\gamma_0$  としたときに、 $\gamma_0 \doteq 1$  の円板の変形は円周方向に伸びる引張りであって、この場合の強度はすでにわかっている<sup>(1)</sup>。問題は  $\gamma_0 \doteq 0$  の円板ならびに 1 と 0 の中間にある円板の強度である。

## 円板の形と回転強度

円板が回転によって破壊を起すのは、回転数と変形の関係が不安定な状態になったときである。この状態に達するまでは円板の変形は安定であって、回転数を増さなければ変形は進行しないが、この状態に達すると円板の変形は回転を増さなくても進行し、しかもそれが局部的に

起る。すなはち、変形は円板の中心を通る特定の断面のみで起り、ついにその断面で破壊が生ずる。変形が不安定になる状態は円板の応力分布、すなはち円板の形によって異なるものと考えられる。そこで、円板の内径を  $2r_1$ 、外形を  $2r_0$  とし、その比を  $r_0$  とし、塑性域における円板の応力分布ならびに変形から円板が破壊をするときの強度を考察することにする。

### 1. $r_0$ が 1 に近い場合

先ず、 $r_0$  が 1 に非常に近い円板の強度について考えてみよう。この場合の円板の形は円輪であって、その応力状態は円周方向への均等引張りである。円輪の回転強度については、すでに中西が解明している<sup>(1)</sup>。しかし円輪の強度は円板のみならず他の回転体の強度に関して基本をなすものと思はれるので、ここではその概要を述べることにする。

半径  $r_0$  の円輪が  $\omega$  で回転しているときの公称応力は

$$\sigma_{t0} = \rho r_0^2 \omega^2 \quad (1)$$

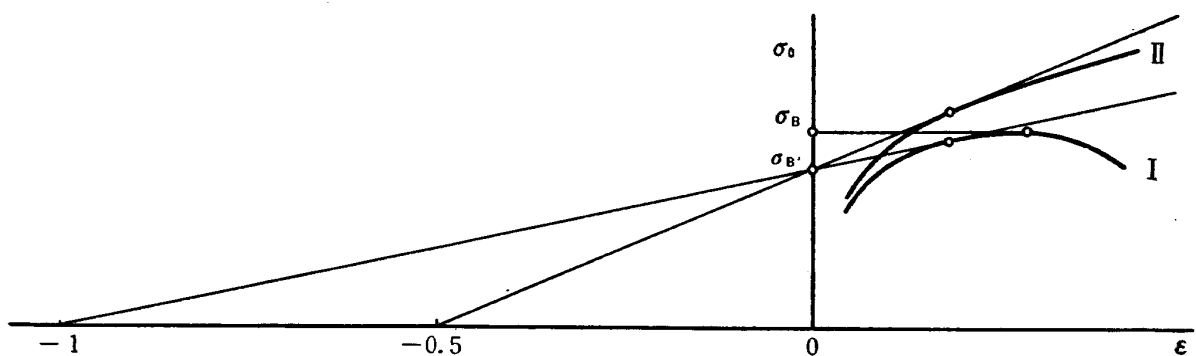
ただし、 $\rho$  は材料の密度。

変形は円周方向に伸びる引張りであるから、円輪はその断面積が減っただけ円周方向に伸びて、外径はふくらむはずである。円周方向の伸び歪みを  $\epsilon$  とすれば、真応力  $\sigma_t$  は断面積の減少による影響と、外径のふくらみによる遠心力の増加による影響を同時に受けるので、

$$\sigma_t = \rho r_0^2 \omega^2 (1 + \epsilon)^2 \quad (2)$$

$$\text{または、} \quad \sigma_t \doteq \rho r_0^2 \omega^2 (1 + 2\epsilon) \quad (2)'$$

円輪の変形が不安定になる状態における応力は、引張りにおける応力と歪みの関係から次ぎのようにして求めることができる。第1図において、曲線 I が公称応力と歪みの関係、曲線 II が真応力と歪みの関係であるとする。 $\epsilon = -1$  から曲線 I に、または  $\epsilon = -0.5$  から曲線 II



第 1 図

に接線を引いて、これらの接線が縦軸を截る点の応力を  $\sigma_{B'}$  とすれば、この応力が円輪の変形が不安定になる状態における公称応力であって、これが円輪の回転強度である。これらの場合、 $\epsilon = -1$  から曲線 I に接線を引いて求めた  $\sigma_{B'}$  は (2) の関係を満足しており、後者では (2)' を満足している。 $\sigma_{B'}$  の値は伸び歪みが小さい脆性材料では引張における破断応力である

と考えて差支えないが、延性材料では上で述べたように塑性曲線の形によって異なるものであって、坑張力  $\sigma_B$  よりも常に小さい値となる。円輪の破壊回転数は (1) の  $\sigma_{t0}$  に  $\sigma_B'$  を代入して、次の式から求められる。

$$\sigma_B' = \rho r_0^2 \omega^2 \quad (3)$$

次に  $\gamma_0$  が 1 にかなり近い円板の強度について考えてみよう。この場合の半径応力は円周応力に比べて極めて小さいので、円板の応力状態は近似的に円周方向への引張り応力だけであるとみることができる。この場合、円板をこれと同心円の多くの円輪に分けて、それぞれの円輪について変形および応力の関係を考えれば、それらの関係は上で述べた円輪と全く同じ関係にある。しかし、円周応力は分布をもっているので、円板の破壊は内径における応力が  $\sigma_B'$  になっても起らないで、円周応力の平均値が  $\sigma_B'$  になったときに起るであろう。すなわち円板の破壊の条件は次の式で与えられるものと考えられる。

$$\bar{\sigma} = \sigma_B' \quad (4)$$

ただし、 $\bar{\sigma}$  は円板の円周応力の平均値であり、

$\sigma_B'$  は円輪の回転強度である。

(4) で示した破壊の条件は平均応力説であって、中西の考えによれば  $\bar{\sigma}$  の値は一般には応力の荷重に対する効き方を考慮に入れた附重平均値である。円板の破壊は遠心力による円周応力によって、円板の中心を通る断面で起るのであるから、 $\bar{\sigma}$  の値は円周応力の単なる平均を採ればよいものと思はれる。内半径が  $r_1$ 、外半径が  $r_0$  である円板が  $\omega$  で回転しているときの円周応力の平均値は

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \rho \omega^2 \frac{r_0^3 - r_1^3}{r_0 - r_1} \quad (5)$$

