

航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-12

薄肉開断面梁の自由振動について

川井忠彦・塙武敏

1961年5月

航空技術研究所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

薄肉開断面梁の自由振動について

川井 忠彦*・塙 武敏*

On the Natural Vibration of Thin-Walled Beams of Open Cross Section

By Tadahiko KAWAI and Taketoshi HANAWA

The lateral-torsional vibration of a thin-walled beam of open cross section is one of the fundamental problems in vibration of structures. It is believed that thorough understanding of such problems is essential for vibration analysis of flight structures.

A new method of solution on the free coupled vibration of such beams is proposed in this paper. Beams with various end conditions, including simple supports, fixed ends, free-free and a cantilever are considered. Results of the study are compared with the work made by J. M. Gere.

1. 緒 言

梁の振動の解析はあらゆる構造物の振動を論ずる場合の基礎であり、特に航空機、船舶など動的問題が重要になる構造物においては一つの大きな研究分野を構成していることは周知のとおりである。

空力弾性学において重要な研究課題である翼のフラッター解析も元をたゞせば一本の梁の振動解析がその基礎となっている。

ところが従来行われてきた梁の振動に関する研究の大部分は曲げ振動にのみ終始し、捩れ振動したがって曲げ捩り連成振動についてはほとんど組織的な研究が行われていないのが現状である⁽¹⁾⁽⁵⁾。

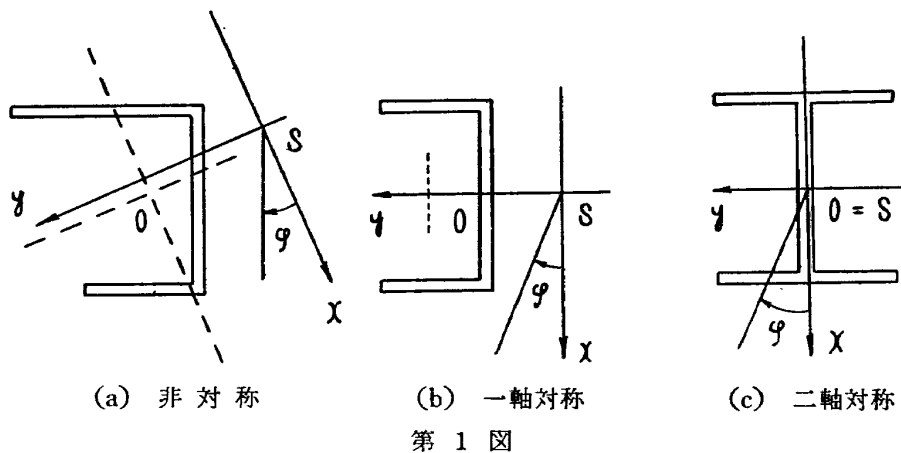
そこで筆者等はまず一本の一樣非対称断面梁に起る自由振動を最も一般的立場より考察して、その理論解法を展開し、各種の境界条件下における梁の固有振動について研究してみたがその結果について述べるのが本報告の目的である。

非対称断面の梁が自由振動を起すと一般に曲げと捩りの連成した振動になる。この曲げ捩り連成振動は断面の図心と剪断中心が一致しない場合には常に起るものであって最も一般的な場

* 機体部

合には二つの互に垂直な曲げ振動が捩れ振動と連成して“三重連成振動”(triple coupling vibration)を起す。

第1図(a)の場合がこの場合であり、もし梁の断面が一つの対称軸を有する場合には曲げ振動の一つが他の振動から独立したものとなる。これが(b)の場合で他の一つの曲げ振動が捩れ振動と連成して“二重連成振動”(double coupling vibration)を生ずる。これに対して(c)の場合には二つの曲げ振動と捩れ振動が互に独立して起るものである。この論文では(a)の場合のような非対称断面梁の自由振動を色々な境界条件下で一般的に論じようとするものである。



2. 連成振動の基礎方程式およびその解法

三重連成振動の基礎方程式は J. M. Gere により d'Alembert's principle を用い、慣性力を梁の静的平衡方程式に代入して次のように求められた⁽¹⁾。

すなわち第2図に示すような任意断面の梁を考える。ここで x, y 軸は剪断中心 S を通り、梁の図心 O を通る主軸 ξ, η に平行にとるものとする。静荷重を受ける梁の曲げ捩れの方程式は一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} &= Q_x & EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} &= Q_y \\ EI_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

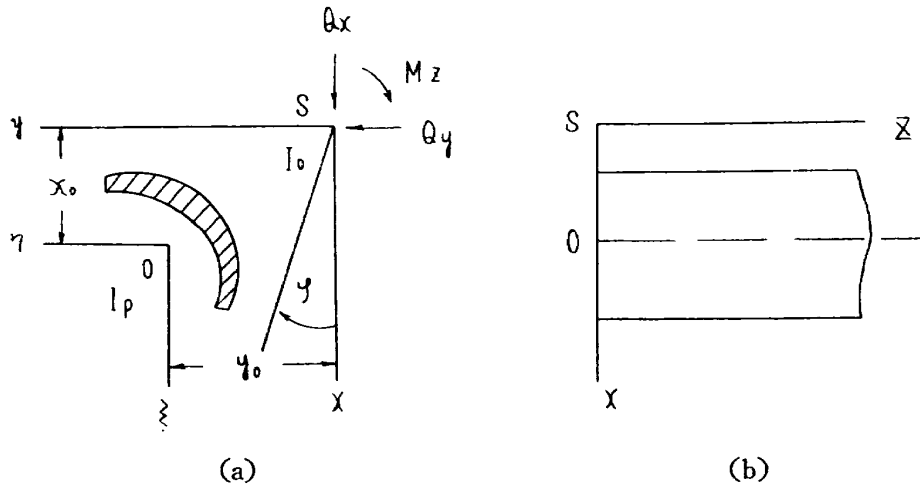
ここに

u, v = 剪断中心 S の x および y 方向の撓み

φ = 断面の回転角

Q_x, Q_y = 剪断中心軸に沿って働く分布荷重の強さ

M_z = 剪断中心軸に沿って働く分布トルクの強さ



$$EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = Q_x(z, t)$$

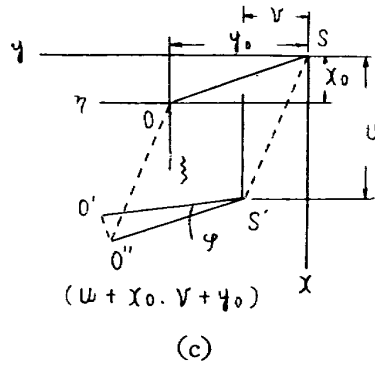
$$EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = Q_y(z, t)$$

$$EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_z(z, t)$$

$$Q_x(z, t) = -mA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + q_x(z, t)$$

$$Q_y(z, t) = -mA \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + q_y(z, t)$$

$$M_z(z, t) = -mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + mA \left(y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + m_z(z, t).$$



0' の x, y 軸に関する座標 : $(u + x_0 - y_0\varphi, v + y_0 + x_0\varphi)$.

第 2 図

I_{xx}, I_{yy} = 断面の図心 O に関する主慣性能率

K = 断面の捩れ剛性

I_w = 断面の曲げ捩れ剛性

E = ヤング率

G = 剪断剛性率

梁が振動する時、 x および y 軸方向の変位によって生ずる慣性力は、第 2 図 (c) よりわかるごとくそれぞれ

$$-mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - y_0 \varphi), \quad -mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + x_0 \varphi)$$

となる。ここに

m = 梁の質量分布

A = 梁の断面積

t = 時間

x_0, y_0 = 図心 O の座標

変位によって生ずる慣性力は図心 O を通って働いているから、剪断中心 S の周りに働く全慣性トルクは次のようになる。

$$-mI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - y_0 \varphi) y_0 - mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + x_0 \varphi) x_0$$

ここに I_p は図心 O の周りの断面の極慣性能率である。

これらの慣性力を方程式 (1) に代入すれば 三つの三重連成振動の連立偏微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mA y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - mA y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに I_0 は剪断中心 S の周りの極慣性能率を表わし、

$$I_0 = I_p + A(x_0^2 + y_0^2)$$

の関係がある。

もし第 1 図 (b) のごとく、 y 軸が対称軸となれば $x_0 = 0$ となり、上の方程式 (2) の第二番目の式は独立となり、 y 方向の純曲げ振動を表わすことになる。残りの二式がしたがって二重連成振動を表わす方程式となる。またもし梁が第 1 図 (c) の場合のごとく二軸対称の場合には $x_0 = y_0 = 0$ となるから方程式 (2) の三つの式は互に独立となり、始めの二つの式は x 軸および y 軸方向の純曲げ振動をまた最後の式は純振り振動をそれぞれ表わす方程式となる。

