

# 航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-9

遷音速流小擾乱理論の研究 (I)

— 非線型補正理論 —

細 川 巖

1961年3月

航空技術研究所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

# 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)

— 非線型補正理論 —

細 川 巖\*

## Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I)

— Non-Linear Correction Theory —

By Iwao HOSOKAWA

In order to approach the flow near thin wings and bodies flying at transonic speed, the small disturbance theory of transonic flow is studied from a new point of view. At first the mathematical ground of the linearized transonic flow theory originating with Oswatitsch is investigated by introduction of the correction term for complementing the linearized flow field, and therefrom a more exact and reasonable method of approximation is developed, that is at present called the non-linear correction theory. It is remarked that Spreiter's local linearization method can be reasoned out as a corollary of the above investigation.

However, it is the quadratic nonlinearity of the equation which is essential to the characteristic features of transonic flow, such as shock waves, and therefore this is taken into account in the present method as well as in the integral equation method due to Oswatitsch. As a result, it turns out that the present theory can reveal many plausible features of the transonic flow, as a whole. Various examples of application are added, some of which are compared with experiments and other theories.

### § 1 序 論

近來約 10 年の間に、高速空気力学において遷音速流の研究が発展し得たことの二つの契機といえば、それは有孔壁風洞による実験法の確立と、遷音速流小擾乱理論の成立とであろう。ここでは、後者の問題を研究する。

周知のように、遷音速流小擾乱理論は、Oswatitsch-Wiegardt [1], Busemann-Guderley [2], von Kármán [3] によって、翼胴体等の薄い物体周りの遷音速流に対して有効な第 1 近似を準備するべく作り上げられたものであり、初期において、遷音速相似法則 (Transonic Similarity Rule) (von Kármán [4]), 等価法則 (Transonic Equivalence Rule) (Oswatitsch [5]), 面積法則 (Transonic Area Rule) (Whitcomb [6]) 等の、非常に有用な一般的結果を導くこ

---

\* 空気力学部

とに大いに貢献した。<sup>[注 1]</sup>にも拘らず一方では、元来その理論が楕円双曲混合型（更に物理空間で非線型）偏微分方程式で記述されているために、現在の解析技術では、一般に具体的な解を求めることが極めて困難であった。かくてその後得られた多くの解は、大部分ホドグラフ法に立脚し、楔型、平板等の特殊な翼型周りの二次元流に限られたのである。（ホドグラフ面で、二次元遷音速流方程式は線型となるが、境界条件は、物理空間で与えられたものと、一般に対応をつけることが難かしい。）とはいえ、これらの解法は二次元流の複雑な遷音速点付近の流れの模様のいくつかの典型的実例を与え、遷音速流研究のパイロットとして、貴重な役割を果たしたものといえるだろう。<sup>[注 2]</sup>中でも、実際に近い滑かな翼型周りの、衝撃波を伴わない遷音速流のほぼ厳密と思われる解が、友近一玉田[13]によって見出されたことは興味深い。<sup>[注 3]</sup>

だがかくの如き理論の桎梏に対して、それを破ろうとする別の努力も続けられ、最近において、遷音速で有効な二つの近似解法が唱導された。いずれも、二次元三次元の流れを物理空間で直接に扱って遷音速流小擾乱理論の解に接近することを狙っており、共にその創案を Oswatitsch[15],[16]に負っている。一つは、Gullstrand[17], Spreiter[18]によって研究された積分方程式法であり、一つは Maeder[19]によって形式化された遷音速線型理論（Linearized Transonic Flow Theory）であり、これは Spreiter [20]によって独立に局所線型化法（Local Linearization Method）に発展させられた。これらの新方法は、広い範囲の物体に適用を許し、かなり大胆な仮定を前提しているにも拘らず、結果はホドグラフ法によるものおよび遷音速風洞による実験と大体において良く一致している。然しこのような実際的成功のあった反面、前提した仮定が妥当性を失うような事例については理論的予言も大いに失敗し、<sup>[注 4]</sup>今尚その理論的価値を疑問視する向きもあるようである。最もよいといわれる Spreiter の局所線型化

[注 1] この分野では、他に Heaslet, Spreiter, Berndt, Page, McDevitt の研究が重要である。特に、Heaslet-Spreiter [26] は理論的に、等価法則の部分的結果として 面積法則を誘導している。

[注 2] Cole [7], Guderley-Yoshihara [8], Vincenti-Wagoner[9] による楔翼型についての理論的研究は有名である。他に、混合型の困難を避ける一つの方法として、肩からの音速剥離を提案する今井 [10] のモデルに基く研究も行われている。（Helliwell-Mackie [11], 楠川 [12]）

[注 3] 友近一玉田理論は、現在議論している遷音速流小擾乱理論よりも精度は次の点ですと卓越している。(i) 先ず流れ函数のホドグラフ方程式で、遷音速での密度—速さの函数関係を非常に精度の良いモデル函数で置き換えている。従って、本質的に Tricomi Gas を仮定している (2.1) よりも厳密である。（[14] 参照。）(ii) 線型化した境界条件でなく厳密な境界条件を課している。(iii) 圧力の計算では等エントロピー流の厳密な式を使っている。

[注 4] 例えば、Spreiter の積分方程式法による圧力分布や抵抗の値は、音速に近い流れで大いに実験とくい違い（[18] 参照。）、又 Maeder の線型理論は、最大厚みが 30% 弦長にある翼型では定性的に間違った結果を与える（[20] 参照）。又亜音速から超音速を通しての翼面上の音速点の移動についてはいずれも満足な説明が得られない。（[21] 参照。）

法でさえ、凍結音速域を越えたマッハ数範囲に延長することは出来ていない。<sup>[注5]</sup>従って、遷音速流小擾乱理論のこれらの新しい近似解析法は、むしろ断片的に良好な結果を与えることが確められたという現状のように見える。

これに対して、著者は最近、遷音速線型理論の発展を組織的に研究し、局所線型化法とほぼ同程度の結果を与える別の解析法を考案した。([21]) この方法の前二者と区別さるべき特徴は、断片的ではなくすべてのマッハ数範囲で、大体遷音速流小擾乱理論の近似における物体近傍解を与え得ることと、本質的に非線型の影響を含む解法であるために、積分方程式法と全く同じように、物体上衝撃波の発生を誘導する点である。

理論は二つの部分から成っている。一つは遷音速線型理論そのものであり、もう一つはその欠陥を補うための理論であり、これが前者の“理論として閉じていない”不定性を解決すると同時に、衝撃波の発生を誘導する。解は、具体的な境界条件から直接に関係づけられるような形で示されることができる。論文 [ I ] では、先ず後者の理論——非線型補正理論——を展開し、論文 [ II ] で、前者の遷音速線型理論の解の一般的定式化を試み、これによって抵抗問題 (Dickensproblem) および揚力問題 (Auftriebsproblem) を統一的に取り扱う予定である。理論の展開の前に、若干の予備考察を加えておこう。

---

[注 5] ここに著者宛の Spreiter 博士の私信の一部を引用する。

...We have instead confined our attention to transonic flows with free-stream Mach number 1 (or to Mach number so close to 1 that the Mach number freeze applies.), and to flows with Mach numbers sufficiently less than or greater than unity for the flow to be purely subsonic or purely supersonic. These Mach number ranges were selected purposefully because they avoid the necessity for consideration of shock waves adjacent to the body surface in the analysis of flows about a wide and interesting class of two- and three-dimensional bodies. If a flow with a shock wave adjacent to the body is to be considered by this method, it would be necessary to return to a formulation of the basic equation similar to that given for two-dimensional flow in the Appendix of NACA Report 1359 (NACA TN 3970). The conditions associated with the shock waves lead to finite contributions from the surface integrals along the shock waves. These result in turn in the necessary velocity discontinuity at the shock waves. The difficulty with the problem as formulated in this way is that the analysis cannot proceed in a direct manner since neither the location nor the conditions along the shock wave are known at the outset, but would have to be found in the course of the solution. This situation is relieved in the integral equation method by the appearance of the quantity  $\bar{u} - (\bar{u}^2/2)$  which is continuous for a normal shock wave. I have always supposed that it would be advantageous in any extension of the local linearization method to supercritical Mach numbers to try to incorporate this quantity into the analysis, instead of continuing with the quantity  $\bar{u}$  which appears superficially to be simpler but is in fact more difficult to work with because of the discontinuity at the shock wave. It is, therefore, very interesting to me to see that a feature of this general type appears so naturally in the course of your analysis....

## § 2 非線型補正の概念と遷音速線型化の数学的基礎

遷音速流小擾乱理論の基礎方程式は、

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = (\bar{M}_\infty^2 - 1)\Phi_{xx} + (\gamma + 1)M_\infty^2 \Phi_x \Phi_{xx} \quad (2.1)$$

と書かれる。ここで一様流は  $x$  軸の方向にあって、 $U_\infty$ ,  $M_\infty$  という速度とマッハ数を持ち、 $U_\infty \Phi$  は擾乱速度ポテンシャルを示すものとする。 $\gamma$  は気体の両比熱比である。

粘性流体の問題で、Stokes 近似の改善を計るために、Oseen が Navier-Stokes 方程式の非線型慣性項を取り入れながら、その速度因子を一様流の速度  $U_\infty$  で置き換えて線型化を計った例と同じように、Oswatitsch は、(2.1) の非線型項の  $\Phi_{xx}$  を一定数で置き換えることによって、 $M_\infty=1$  で意味のある一つの解を得ることに成功した[16]。彼が得たのは軸対称スピンドルの周りの流れについてであるが、対称円弧翼の場合でもうまく行くことが Maeder によって示された[19]。さてここで、Oseen と Oswatitsch の着想は数学的には似たものであるが、前者の場合は線型化定数が  $U_\infty$  という典型的な物理量であったに反し、後者の場合は、加速度の意味をもつことは明かであるが、対応する特性物理量が直ぐには見出せない点に注意しなければならない。加速度  $\Phi_{xx}$  は物体遠方で 0、物体近くでは大いに変る。線型化定数の不定性が、後者の場合の最大の困難であった。(Maeder は、臨界流における Prandtl-Glauert 理論との連続的接続という条件を元にして一つの提案をしたが、実はこの条件を充す決定法はユニックではない。結局線型化定数の最適値を決める一意的根拠のない点に、“理論として閉じていない”最大の欠陥があるのである。)けれども、非線型項の影響のこのような取り入れ方によって、今まで  $M_\infty=1$  ですべて発散していた解がとも角も有限の解として現れ得たことは、Stokes 近似より Oseen 近似への移行行きに比して、それ以上に意味深いことではあった。この有限の形式解を元にして、様々の組織的な変形・精密化の余地が残されていたからである。その道程を次のような数学形式によって辿って見よう。

今、上の線型化によって得た形式解を Maeder に従って  $\varphi(x, y, z; K)$  と書き、これは

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = (M_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} + K\varphi_x \quad (K > 0) \quad (2.2)$$

を充すとする。われわれは (2.1) の解を問題としているから、 $\varphi$  の  $\Phi$  からのずれを  $g$  で示し次のように記すことができる。[注 6]

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(x, y, z; K) + g(x, y, z; K) \quad (2.3)$$

これは既知函数  $\varphi$  を通して  $\Phi$  を  $g$  に線型変換したものと考えてもよく、従って  $g$  の方程式は

[注 6] この考え方には、線型常微分方程式  $y'' + f(x)y = 0$  に対する  $W$ - $K$ - $B$  法が参考になる。 $f(x)$  を先ず常数と置いた方程式の解を  $\chi$  とする時、より精密な近似として  $y = A\chi$  を作り、 $A$  の然るべき近似解を求める。いわば  $A$  は補正因子 (correction factor) であった。(小谷正雄：量子力学 (岩波全書) 参照) 非線型偏微分方程式を扱うわれわれの場合には、 $\chi$  が線型解であれば精密な解を  $\chi + A$  と置き、補正項 (correction term) の形で  $A$  を求める方が数学的に容易であるし、物理的にも適当である。

$\Phi$  の非線型性をそのまま受け継ぐことになる。すなわち、

$$g_{yy} + g_{zz} = (M_\infty^2 - 1)g_{xx} + (\gamma + 1)M_\infty^2(\varphi_{xx}g_x + \varphi_x g_{xx} + g_x g_{xx}) \\ + \{(\gamma + 1)M_\infty^2\varphi_{xx} - K\}\varphi_x \quad (2.4)$$

この場合、 $g$  の解は、非斉次項が恒等的に 0 の時、（これは線型化の前提が厳密に正しいか、或は流れの中に擾乱が存在しない時である。）0 になる特解でなければならない。すなわち、

$$g \equiv 0, \text{ when } \{(\gamma + 1)M_\infty^2\varphi_{xx} - K\}\varphi_x \equiv 0 \quad (2.5)$$

振動論に例えれば、これは解が自由振動を除いた強制振動だけで作られることを意味する。つまり、一つのフィード・バック・システムとして、加速度の誤差  $\{(\gamma + 1)M_\infty^2\varphi_{xx} - K\}$  だけが強制振動の根源となって  $\varphi$  に対する補正  $g$  を惹起するように、自由振動（ノイズ）に相当する  $g$  の斉次解は系から除いておくのである。これは又、 $\varphi$  が既に必要な境界条件をすべて満足していることと矛盾しない。

Oswatitsch によって取られた遷音速線型化の概念の根底には、こうして得た解  $g$  が  $\varphi$  に比べて無視できることが期待されており、又一方そのような  $K$  を見つけることが残された問題になっている。(2.4) 式から分るように、 $|\varphi| \gg |g|$  であるためには少なくとも  $|(\gamma + 1)M_\infty^2\varphi_{xx} - K| \leq |g_{xx}|$  が必要である。この場合に限って、(2.4) の  $g_x g_{xx}$  は無視でき、 $g$  は  $\Phi$  の第 2 近似項を与えるといえる。

この期待は、然しながら、非線型性が本質的な働きをする遷音速流の場合には、一般に実現され得ないだろう。何故なら、 $g_x g_{xx}$  が無視できる場合は流れは本質的に線型場となり、衝撃波等の諸特徴の現れない場合に相当するからである。 $g_x g_{xx}$  が本質的に影響を及ぼす限りは、 $\varphi \approx g$  であり、 $g$  は第 2 近似ではなくて第 1 近似の有力な構成要素になる筈である。 $g$  を非線型補正項と呼ぶのはこの意味からである。この理論の立場では、原則として  $K$  の与え方はさほど問題にならないと思われる。フィード・バックによって  $g$  が然るべくコントロールを受けるからである。然し、方程式の数学的構造によって、物理的に意味のある結果を与える  $K$  は或る範囲内に制限されるのが普通であろう。所が実際にはこの制限は意外に強く、 $K$  は唯一つの最適値 (Optimum value) に帰着することが次節において証明される。

次に、Oswatitsch の概念を多少変形し、 $K$  を定数でなく変数として扱うことを試みて見よう。この概念は Spreiter の局所線型化法[20]に道を開くものである。非線型補正項  $g$  の解を求める代りに、(2.5) の特質を利用して非斉次項を 0 ならしめる  $K(x)$  を求める方法がそれである。この場合、もし (2.3) を  $K$  一定のまま一旦微分した  $\Phi_x$  において  $K \rightarrow K(x)$  と変えるならば、(2.5) に対応する非斉次項の方程式は次のように変形することに注意しなければならない。すなわち、

$$\{(M_\infty^2-1)K'\varphi_{xK}+(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_x(\varphi_{xx}+K'\varphi_{xK})-K\varphi_x\}=0 \quad (2.6)$$

然し  $K$  は一変数函数としている以上、全体の場合でこれが恒等的になり立つことは不可能であるので、 $y, z$  は特に物体上に指定し、(2.6) を  $x$  の常微分方程式とみなして  $K(x)$  を決定することにする。この場合は、物体から離れると  $g \equiv 0$  でなく、フィード・バックによってそれだけの  $g$  が生ずるのであろう。だがここで、次節(本論)に示す理論過程に従えば、物体近傍の  $g_x$  は第1近似において非斉次項の積分によって決定せられるから、 $g_x=0$  は物体近傍において、ほぼ正しく結論してもよいのである。特別に  $M_\infty=1$  とすれば、(2.6) は

$$d/dx \cdot \varphi_x(x; K(x)) - K/(\gamma+1) = 0 \quad (2.7)$$

に帰着する。これはまさに Spreiter の局所線型化法と同等である。 $M_\infty \neq 1$  の時は、(2.6) の第1項が利き、このために Spreiter の方法は  $M_\infty$  が 1 より遠ざかるにつれて次第に大きい誤差を含むであろう。