したがって、円板の破壊回転数は次式で与えられる

$$\sigma_B' = \frac{1}{3} \rho r_0^2 \omega^2 (1 + \gamma_0 + \gamma_0^2) \quad (5)'$$

## 2. $\gamma_0$ が 0 に近い場合

この場合の円板の塑性変形は、その応力分布がよくわからないので正確に知ることは困難である。しかし、一般に塑性域においては、変形が進むにしたがって、応力-歪み曲線の形はその傾斜が緩やかになることからみて、円板の円周応力の分布は弾性域におけるものよりもその傾斜は非常に緩やかになっていることは容易に推察することができる。そこで極端な場合として、円周応力の分布は均等であるとして、このときの半径応力の分布を出して、その結果から円板の変形を考え、さらに変形が不安定になる状態を考えてみることにする。

回転円板の応力の平衡式は、一般に

$$r \frac{dr_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_t) + \rho r^2 \omega^2 = 0 \quad (6)$$

ただし、 $r$  は円板上の任意の点の半径、

$\sigma_r$  は半径応力、

$\sigma_t$  は円周応力。

$\sigma_t$  は仮定により、 $r$  に無関係であるから、 $\sigma_r$  は (6) から

$$\sigma_r = \sigma_t - \frac{1}{3} \rho r^2 \omega^2 + \frac{c}{r} \quad (7)$$

半径応力は内周において 0、すなわち  $r=r_1$  で  $\sigma_r=0$  の条件を入れて (7) を整理すると

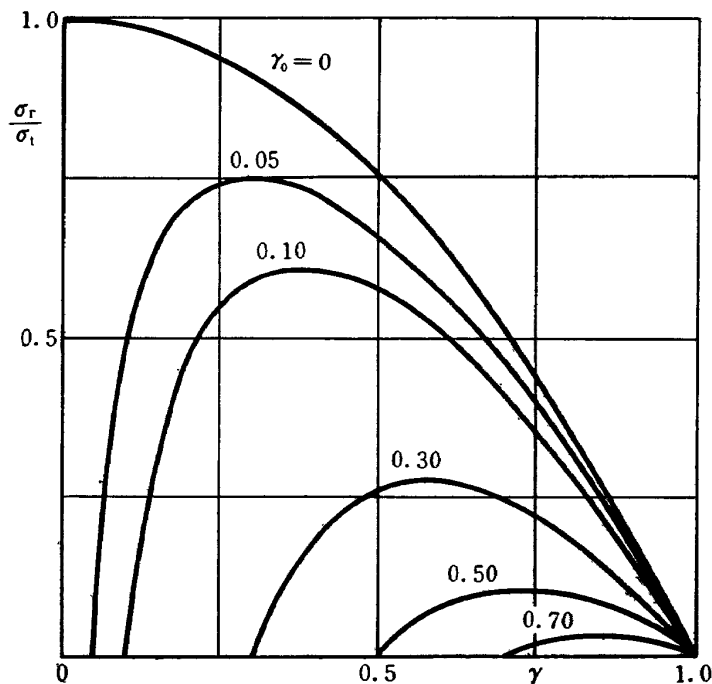
$$\frac{\sigma_r}{\sigma_t} = \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma} - \frac{\gamma^3 - \gamma_0^3}{\gamma(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2)} \quad (8)$$

ただし、 $\gamma$  は  $r$  と外半径  $r_0$  の比。

(8) が  $\sigma_r$  の分布を与えるものである。中実円板では  $\gamma_0=0$  であるから、

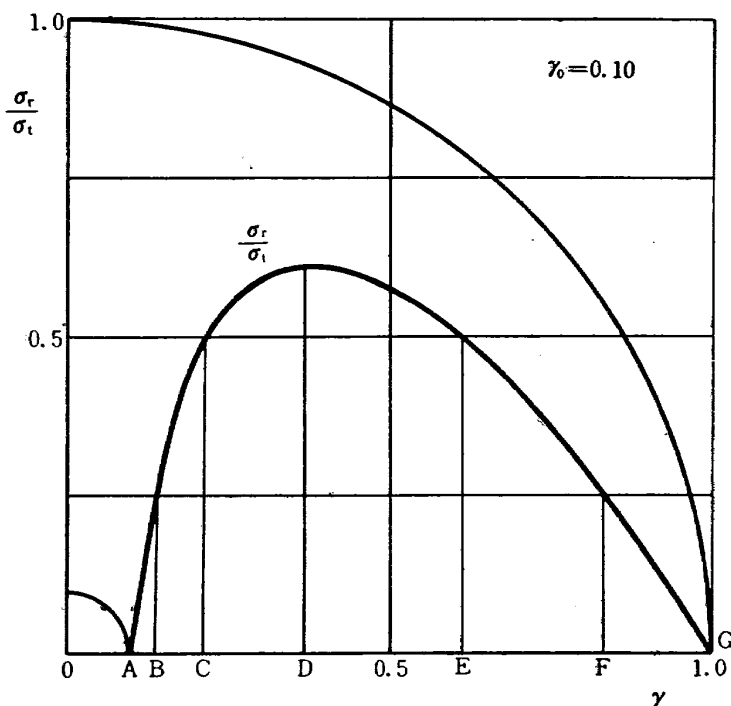
$$\frac{\sigma_r}{\sigma_t} = 1 - \gamma^2 \quad (8)'$$

$\gamma_0$  をパラメーターとして、 $\sigma_r$  の分布を (8) から計算してみると第2図のようになる。この図をみて分ることは、 $\gamma_0$  が 0.5 以上の円板では  $\sigma_r$  の値が極めて小さいことである。したがって円板の破壊の条件は近似的に (4) で与えられ、破壊回転数は (5) または (5)' で計算することができる。 $\gamma_0$  が小さい円板では半径応力はかなりの大きさになっているので、この場合の円板の変形はこれを考慮に入れなければならない。