さて (2) 式を解くため次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= u_0(z) e^{i p t} \\ v(z, t) &= v_0(z) e^{i p t} \\ \varphi(z, t) &= \varphi_0(z) e^{i p t} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 式を (2) 式に代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{xx} \frac{d^4 u_0}{dz^4} - \lambda^2 u_0 + y_0 \lambda^2 \varphi_0 = 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v_0}{dz^4} - \lambda^2 v_0 - x_0 \lambda^2 \varphi_0 = 0 \\ EI_w \frac{d^4 \varphi_0}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} + y_0 \lambda^2 u_0 - x_0 \lambda^2 v_0 - r_0^2 \lambda^2 \varphi_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

となる。ここに $\lambda^2 = mAp^2$, $r_0^2 = \frac{I_0}{A}$,

したがって (4) 式で与えられる三つの連立常微分方程式を次のような境界条件下で解いて λ を求める固有値問題が本論文の中心課題である。

梁の境界条件として次の三種類の場合を考えることにする*

(i) 固定端

$$u_0 = \frac{du_0}{dz} = 0, \quad v_0 = \frac{dv_0}{dz} = 0, \quad \varphi_0 = \frac{d\varphi_0}{dz} = 0$$

(ii) 支持端

$$u_0 = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0, \quad v_0 = \frac{d^2 v_0}{dz^2} = 0, \quad \varphi_0 = \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} = 0$$

(iii) 自由端

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{d^3 u_0}{dz^3} = 0, \quad \frac{d^2 v_0}{dz^2} = \frac{d^3 v_0}{dz^3} = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} = 0, \quad EI_w \frac{d^3 \varphi_0}{dz^3} - GK \frac{d\varphi_0}{dz} = 0$$

方程式 (4) を解くために u_0 , v_0 および φ_0 を与えられた境界条件を満足する梁の固有函数 $u_n(z)$ で展開できるとして次のように仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} u_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z) \\ v_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(z) \\ \varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(z) \end{array} \right\} \quad (5)$$



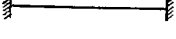
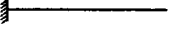
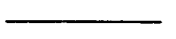
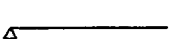
ここに $u_n(z)$ は次の微分方程式と与えられた境界条件を満足する函数である。

$$\frac{d^4 u_n}{dz^4} = \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 u_n(z) \quad (6)$$

* 実際には u_0 , v_0 , および φ_0 に対する境界条件は互に独立にとれるので、境界条件として上記のように固定端、支持端および自由端の三種に限定した場合でも数学的には $9 \times 9 \times 9 = 729$ 通りという茫大なケースを取扱わねばならないことになる。このような場合をも含めて一般的理論を立てることは面倒なことではないが物理的に考えるとその大部分のケースは実現不可能でありまた、実用上から考えてもあまり意味がない。したがって本報告においては u_0 , v_0 および φ_0 のいずれに対しても境界条件が相似の場合すなわち同種の境界条件である場合のみを考察することにする。

この $u_n(z)$ はすでに多くの人々により詳細に研究されていて数値表もできている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。すなわちいろいろな境界条件に対する $u_n(z)$ を表にして示せば次のとおりである。

第1表 梁の正規固有函数系

境界条件	正規固有函数 $u_n(z)$	固有値 γ_n (n)
 S/S	$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \gamma_n \frac{z}{L}$	$\sin \gamma_n = 0 \quad \gamma_n = n\pi$ 3.14159 (1) 9.42478 (3) 6.28319 (2) 12.56637 (4)
 C/S	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \gamma_n \frac{z}{L} - \cos \gamma_n \frac{z}{L} \right) - \alpha_n \left(\sinh \gamma_n \frac{z}{L} - \sin \gamma_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n - \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n - \sin \gamma_n)$	$\tanh \gamma_n - \tan \gamma_n = 0$ 3.92699 (1) 10.21018 (3) 7.06858 (2) 13.35177 (4)
 C/C	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \gamma_n \frac{z}{L} - \cos \gamma_n \frac{z}{L} \right) - \alpha_n \left(\sinh \gamma_n \frac{z}{L} - \sin \gamma_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n - \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n - \sin \gamma_n)$	$\cosh \gamma_n \cos \gamma_n - 1 = 0$ 4.73004 (1) 10.99561 (3) 7.85320 (2) 14.13717 (4)
 C/F	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \gamma_n \frac{z}{L} - \cos \gamma_n \frac{z}{L} \right) - \alpha_n \left(\sinh \gamma_n \frac{z}{L} - \sin \gamma_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n + \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n + \sin \gamma_n)$	$\cosh \gamma_n \cos \gamma_n + 1 = 0$ 1.87510 (1) 7.85476 (3) 4.69409 (2) 10.99554 (4)
 F/F	$\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{3}{L}} \left(1 - \frac{2z}{L} \right),$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n - \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n - \sin \gamma_n)$ $\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \gamma_n \frac{z}{L} + \cos \gamma_n \frac{z}{L} \right) - \alpha_n \left(\sinh \gamma_n \frac{z}{L} + \sin \gamma_n \frac{z}{L} \right) \right\}$	$\cosh \gamma_n \cos \gamma_n - 1 = 0$ 0 (1) 7.85320 (4) 0 (2) 10.99560 (5) 4.73004 (3)
 S/F	$\sqrt{\frac{3}{L}} \frac{z}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2}{(1-\alpha_n^2)}} \left(\alpha_n \sinh \gamma_n \frac{z}{L} + \sin \gamma_n \frac{z}{L} \right)$ $\alpha_n = \sin \gamma_n / \sinh \gamma_n$	$\cosh \gamma_n \sin \gamma_n - \sinh \gamma_n \cos \gamma_n = 0$ 0 (1) 10.21018 (4) 3.92699 (2) 13.35177 (5) 7.06858 (3)

S…単純支持端

C…固定端

F…自由端

さて梁が自由端を有する場合には捩れ角 φ_0 に対する一つの境界条件：

$$M_z = -EI_w \frac{d^3 \varphi_0}{dz^3} + GK \frac{d\varphi_0}{dz} = 0$$

は満足されない。そこで $GK(d\varphi/dz)$ なる見かけの外力を自由端に加えて境界条件を満たすようにする。すなわち微分方程式 (4) は次のように補正される。

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{xx} \frac{d^4 u_0}{dz^4} - \lambda^2 u_0 + y_0 \lambda^2 \varphi_0 = 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v_0}{dz^4} - \lambda^2 v_0 - x_0 \lambda^2 \varphi_0 = 0 \\ EI_w \frac{d^4 \varphi_0}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} + y_0 \lambda^2 u_0 - x_0 \lambda^2 v_0 - r_0^2 \lambda \varphi_0 \\ - GK \left(\frac{d\varphi_0}{dz} \right)_{z=0} \delta(z-0) + GK \left(\frac{d\varphi_0}{dz} \right) \delta(z-L) = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

(6) 式の補正項の左の方は $z=0$ が自由端, 右の方が $z=L$ が自由端となった場合にのみ必要である。すなわち, 両端自由梁, 片持梁および支持自由梁以外の場合は固有函数の境界条件ともとの方程式の境界条件が一致するのでこの補正項はいらなくなる。

さて (5) 式を方程式 (6) に代入し, 固有函数 $u_n(z)$ の直交性 $\int_0^L u_m(z)u_n(z)dz = \delta_{mn}^*$ を用いれば次のような a_n, b_n および c_n に関する無限連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} a_n(\lambda_n^4 - \lambda^2) + \lambda^2 y_0 c_n = 0 \\ b_n(\mu_n^4 - \lambda^2) - \lambda^2 x_0 c_n = 0 \\ c_n(\nu_n^4 - \lambda^2 r_0^2) - GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn} + \lambda^2 y_0 a_n - \lambda^2 x_0 b_n \\ + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left\{ -u_n(0) \left(\frac{du_m}{dz} \right)_{z=0} + u_n(L) \left(\frac{du_m}{dz} \right)_{z=L} \right\} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

ここに

$$\lambda_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_{xx}}{L^4}, \quad \mu_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_{yy}}{L^4}, \quad \nu_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_w}{L^4}$$

であり第三式の A_{mn} は $A_{mn} = \int_0^L u_n(z) \frac{d^2 u_m}{dz^2} dz$ なる直交条件の成立しないために残る無限級数の項である。

さて $A_{mn} = \int_0^L u_n(z) \frac{d^2 u_m}{dz^2} dz = u_n(z) \frac{du_m}{dz} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{du_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz$ であり, 梁の両端が固定または支持の場合には直ちに

$$A_{mn} = - \int_0^L \frac{du_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz$$

となりまた両端が自由端を含む場合でも (7) 式の第三式中にあらわれた補正項と上の積分式の右辺の第一項とは相殺する関係にある。したがって (7) 式は更に次のように簡単化される。

$$\begin{cases} a_n(\lambda_n^4 - \lambda^2) + \lambda^2 y_0 c_n = 0 \\ b_n(\mu_n^4 - \lambda^2) - \lambda^2 x_0 c_n = 0 \\ c_n(\nu_n^4 - \lambda^2 r_0^2) + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' + \lambda^2 y_0 a_n - \lambda^2 x_0 b_n = 0 \end{cases} \quad (8)$$

ここに

$$A_{mn}' = \int_0^L \frac{du_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz$$