それからもう一つの理論的制限に注意しなければならない。 $\varphi$  はもともと  $K > 0$  を前提して出された解であるから、(2.7) の解法は必然的に減速流領域をもたらし得ないのである。勿論  $K < 0$  の前提から出発すれば、減速流のみしか解にならない。この二つの前提を両方採用してつなげば、いよいよにも思われるが、不連続性が問題の中に介入して一貫した理論にすることは困難である。(衝撃波の発生に密接な関連がある。) いずれにしろ、上の近似解法は、 $M_\infty=1$  の加速流領域にのみ適用されて来たことを注意しておく。

さてついでに、これと全く同様にして、Spreiter によって発案された楕円型(純亜音速流)及び双曲型(純超音速流)の局所線型化法を導いておこう。但しこの場合は、基礎となる線型解を  $\varphi$  とする代りに、(2.1) の非線型項の中味の  $\Phi_x$  を定数とおき換えた式

$$\psi_{yy} + \psi_{zz} = (M_\infty^2 - 1)\psi_{xx} + (\gamma + 1)M_\infty^2 u \psi_{xx} \quad (2.8)$$

の解を  $\psi$  とし、これを採用することにする。そして、

$$\Phi(x, y, z; u) = \psi(x, y, z; u) + g(x, y, z; u) \quad (2.9)$$

として(2.4)と同じような  $g$  方程式を作ると、

$$g_{yy} + g_{zz} = (M_\infty^2 - 1)g_{xx} + (\gamma + 1)M_\infty^2(\psi_{xx}g_x + \psi_x g_{xx} + g_x g_{xx}) + (\gamma + 1)M_\infty^2(\psi_x - u)\psi_{xx} \quad (2.10)$$

が得られる。今、 $u$  を定数としたまま  $\psi_{xx}$  を計算し、ここで始めて  $u$  を変数として  $u(x)$  と扱おうと、(2.10) の  $\psi_x$  は  $\int^x \psi_x(x, y, z; u(x)) dx$  に変えなければならない。従ってその場合の非斉次項を物体上で 0 にするような  $u(x)$  は、

$$\int^x \psi_{xx}(x; u(x)) dx - u(x) = 0$$

或は 
$$\psi_{xx}(x; u(x)) - du/dx = 0 \quad (2.11)$$

によって決定される。これはまさに Spreiter の局所線型化法そのものである。似たような関

係として、 $u(x) = \psi_x(x; u(x))$  も考えられるにも拘らず、(2.11) を局所線型化法に採用している数学的根拠は実に見られるのである。!! この場合も前と同様に、物体近傍で  $g_x = 0$  を結論することができ、精度は非常に良いであろう。けれども、 $\psi$  は  $u \rightarrow (1 - M_\infty^2) / (\gamma + 1) M_\infty^2$  で、楕円型から双曲型、或はその逆に変わり、更にそこで発散するという困難な事情をもつために、おのずから、 $u$  がこの点を通らないような場合に、理論の適用が制限されなければならない。すなわち、純亜音速および純超音速の流れに限られる由縁である。!! 夫々は楕円型および双曲型の  $\psi$  の解から出発する。

以上によって、遷音速線型理論、非線型補正理論、局所線型化法との間の数学的関連が明かとなった。遷音速流の解析手段としての、局所線型化法の難点は、上述したように適用性の制限にある。減速流および衝撃波を含む遷音速流の問題に手をつけられない以上、亜音速から超音速に至るマッハ数変化に対して連続的理論とはなり得ないであろう。これに対して非線型補正理論は、次節にみられるように、物体近傍で妥当な補正項  $g_x$  が求められる限りにおいて、衝撃波を含む減速流の問題を解決できて非常に有利に見える。更に、線型理論が出発点になっているために、揚力問題や非定常流の問題に対する系統的な見通しを得られる点も興味がある。

最後に、もう一つの観点から、非線型補正理論の物理的（方法論的）意味を述べてみる。そもそも、基礎方程式 (2.1) の特徴はその非線型項  $(\gamma + 1) M_\infty^2 \phi_x \phi_{xx}$  にあるが、その困難は、それが同時に二重の働きを荷っている点にある。一つは減衰項 (damping term) としての役割である。これは必ずしも非線型である必要はなく、 $\phi_x$  に比例する項であればよいので、これによって  $M_\infty = 1$  における解の発散が抑えられ、解は有限確定する。もう一つは、本質的に二次非線型の働きであって、これが場の有限の不連続を惹起する原因である。非線型補正の方法の一つの特質は、非線型項のこれら二つの重要な役割を、論理的に別々に切り離して働かせたという点である。遷音速線型解  $\varphi$  はこの第一段階を与える。重要なことは、 $\varphi$  が物理的境界条件をすべて満足するように解くことができ、 $g_x$  は又  $\varphi$  の局所的な値によって決定することができ、こうして二つの役割が大した困難ももたらさずに分離できて、現象に対して支配的な性質が近似的に抽出できた点である。

### § 3 非線型補正理論

#### [1] 基礎方程式

非線型補正場  $g$  を支配する基礎方程式 (2.4) は、次のようにも書ける。



$$g_{vv} + g_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \{ (M_{\infty}^2 - 1) + (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \varphi_x \} g_x + \frac{1}{2} (\gamma + 1) M_{\infty}^2 g_x^2 \right] + \{ (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \varphi_{xx} - K \} \varphi_x \quad (3.1)$$

一般に3次元の任意の薄い物体(細長胴体を含む)周りの流れを考えているが、特に2次元の場合は方程式の左辺は  $g_{zz}$  に帰着し、又軸対称の時は  $g_{rr} + \frac{1}{r} g_r$  と表わされてもよい。ここで  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  である。(第1図参照)

(2.4) から分るように、

$$(M_{\infty}^2 - 1) + (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \varphi_x \equiv 0 \quad (3.2)$$

に従って基礎方程式は楕円-双曲混合型の性質をもっており、(2.1) と同じ性質を受け継いでいることが分る。(3.2) の等号の成り立つ曲面は、薄翼の場合は音速面に対応するが、軸対称体の場合は音速面とは若干ずれたものになる。<sup>[注7]</sup>

(3.1) の厳密解を求めることは、もとより困難であるから、非線型性を含んだままで、物体近くの近傍解を求めることを試みる。そのために先ず、次のように方程式の中の諸量の大きさの程度を吟味しなければならない。

周知のように、遷音速流小擾乱理論は、厳密な非粘性圧縮流のポテンシャル方程式から一様流を分離して小擾乱ポテンシャル方程式を導いた時、最低次の  $O(\tau^2)$  の項のみを残すことによって作られている。(例えば Guderley [22] 参照。)  $\tau$  は遷音速流小擾乱理論の展開パラメーターであり、

$$\Phi = O(\tau) \quad (3.4)$$

および

$$x = L\bar{x}, \quad y = L\tau^{-\frac{1}{2}}\bar{y}, \quad z = L\tau^{-\frac{1}{2}}\bar{z} \quad (3.5)$$

( $L$  は物体の縦の長さ。) の関係を使って、そのことを確認することができる。但し  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = O(1)$ 。その際、遷音速流では、

$$(1 - M_{\infty}^2) / (\gamma + 1) M_{\infty}^2 = O(\tau) \quad (3.6)$$

となることを考慮することが必要である。物体の厚み比を  $t$  とすれば、薄い物体の境界条件に合わせて、 $t$  は  $\tau$  と薄翼および細表胴体において夫々、

$$\tau = O(t^{2/3}), \quad \tau = O(t^2) \quad (3.7)$$

[注7] この場合、音速面は小擾乱の近似で、

$$(M_{\infty}^2 - 1) + (\gamma + 1) M_{\infty}^2 (\Phi_{xx} + \frac{1}{2} \Phi_r^2) = 0 \quad (3.3)$$

で与えられる。

のように関係している。

これに従って、(2.2) の両辺も  $O(\tau^2)$  であり、

$$\varphi = O(\tau) \quad (3.8)$$

および 
$$K \sim (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_{xx} = O(\tau) \quad (3.9)$$

が一般に結論される。このことから、(3.1) の非斉次項は一般に  $O(\tau^2)$  となり、これと矛盾しないために、

$$g = O(\tau) \quad (3.10)$$

が導かれる。

さて次に、方程式 (2.2) は線型であるから、 $\varphi$  は与えられたすべての1次の境界条件を満足するように決定することができるが、この結果、 $g$  の満たすべき境界条件は、たかだか2次の程度のものしか残らない。すなわち、 $U_\infty \Phi_x = u$ 、 $U_\infty \Phi_z = w$  とおけば、物体上では前後縁を除いて、

$$\frac{\Phi_z}{1 + \Phi_x} \cong \varphi_z + g_z, \quad \frac{w}{U_\infty + u} = \frac{w}{U_\infty} - \frac{w}{U_\infty} \cdot \frac{u}{U_\infty} + \dots \quad (3.11)$$

なる故に、

$$\varphi_z = w / U_\infty \quad (3.12)$$

の結果、

$$g_z = O\left(\frac{w}{U_\infty} \cdot \frac{u}{U_\infty}\right) \quad (3.13)$$

であることが導かれる。(3.4), (3.5) により、これは

$$g_z = O(\tau^{3/2}, \tau) = O(\tau^{3/2}) \quad (3.14)$$

となる。同様に、

$$g_v = O(\tau^{3/2}) \quad (3.15)$$

(軸対称の時は、 $\log \tau = O(1)$  とみなして同じ結論に達する。)

さて、以上は境界条件について確かに成り立つ関係であるが、それは  $g$  の場の内部の量とは原理的には直接の関係はないであろう。けれども、この境界条件を満足する  $g$  の解は、流れが滑かな小擾乱である限りは、少なくとも物体近傍ではその境界条件と同じ大きさの程度の  $g_z$ 、 $g_v$  をもつであろう。このように考えて、ここで (3.14) (3.15) は物体近傍の場の内部でも成り立つ関係であると仮定する。これによって、物体近傍で、

$$g_{zv} + g_{zz} = O(\tau^3) \quad (3.16)$$

が誘導される。[注 8]

かくして基礎方程式 (3.1) は物体近傍で、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \{ (M_\infty^2 - 1) + (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_x \} g_x + \frac{1}{2} (\gamma + 1) M_\infty^2 g_x^2 \right] + \{ (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_{xx} - K \} \varphi_x = 0 \quad (3.17)$$

と近似することができる。これが  $g$  の横方向 ( $y, z$ ) の微分を含まないことは、物体遠方の  $g$  の場の影響がこの解に強く影響しないこと、従って (3.16) の成り立たない領域からの寄与が小さいこと、それ故にこの解が局所的に正しい近傍解となり得ることを示唆している。

近似方程式 (3.17) に対しても、前節に示した特解の条件 (2.5);

$$g \equiv 0, \text{ when } \{ (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_{xx} - K \} \varphi_x \equiv 0$$

が課せられていることは、(3.1) におけると同様である。次にみられるように、解の決定に対してこれの果す役割は非常に大きい。

## [2] 近似解

(3.17) は容易に積分でき、

$$g_x = - \left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \right\} \pm \sqrt{ \left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_c^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx } \quad (3.18)$$

条件 (2.5) によって、複号は

$$\varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \geq 0 \quad (3.19)$$

に従って取られねばならない。未定々数  $c$  と  $K$  は物理的考察によつて次のように一意的に決定される。

[注 8] 非常に細い軸対称体の場合には、物体に沿って  $\Phi$  が軸上で特異性をもつので、一概に薄翼に準じた取り扱いはできないかも知れない。この懸念を除くために、上の過程とは別の方法で詳しく検証することが必要である。これについての Oswatitsch 教授の議論をここにそのまま紹介しよう。(著者宛の私信より。)

先ず (3.13) の代りに  $g_r = O\left(\frac{v}{U_\infty} \cdot \frac{u}{U_\infty}\right)$  を得る。(  $\frac{v}{U_\infty} = \Phi_r$  とする。 ) 軸上の特異性に注意し、物体近傍で  $r \sim \tau^{1/2} (L=1)$  になることを考えて、

$$\frac{v}{U_\infty} = O(\tau^{1/2}), \quad u/U_\infty = O(\tau)$$

次に (2.1) によって  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{v}{U_\infty}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi = O(\tau^3)$

そこで物体近傍では  $v$  に比べて  $u$  は近似的に  $x$  のみの函数となることを考慮しながら、上の関係を合わせると、

$$g_{rr} + \frac{1}{r} g_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g_r) = O\left\{ \frac{u}{U_\infty} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{v}{U_\infty}) \right\} = O(\tau^3)$$

が得られる。

先ず,  $g_x$  は

$$\varphi_x - \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} = 0 \quad (3.20)$$

を充す点  $x=c^*$  において, 一般に不連続となるであろう。然し加速流領域における流れの不連続は, 一般にエントロピー減少をもたらす, 物理的に不可能であるから,

$$g_x(c^*) = 0 \quad (3.21)$$

によって, これを除く。但し  $x=c^*$  は加速流にあるとする。これは直ちに

$$c=c^* \quad (3.22)$$

に導く。

第二に, (3.21) と (2.3) より,

$$\varphi_x(c^*) = \Phi_x(c^*) \quad (3.23)$$

が分る。(3.2) と (3.20) を参照すれば, (軸対称流では近似的にはあるが, [注 7]参照。)これは遷音速線型理論によって得られる  $c^*$  は実際の非線型の流れの音速点を与えることを意味している。(ところで, その遷音速線型理論の解はパラメーター  $K$  に大きく依存するから, 物理的にも数学的にも妥当な  $K$  の決定を待って, 始めて  $c^*$  の値は確定するわけであり, ここに遷音速線型理論の長所と困難(ジレンマ)がみられる。現在の理論で, この困難は次のように克服される。)すなわちこの結果,  $K$  が正しく与えられた限りにおいて, 線型化された遷音速の流れの場合は少なくとも物体上の音速点近くでは妥当であることが推定される。これは既に Oswatitsch [16] が推論していたことであつた。従つて, このことによって (2.1) と (2.2) の両式は,  $x=c^*$  の近傍で完全な一致を示す筈である。その結果, 両式の比較によって,

$$(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_{xx}(c^*) = (\gamma+1)M_\infty^2\varphi_{xx}(c^*) = K \quad (3.24)$$

が結論される。この関係は, (3.20) と連立するとによって, 正しく与えられるべき  $K$  の一意的な同時決定を与えている。

かくして, 物体近くの近傍解は, 次のように完全に決められる。(3.18) より,

$$\Phi_x = \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \pm \sqrt{Y(x)} \quad (3.25)$$

$$Y(x) = \left\{ \varphi_x - \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_{c^*}^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\}^2 + \varphi_x^2(c^*) - 2 \frac{1-M_\infty^2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \varphi_x(x) \\ &+ 2 \frac{K}{(\gamma+1)M_\infty^2} \{ \varphi(x) - \varphi(c^*) \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

複号は  $\varphi_x \geq (1-M_\infty^2)/[(\gamma+1)M_\infty^2]$  に依る。補正項  $g_x$  が消えるところでは,  $K$  は実際の流れの正しい加速度を与え, 逆に  $K$  が実際の加速度と一致しなくなる領域では, フィード・

バックによって  $g_x$  が適当な量となって  $\varphi_x$  を補正する。

(3.24) は、物理的にいえば、音速点における流れの加速度で  $K$  を決めることを意味するが、実にこの方法が、そしてこの方法のみが、物理的に意味のある解を与え得ることを次に証明する。