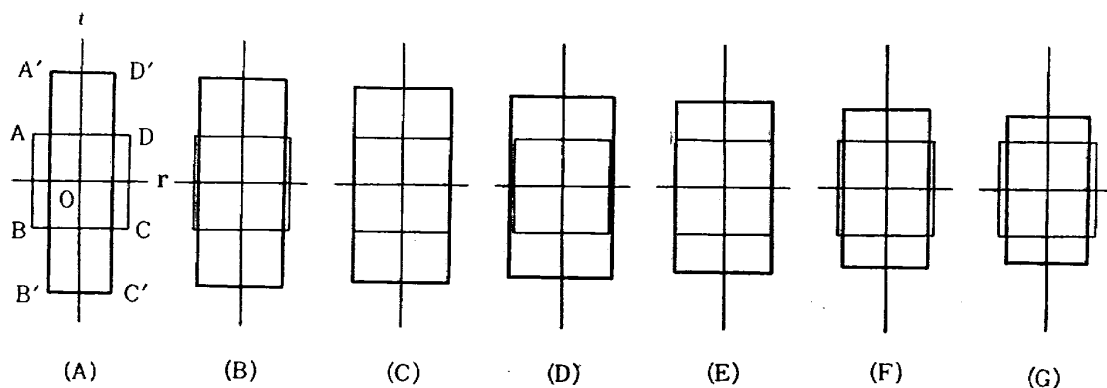
第2図

第3図は  $\nu_0=0.10$  の円板の変形を考えるために、その応力分布を再び示したものである。いまこの円板をこれと同心円の多くの円輪に分けたものとして、それぞれの変形を考えてみる



第3図

ことにする。円板の内径  $A$  と外径  $G$  における応力状態は  $\sigma_r=0$  であって  $\sigma_t$  だけであるから、ここでの円輪の変形は円周方向に伸びる引張りとなる。円板上の  $C$  点と  $E$  点では半径方向の応力は円周方向の応力の丁度半分になっているので、ここでの円輪の変形は厚さが減っただけ円周方向に伸びる純粋剪断となる。結局、円板上に採ったすべての円輪はいずれも円周方向に伸びているけれども、 $AC$  間と  $EG$  間では半径方向には縮み、その中間の  $CE$  間では伸びて、第4図に示すような変形をしているはずである。第4図の正方形  $ABCD$  は最初の状



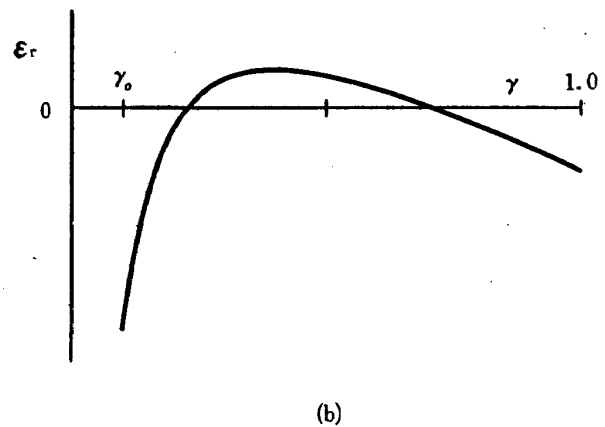
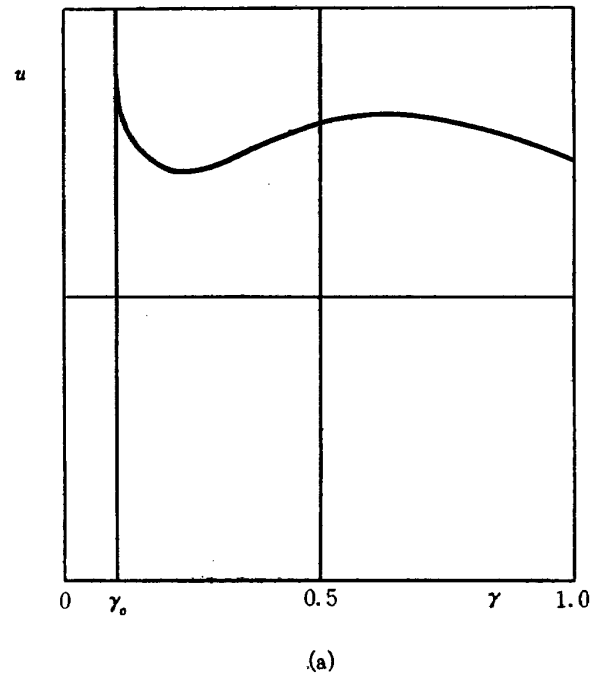
第4図

態における円輪の一部であり、 $A'B'C'D'$  は変形後の形を示したものである。 $t$  軸は円周方向、 $r$  軸は半径方向に採ってある。円輪の変形が第4図に示したような変形をしているということは、円板の半径方向の変位を  $u$ 、歪みを  $\epsilon_r$  として、 $u$  と  $\epsilon_r$  の分布を示せばそれぞれ第5図

(a) および (b) のようになっているということである。佐々木-白鳥の実験<sup>(2)</sup>では円板の半径方向の変位の分布を実測しているが、その結果は第5図 (a) に示したようになっている。

円板の変形は上で述べたように、どの部分も円周方向に伸びているけれども、半径方向には縮む部分もあり、伸びる部分もあって、なかなか複雑である。そしてこの場合の円板の破壊の条件を理論的に求めることは非常に困難であると思われるので、ここでは半径方向の変位  $u$  の分布は近似的に一様であるとして、円板の破壊の条件を考えてみることにする。

半径方向の変位  $u$  は一定としたのであるから、円板をこれと同心円の多くの円輪に分けたときに、それぞれの円輪の変形は厚さが減っただけ円周方向に伸びる純粋剪断をしていて、一般に半径が  $r$  であった円輪は変形後には  $r+u$  となり厚さは初めの厚さの  $1/r+u$  倍になっている。このときの円輪の真応力と公称応力の関係は、伸び歪みを  $\epsilon$  とすれば (2) と同じ関係が成り立っている。したがって、この場合の円板の強度は純粋剪断における塑性応力と引張りにおける塑性応力の関係が分っていれば分るはずである。  $\sigma_r$  が中間主応力 ( $0 <$



第5図

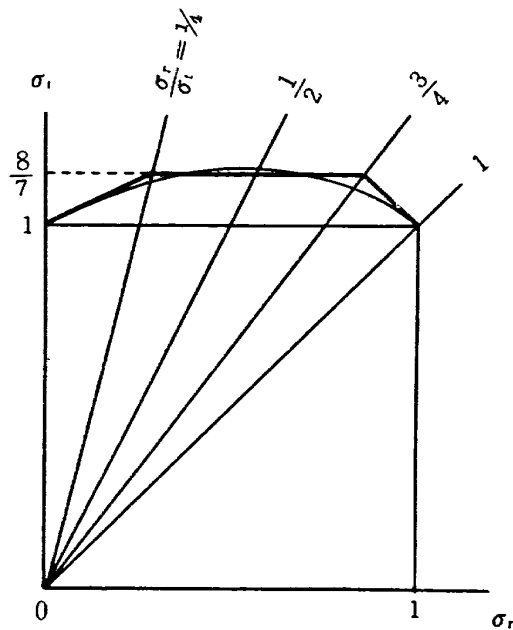
$\sigma_r < \sigma_t$ ) として作用するときの塑性応力  $\sigma_t$  の関係は、単純引張り ( $\sigma_r=0$ ) における応力を元にして表せば第6図のようになる。図において、細線で示した曲線は Mises-Hencky の理論にしたがった楕円の一部分を示したものであり、太線で示した3本の折れ線\*は中西-佐藤の理