この方程式 (8) は梁の両端の境界条件のいかにかわららず成立する式であり, これより $a_n,$

* δ_{mn} は Kronecker のデルタを示す。

すなわち $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

b_n および c_n を消去すれば λ に関する無限次元行列式が得られるからこれを解けば梁の固有振動数が求められるわけである。特に梁の両端が支持の場合には $A_{mn}' = (m\pi/L)(n\pi/L)\delta_{mn}$ となり (8) 式中の級数項は A_{nn}' を残して全部消えるから、 a_n , b_n および c_n を消去すれば次のような厳密な振動数方程式が求められる。

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \lambda^2 & 0 & y_0 \lambda^2 \\ 0 & \mu_n^4 - \lambda^2 & -x_0 \lambda^2 \\ y_0 \lambda^2 & -x_0 \lambda^2 & \nu_n^4 + GK \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - r_0^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

これは J. M. Gere の求めた結果と一致する⁽¹⁾。

その他の場合には A_{mn}' が一般に零とならぬので (9) 式のような簡単な関係は得られず逐次近似により振動数を求めなければならない。なお計算に必要な A_{mn}' の値はすでに Dana Young により詳しく計算され数値表もできているからそれを使用すればよい⁽³⁾。

連成振動を問題にする前に純振り振動の振動数が近似的にしかこの方法によれば定まらぬことを考えるとまず純振り振動数の計算精度を吟味することが第一の問題であることがわかる。そこでまず純振り振動の問題を次節で考えてみることにする。

3. 梁の純振り振動

純振り振動が起るのは (8) 式を見ればわかるように断面の図心と剪断中心が一致した場合であり、すなわち $x_0 = y_0 = 0$ として得られる (8) の第三式より c_n を消去すれば求められる。すなわち、次式

$$c_n(\nu_n^4 - r_0^2 \lambda^2) + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' = 0 \quad (10)$$

より、まず第一近似は c_n の項のみを取って

$$\lambda^2 = \frac{1}{r_0^2} (\nu_n^4 + GK A_{nn}') \quad (11)$$

となる。

単純支持の場合は (9) と同様に第一近似が厳密解となり、St. Venant の捩れ剛性 GK と曲げ捩れ剛性 EI_w の比を $k^2 = GK L^2 / EI_w$ とおくと (11) 式より

$$P_{ns} = \frac{n\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI_w}{mI_0} (n^2 \pi^2 + k^2)} \quad (12)$$

となる。ここに P_{ns} は第 n 次のモードの振動数である。単純支持以外の場合には (11) 式は第一近似式となる。したがってさらに精度の良い値を求めるには逐次近似法により c_n の項数を殖やして第二、第三近似の振動数方程式を求め、これを λ^2 について解いて振動数を求めな

ければならない。たとえば基本振動数の第二および第三近似式を求めて見ると一般に次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \nu_1^4 + GK A_{11}' - r_0^2 \lambda^2 & GK A_{12}' \\ GK A_{21}' & \nu_2^4 + GK A_{22}' - r_0^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} \nu_1^4 + GK A_{11}' - r_0^2 \lambda^2 & GK A_{12}' & GK A_{13}' \\ GK A_{21}' & \nu_2^4 + GK A_{22}' - r_0^2 \lambda^2 & GK A_{23}' \\ GK A_{31}' & GK A_{32}' & \nu_3^4 + GK A_{33}' - r_0^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

また高次の振動数を求める場合には、その振動モードに対応する第一近似の項を中心にしてそれに近い次数の項を高次、低次の方向に取って振動数方程式を作るとその根は一般に精度が良いようである。たとえば n 次振動の第三近似は次に示すような式となる。

$$\begin{vmatrix} \nu_{n-1}^4 + GK A_{n-1, n-1}' - r_0^2 \lambda^2 & GK A_{n-1, n}' & GK A_{n-1, n+1}' \\ GK A_{n, n-1}' & \nu_n^4 + GK A_{n, n}' - r_0^2 \lambda^2 & GK A_{n, n+1}' \\ GK A_{n+1, n-1}' & GK A_{n+1, n}' & \nu_{n+1}^4 + GK A_{n+1, n+1}' - r_0^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

一般に両端における境界条件が同種である場合、すなわち両端支持、両端固定、両端自由の場合には振動方程式が対称モードおよび非対称モードに対する二つのグループに分離する。さらに詳しくいえば $n=1, 3, 5, \dots$ と取って作られる振動方程式は対称振動の場合の振動数方程式を与え、 $n=2, 4, 6, \dots$ と取って作られる振動数方程式は非対称振動の場合の振動数方程式を与えることになる。

また両端自由梁および支持自由梁の場合には振動数が零となる剛体変位のモードがその振動に含まれてくる。たとえば両端自由梁が対称振動を起す場合その第一モードは一樣回転（撓み振動の場合には平行移動）の剛体変位を表わし、第三モードが普通の意味で基本振動を与えることになる。すなわち

$$\begin{vmatrix} -r_0^2 \lambda^2 & 0 \\ 0 & \nu_3^4 + GK A_{33}' - r_0^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

さて解の精度の吟味は (15) 式によって行うことになるが一般にその誤差は k の函数であり $k=0$ の場合は厳密解と一致し k が大きくなるにしたがって誤差も次第に大きくなり $k=\infty$ になると誤差は最大となる。すなわち $k=0$ の場合には $GK \ll EI_w$ であるから GK の項を無視することができ、したがってその運動方程式は (2) 式より

$$EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + m I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

となる。(17) 式は形式的には梁の曲げ振動の運動方程式と同じでありまた境界条件も同じ形式となるからその解が厳密解となるのは当然である。

これに対して $k=\infty$ の場合は $GK \gg EI_w$ であり、梁の曲げ振り剛性 EI_w が St. Venant の振り剛性に比して無視し得ることになる。したがってその運動方程式は

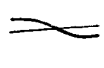
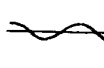
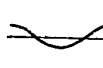
$$-GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{18}$$

となる。すなわち一般に梁の純振り振動の運動方程式は (12) 式からわかるように四階であるが $k=\infty$ の場合に二階に落ちることになる。これが $k=\infty$ のところで解の精度が悪くなる原因であって四階の方程式の解において $k=\infty$ とした場合梁の両端の境界条件によっては相当近似を進めなければ二階の方程式を直接解いて得られた厳密解と一致しないケースがでてくる。特に片持梁の基本振動の場合それがはなはだしいことがわかった。

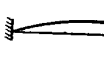


次に片持梁と両端自由梁の場合について $k=\infty$ の点において行った精度吟味の結果を表に示す。

第 2 表 片持梁および両端自由梁の純振り振動数 ($k \rightarrow \infty$)

(a) 両端自由端梁

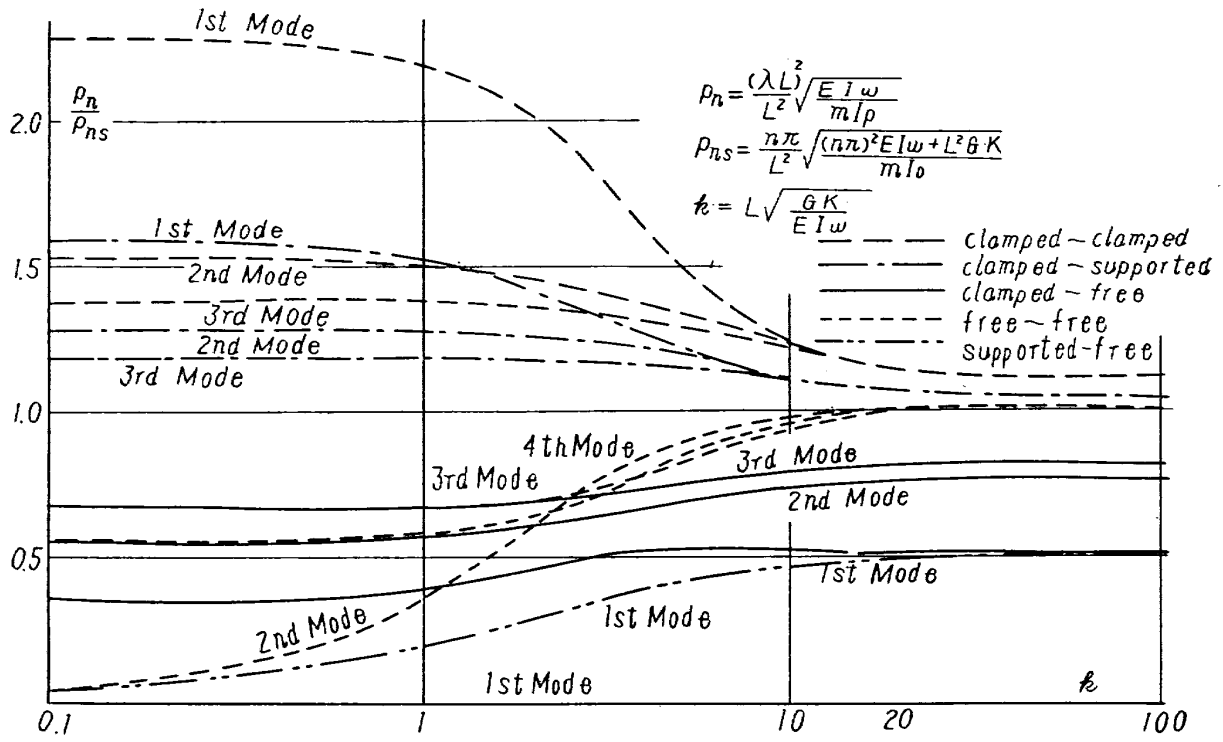
非 対 称 振 動	第 2 モード 		第 4 モード 		近似計算 項 数	対 称 振 動	第 3 モード 		近似計算 項 数
	本計算値	誤差 %	本計算値	誤差 %			本計算値	誤差 %	
	3.46410	10.3	10.4369	10.7	第 1 近似 $n=2$		7.0343	11.9	第 1 近似 $n=3$
	3.17145	0.9	9.3820	-0.6	第 2 近似 $n=2 \cdot 4$		6.3958	-1.0	第 2 近似 $n=3 \cdot 5$
	3.14926	0.3	—	—	第 3 近似 $n=2 \cdot 4 \cdot 6$		6.42478		厳密値
	3.14159		9.42478		厳密値				