実際、(3.27) から、(3.20) と (3.24) を使って、

$$dY/dx = 2\{\varphi_{xx}(c^*)\varphi_x(x) - \varphi_x(c^*)\varphi_{xx}(x)\} \quad (3.28)$$

$$d^2Y/dx^2 = 2\{\varphi_{xx}(c^*)\varphi_{xx}(x) - \varphi_x(c^*)\varphi_{xxx}(x)\} \quad (3.29)$$

よって、

$$Y(c^*) = 0, \quad Y'(c^*) = 0 \quad (3.30)$$

そして

$$Y''(c^*) = 2\{[\varphi_{xx}(c^*)]^2 - \varphi_x(c^*)\varphi_{xxx}(c^*)\} \quad (3.31)$$

遷音速流の場合は通常  $\varphi_x(c^*) \cong 0$  であるから、

$$Y''(c^*) > 0 \quad (3.32)$$

これらによって

$$Y(x) \geq 0 \quad (3.33) \text{ [注 9]}$$

ところで、上において、もしも (3.24) を使わないで、 $\varphi_{xx}(c^*) \neq K/(\gamma+1)M_\infty^2$  とする。すなわち (3.28), (3.29) で  $\varphi_{xx}(c^*)$  を別の値におき換えると、明かに (3.30) の後者は成立しない。従って (3.33) はその場合に結論できず、音速点  $c^*$  の片側では必ず  $Y(x) < 0$  が生じ、 $\varphi_x$  は物理的意味を失う。(唯一の例外は  $M_\infty = 1$  の時に起る。この時は  $\varphi_x(c^*) = 0$  のために  $K$  の値が変わっても (3.30) は成立する。) 以上が、 $K$  決定についての一意性ということの数学的根拠である。

## § 4 理論の諸性質

ここで、この理論のもつ一般的な特徴を一括して論じ、理論の物理的内容の理解に供したい。

### [1] $c^*$ と $K$ の $M_\infty$ に対する変化

前節に指定されたように、 $c^*$  と  $K$  は

$$(1 - M_\infty^2)/(\gamma + 1)M_\infty^2 = \varphi_x(c^*; K) \quad (4.1)$$

[注 9] (3.33) は、一般に物体の主要な部分の上で成り立つが、前後縁のような物体の特異点の近くでは成り立たない場合も存在する。もしこれが、そういう風に破れる場合には、解は物理的に意味を失い、近傍解として妥当でなくなったことを意味し、何らかの別の考察を要することになる。実際に、 $M_\infty \geq 1$  の超音速流中の回転体の先端と後尾においてこのようなことが起り、その近くでは、流れは激み点に近い亜音速流を形成しているので、むしろ線型解  $\varphi_x$  そのもの（そこでは通常の線型理論によるものと大差なくなる。）がその付近で良い近似を提供すると考えられる。

$$K/(\gamma+1)M_\infty^2 = \varphi_{xx}(c^*; K) \quad (4.2)$$

によって同時に決められる。両式の右辺は、物体上の値の意味で  $x$  座標以外は省いてあるが、(前節も同様。) 実は次のような意味である。(3次元も含めて) 薄翼の場合には、上下面において  $y \rightarrow \pm 0$  で  $\varphi$  は夫々確定極限值をもつので、これによって  $\varphi$  の物体上の値をほぼ正しく代表することができ、同様にして  $\varphi_x, \varphi_{xx}$  も  $y = \pm 0$  での極限值をとる。然し軸対称体の場合は、 $r \rightarrow 0$  で  $\varphi$  は特異性をもつので、物体上の値としては、 $r \rightarrow R(r = R(x, \theta))$  は物体面を示す。 $\theta$  は垂直断面での方位角。) における  $\varphi$  を取るが必要であり、又  $\varphi_x, \varphi_{xx}$  はこれから導かれたものを使う。この考え方は、 $K$  の決定の一意性の証明と矛盾しない。

さて、音速点  $c^*$  は、臨界マッハ数の流れにおいて始めて出現するが、この時  $\varphi_x$  はそこで最大値をとるから、 $K=0$  となる。従ってこの場合は、遷音速線型理論は Prandtl-Glauert の線型理論と全く同じである。けれども、そこで  $M_\infty$  が少しでも大きくなれば、必ず  $K > 0$  となり、流れの超音速領域が広がって  $c^*$  は前方へ位置を移すであろう。このことは、例えば前後対称な物体の場合には、臨界マッハ数を越すと必ず流れの様子が非対称的になることを意味する。(Maeder の理論ではこうはならない。 $K$  の決定に関する彼の方法によれば、たとえ臨界流を趣いても、 $K=0$  すなわち Prandtl-Glauert 型の流れが、マッハ数  $M_\infty$  の或る範囲まで存続し得るのが普通である。[23] 参照。)

例として、円弧型対称翼の上の音速点の推移が遷音速相似径数  $\xi_\infty = (M_\infty^2 - 1)/(\gamma + 1)$   $M_\infty^2 t^{2/\gamma}$  に対して示される。(第2図) Maeder の理論が、 $\xi_\infty \cong -(2/\pi)^{2/\gamma}$  で奇妙な結果をもたらすのは、 $K$  の決定法に原因があり、彼の場合には実は  $\xi_\infty$  のこの値に至るまでが  $K=0$  なのである。

一方、 $M_\infty \cong 1$  でのマッハ数凍結現象のために、 $c^* - \xi_\infty$  曲線はそこで  $c^*$  軸に垂直に交わるべきように思われるが、現在の理論によっては、それは厳密には説明できない。然し、Bryson [24]、河村一幸島 [25] の実験値に比較して分るように、現在の理論は、定性的には全域にわたって正しい結果を与えるといえるだろう。

## [2] 衝撃波の発生

既に決定された  $K$  に対して、(3.20) は一般に、 $\varphi_x$  の減速流領域においても一つの根  $c^{**}$  をもっており、(3.25) から知れるように、この場所で、 $\Phi_x$  は次のような有限の不連続をもつことになる。

$$\Phi_{x1}(c^{**}-0) = \{(1 - M_\infty^2)/(\gamma + 1)M_\infty^2\} + \sqrt{Y(c^{**}-0)} \quad (4.3)$$

$$\Phi_{x2}(c^{**}+0) = \{(1 - M_\infty^2)/(\gamma + 1)M_\infty^2\} - \sqrt{Y(c^{**}+0)} \quad (4.4)$$

物体の断面積変化が連続である普通の場合は、 $Y(c^{**}-0) = Y(c^{**}+0)$  であるが、そうでない

時は、 $Y(c^{**}-0) \neq Y(c^{**}+0)$  となる場合も起り得る。

さて、Heaslet-Spreiter [26] は、衝撃極線 (shock-polar) の遷音速近似式：

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2)(\Phi_{x1}-\Phi_{x2})^2+(\Phi_{y1}-\Phi_{y2})^2+(\Phi_{z1}-\Phi_{z2})^2 \\ =\{(\gamma+1)/2\}M_\infty^2(\Phi_{x1}+\Phi_{x2})(\Phi_{x1}-\Phi_{x2})^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

に立脚して、もし小擾乱方程式 (2.1) で支配される  $\Phi$  の場の中に (必ずしも衝撃波とは前提しない) 何らかの速度の不連続面 ( $\Phi$  そのものは連続) があるとすれば、それは (4.5) の関係を充す衝撃波面にならなければならないことを示している。

そこでもしもわれわれの解が、現在の近似において、充分正しい (2.1) の物体近傍解であるならば、得られた不連続は、当然衝撃条件 (4.5) を満足するものになる筈である。実際、(4.3), (4.4) の第1項は音速に対応し、 $Y(c^{**}-0)=Y(c^{**}+0)$  の場合には、明かに垂直衝撃波の条件に一致する。 $(\Phi_{y1}-\Phi_{y2}, \Phi_{z1}-\Phi_{z2}=0)$  従って、われわれの解は一般に正しい物体近傍解であることを十分期待することができ、 $Y(c^{**}-0) \neq Y(c^{**}+0)$  の場合には、 $\Phi_{z1}-\Phi_{z2}$  が存在して、一般に (4.5) を充す斜めの衝撃波を誘導すると考えられる。

然らば、物体の断面積変化の不連続が存在して、そこが  $c^{**}$  の根にならない場合はどうであろうか。その場合は符号の逆転の起る場合と起らない場合があるが、断面積変化の仕方が正である時に限って  $Y$  の不連続は存在し、従ってその時  $\Phi_x$  の強い又は弱い不連続が誘導される。(§5の例参照。第8図, 第14, 15図。) これらも一種の不連続であるから、解が妥当である限りはやはり (4.5) の衝撃条件を充すものとみられ、この場合は強い又は弱い衝撃波になるであろう。<sup>[注10]</sup> 前項の性質と結合して、一般に臨界マッハ数を過ぎれば直ちに、(強さの大小はとも角として,) 衝撃波が発生し始めることは容易に分る。

### [3] 純亜音速および純超音速流への漸近型

純亜音速および純超音速流では本来音速点は存在せず、従ってそのまま (4.1), (4.2) を理論手続きとして使うわけにはいかない。然し、亜音速臨界流と超音速臨界流において流れの様子が連続的に推移することと、 $M_\infty \rightarrow 0$  および  $\infty$  で普通の線型理論に漸近するという条件を考慮して、解(3.25)–(3.27) の  $c^*$  と  $K$  の決定について次のような規定を下せば、ごく自然な漸近型を得ることができる。

「(4.1) の根がない場合には、流れの場から音速点が丁度消失する時 (臨界流) の  $c^*$  の臨界値に  $c \equiv c^*$  を固定し、且つ (4.2) より一意的に  $K$  を決定する。」

この結果、亜音速流の場合には、Maeder[19]の処方と同様に  $c^*$  は「非圧縮流の中で最大速

[注10] 一例として、著者の論文 [23] に  $M_\infty \geq 1$  の円弧翼の後縁での衝撃波についての詳細な説明があり、 $M_\infty=1$  での垂直衝撃波が  $M_\infty$  の増加と共に強い斜め衝撃波となり、更に弱い衝撃波に (不連続的に) 転化し、それがマッハ線に漸近する過程が合理的に証明されている。

度をもつ物体上の点」になり、この時  $K=0$ 、一方超音速流の場合には、Maeder とは反対に  $c^*$  は超音速前縁になる。(2次元では  $c^*=0$ )。然しこの時一般に  $K>0$ 。(けれども小擾乱方程式 (2.1) において  $(M_\infty^2-1)\varphi_{xx}$  の方が  $K\varphi_x$  よりも優越するので、 $M_\infty \rightarrow \infty$  で  $\varphi$  は通常の超音速線型解に帰着する。然し超音速流における  $K\varphi_x$  の項の影響は、かなり超音速線型解を修正する方向に働くことに注意する必要がある。)

以上の規則に則り、そして (3.27) の最後の項は  $M_\infty <$  亜音速臨界マッハ数、或は  $M_\infty \rightarrow \infty$  で消え、又小擾乱の意味で

$$|M_\infty^2-1|/(\gamma+1)M_\infty^2 \gg |\varphi_x| \tag{4.6}$$

であることを考慮すれば、(3.25) は次のように展開できる。

$$\phi_x = \varphi_x(x) + \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2(1-M_\infty^2)} \{\varphi_x^2(x) - \varphi_x^2(c^*)\} - \frac{K}{1-M_\infty^2} \{\varphi(x) - \varphi(c^*)\} \tag{4.7}$$

勿論  $\varphi$  そのものは、極限において普通の線型理論に帰着するから、これは純亜音速および超音速流の解への漸近型を示している。

この結果、 $c^*$  と  $K$  の決定についての新しい拡張を伴えば、非線型近傍解 (3.25) は、ほぼ全マッハ数領域を覆って妥当といわれてよいであろう。

### § 5 理論の適用例

対称二次元翼および軸対称体の周りの流れの遷音速線型理論は、Maeder [19] によって一般公式が与えられているのでこれを使い、比較的簡単に扱える場合を解いて見る。すなわち、対称二次元翼に対し、

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F'(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} \frac{K_0[\alpha\{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2\}^{1/2}]}{\beta} d\xi, \quad M_\infty \leq 1 \tag{5.1}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{x-m|y|} F'(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} \frac{I_0[|\alpha|\{(x-\xi)^2 - m^2 y^2\}^{1/2}]}{m} d\xi, \quad M_\infty \geq 1 \tag{5.2}$$

軸対称体 (非揚力) に対し、

$$\varphi(x, r) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 F'(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} \frac{\exp[-\alpha\{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2\}^{1/2}]}{\{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2\}^{1/2}} d\xi, \quad M_\infty \leq 1 \tag{5.3}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x-mr} F'(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} \frac{\cosh[\alpha\{(x-\xi)^2 - m^2 r^2\}^{1/2}]}{\{(x-\xi)^2 - m^2 r^2\}^{1/2}} d\xi, \quad M_\infty \geq 1 \tag{5.4}$$

ここで、 $F(x)$  は長さを 1 とした場合の物体の断面積分布であり、 $K_0$  と  $I_0$  は 0 次の変形ベッセル函数、 $\alpha, \beta, m$  は次のように関係した定数である。

$$\alpha = K/2\beta^2 = -K/2m^2, \quad \beta^2 = 1 - M_\infty^2 = -m^2 \tag{5.5}$$

#### [1] $M_\infty=1$ での二次元対称諸翼型

$M_\infty=1$  で (5.1), (5.2) は共に



$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi K}} \int_0^x F'(\xi) \frac{\exp[-Ky^2/4(x-\xi)]}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \quad (5.6)$$

に収斂し、更に  $y \rightarrow 0$  では

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi K}} \int_0^x \frac{F'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \quad (5.7)$$

に帰着する。 $F'(\xi)$  が無限回連続微分可能で級数が収斂すれば、これは更に

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi K}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} F^{(n+1)}(x) \frac{x^{n+1/2}}{2n+1} + O(\tau^3), \quad 0 > x > 1 \quad (5.8)$$

と表わしてもよい。([21] 参照。)

$F(x)$  を与えれば、(5.7), (5.8) の函数型がきまり、これから  $c^*$ ,  $K$  を決定して  $\Phi_x$  を求めることができる。物体面の圧力分布係数  $C_p (= (p-p_\infty)/\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2)$  は、

$$C_p(x) = -2\Phi_x \quad (5.9)$$

によって求められる。これから作られる

$$\bar{C}_p = \frac{[M_\infty^2(\gamma+1)]^{1/2}}{t^{1/2}} C_p \quad (5.10)$$

という量は、遷音速相似変換 ( $\xi_\infty = (M_\infty^2 - 1)/[(\gamma+1)M_\infty^2 t]^{1/2}$  を不変に保つ変換) において不変である。

第3~6図は、最大厚みが翼弦の約40%, 50%, 約60%, 70%にある対称翼の表面圧力分布の計算結果を示す。夫々の翼型は

$$(i) \quad F(x)/2t = \frac{n^{n/(n-1)}}{2(n-1)} [(1-x) - (1-x)^n], \quad n=3 \quad (5.11)$$

$$(ii) \quad F(x)/2t = 2(x-x^2) \quad (5.12)$$

$$(iii) \text{ および } (iv) \quad F(x)/2t = \frac{n^{n/(n-1)}}{2(n-1)} (x-x^n), \quad n=3 \text{ および } n=6 \quad (5.13)$$

で示される。このような両凸翼型では、 $M_\infty=1$  で翼面に流れの減速領域がなくなり、 $M_\infty < 1$  で生じていた衝撃波が後縁に後退しそこに停留する。比較のために、Michel et Sirieix [27] の実験および Spreiter [20] の局所線型化法による理論結果を示した。40%の翼型で、現在の理論が悪くなるのは、次節の[4]に示すように(3.9)の前提が破れるからに見える。

第7図は、激み点をもたない凹凸混在翼型についての結果を与える。この場合、

$$(v) \quad F(x)/2t = 3.2\{x(1-x)\}^3 \quad (5.14)$$

$M_\infty=1$  でも、この場合は理論的に衝撃波が翼面に停留する。

第8~9図には、(ii)の円弧翼の後半部をいろいろ変えた場合の結果を示す。すなわち、翼の後半部で、

$$(vi) \quad F(x)/2t = (1-x) \text{ (逆楔型)} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \quad (5.15)$$

$$(vii) \quad F(x)/2t=2\{3(1-x)^2-4(1-x)^3\} \text{ (おたまじゃくし型)} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \quad (5.16)$$

$$(viii) \quad F(x)/2t=1/2 \quad \text{(平板型)} \quad x \geq 1/2 \quad (5.17)$$

$$(ix) \quad F(x)/2t=2(0.6-0.6^2) \quad \text{(剝離型)} \quad x \geq 0.6 \quad (5.18)$$