\*  $0 < \frac{\sigma_r}{\sigma_t} < \frac{1}{4}$  では  $\frac{1}{2}$  の傾きをもった直線,

$\frac{1}{4} < \frac{\sigma_r}{\sigma_t} < \frac{3}{4}$  では水平線,

$\frac{3}{4} < \frac{\sigma_r}{\sigma_t} < 1$  では  $-1$  の傾きをもった直線であって、  $\frac{\sigma_r}{\sigma_t}$  が  $\frac{1}{4}$  と  $\frac{3}{4}$  において折れ曲りが存在する。

論<sup>(8)</sup>を示したものである。そして純粋剪断と引張りにおける塑性応力の関係は



第 6 図

Mises-Hencky の理論では 1.155 であり、

中西-佐藤の理論では  $8/7$  である。

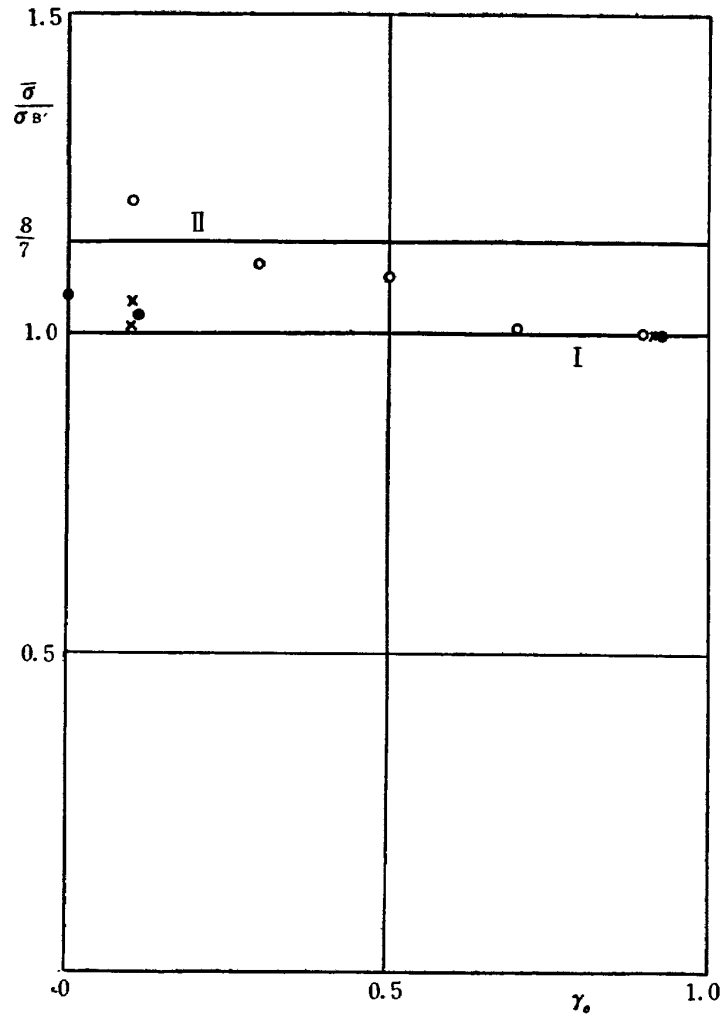
われわれは中間主応力が塑性流動に及ぼす影響に関しては、もちろん中西-佐藤の理論が正しいと思っている。したがって、 $\gamma_0$  が 0 に近い円板の破壊の条件は (4) の  $\sigma_B'$  代りに  $8/7\sigma_B'$  とおいて、次の式で表はされる。

$$\bar{\sigma} = \frac{8}{7}\sigma_B' \tag{9}$$

(9) は円板の変形は純粋剪断をするものとして表した破壊の条件である。しかし、円板の応力状態はどこも  $\sigma_r = 1/2\sigma_t$  ではなく、第3図に示したように  $\sigma_r$  は分布をもっている。しかも、塑性流動における応力の関係は第6図に示すようになっていることからみて、円板が破壊するときの平均応力は  $\sigma_B'$  よりも大きい、 $8/7\sigma_B'$  よりも小さい値になって、(9) はその上限を与えるものとみることができよう。

(4) および (9) で表はした破壊の条件を図示すると第7図の直線 I および II のようになる。直線 I は  $\gamma_0$  が 1 に近い円板の強度であり、直線 II は  $\gamma_0$  が 0 に近い円板の強度の上限である。したがって、 $\gamma_0$  が 1 と 0 の中間の円板の強度は直線 I と II の中間の値となる。I と II で表した強度の差は  $1/7 = 14.3\%$  であって、これを回転数の差で表せば 7% である。実験からこの 7% の差を認めることは、実験の性質からみてむづかしいことであるが、すべての円板の回転強度は直線 I と II の間に出てくることは実験的に認めることができるであろう。