(b) 片持梁

第 1 モード 	第 2 モード 		第 3 モード 		近似計算 項 数	
	本計算値	誤差 %	本計算値	誤差 %		本計算値
2.1559	37	5.6938	20.8	8.7920	12	第 1 近似 $n=1$
1.6758	6.3	4.9178	4.3	7.8919	0.4	第 2 近似 $n=1 \cdot 2$
1.663	5.9	—	—	—	—	第 3 近似 $n=1 \cdot 2 \cdot 3$
1.662	5.9	—	—	—	—	第 4 近似 $n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
1.57079		4.7124		7.8540		厳密値

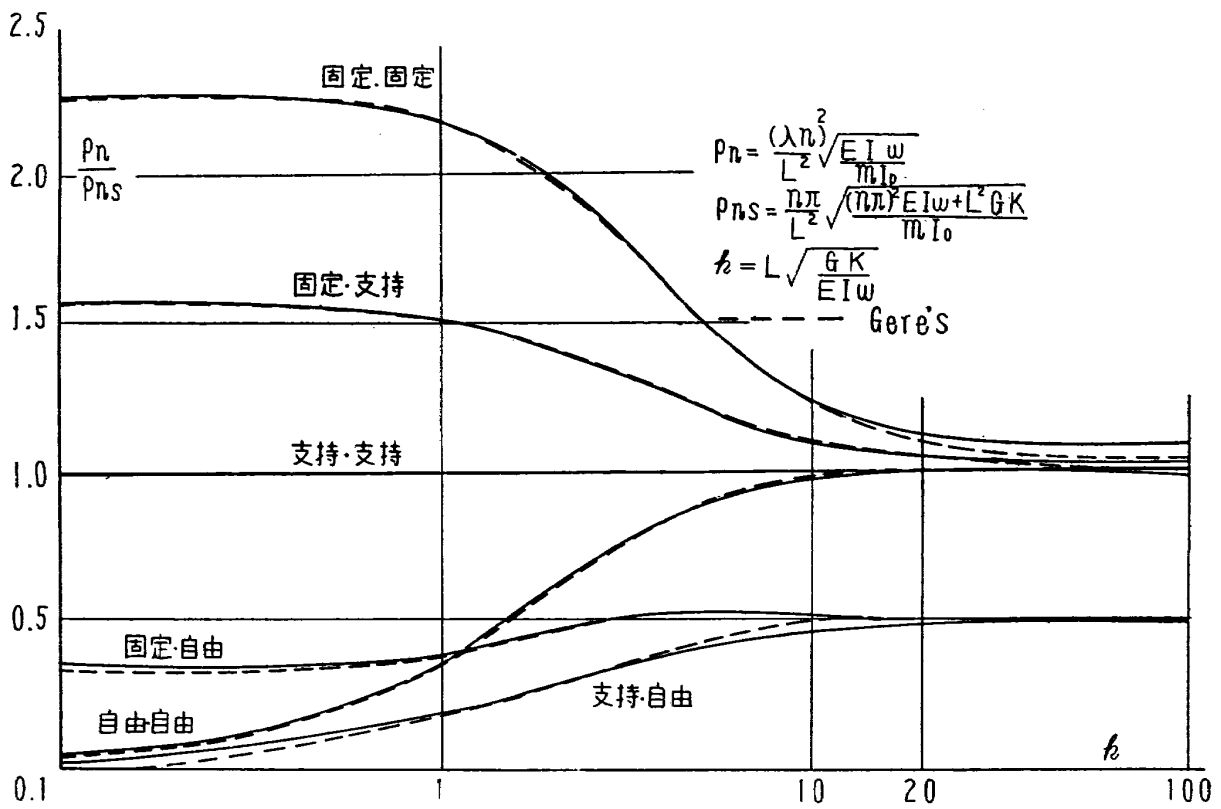
これらの結果からわかるように片持梁の基本振動の場合には解の収斂性が特に悪い。しかしこの場合を除けば実用的には第二近似まで進めば充分の精度が出るようである。

各種境界条件の梁の純振り振動数を k の函数としてグラフに画いた結果を第 3 図に示す。



純振り振動数 (第二近似)

第 3 図



純振り振動, 第二近似値と Gere の値との比較 (第一モード)

第 4 図

4. 梁の曲げ振り連成振動

前節において梁の純振り振動について取扱いその精度を吟味したから本節では始めにもどって梁の曲げ振り振動について考察することにする。

(8) 式の第一式および第二式より a_n および b_n を c_n で表わし第三式に代入して c_n のみを含む方程式とすれば次のようになる。

$$c_n \left\{ -\frac{\lambda^4 x_0^2}{\mu_n^4 - \lambda^2} - \frac{\lambda^4 y_0^2}{\lambda_n^4 - \lambda^2} + (\nu_n^4 - \lambda^2 r_0^2) \right\} + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' = 0$$

($n=1, 2, 3, \dots$) (20)

この式から c_n を消去すれば (9) 式と違った形の振動数方程式が求められる。(20) 式より得られる振動数方程式の第一近似は (9) 式と内容的には同一であって λ^2 に関する三次方程式であり、一般に三つの相異なる実根を有しその最小根は非連成振動の場合の独立な振動数のいずれよりも小さくまたその最大根はいずれよりも大きい。また第三の根は独立な振動数の間にある。このような連成振動の場合の振動数の変化は一般に断面の非対称性、すなわち剪断中心と図心の関係位置 x_0, y_0 によるものであり定量的な議論を行うことは困難であるが曲げ振り座屈の場合ほどには連成の影響が強くあらわれないようである。

以上は三重連成振動についての一般的な議論であったが二重連成振動の場合も同様な議論が可能である。たとえば $x_0=0$ の場合には (20) 式より直ちに次のような方程式がでてくる。

$$c_n \left\{ -\frac{\lambda^4 y_0^2}{\lambda_n^4 - \lambda^2} + (\nu_n^4 - \lambda^2 r_0^2) \right\} + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' = 0$$