この場合、 $F(x)$  は (5.8) の前提条件を満足しないので、(5.7) 式に帰って出発しなければならない。すなわち後半部では、

$$\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{\pi K}} \int_{1/2 \text{ or } 0.6}^x F'(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi K}} \int_0^{1/2 \text{ or } 0.6} 4t(1-2\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \quad (5.19)$$

となる。

(vi) では、 $x=1/2$  において膨脹波の存在が、(vii) では、凹翼面において垂直衝撃波の発生が夫々認められる。(ix) ではもっと複雑で、 $x=0.6$  で強い衝撃波が起り、次にその直後で強い膨脹波が起るという結果が出るが、結局これは相殺して弱い衝撃波になると解釈される。これは、翼面後部で流れが剝離した場合には大体において共通に (ix) に示される流線を生ずるから、その場合に生ずるラムダ ( $\lambda$ ) 衝撃波の前方波の一つのモデルを与えているように見える。尤も  $\lambda$ -shock の現象を全面的に解明するためには、剝離した境界層の詳しい形を把握することが重要であり、それには境界層理論との共働が必要になるであろう。第9図には (vii) を Michel [27] の実験に比較した。[注11]

さてこれらの例によって明かなように、翼型がどんなものであっても音速点が特異点にならない限りは (次節 [4] 参照。), 理論の適用に制限はないのである。

## [2] $M_\infty=1$ での回転体

$M_\infty=1$  で (5.3), (5.4) は

$$\varphi(x, r) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^x F'(\xi) \frac{\exp[-Kr^2/4(x-\xi)]}{x-\xi} d\xi \quad (5.20)$$

に収斂し、更に  $r \rightarrow R(x) \approx 0$  では、

$$\varphi(x, R) = \frac{1}{4\pi} F'(x) \log \frac{e^C KR^2}{4x} + \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{F'(x) - F'(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (5.21)$$

に帰着する。但し  $C$  は Euler の定数。 $F'(x)$  が連続微分可能ならば、積分は

$$\int_0^x \frac{F'(x) - F'(\xi)}{x-\xi} d\xi = -\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n+1)}(x) \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} x^n, \quad 0 < x < 1 \quad (5.22)$$

と表わすこともできる。( [21] 参照。 ) 前項と同様にこれらによって  $\Phi_x$  を計算するが、物体面の圧力分布係数  $C_p$  は、

[注 11]  $M_\infty=1$  におけるおたまじゃくし翼 (le profil à point d'inflexion) の上の強い衝撃波の停留については、Michel, Marchaud and LeGallo; La Recherche Aéronautique, No. 40, Juillet-Août, 1954, にシュリーレン写真と共に、詳しい報告がある。

$$C_p(x) = -2\Phi_x - \Phi_r^2, \quad \Phi_r = R'(x) \quad (5.23)$$

で求める。(軸対称流小擾乱の近似。)

第 10~11 図に、円弧型断面

$$(i) \quad F(x)/\pi t^2 = 4(x-x^2)^2 \quad (5.24)$$

で夫々  $t=0.1$ ,  $t=1/6$  の場合の結果を示した。但しここで、§3 [注9] に述べたことに従って、前頭と後尾の近くでは  $\Phi_x$  の代りに  $\varphi_x$  を使っている。結果は、Taylor-McDevitt [28], Drougge [29] の実験と比べてほぼ妥当であり、他に Maeder および Spreiter [30] の理論値と比べられる。特に、現在の理論からは  $M_\infty=1$  で凸型軸対称体面に垂直衝撃波の停留が誘導される点に興味がある。参考のために、Drougge [29] の非常に明瞭な衝撃波のシュリーレン写真を掲げる。(第 12~13 図。)

次に、上の回転体の後半部に次のような円筒支柱をつけたものを考え、第 14~15 図にその結果を示す。

$$(ii) \quad F(x)/\pi t^2 = 4\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 \quad x \geq \frac{1}{2} \quad (5.25)$$

$$(iii) \quad F(x)/\pi t^2 = 4\left(\frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^2 \quad x \geq \frac{5}{6} \quad (5.26)$$

(ii) では速度は漸増し、(iii) では継ぎ目において強い衝撃波が発生する。比較のために  $\varphi_x$  の変化も示した。継ぎ目での  $F''(x)$  の不連続に起因して、遷音速線型解  $\varphi_x$  には本質的に無限大の不連続が現れるが、 $\Phi_x$  には、(ii) においては継ぎ目は滑かであるから ( $F'(x)$  は連続。) そのような不連続は現れず、(iii) では強い衝撃波としての有限の不連続が現れる。

### [3] 全 $M_\infty$ に対する正弦型波状壁。 ([31] 参照。)

正弦型波状壁は、 $M_\infty$  のあらゆる場合を通してすべての解析的手続きが容易に遂行される、恐らく唯一の例である。これによって、亜音速から超音速への流れの様子の遷移の仕方を、かなり一般的に理解することができる。

$$\text{正弦型を } f(x) = f_0 e^{2\pi i x} \text{ (} f_0 \text{ は波の振幅)} \quad (5.27)$$

によって示すと、

$$\varphi = -(2\pi i f_0 / \mu) \exp(-\mu y + 2\pi i x) \quad (5.28)$$

$$\mu = 2\pi(\beta^4 + K^2/4\pi^2)^{1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \tan^{-1} \frac{K}{2\pi\beta^2}\right), \quad (5.29)$$

が得られる。実際の諸量はすべて実数部をとって考える。

非線型補正理論の手続きに従い、(4.1) (4.2) を解けば、

$$\cos 4\pi c^* = -\xi_\infty / \pi^{2/3}, \quad |\xi_\infty| \leq \pi^{2/3} \quad (5.30)$$

$$= -\text{sgn}(\xi_\infty), \quad |\xi_\infty| \geq \pi^{2/3} \quad (5.31)$$

$$K/2\beta^2 = \pm\sqrt{(\pi^{3/2}/\xi_\infty^2)-1}, \quad |\xi_\infty| \leq \pi^{3/2} \quad (5.32)$$

$$= 0, \quad |\xi_\infty| \geq \pi^{3/2} \quad (5.33)$$

同時に  $|\xi_\infty| \leq \pi^{3/2}$  では、衝撃点  $c^{**}$  を解くことができ、

$$-\xi_\infty = \pi^{3/2} \cos\{2\pi c^{**} - (1/2)\tan^{-1}(\pm\sqrt{(\pi^{3/2}/\xi_\infty^2)-1})\} \quad (5.34)$$

となる。 $c^*$  および  $c^{**}$  と  $\xi_\infty$  の関係が第 16 図に示される。

これらによって先ず、

$$\varphi_x = (\pi^{3/2}/|\beta|)2f_0|\xi_\infty|^{1/2} \exp[i\{2\pi x - (1/2)\tan^{-1}(\pm\sqrt{(\pi^{3/2}/\xi_\infty^2)-1})\}] \quad (5.35)$$

$$= \{\pi(2f_0)/\beta\} e^{i(2\pi x)} \quad , \quad \xi_\infty \leq -\pi^{3/2} \quad (5.36)$$

$$= \{\pi(2f_0)/|\beta|\} e^{i(2\pi x - \pi/2)} \quad , \quad \xi_\infty \geq \pi^{3/2} \quad (5.37)$$

を得、これを元にして  $\Phi_x$  を最終的に表現することができるが、以下は [31] にゆずり、結果を第 16-19 図によって理解しよう。

第 16 図の楕型の実線図は、指定された  $c^{**}$  に対するそこで発生する垂直衝撃波の強さ  $\Delta\bar{C}_p/2 = [M_\infty^2(\gamma+1)]^{1/2}(2f_0)^{1/2} \times 2\sqrt{Y(c^{**})}$  を描いたものである。第 18 図に描いた  $\bar{u} + \xi_\infty$  は、

$$\bar{u} + \xi_\infty \equiv \frac{\{(\gamma+1)M_\infty^2\}^{1/2}}{(2f_0)^{1/2}} \left\{ \Phi_x + \frac{M_\infty^2 - 1}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right\} \approx \frac{M^2 - 1}{\{(\gamma+1)(2f_0)M_\infty^2\}^{1/2}} \quad (5.38)$$

( $M$  は局所マッハ数。) で定義される量で、遷音速相似変換に不変でありながら局所マッハ数と比例的に対応し、速度の示標になるものである。(  $M \equiv 1$  の時、  $\bar{u} + \xi_\infty \equiv 0$  ) 第 17~18 図より見られるように、圧力と速度の分布は、 $M_\infty$  が臨界値に近づくにつれ、純超音速でも純亜音速でも通常の線型理論によって与えられる曲線よりも音速に近い所で鋭い曲りを呈し、臨界流では音速点で完全に尖り、それから遷音速流の垂直衝撃波が現れ始める。 $M_\infty = 1$  で衝撃波の強さは最大となる。超音速臨界流で衝撃波は消え、その後の超音速流では位相は壁に対して  $\pi/2$  だけずれている。

これらの流れの夫々の模様は、音速点を一次元ラバール管の喉と対比させると、全くラバール管内の流れに相似になっていて興味深い。

一方理論の信頼性を確める意味で、遷音速流小擾乱方程式 (2.1) に立脚した、臨界流の場合での Kaplan [32] のより厳密な計算 (正弦級数展開) と比較した。(第 20 図) この結果は、前提した精度において理論の合理性と信頼性を支持しているように見える。

## § 6 理論の適用限界

非線型補正の方法は一つの近似法であるから、これによって説明のできない現象や、適用不能な場合も存在する。ここでそれらを一括考察する。

### [1] 物体上衝撃波の可能性

Lin-Rubinov [33] 或は桜井 [34] のいうように、曲った壁の上に遷音速の垂直衝撃波が着くことは、厳密には一般に成り立たない。壁と衝撃波の交線において、非回転性の条件、衝撃波の条件、及び壁に沿う流線の曲率が全体として条件過剰になるからである。(但し流線が壁に沿わなければこの限りではない。)

従って、この観点から見ると、現在の結果は一つの近似であって、現象の支配的性質を或る極限に拡大抽出したものというべきであろう。実際は、然しながら粘性境界層と衝撃波の相互作用が顕著に現れて、物体上に圧力の明確な不連続が観察できることはないようである。(§ 5 で得た各図の中の実験値を参照するとよい。)

### [2] 離脱衝撃波の問題

遷音速線型理論から出発する現在の理論では、 $M_\infty \geq 1$  で物体の前方に擾乱が誘導されることはない。この理論では、少なくとも  $O(\tau)$  の擾乱は物体の上流に及ばないのである。従って、離脱衝撃波を導くことはこの理論では不可能である。これは、 $M_\infty \cong 1$  におけるマッハ数凍結の現象を説明し得ないという点と関連して、一つの理論的欠陥とみられる。然し、薄く尖った物体を取り扱う場合には、離脱衝撃波の発生する  $M_\infty$  範囲は狭く、従って衝撃波の強さも後部に付着する衝撃波に比べて弱いので、このことがそれほど大きな影響を理論全体のスコープに及ぼすことはないと思われる。

### [3] 衝撃波の強さについて

§ 5 で得られた結果は、垂直衝撃波の近くではいずれも実験よりも離れ過ぎている傾向にあるが、これはあながち境界層と衝撃波の相互作用の効果だけに由来するのではない。遷音速近似による衝撃条件 (4.5) と厳密な衝撃条件との相異に基く誤差もあるのである。一般に遷音速近似による衝撃波の強さは、厳密なものより大きく、局所マッハ数が1よりずれるほどこの傾向は大きくなる。(第21図参照。)

### [4] 特異音速点の場合

$c^*$  と  $K$  を決定する過程において、 $K = \infty$  が生ずることがある。このような場合の  $c^*$  を特異音速点と呼ぶ。例えば楔型翼の肩や或る種の鈍い翼型の先端など。このような場合は理論は適用不能になる。

然し、たとえ理論が適用可能であったとしても  $K$  が余りに大きければ、

$$O(\tau) = (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_{xx}(c^*) = K$$

という (3.9) の前提条件を破ることになるので、良い結果を期待することはできないであろう。(3.9) は一つの理論の妥当性の基準を与えている。

### [5] 高次近似について

§ 3 に得られた近傍解は  $O(\tau)$  の遷音速第 1 近似であるが、更に高次に近似を進めるとどうなるかという予想は次の通りである。

まず、逐次的に

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \quad (6.4)$$

$$\Phi_1 = \varphi + g = O(\tau), \quad \Phi_2 = O(\tau^2) \dots \quad (6.2)$$

とする。 $\Phi_1$  の満足すべき式は勿論 (2.1) であって非線型であるが、然し  $\Phi_2$  については、

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = O(\tau^3) \quad (6.3)$$

であるために、厳密な小擾乱方程式：

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} &= (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_x \Phi_{xx} \\ &+ (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_x (\Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + 2M_\infty^2 (\Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_z \Phi_{xz}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

に帰り、 $O(\tau^3)$  に相当する方程式を考察する。すなわち、

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \Phi_{2xx} + \Phi_{2yy} + \Phi_{2zz} &= (\gamma + 1) M_\infty^2 (\Phi_{1xa} \Phi_{2x} + \Phi_{1x} \Phi_{2xx}) \\ &+ (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_{1x} (\Phi_{1yy} + \Phi_{1zz}) + 2M_\infty^2 (\Phi_{1y} \Phi_{1xy} + \Phi_{1z} \Phi_{1xz}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

これは  $\Phi_2$  について線型である。境界条件は物体上で、

$$\Phi_{2y} = O(\tau^{3/2}) (= g_y) \quad (6.6)$$

である。(3.14), (3.15) 参照。 $\Phi_1$  を解く時には事実上  $g_y = 0$  として無視された高次の境界条件が、ここで正しく考慮される。) )

同様に、 $\Phi_3$  以下についても書くことができ、すべて非斉次線型方程式によって支配される。これらは原理的に逐次に解ける筈である。(実際、厳密に解くのは難しい。)

## § 7 結 論

以上において、遷音速流小擾乱理論の非線型方程式を近似的に (物体表面近くの場合) 解析する一つの方法が展開された。予備考察において、著者の観点から Spreiter の局所線型化法が誘導される点は、一つの副産物として興味深い。

現在の理論は、衝撃波という線型の力学では予測のつかなかった場の不連続現象が、本質的に方程式の非線型に基いて起るといふこと、一つの具体的な認識を与えており、その点で Oswatitsch, Gullstrand, Spreiter の積分方程式法と同じ物理的性格をもっている。と同時に

いろいろな境界条件に対する適用性という面では、今の場合は理論の出発点が遷音速線型理論であるから、遙かに有利な見通しをもっている。又、理論手続きの中に、衝撃波の形等に対する仮定や逐次近似的操作の入って来ない点も、一つの有力な特徴と考えられてよい。(従って従来の圧縮流線型理論と同程度の適用性を期待してよい。論文(Ⅱ)参照。)  $M_\infty \rightarrow 0$  or  $\infty$  の極限で、理論が従来の線型理論に漸近することは既に証明せられた。(§ 4)

$M_\infty=1$  に於けるいろいろな物体の周りの流れ、および波状壁に沿う流れの  $M_\infty$  のいろいろな値の場合に対する簡単な適用結果が得られた。これらは遷音速流に特徴的な現象を合理的に示しており、その精度は又実験との比較に十分耐え得るものである。簡単でない場合を取り扱うとしても、計算の面倒以外には理論上の本質的困難はないので、理論の信頼性は同程度と期待してもよいであろう。([23] に、あらゆる  $M_\infty$  に対する対称円弧翼の周りの流れの解析が行われ、[35] には、 $M_\infty=1$  に於ける対称円弧翼の仰角をもった場合が扱われ、実験 [27] 等と比べてよい一致を示している。)