第7図

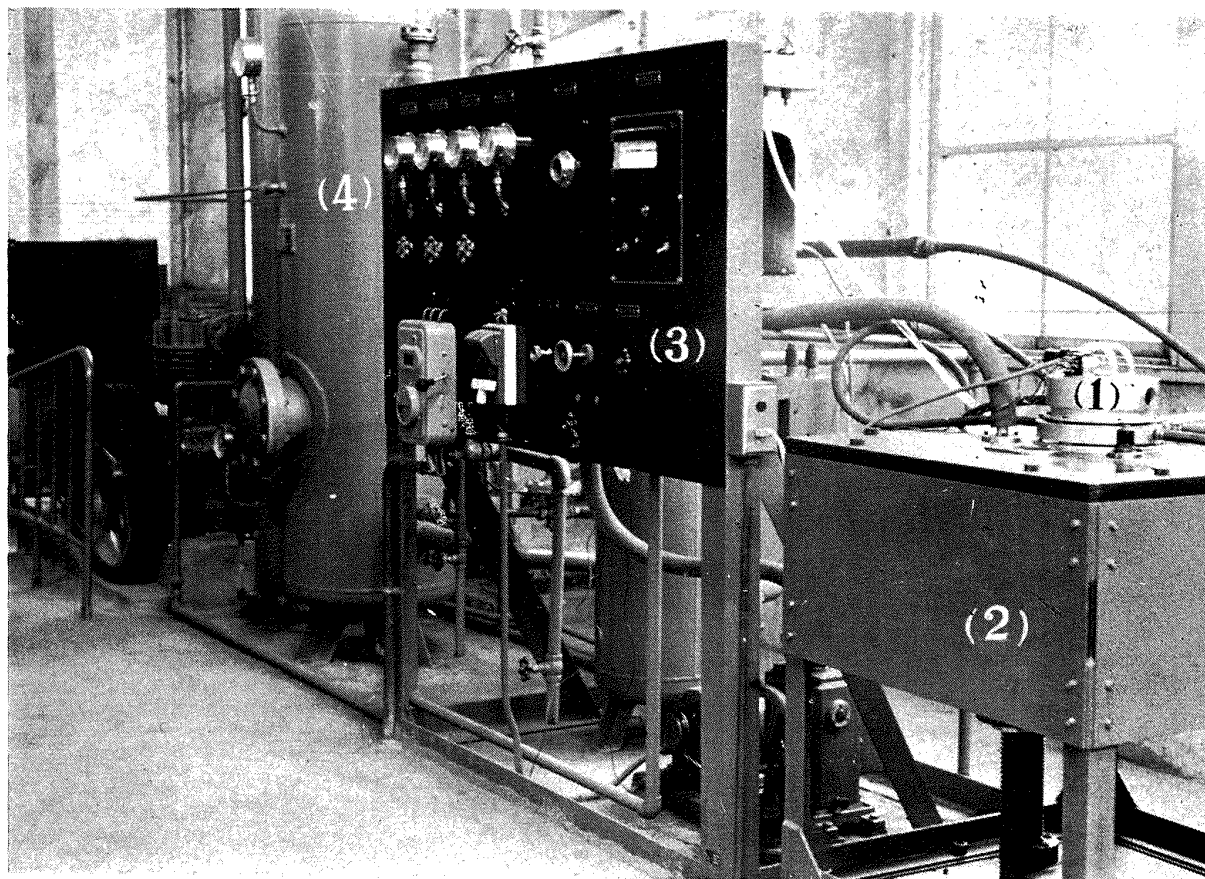
## 実 験

今まで述べた回転円板の強度に関する考察を実験と比較してみよう。

実験には下記の仕様によって作られた回転試験装置を使用した。

駆動方式	空気タービン
回転数	最大 50,000 rpm
試験体直径	最大 250 mm $\phi$
試験体重量	最大 5 kg
圧縮機容量	10 HP
空気圧力	7 kg/cm <sup>2</sup> g
鋼槽内真空度	1/100 mmHg

第8図はこの装置の概観を示すものである。図の(1)は駆動用空気タービンであり、鋼槽は(2)で示した鉄板の内側において、試験用円板はこの鋼槽の中で駆動される。なお、鋼槽の中

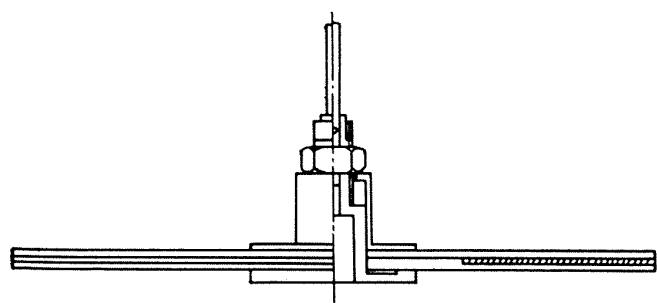


第 8 図

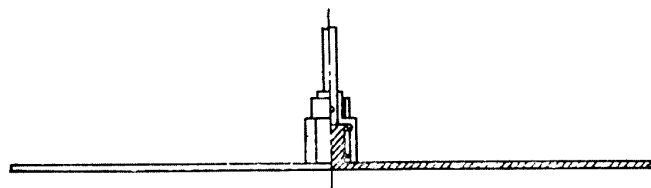
には円板が破壊したときの危険防止のためと、破片をできるだけ原形のまま集めることができるために幅 2 吋の鉛製の保護筒が入れてある。(3) は制御板であって、各種圧力計、真空計、

制御弁、回転計等が取付けられている。

(4) は空気タンクであって、その左に見えるのが圧縮機である。



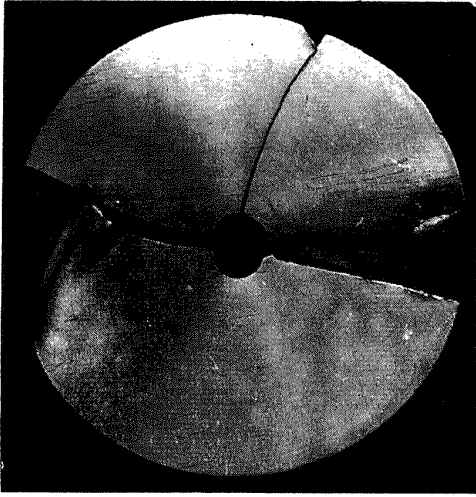
(a)

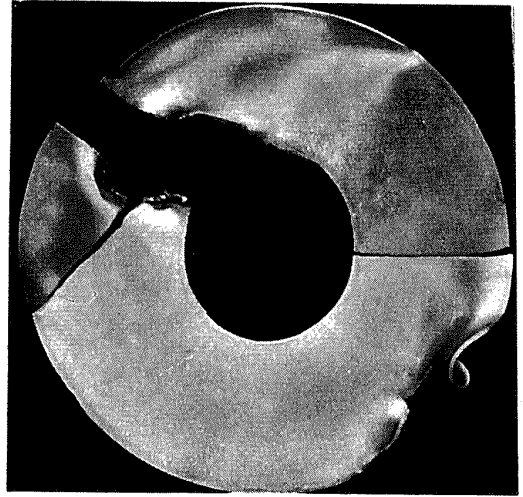


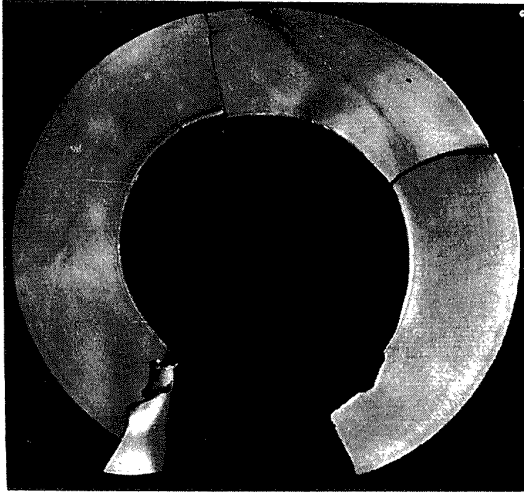
(b)