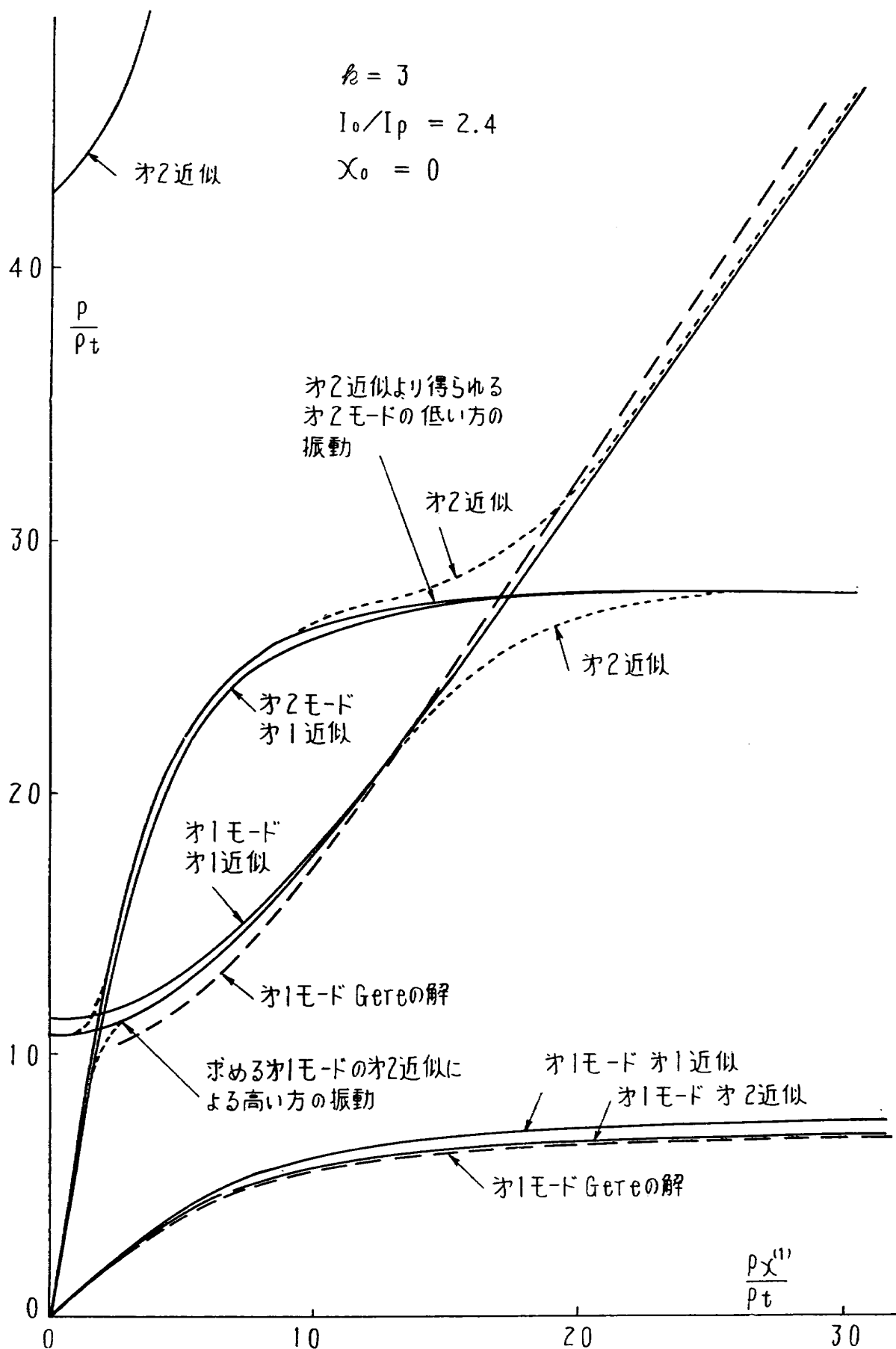
($n=1, 2, 3, \dots$) (21)

すなわちこの場合 y 方向の梁の曲げ振動は独立となり、 x 方向の曲げ振動と振り振動とが連成してその振動数方程式は (21) 式より c_n を消去すれば求められる。

三重連成振動の場合と同じように一般に連成振動数の低い方の値は非連成振動の場合の振動数のいずれよりも低くまた高い方はいずれよりも高くなる。

Gere の論文中⁽¹⁾の [22], [25] 式は両端支持の場合の二重および三重連成振動の振動数方程式であるがこれらの式は (21) 式および (20) 式において両端支持とした場合にほかならぬ。すなわち両端支持の場合には $A_{mn}' = -(mn\pi^2/L^2)\delta_{mn}$ である事を考えれば Gere の得た式と一致することが容易にわかる。また (20) 式あるいは (21) 式より求められる連成振動の解の精度は純振り振動の振動数の精度によって決定されると考えられる。したがって前節において論じた結果より考えて、片持梁の基本振動の場合を除けば第二近似まで進めば実用上さしつかえないくらいの精度の解が得られるわけである。

第5図は片持梁の場合について Gere が電子計算機を使って求めた数値計算例と (21) 式を



第 5 図 二重連成振動数：片持梁

用いて解いた第二近似解を比較したものである。

3節において述べたようにこの方法では純振り振動の解が陽には求めることができず数値的には k の函数としてグラフに画く以外に方法はない。ところが Gere の解は電子計算機による数値解であり、彼の論文(1)の Fig 4 (a)のごとく横軸には純振れ振動数と y 方向の純曲げ振動数の比 p_ϕ/p_y をとってあるから両者の結果を比較するためには Gere の得た結果を翻訳して同一座標軸上に書き直す必要がある。

そこでまず(21)式をすでに定義した諸量を用いて次のように無次元化する。

$$c_n \left[-\frac{\left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2 \left(\frac{p}{p_t}\right)^4}{\left(\frac{p_x^{(n)}}{p_t}\right)^2 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^2} + \left\{ \gamma_n^4 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^2 \right\} \right] + k^2 L^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' = 0 \quad (22)$$

ここに

$$\left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2 = \frac{I_0}{I_p} - 1, \quad p_x^{(n)} = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{mA}}, \quad p_t = \frac{1}{L_2} \sqrt{\frac{EI_w}{mI_0}}$$

(22)式の解は p/p_t を縦軸に、 $p_x^{(n)}/p_t$ を横軸にとり k をパラメーターにすれば二次元的に表わすことができる。一方 Gere の与えたグラフは k のいかなる値に対しても成立すると考えられるからまず k の値を定める。そうすると $p_\phi^{(n)}$ と p_t の比 ρ_n が第3図より決定されるから Gere のグラフにおいて変数として使用している $p/p_x^{(n)}$ 、 $p_\phi^{(n)}/p_x^{(n)}$ は次の式で与えられることになる。

$$\begin{cases} p/p_x^{(n)} = \frac{p}{p_t} \cdot \frac{p_t}{p_x^{(n)}} \\ p_\phi^{(n)}/p_x^{(n)} = \frac{p_\phi^{(n)}}{p_t} \cdot \frac{p_t}{p_x^{(n)}} = \rho_n \frac{p_t}{p_x^{(n)}} \end{cases} \quad (24)$$

$$\rho_n = \frac{p_\phi^{(n)}}{p_t} = n^2 \pi^2 \left(\frac{p_n}{p_{ns}}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n\pi}\right)^2}$$

p_n/p_{ns} は Gere の論文⁽²⁾中の第4図においてある特定の k の値に対応する値を意味する。

この関係を用いて $k=3$ の場合につき片持梁の曲げ振り連成振動の第一モードおよび第二モードの解析結果を比較してみたのが第5図である。

なお Gere のグラフでは p_x の代わりに p_y となっているがこれは座標系の記号のつけ方の違いである。また Gere のグラフは連成振動の第一モード($n=1$)の場合しか取扱っていないのでこれについて比較してみると連成振動数の低い方の値は良く一致しているが高い方の値については $p_x^{(1)}/p_t$ が20以上になると相当大きな相違があらわれてくる。Gere のグラフでは $p_x^{(1)}/p_t > 20$ の領域が丁度 $p_\phi/p_y < 1$ の領域にあり、その解析の結果はこの領域において曲線に“hump”が存在することを示している。この報告において述べた方法による解析結果では第

5 図からわかるように $p_x^{(1)}/p_t$ が 20 より大きな領域では第一近似と第二近似は非常に良く一致しているので Gere のグラフにあらわれている “hump” の存在は疑問であると思う。このことはまた次のような考察からもいえることである。すなわち Gere のグラフは k のいかなる値に対しても成立すると考えられるから今 $k=0$ の場合を考えるとこの場合われわれの理論解は第一近似式が厳密解を与えることになり、かつそれは有理式であるからそのグラフには明らかに Gere のいっているような “hump” はどこにもあらわれてこない。

しかるに Gere のグラフを翻訳して画いた結果にはこの場合でも当然 $p_x^{(1)}/p_t > 20$ の領域で曲線に妙な変化が出てくることになるから “hump” の存在は疑わしいと考えられる。

ただ注意しなければならぬ点はわれわれの理論解では両端支持あるいは $k=0$ の場合を除いて一般に数値計算が逐次近似によらねばならず、したがって第 5 図に示したように理論曲線を物理的に解釈して適当に接続しなければならないことである。

三重連成振動の場合も全く同様に (20) 式を無次元化すると次のようになる。

$$c_n \left[-\frac{\left(\frac{x_0}{r_0}\right)^2 \left(\frac{p}{p_t}\right)^4}{\left(\frac{p_y^{(n)}}{p_t}\right)^2 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^2} - \frac{\left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2 \left(\frac{p}{p_t}\right)^4}{\left(\frac{p_x^{(n)}}{p_t}\right)^2 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^2} + \left\{ \gamma_n^4 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^2 \right\} \right] + k^2 L^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn}' = 0$$