従って、遷音速の一般の飛行体の抵抗問題や揚力問題を含む航空性能の全体的スコープを組織的に調べるといような目的には、現在の理論は非常に役立つものと期待される。

この研究に際して支持を賜った山内空気力学部長、重見技官、平木技官および村崎技官に感謝する。又助言と激励を賜った河村教授、多くの貴重な討論を頂いた今井教授、更に特別の好意と関心をもって綿密な批判と討論を頂いた Spreiter 博士 (NASA, Ames) と Oswatitsch 教授 (D.V.L., Aachen) に心から感謝する次第である。

— 完 —

## 文 献 [注 12]

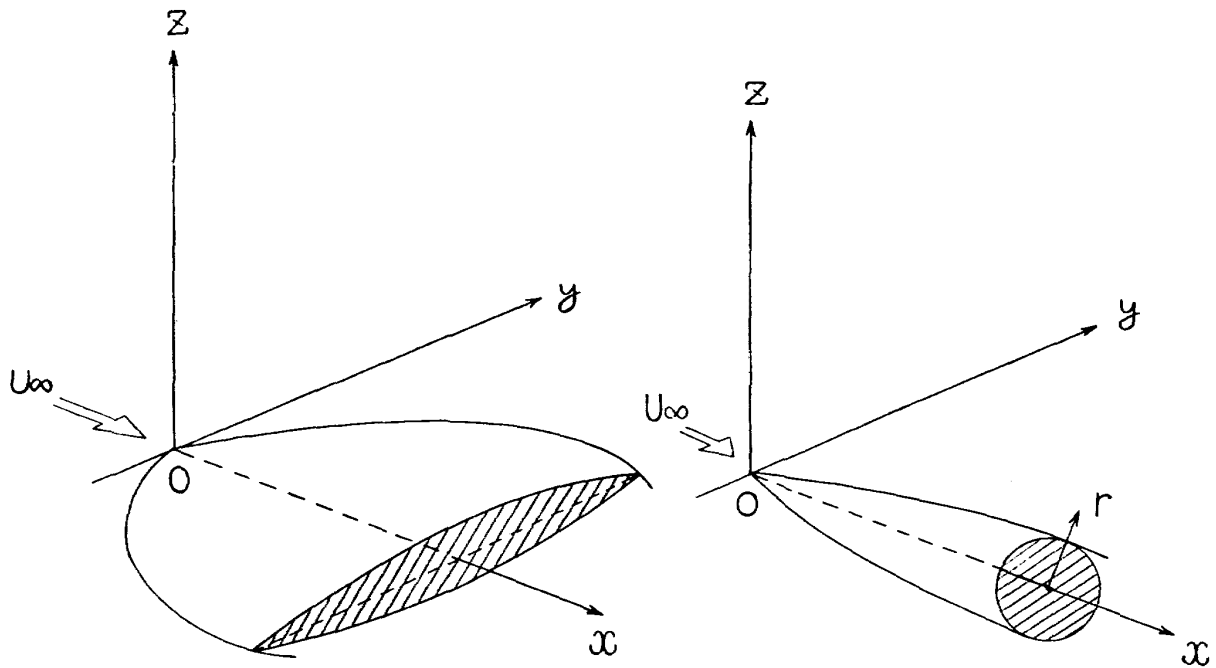
- [1] K. Oswatitsch and K. Wiegardt: Theoretische Untersuchungen über stationäre Potentialströmungen und Grenzschichten bei hohen Geschwindigkeiten, Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Ber. 13/1, 7-24pp, 1942. (or NACA TM 1189)
- [2] A. Busemann and K. G. Guderley: The Problem of Drag at High Subsonic Speeds, Rep. and Trans. No. 184, British M. A. P., March, 1947.
- [3] T. von Kármán: Supersonic Aerodynamics-Principles and Applications, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, No. 7, 373-409pp, July, 1947.
- [4] T. von Kármán: The Similarity Law of Transonic Flow, J. Math. & Phys., Vol. 26, No. 3, 182-190, October, 1947.
- [5] K. Oswatitsch: The Area Rule, Appl. Mech. Rev., Vol 10, No. 12, 543p, December, 1957.

[注 12] 以下の文献は、過去に於ける凡ゆる遷音速流の研究を網羅したものではない。理論の説明のために、特に適当と思われるものが挙げられている。

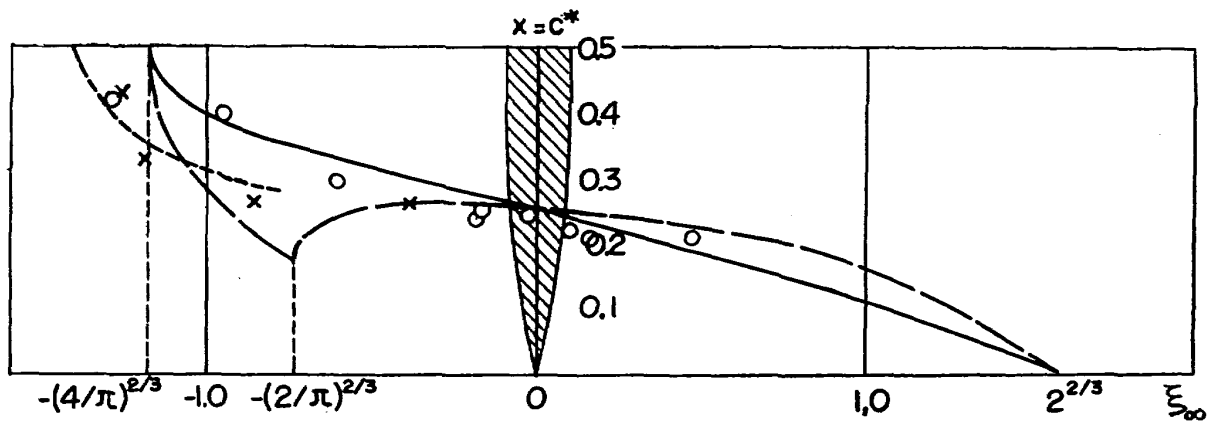
- [6] R. T. Whitcomb: A Study of the Zero-Lift Drag-Rise Characteristics of Wing-Body Combinations Near the Speed of Sound, NACA Rep. 1273, 1956.
- [7] J. D. Cole: Drag of Finite Wedge at High Subsonic Speeds, J. Math. & Phys., Vol. 30, No. 2, 79-93pp, July, 1951.
- [8] G. Guderley and H. Yoshihara: The Flow Over a Wedge Profile at Mach Number 1, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 17, No. 11, 723-735pp, November, 1950.
- [9] W. G. Vincenti and C. B. Wagoner: Transonic Flow Past a Wedge Profile With Detached Bow Wave, NACA Rep. 1095, 1952.
- [10] I. Imai: Note on the Drag of a Finite Wedge at Mach Number 1, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 19, No. 7, 496p, July, 1952.
- [11] J. B. Helliwell and A. G. Mackie: Two-Dimensional Subsonic and Sonic Flow Past Thin Bodies, J. Fluid Mech., Vol. 3, Pt. 1, 93-109pp, October, 1957.
- [12] K. Kusakawa: On the Two-Dimensional Compressible Flow Over a Thin Symmetric Obstacle With Sharp Shoulders Placed in an Unbounded Fluid and in a Choked Wind Tunnel, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 12, No 9, 1031-1041pp, September 1957.
- [13] S. Tomotika and K. Tamada: Studies on Two-Dimensional Transonic Flows of Compressible Fluid, Part III, Quart. appl. Math., Vol. 9, No. 2, 129-147pp, July, 1951.
- [14] L. Bers: "Surveys in Applied Mathematics," III, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, 21-29pp, John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- [15] K. Oswatitsch: Die Geschwindigkeitsverteilung bei lokalen Überschallgebieten an flachen Profilen, ZAMM, Bd. 30, Nr. 1/2, 17-24pp, Jan./Feb., 1950.
- [16] K. Oswatitsch and F. Keune: The Flow Around Bodies of Revolution at Mach Number 1, 113-131pp, Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y., January, 20-22, 1955.
- [17] T. R. Gullstrand: The Flow Over Symmetrical Aerofoils without Incidence in the Lower Transonic Range, KTH-AERO TN 20, Stockholm, Sweden, 1951. (and TN 24, 25, 27 (1952))
- [18] J. R. Spreiter and A. Alksne: Theoretical Prediction of Pressure Distributions on Nonlifting Airfoils at High Subsonic Speeds, NACA Rep. 1217, 1955. (and NACA TN 4148)
- [19] P. F. Maeder and H. U. Thommen: Some Results of Linearized Transonic Flow About Slender Airfoils and Bodies of Revolution, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 2, February, 187p, 1956.
- [20] J. R. Spreiter and A. Y. Alksne: Thin Airfoil Theory Based on Approximate Solution of the Transonic Flow Equation, NACA Rep. 1359, 1958. (or NACA TN 3970)
- [21] I. Hosokawa: A Refinement of the Linearized Transonic Flow Theory, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 15, No. 1, 149-157pp, January, 1960.
- [22] K. G. Guderley: *Theorie Schallnaher Strömungen*, 33p, Springer Verlag, 1957.
- [23] I. Hosokawa: Theoretical Prediction of the Pressure Distribution on a non-Lifting, Thin Symmetrical Aerofoil at Various Transonic Speeds, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 16, No. 3, 546-558pp, March, 1961.
- [24] A. E. Bryson: An Experimental Investigation of Transonic Flow Past Two-Dimensional Wedge and Circular-Arc Sections Using a Mach-Zehnder Interferometer, NACA Rep. 1094, 1952.
- [25] R. Kawamura and K. Karashima: Experimental Investigation of Transonic Flow Past Two-



- Dimensional Biconvex Circular-Arc Airfoils at Small Angles of Attack, Aeronautical Research Institute, Univ. of Tokyo, Rep. No. 342, April, 1959.
- [26] M. A. Heaslet and J. R. Spreiter: Three-Dimensional Transonic Flow Theory Applied to Slender Wings and Bodies, NACA Rep. 1318, 1957.
- [27] R. Michel et M. Sirieix: Répartitions Expérimentales du Nombre de Mach Local sur Différents Profils d'Ailes en Écoulement Sonique, ONERA Mémo Technique No. 17, 1959.
- [28] R. A. Taylor and J. B. McDevitt: Pressure Distributions at Transonic Speeds for Parabolic-Arc Bodies of Revolution Having Fineness Ratios of 10, 12 and 14, NACA TN 4234, 1958.
- [29] G. Drougge: An Experimental Investigation of the Interference Between Bodies of Revolution at Transonic Speeds with special Reference to the Sonic and Supersonic Area Rules, FFA Rep. 83, Stockholm, 1959.
- [30] J. R. Spreiter and A. Y. Alksne: Slender Body Theory Based on Approximate Solution of the Transonic Flow Equation, NASA Rep. 2, 1959.
- [31] I. Hosokawa: Transonic Flow Past a Wavy Wall, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 15. No. 11, 2080-2086pp, November, 1960.
- [32] C. Kaplan: On Transonic Flow Past a Wave-Shaped Wall, NACA TN 2748, 1952.
- [33] C. C. Lin and S. I. Rubinov: On the Flow Behind Curved Shocks. I. Math. & Phys..

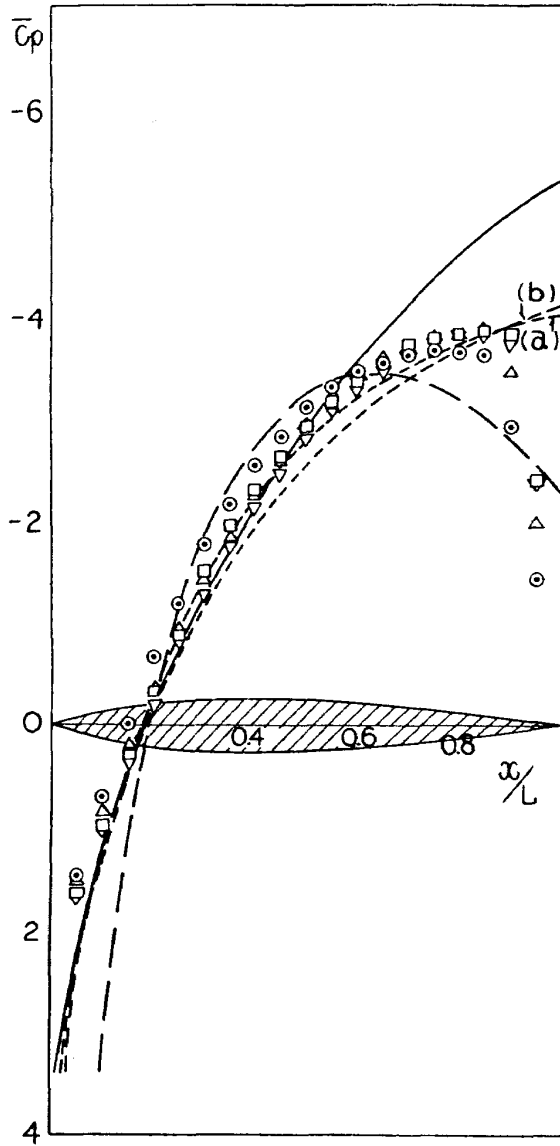


第1図 薄い物体と座標系。一様流( $U_\infty$ )に対して物体が、小さい傾き角をもつ場合でも、 $x$  軸は一様流の方向に取る。



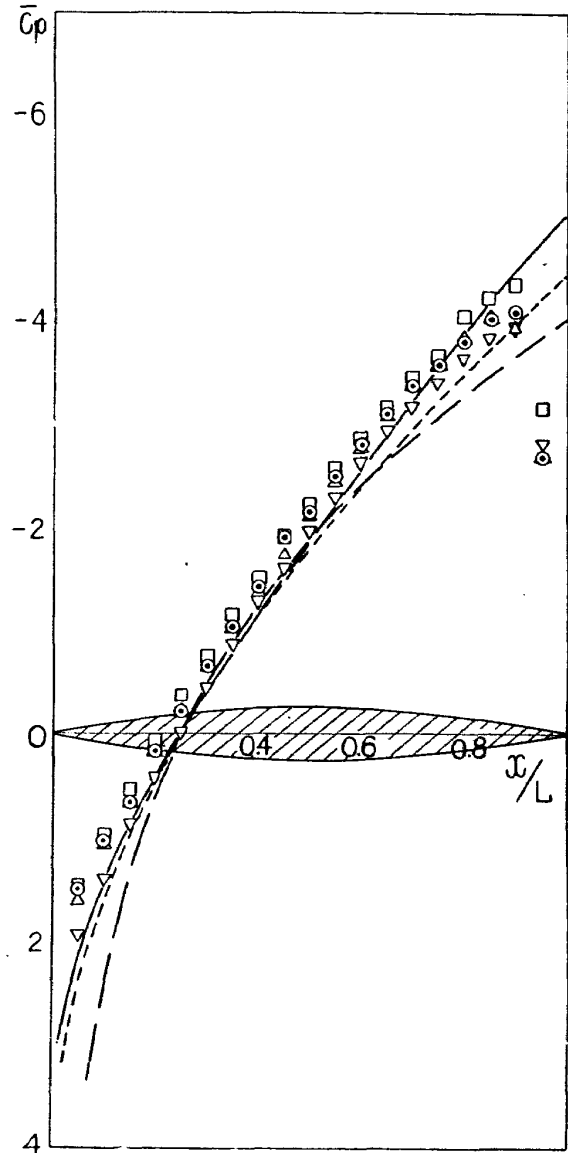
第2図 円弧翼の上の音速点の移動。

- Spreiter の積分方程式法 ([18] の TN 4148 より。)
- Maeder
- 非線型補正理論
- 実験値 ○ 河村-辛島 [25]
- × Bryson [24]