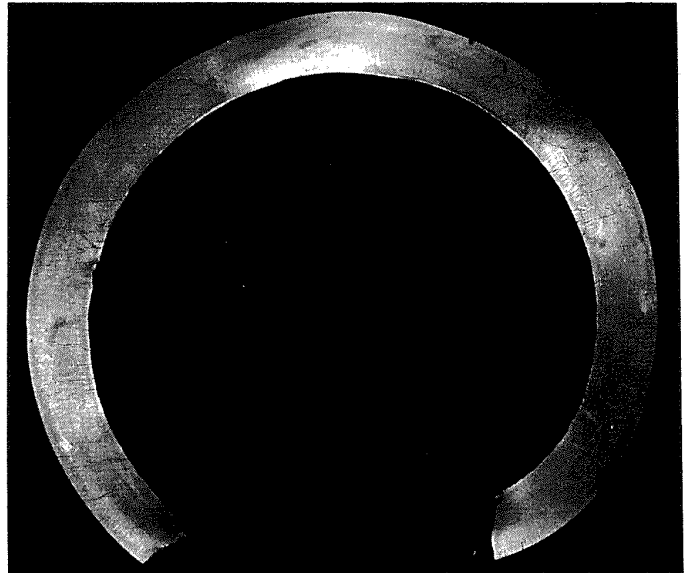
第 9 図

実験に用いた円板の材料は 2 種類の軟鋼と銅およびアルミニウムの 4 種類である。軟鋼円板は鍛造した丸棒から削り出したものであり、銅およびアルミニウムの円板は共に厚さ 2 mm の板材から削り出したものである。材料の焼きなましは軟鋼の場合には円板に仕上げる前の荒削りの状態で 850°C で 1 時間行い、アルミニウムおよび銅では円板に仕上げてから、それぞれ 300°C, 400°C で 1 時間行い、後はいずれも炉中で除冷を行ったもので



$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.10 \\ n = 49,200 \text{ rpm} \end{cases}$$


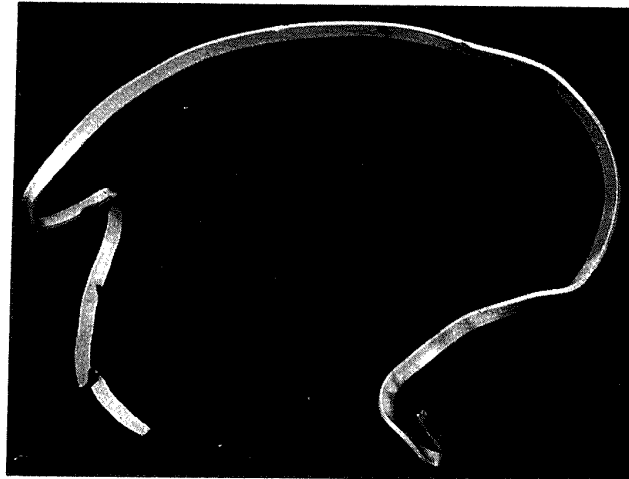
$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.00 \\ n = 42,000 \text{ rpm} \end{cases}$$


$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.50 \\ n = 37,200 \text{ rpm} \end{cases}$$


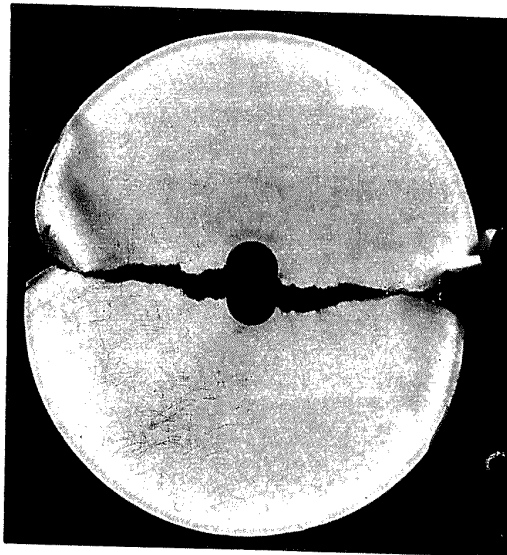
$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.70 \\ n = 32,200 \text{ rpm} \end{cases}$$


$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.90 \\ n = 29,200 \text{ r.p.m.} \end{cases}$$

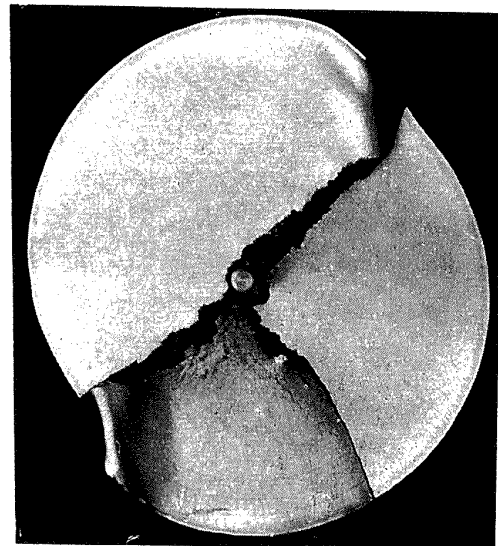
第 10 図 (軟鋼-A)



$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.923 \\ n = 21,900 \text{ rpm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \gamma_0 = 0.121 \\ n = 35,200 \text{ rpm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ n = 37,600 \text{ rpm} \end{cases}$$

第 11 図 (軟鋼-B)

ある。円板の駆動は中空円板の場合には第 9 図 (a) に示すように、駆動軸 (軸径 4 mm) に直結された段付円板の上に乗せてこれと共に回転させた。中実円板の場合には (b) のように円板の中心に小さな突起 (直径 8 mm) を出して、これに駆動軸を直結して駆動した。