$$(m=1, 2, 3 \dots) \quad (25)$$

ここに

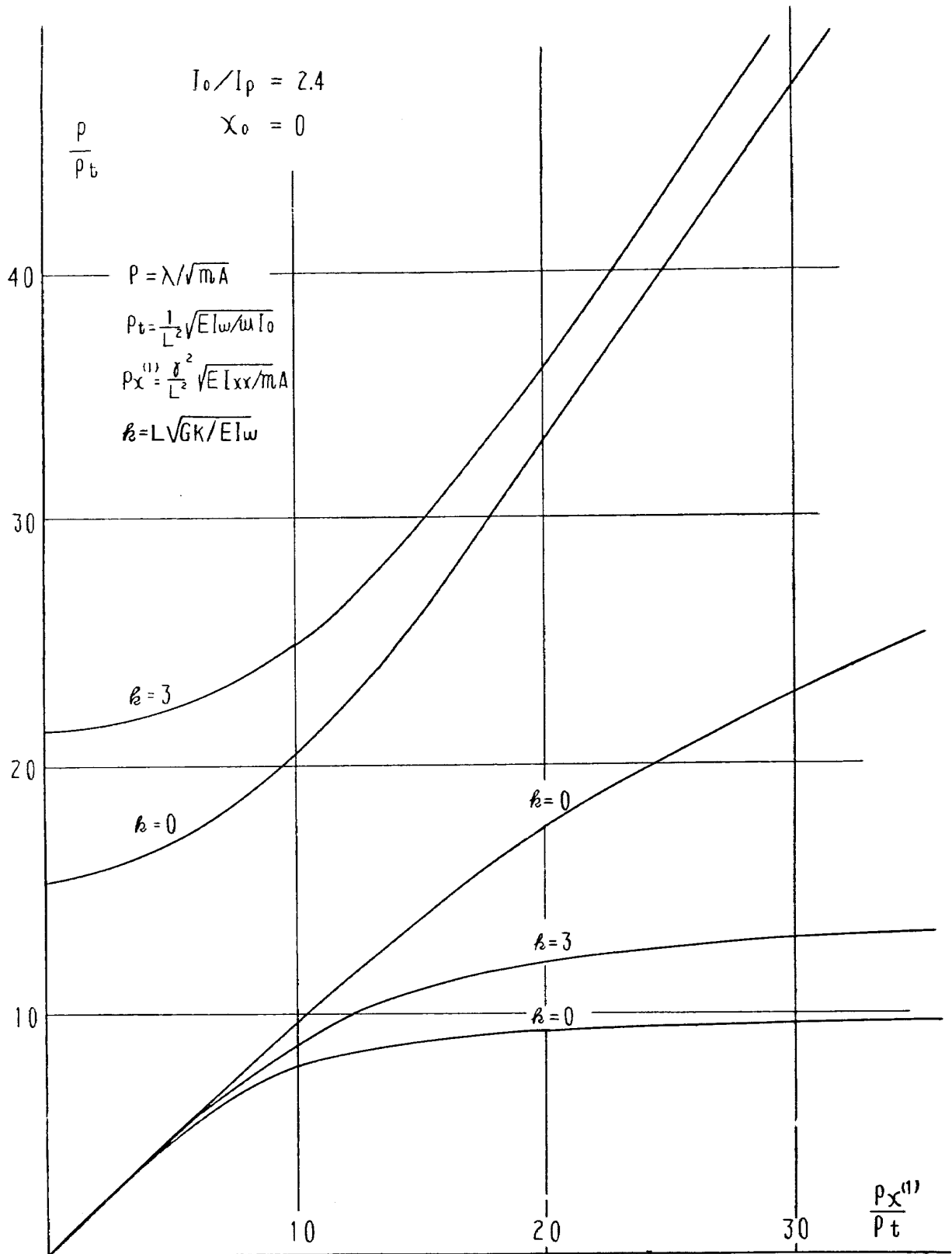
$$\left(\frac{x_0}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2 = \frac{I_0}{I_p} - 1$$

$$p_y^{(n)} = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{mA}}$$

(24) 式および (25) 式を用いて両端固定、両端支持、両端自由、固定支持梁および片持梁の五種のケースにつき二重および三重連成振動の第一近似解を求めてグラフに画いた結果を次に示す。(第 6 図 (a), …(k))

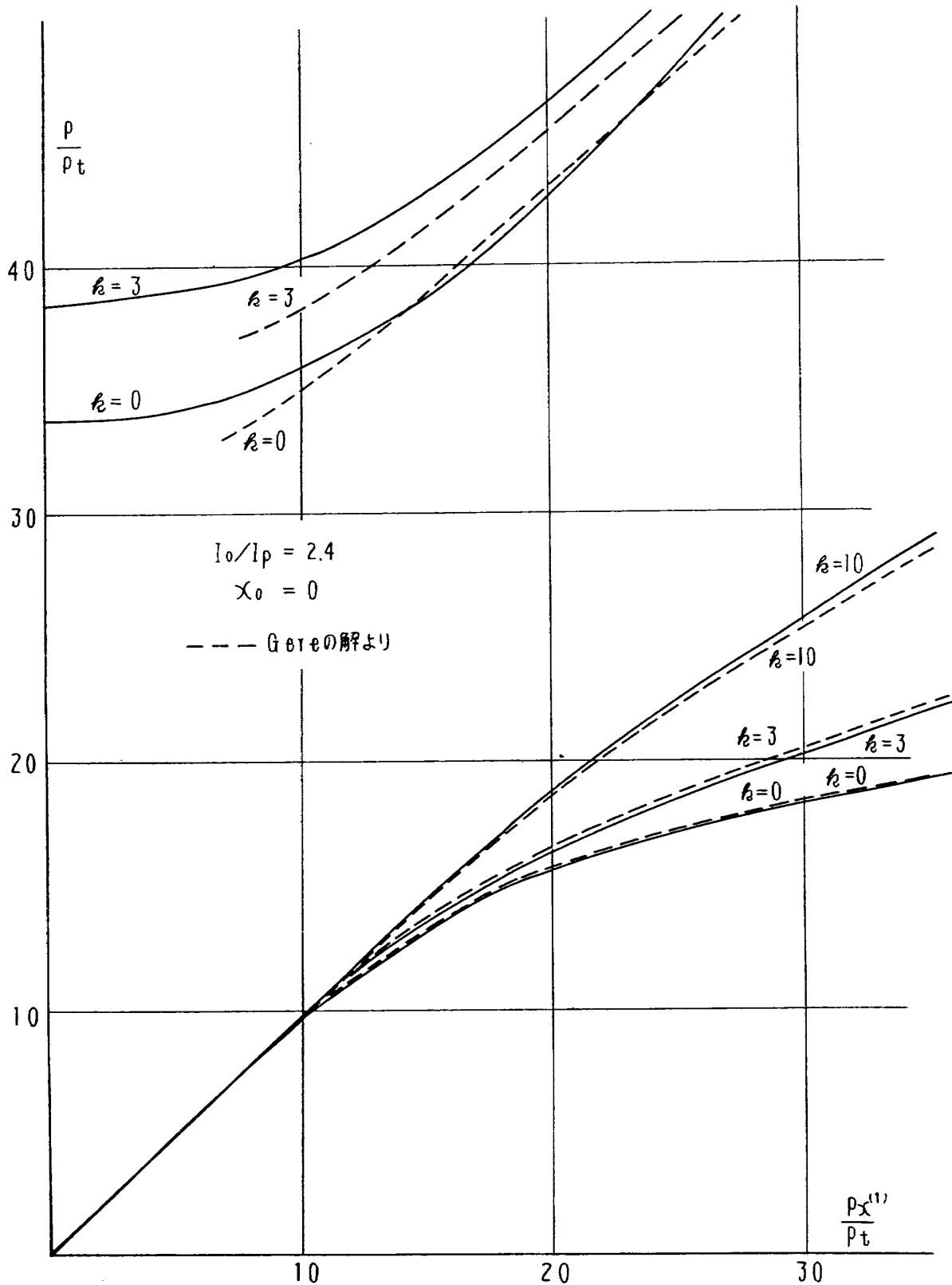
これらのグラフにおいて $k=0$ の場合と両端支持梁の場合はいずれも厳密解を与えるものである。また Gere の求めた数値計算結果がある場合には比較のために一緒に画いてある。