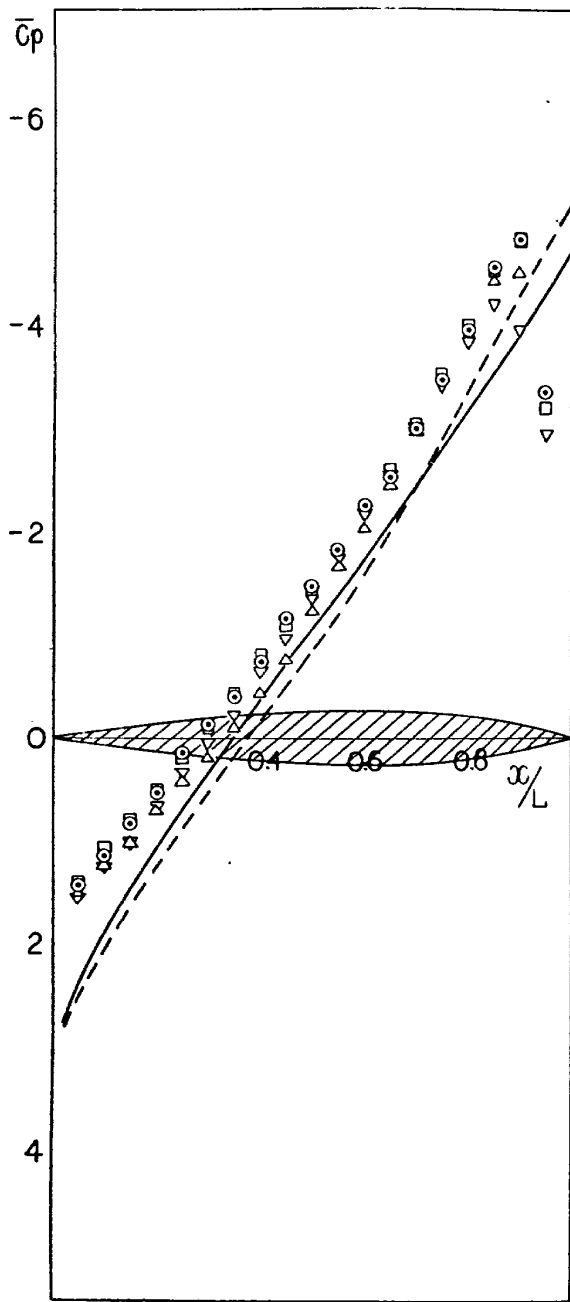
第3図 最大厚みが約40%にある翼型の圧力分布。([20]に拠る。)

- (a) Spreiter (局所線型化法  $n=3.5, 39.4\%$ )
- (b) Spreiter (局所線型化法  $n=3, 42.3\%$ )
- Maeder (42.3%)
- 非線型補正理論 (42.3%)
- 実験値 ( $n=3.38, 40\%$  の模型[27])
- ⊙  $t=0.06$
- $=0.08$
- △  $=0.10$
- ▽  $=0.12$



第4図 最大厚みが50%にある翼型(円弧翼)の圧力分布。([20]に拠る。)

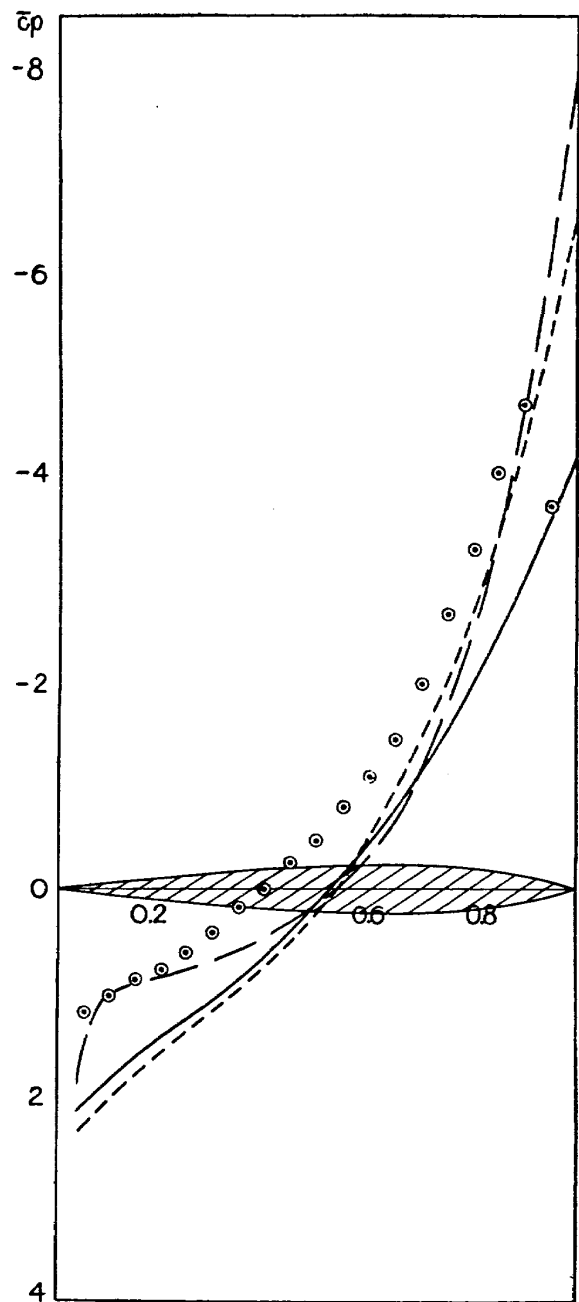
- Spreiter (局所線型化法)
- Maeder
- 非線型補正理論
- 実験値 ([27])
- ⊙  $t=0.06$
- $=0.08$
- △  $=0.10$
- ▽  $=0.12$



第5図 最大厚みが約60%にある翼型の圧力分布。  
([20]に拠る。)

----- Spreiter (局所線型化法,  $n=3.38$ , 60%)  
 ————— 非線型補正理論 ( $n=3$ , 57.7%)

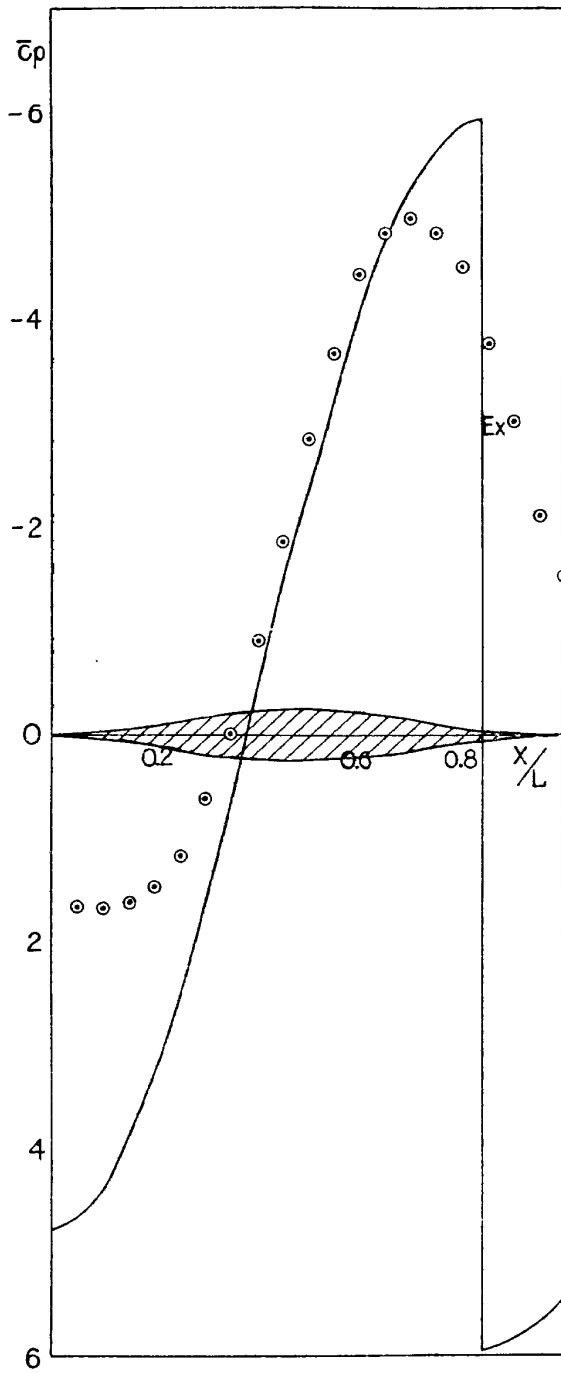
実験値 ([27])  
 ⊙  $t=0.06$   
 □  $=0.08$   
 △  $=0.10$   
 ▽  $=0.12$



第6図 最大厚みが70%にある翼型の圧力分布。  
([20]に拠る。)

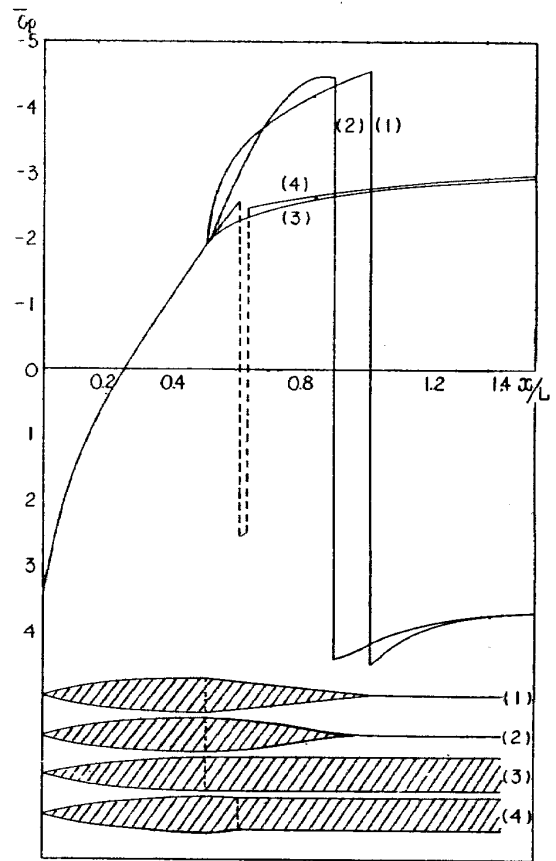
----- Spreiter (局所線型化法)  
 ————— Maeder  
 ————— 非線型補正理論

実験値 ([27])  
 ⊙  $t=0.08$

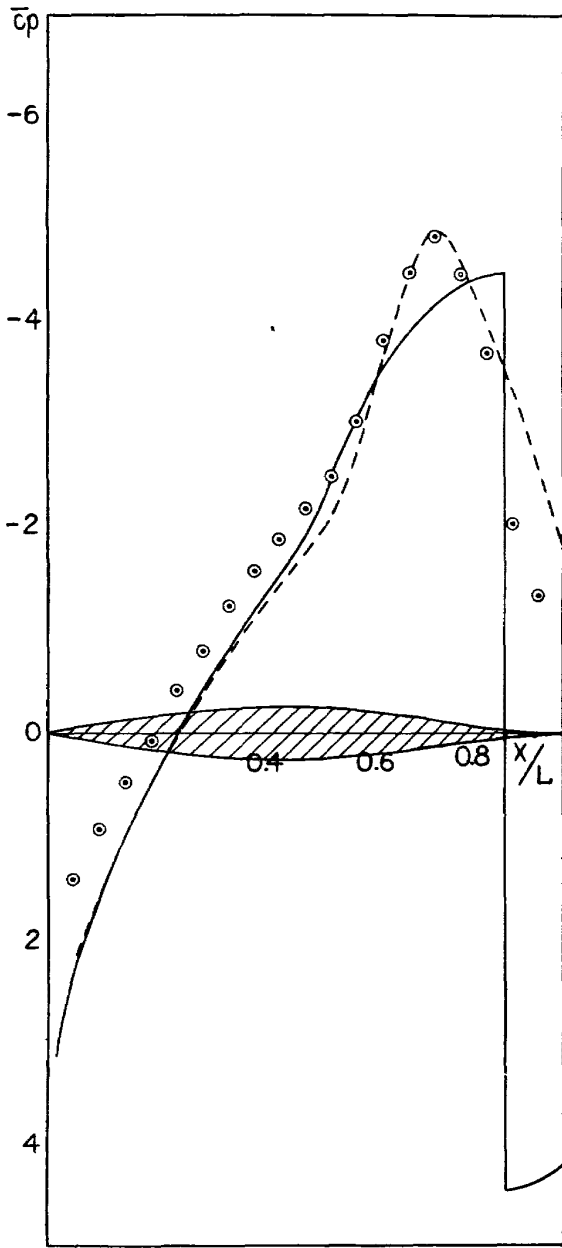


第7図 凹凸混在翼型の圧力分布

—— 非線型補正理論  
 ○  $t=0.10$  の実験値 [27]



第8図 対称円弧翼の後部を変形させた諸翼型の圧力分布。(非線型補正理論による。)



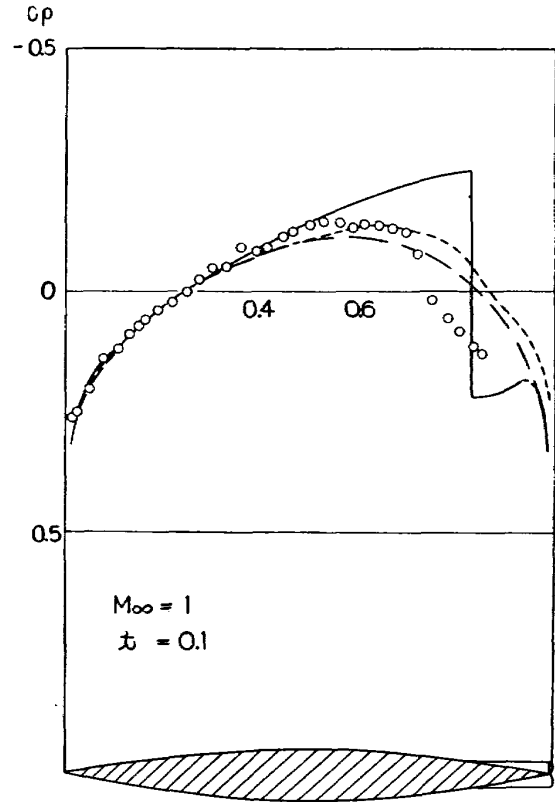
第9図 おたまじやくし翼型の圧力分布。

( $3/4$  弦長に変曲点がある。)

----- Spreiter (局所線型化法, 後部では, 双曲型(超音速)局所線型化法でつないでいる。)

- · - · - 非線型補正理論

○  $t=0.10$  の実験値 [27]