第 1 表に円板の寸法ならびに破壊回転数が示してある。第 10 図は軟鋼-A から作った円板の破壊後の写真である。また第 11 図は軟鋼-B の円板の破壊後の写真である。 $\gamma_0 \geq 0.9$  の円板では破断面で局部収縮が起っていて、変形は円周方向への引張りであることがよく分る。 $\gamma_0 \doteq 0.1$  の円板では破断面で半径方向の局部収縮は認められない。しかも円板はかなりの塑性変形をしているにもかかわらず円板の幅 (外径と内径の差) は 0.1~0.15% 縮んだ程度である。このことは、前に  $\gamma_0$  が小さい円板の変形をその応力分布から考察したときに述べた結果と一致している。

第1表中に示した  $\bar{\sigma}$  は円板の最初の寸法とその円板の破壊回転数から (5) に上って計算したものである。次の行の  $\bar{\sigma}/\sigma_B'$  は  $\gamma_0$  が 0.9 またはそれ以上の円板の  $\bar{\sigma}$  を  $\sigma_B'$  として計算したものである。第7図に第1表中に示した  $\bar{\sigma}/\sigma_B'$  の値を記入しておいた。●印で示したもの

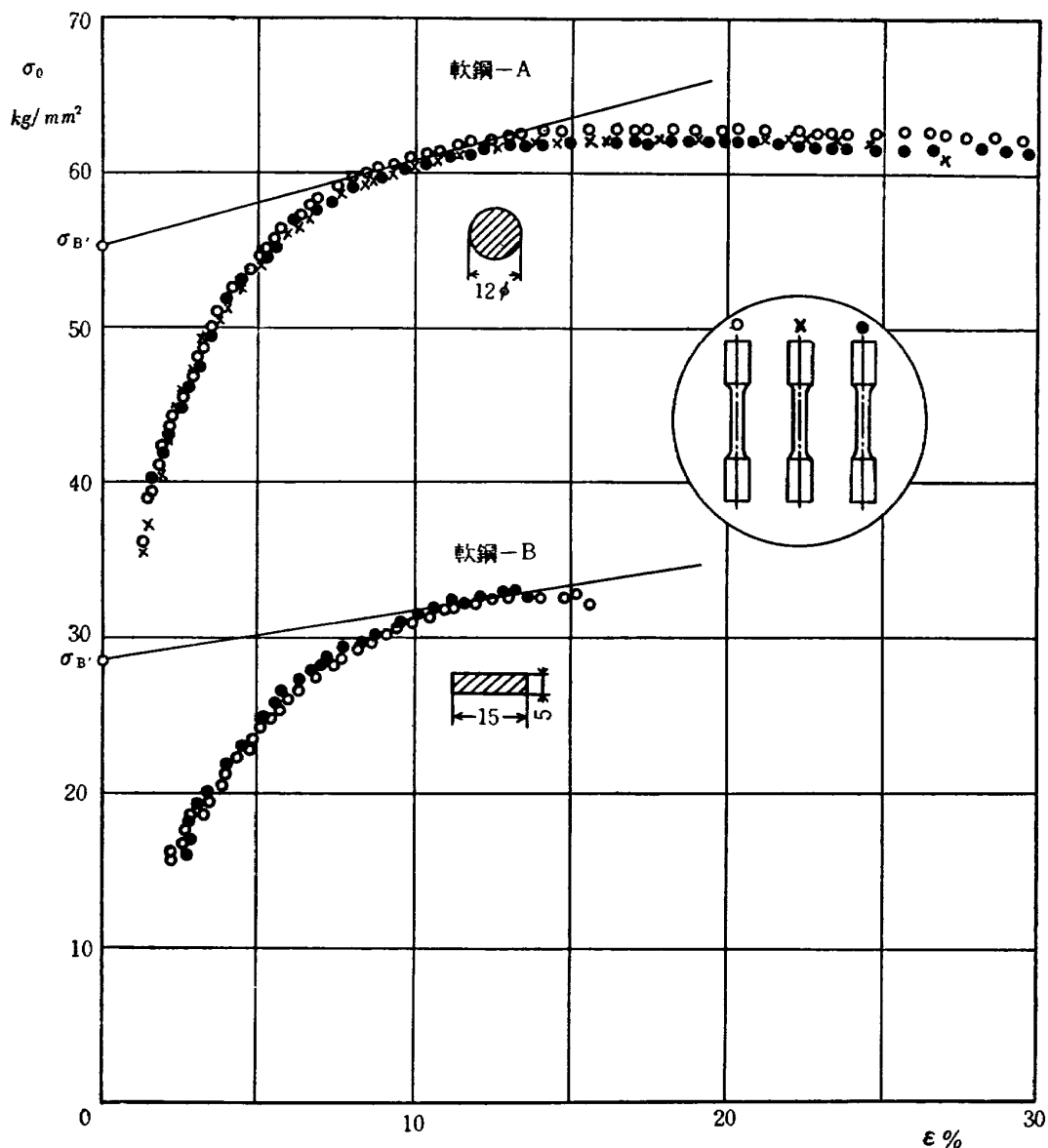
第 1 表

材 料	内 径 $2r_1$ (mm)	外 径 $2r_0$ (mm)	内外径比 $\gamma_0 = \frac{r_1}{r_0}$	破壊回転数 $n$ (r.p.m)	平均応力 $\bar{\sigma}$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_B'}$	引張りから 求めた $\sigma_B'$ (kg/mm <sup>2</sup> )		
軟鋼-A	180	200	0.9	29.200	64.4	1.	55.0		
	140	〃	0.7	32.200	65.0	1.006			
	100	〃	0.5	37.200	70.2	1.09			
	60	〃	0.3	42.000	71.5	1.11			
	20	〃	0.1	49.200	78.0	1.21			
軟鋼-B	180	195	0.923	21.900	36.8	1.	28.6		
	20	〃	0.103	35.200	38.0	1.03			
	0	〃	0.	37.600	39.0	1.06			
銅	150	165	0.909	15.400	15.2	1.	15.6		
	150	〃	〃	16.000					
	20	〃	0.121	25.000				16.00	1.05
	20	〃	〃	24.600				15.40	1.01
アルミニウム	180	195	0.923	16.800	6.80	—	6.5		
	180	〃		15.200					

円板の厚さはいずれも 2 mm である。平均応力  $\bar{\sigma}$  の計算には、密度を軟鋼：7.8, 銅：8.9, アルミニウム：2.7 gr/cc とした。