すなわち第一近似解でも基本振動に関しては Gere の解析結果と相当良く一致していることがグラフからわかるであろう。



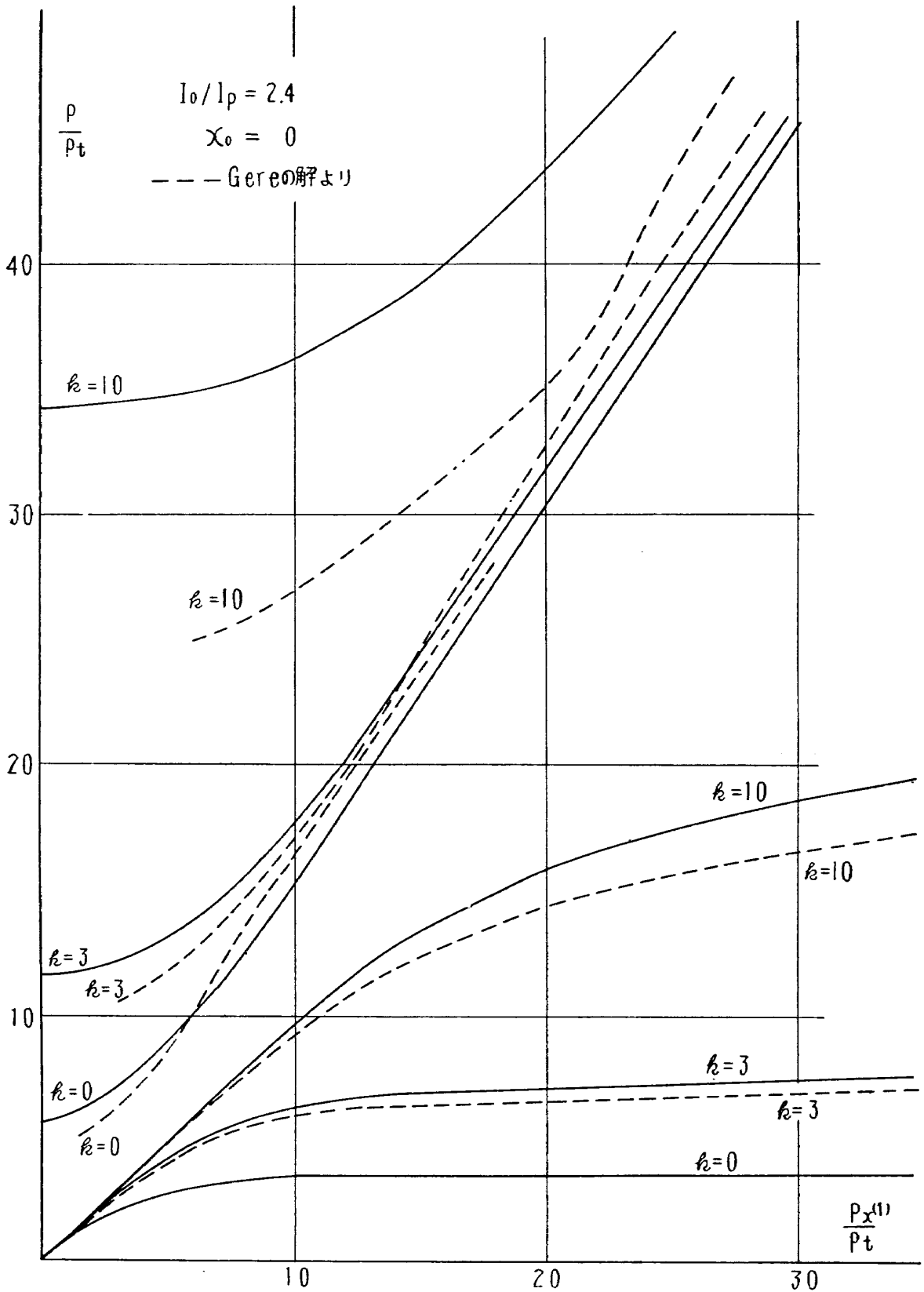
二連成振動数，両端単純支持端（第一モード）

第 6 図 (a)



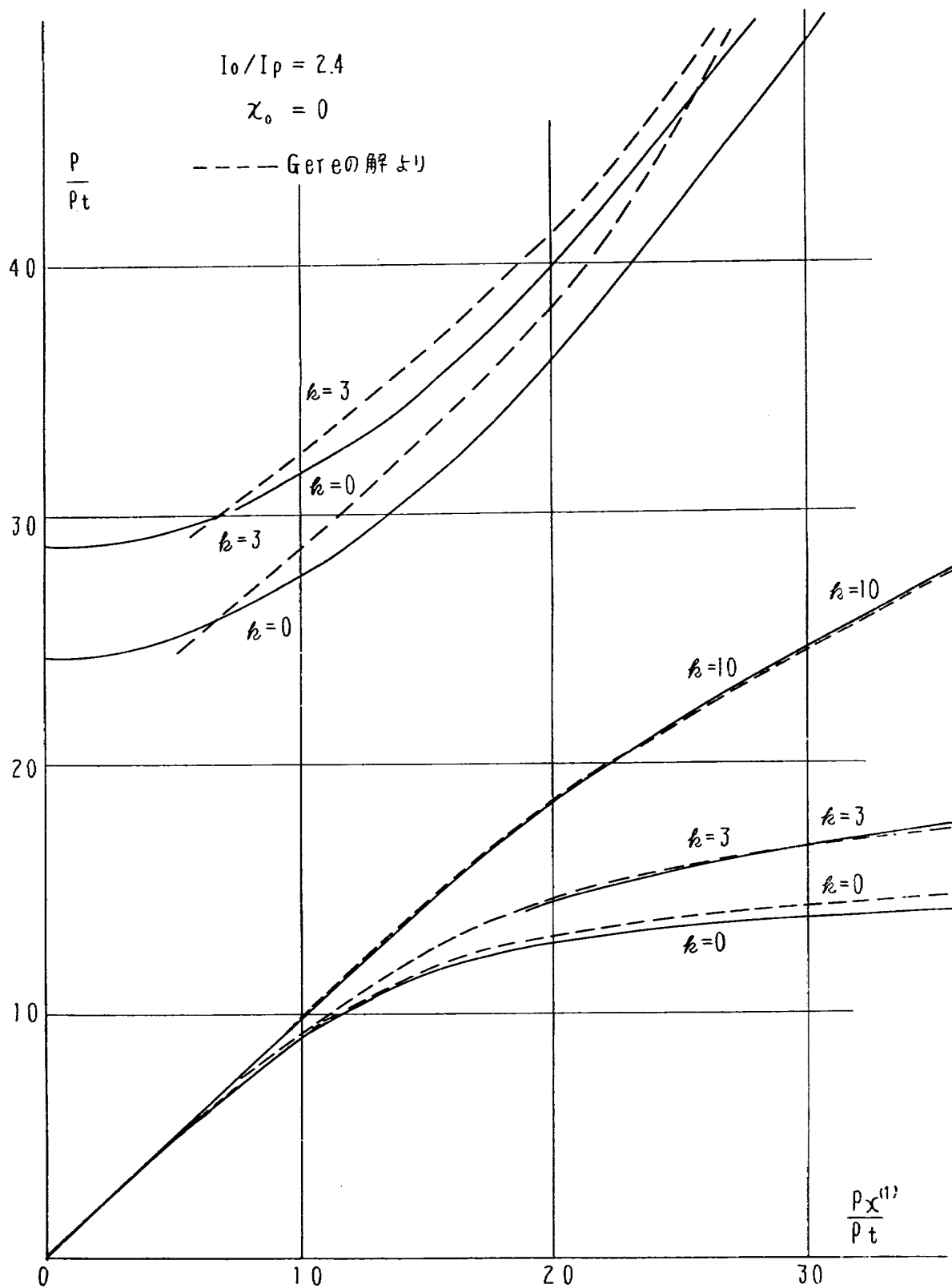
二重連成振動数，両端固定端（第一モード）

第 6 図 (b)



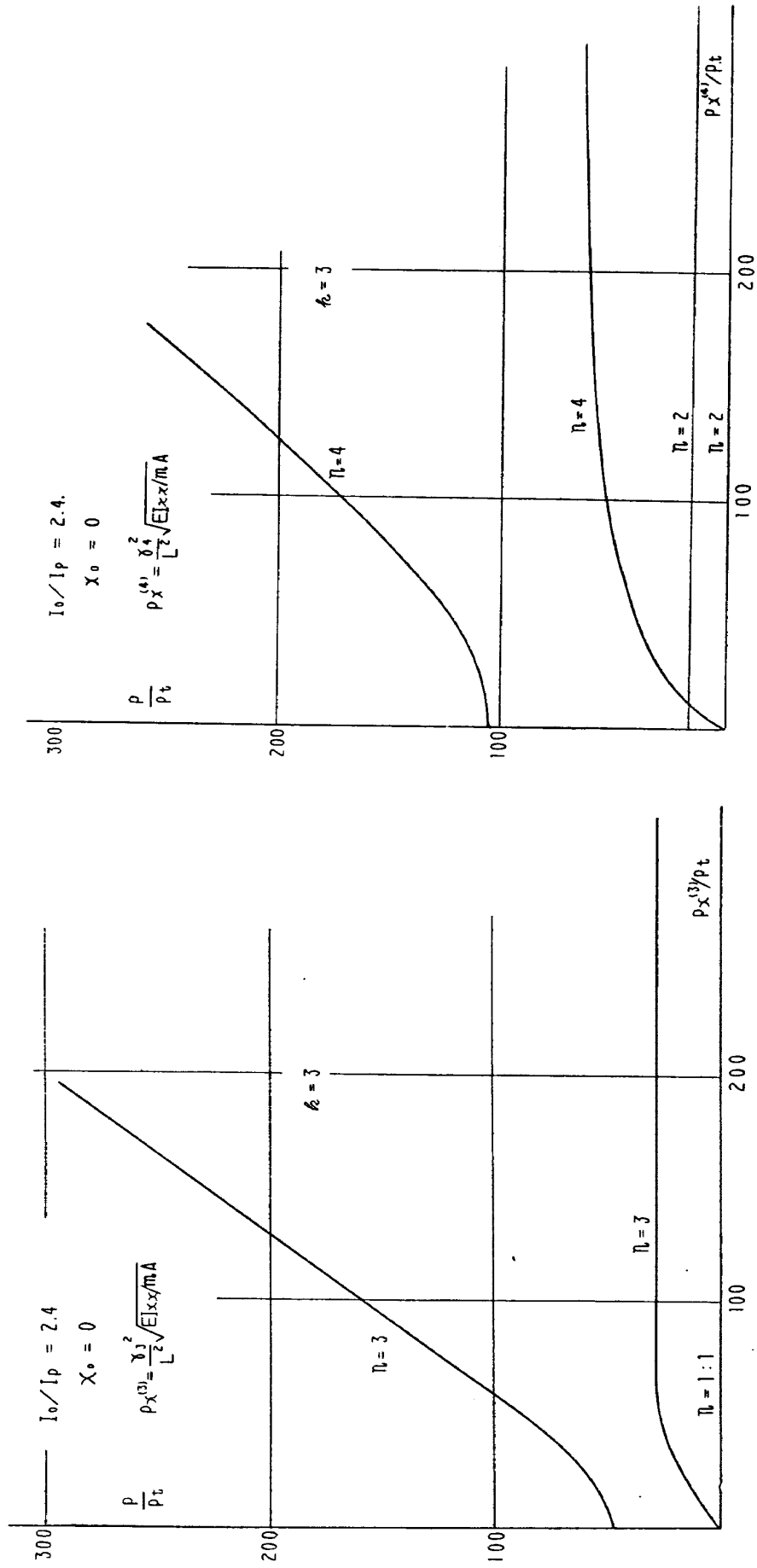
二重連成振動数，固定一自由端（第一モード）

第 6 図 (c)