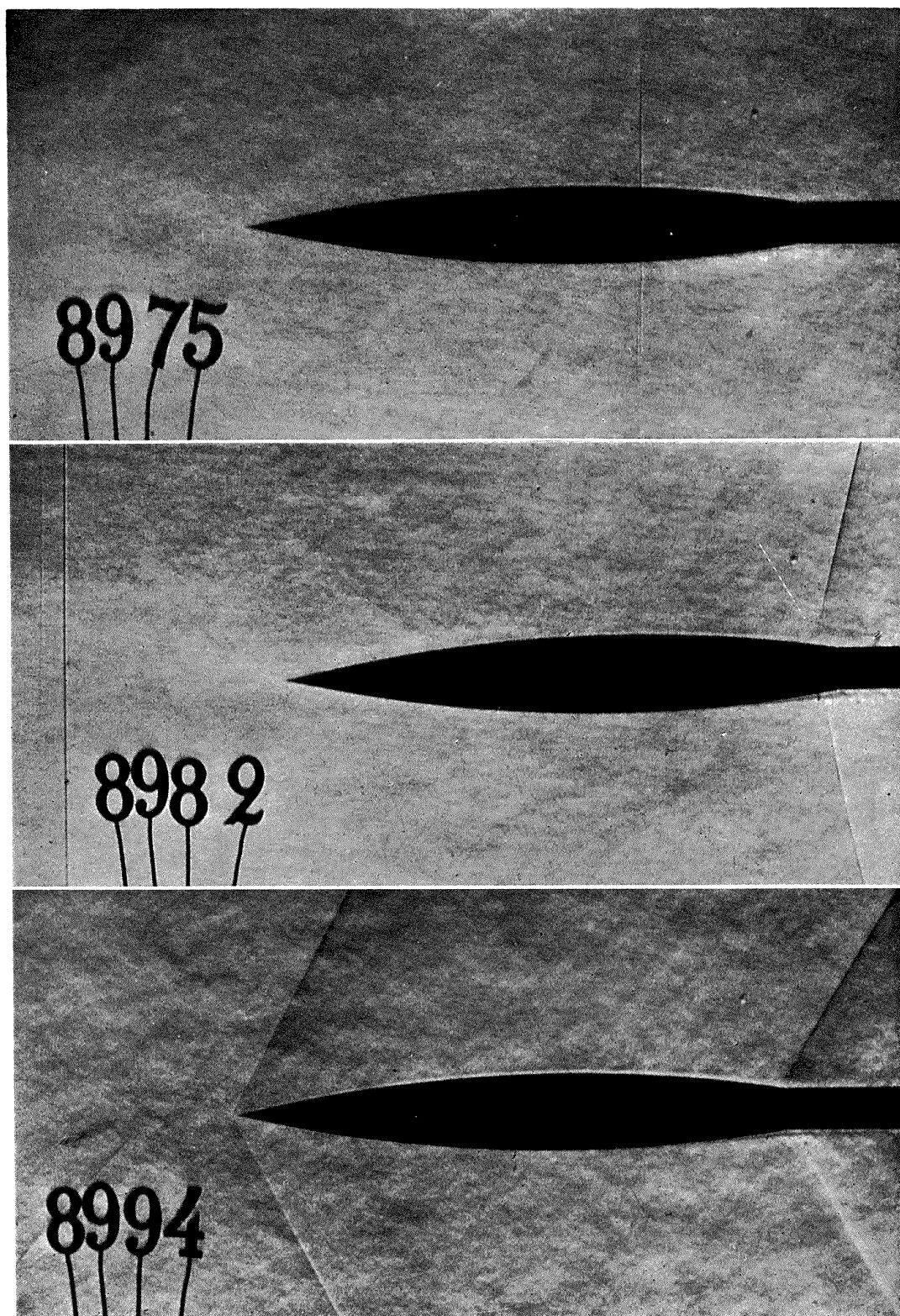
第10図 円弧型回転体の圧力分布(I)

----- Spreiter (局所線型化法。前部及後部を楕円型(亜音速)及び双曲型(超音速)のものでつないでいる。[30])

———— Maeder の方法。

- · - · - 非線型補正理論 (前部及び後部の小さい領域は  $\phi_x$  により補正)。

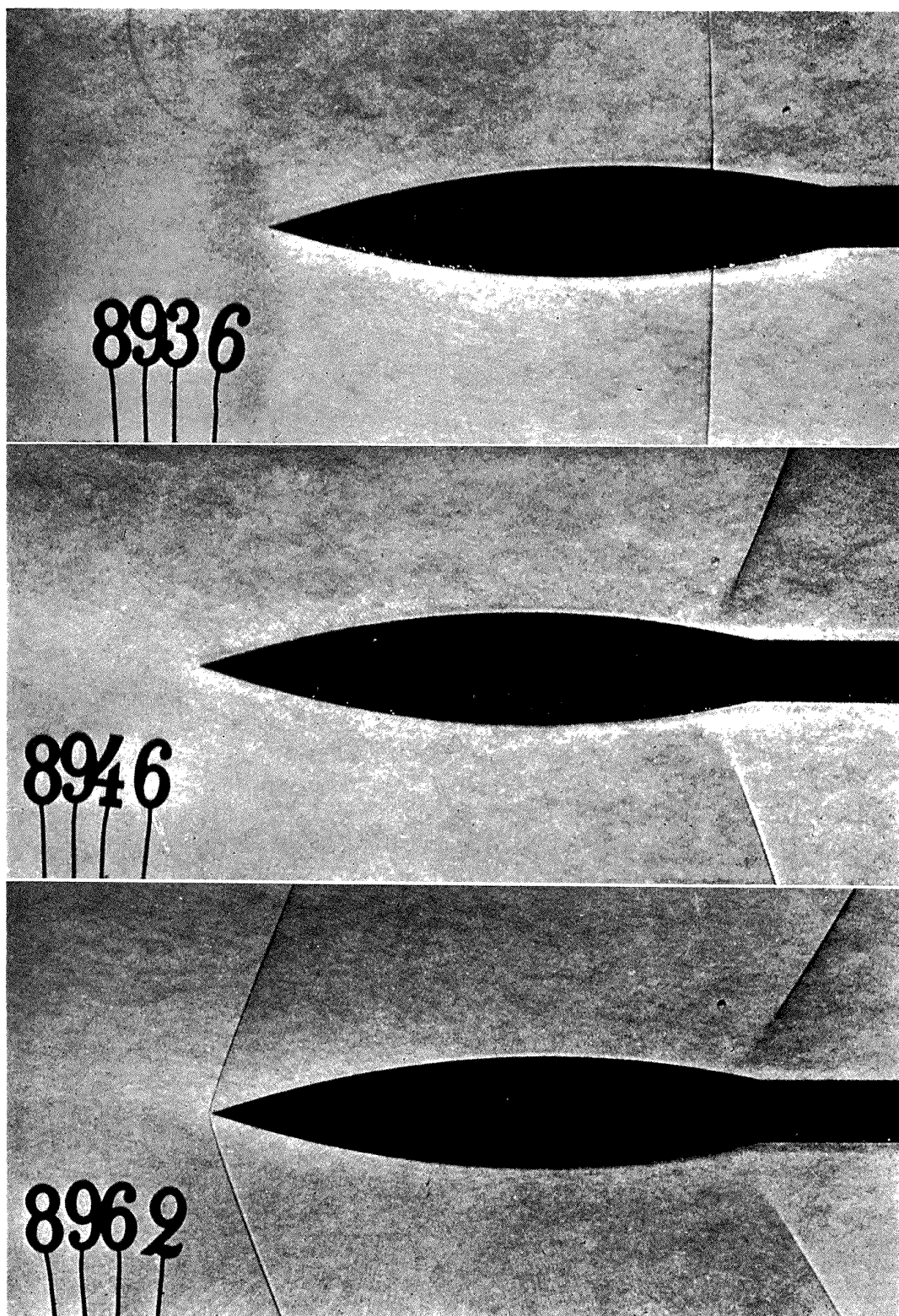
○ Tayler & McDevitt の実験 [28]



第12図

$M_\infty=0.95, 1.00, 1.15$  に於ける  $t=1/6\sqrt{2}$  の円弧型回転体のシュリーレン写真  
(Drougge [29]) [注 13]

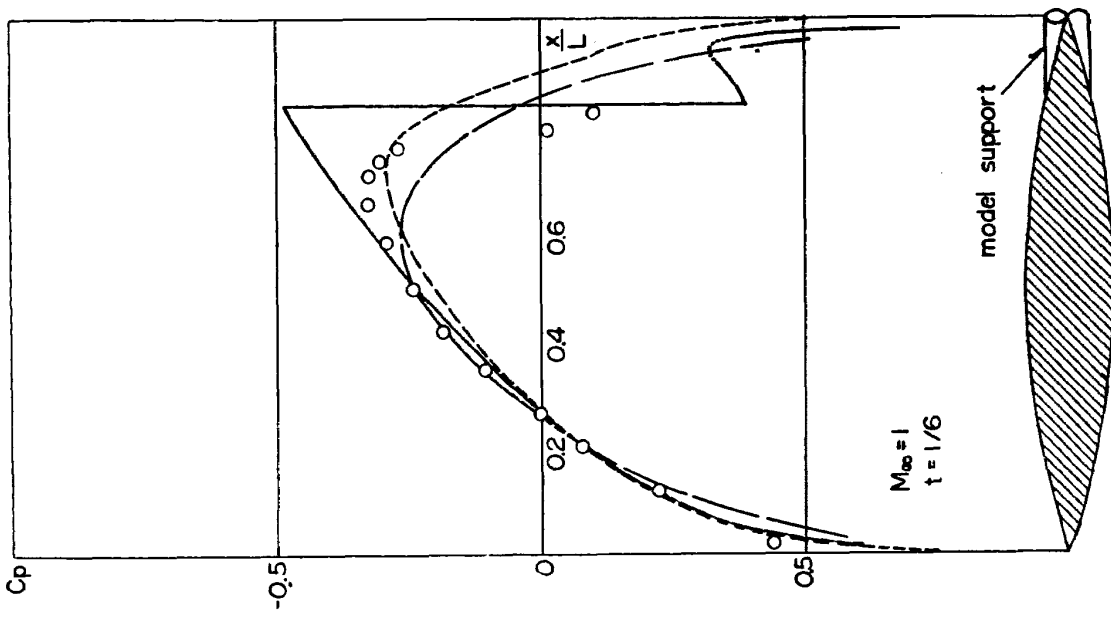
[注 13] この貴重な写真の掲載に同意を与えられた Drougge 博士 (FFA, Stockholm) に厚くお礼を述べる。



第13図

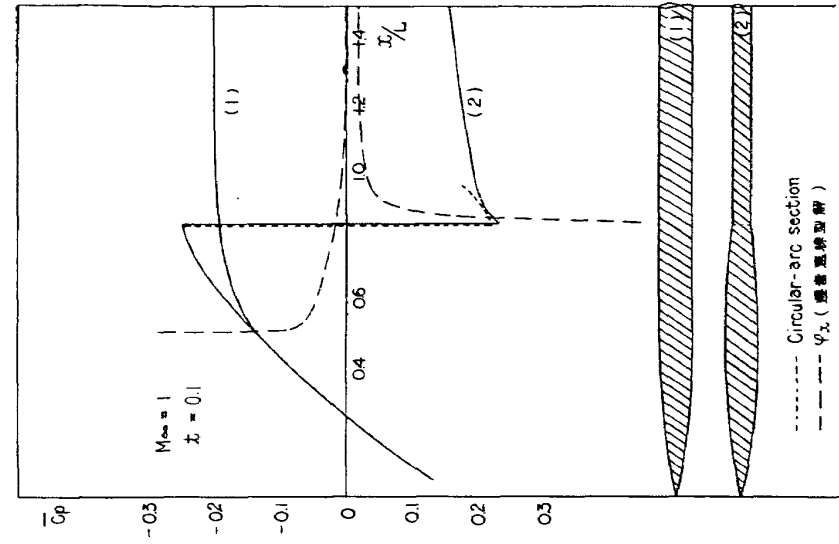
$M_\infty=0.95, 1.00, 1.15$  に於ける  $t=1/6$  の円弧型回転体のシューリレン写真  
(Drougge [29]) [注 13]



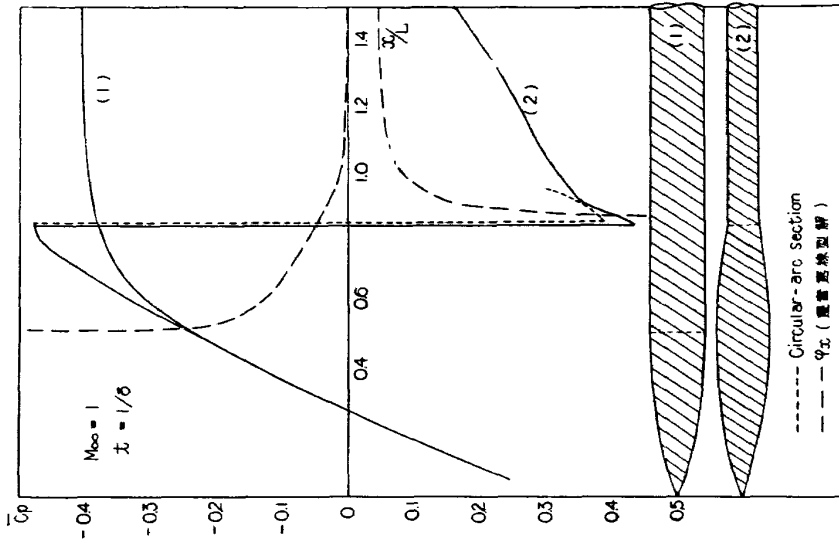


第11図 円弧型回転体の圧力分布。(II)

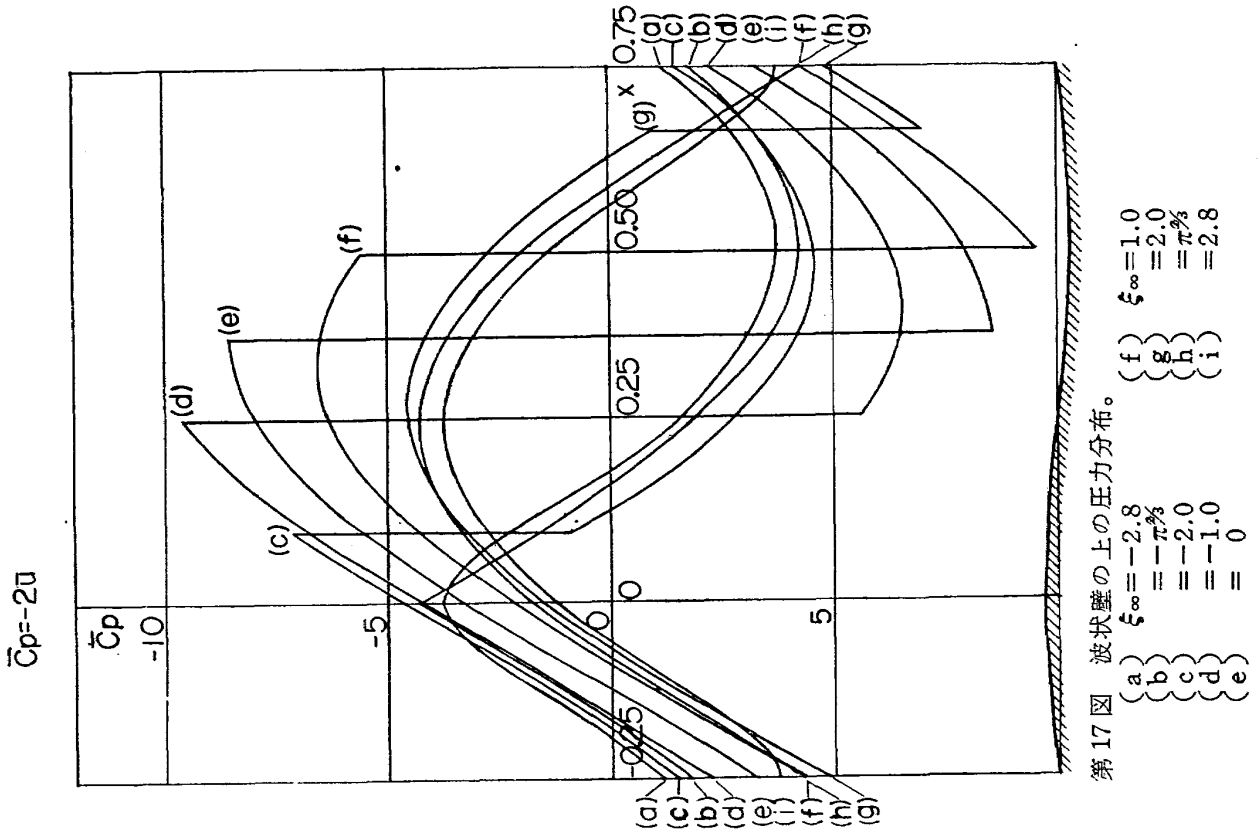
- Spreiter (第10図に同じ)
- Maederの方法
- 非線型補正理論 (第10図に同じ)
- Drouggeの実験 [29]



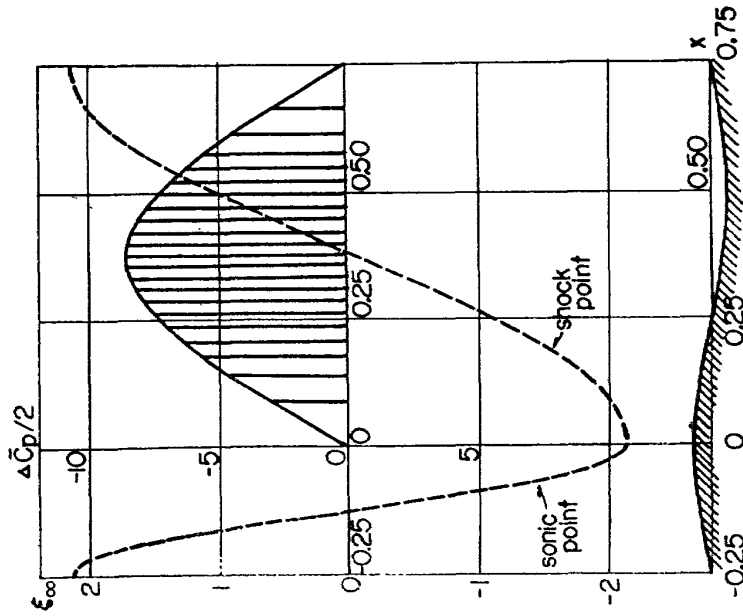
第14図 後部を変形した円弧型回転体。(I)  
(非線型補正理論)