は軟鋼-A, ○印は軟鋼-B, また ×印は銅の実験値である。これらの実験結果は直線 I と II の間に出ていて、前に推察した通りに出ていた。

第12図は軟鋼-A および B の引張りにおける公称応力と歪みの関係であり、第13図は銅およびアルミニウムの応力と歪みの関係である。試験片は軟鋼の場合には図に示すような方法で円板から採取したものであり、銅およびアルミニウムではロール方向とそれと直角方向からそれぞれ採取したものである。軟鋼板では焼きなましをしてもなおロールの影響が残っているのが普通である。しかし、第13図の結果からは銅およびアルミニウムの板材ではロールの影響はほとんど認められない。第1表中の最後の行の  $\sigma_B'$  はこれらの引張りにおける応力と歪みの関係から求めた値である。これと  $\gamma_0 \geq 0.9$  の回転円板の破壊回転数から計算した  $\bar{\sigma}$  と比較してみると、軟鋼では A, B 材とも合っていないが、銅およびアルミニウムでは一致している。軟鋼ではこの関係が合わないのは材料の性質が初めに等方性でないためであると思われる。もし材料が初めに等方性であれば、 $\sigma_B'$  の値は荷重の種類にかかわらず材料について

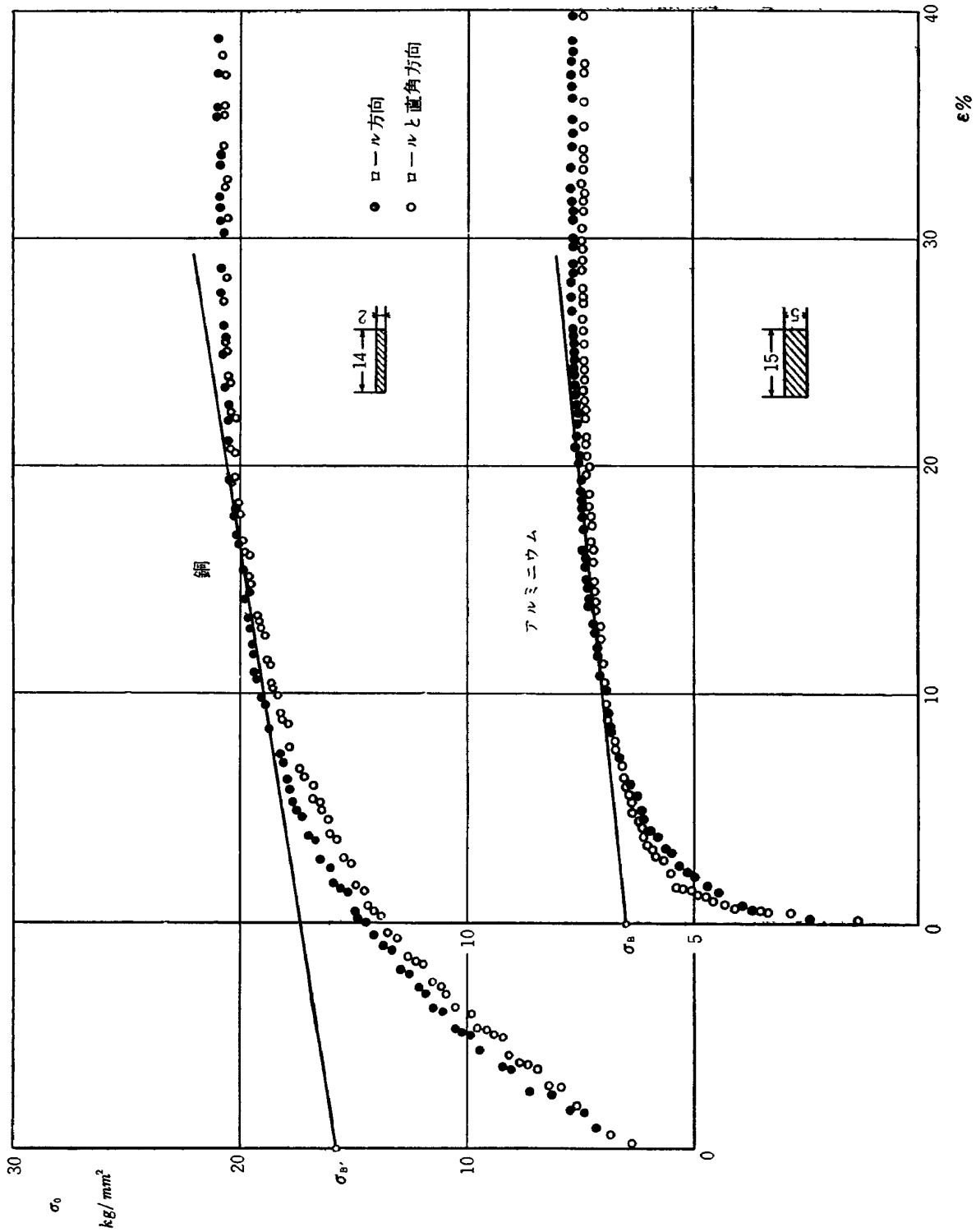


第 12 図

一定な値になるはずである。われわれの経験によれば、軟鋼材では前歴の影響が強く残っていて、普通の焼きなましではこれを除くことはできないものようである。

### 結 言

ここでは、回転円板の強度を回転円輪の強度  $\sigma_B'$  を元にして考察をしたのであるが、その結果は実験結果とよく一致する上に、しかも極めて簡単である。円板の破壊回転数を推定する場合にはこれで充分であろう。材料が初めに等方性である円板については、 $\sigma_B'$  の値は引張り試験の結果から求めることができるが、そうでない材料では応力と歪みの関係は荷重の種類によって異なるので、 $r_0$  が 1 に近い円板の破壊回転数から求めることが必要である。



第 13 図

実際の翼車の形は、一様な厚さではなくて、その厚さは中心部が厚くて外周部は薄くなっている。このような円板の回転強度を知るためには、一様な厚さの円板にボスを付けて、このボスが円板の強度に及ぼす影響を調べてみる必要があると思っている。このことについては、もっか研究を進めている。

終りにのぞみ、終始御指導と御討論を賜った中西不二夫先生に厚く御礼を申し上げる次第で

ある。また、実験装置を設計するにあたり御指導を賜った東京工業大学 谷口 修教授ならびに製作の労を煩した明石製作所の方々に厚く御礼申し上げる次第である。

## 文 献

- (1) 中西, 機械学会論文集 18 巻, 75 号, (1952)
- (2) 佐々木・白鳥, 機械学会論文集 21 巻, 103 号および 110 号 (1955)
- (3) 中西・佐藤, 機械学会論文集 25 巻, 155 号 (1959)



---

## 航空技術研究所報告4号

昭和35年9月発行

発行所 航空技術研究所  
東京都三鷹市新川700  
電話武蔵野(022)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53

---