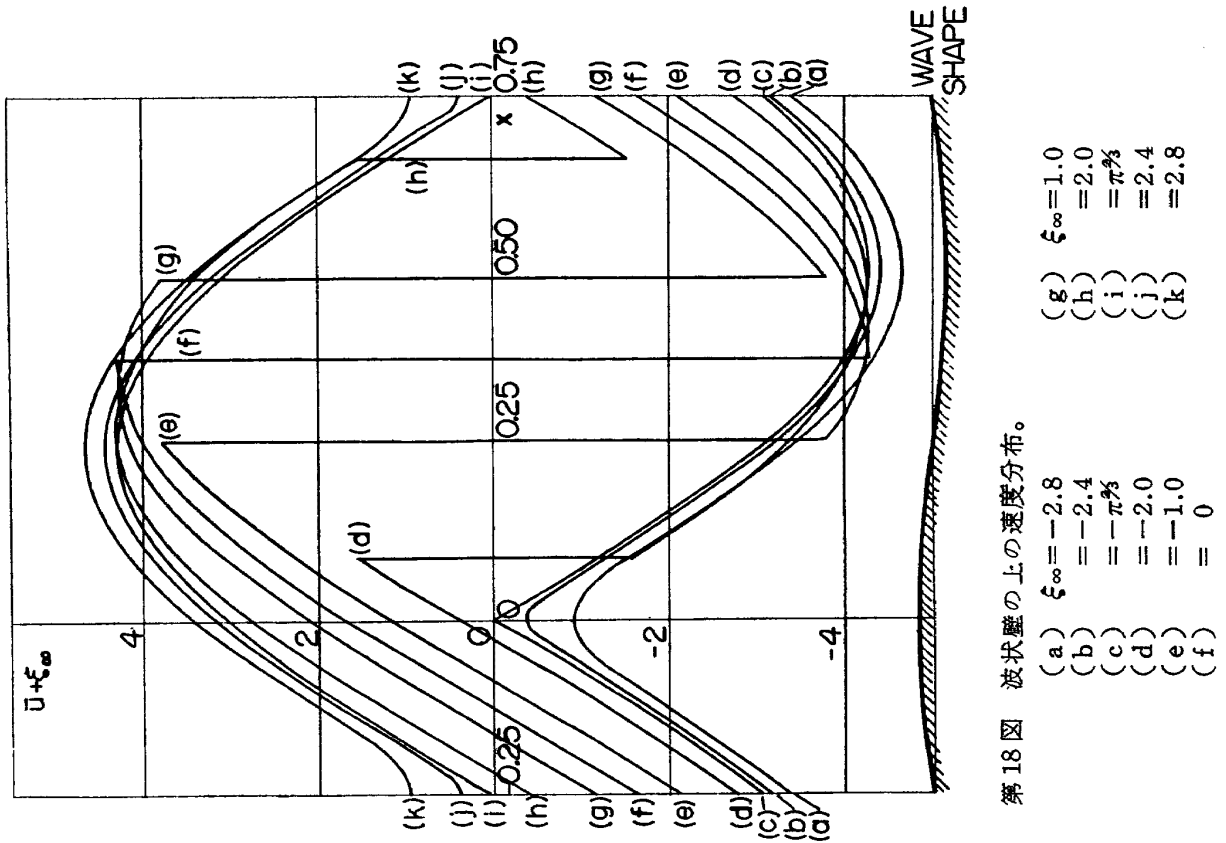
第15図 後部を変形した円弧型回転体(II)  
(非線型補正理論)



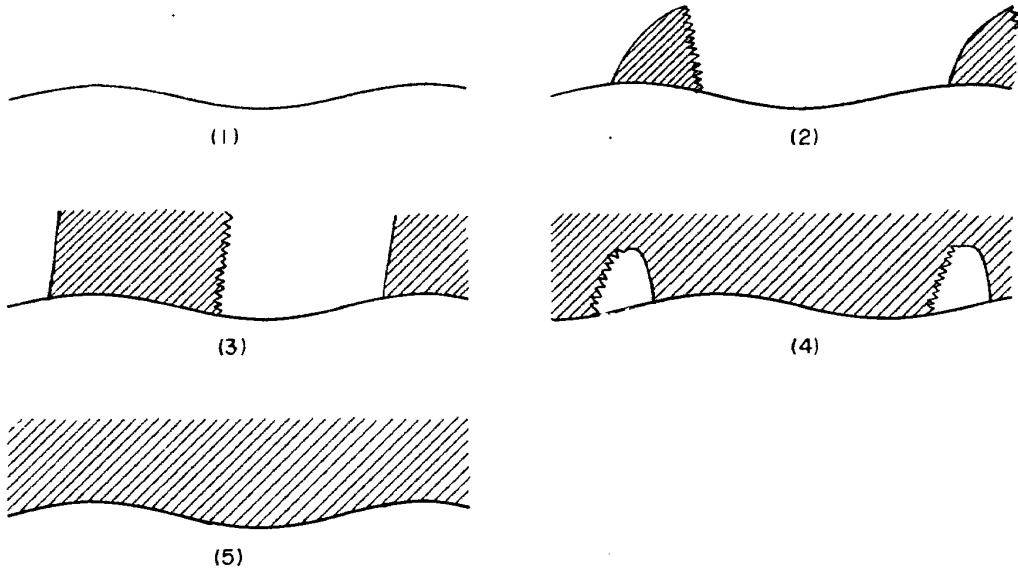
第17図 波状壁の上の圧力分布。



第16図 波状壁の上の音速点と衝撃点の移動。及び衝撃点に於ける衝撃波の強さ。

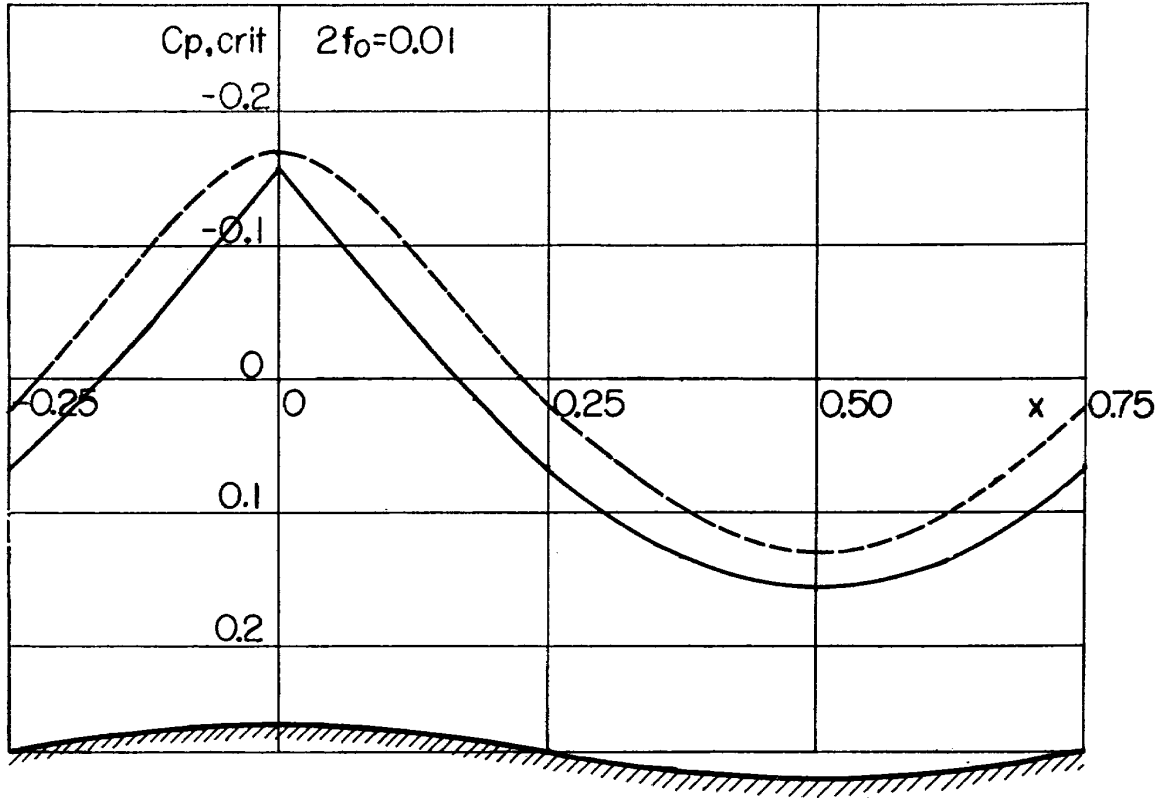


第18図 波状壁の上の速度分布。



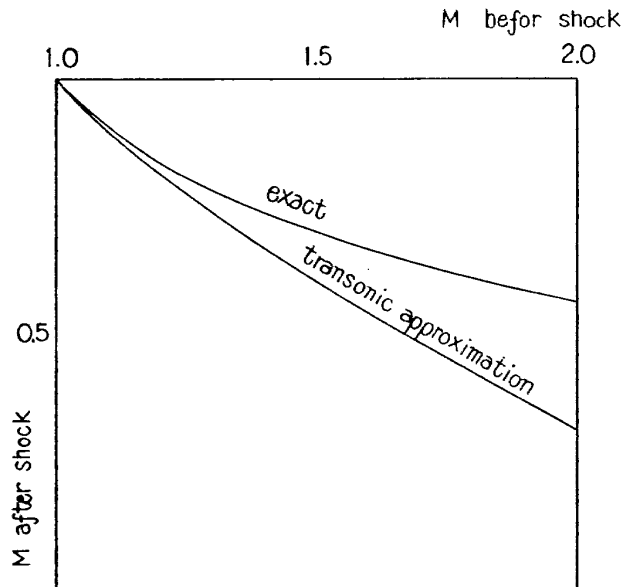
第19図 波状壁に沿う遷音速流の概念図。斜線の部分は、超音速流の領域を示し、鋸歯型の線は衝撃波を示す。

- (1)  $M_\infty < \text{亜音速臨界マッハ数}$  (2)  $\text{亜音速臨界マッハ数} < M_\infty < 1$  (3)  $M_\infty = 1$
- (4)  $1 < M_\infty < \text{超音速臨界マッハ数}$  (5)  $M_\infty > \text{超音速臨界マッハ数}$



第 20 図 亜音速臨界流に於ける波状壁の上の圧力分布。Kaplan の計算との比較。

----- Kaplan                      ———— 現在の理論



第 21 図 衝撃波の直前直後に於けるマッハ数の関係。([17] の TN 25 に拠る。)

TR-9 遷音速流小擾乱理論の研究 (I) の正誤表

箇所	誤	正
1 p 下から 5 行目	Wiegardt	Wieghardt
7 p 上から 2 行目	(追加)	……見られるのである。!!*
脚註	(追加)	*この点は、東京大学航空研究所における第 175 回空力ゼミナール (1958 年 9 月 25 日 3 時半～5 時) で今井教授が Spreiter の局所線型化法 (Slender-Body Theory Based on Approximate Solution of Transonic Flow Equation, NASA Rep. 2) を紹介された時、問題となった。Spreiter が局所線型化法として (2.11) をとった理由は理論的にあいまいである。
脚註	$(\Phi_{xx} + 1/2\Phi_r^2)$	$(\Phi_x + 1/2\Phi_r^2)$
15 p 上から 5 行目	(追加)	……必要がある。[23] の Fig. 9 参照。
16 p 上から 5 行目	$0 > x > 1$	$0 < x < 1$
21 p 上から 7 行目	(6.4)	(6.1)
21 p 上から 12 行目 ～13 行目	(6.4) 式の右辺全部	$= M_\infty^2 \left[ (\gamma + 1)\Phi_x + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_x^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(\Phi_y^2 + \Phi_z^2) \right] \Phi_{xx}$ $+ M_\infty^2 \left[ (\gamma - 1)\Phi_x + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_y^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(\Phi_z^2 + \Phi_x^2) \right] \Phi_{yy}$ $+ M_\infty^2 \left[ (\gamma - 1)\Phi_x + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_z^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) \right] \Phi_{zz}$ $+ 2M_\infty^2 [\Phi_y(1 + \Phi_x)\Phi_{xy} + \Phi_z(1 + \Phi_x)\Phi_{zx} + \Phi_y\Phi_z\Phi_{yz}] \quad (6.4)$
21 p 上から 15 行目 ～16 行目	(6.5) 式の右辺全部	$= (\gamma + 1)M_\infty^2 (\Phi_{1x}\Phi_{2xx} + \Phi_{1xx}\Phi_{2x} + 1/2\Phi_{1x}^2\Phi_{1xx})$ $+ (\gamma - 1)M_\infty^2 \Phi_{1x}(\Phi_{1yy} + \Phi_{1zz}) + 2M_\infty^2 (\Phi_{1y}\Phi_{1xy} + \Phi_{1z}\Phi_{1zx}) \quad (6.5)$
22 p 下から 12 行目	Wiegardt	Wieghardt
24 p 下から 2 行目 ～1 行目	Theory of Lifting Thin Aerofoils at Sonic Speed, Proc. ……for Applied Mechanics, 1960.	An Approximate Solution of the Lifting Problem of Thin Airfoils at Sonic Speed, Journal of the Aers/Space Sciences, Vol. 28, No. 7, 588-590 pp, July, 1961.
32 p 第 14 図, 第 15 図	$\bar{C}_p$	$C_p$

## 既 刊 報 告

- |      |                                                                                                                                                          |          |                           |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---------------------------|
| TR-1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験<br>Preliminary Investigation of N. A. L.<br>Transonic Wind-Tunnel Test-Section                                                          | 1960年2月  | 平木一, 石井孝雄<br>大島信彦         |
| TR-2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機<br>I. 模型送風機による性能試験<br>22.5 MW Main Blower for N. A. L.<br>Transonic Wind Tunnel<br>I. Performance Test of the Model<br>Blower        | 1960年5月  | 山内正男, 松木正勝<br>塩入淳平, 富永守之  |
| TR-3 | 風洞用角度計の試作実験<br>An Experiment on Angle Measuring<br>Instruments of Airplane Models in<br>Wind Tunnel Test                                                 | 1960年8月  | 小橋安次郎, 長洲秀夫<br>高島一明, 波木井潔 |
| TR-4 | 回転円板の強度<br>Strength of Rotating Discs                                                                                                                    | 1960年9月  | 佐藤和郎, 永井文雄                |
| TR-5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音<br>速フラッタ試験設備の計画と整備試験<br>Design and Development of N. A. L.<br>60 cm×60 cm Transonic Blowdown<br>Wind Tunnel for Flutter Testing | 1960年12月 | 中井暎一, 橋爪宏<br>中村泰治         |
| TR-6 | 高温歪ゲージの温度特性<br>Temperature Characteristics of High<br>Temperature Strain Gage                                                                            | 1960年12月 | 竹中幸彦                      |
| TR-7 | 遷音速風洞の測定部<br>On the Transonic Test Section                                                                                                               | 1961年1月  | 村崎寿満                      |
| TR-8 | 繰返し荷重試験装置の予備試験<br>Preliminary Study for Development<br>of Repeated Load Testing Rigs<br>for Full-Scale Aircraft Structures                               | 1961年3月  | 竹内和之, 飯田宗四郎               |

---

## 航空技術研究所報告9号

昭和36年3月発行

発行所 航空技術研究所  
東京都三鷹市新川700  
電話武蔵野(022)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53

---