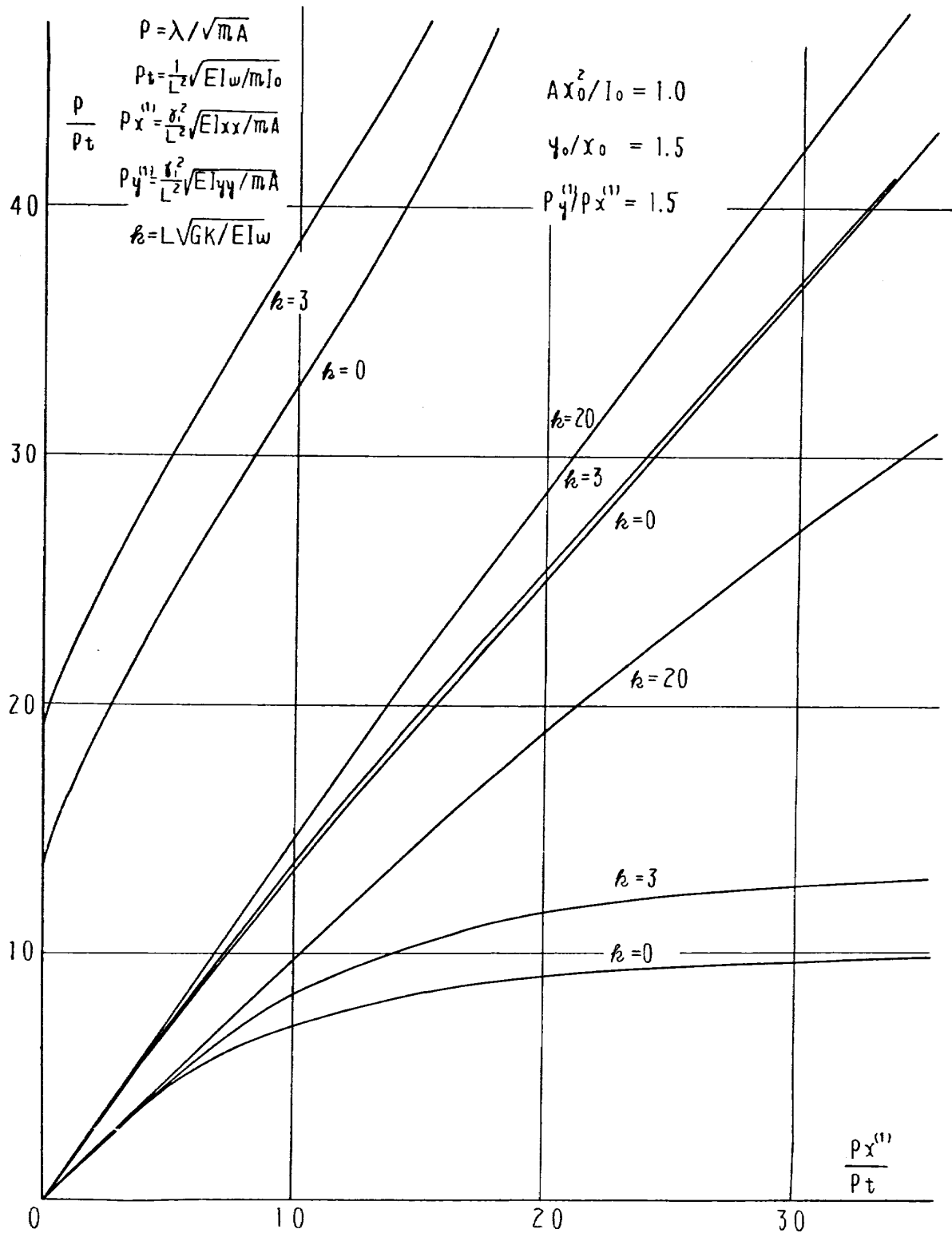
二重連成振動数, 固定-単純支持端 (第一モード)

第 6 図 (d)



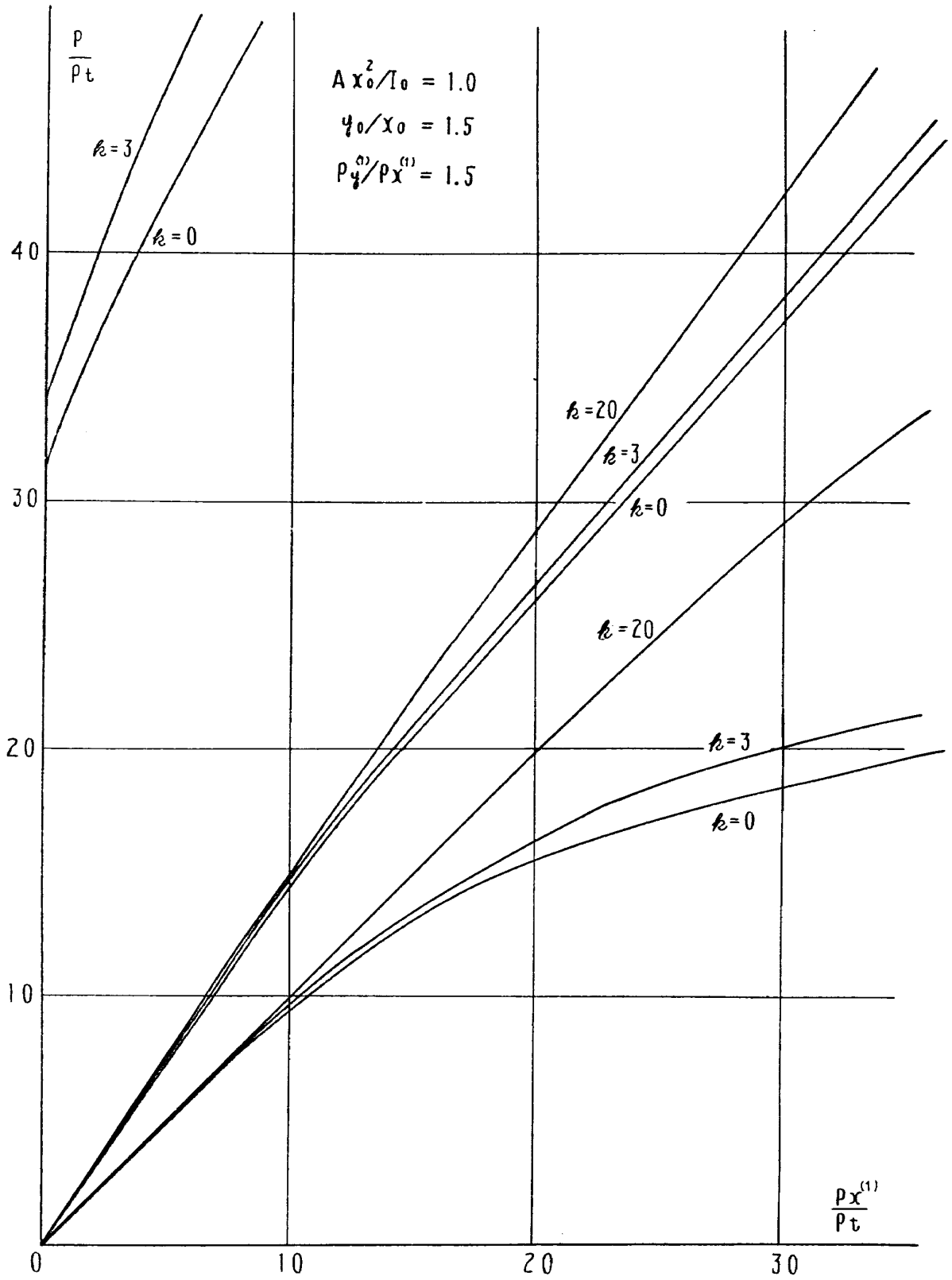
二重連成振動数，両端自由端（対称モード第一，第三モード）
第 6 図 (e)

二重連成振動数，両端自由端（非対称モード第二，第四モード）
第 6 図 (f)



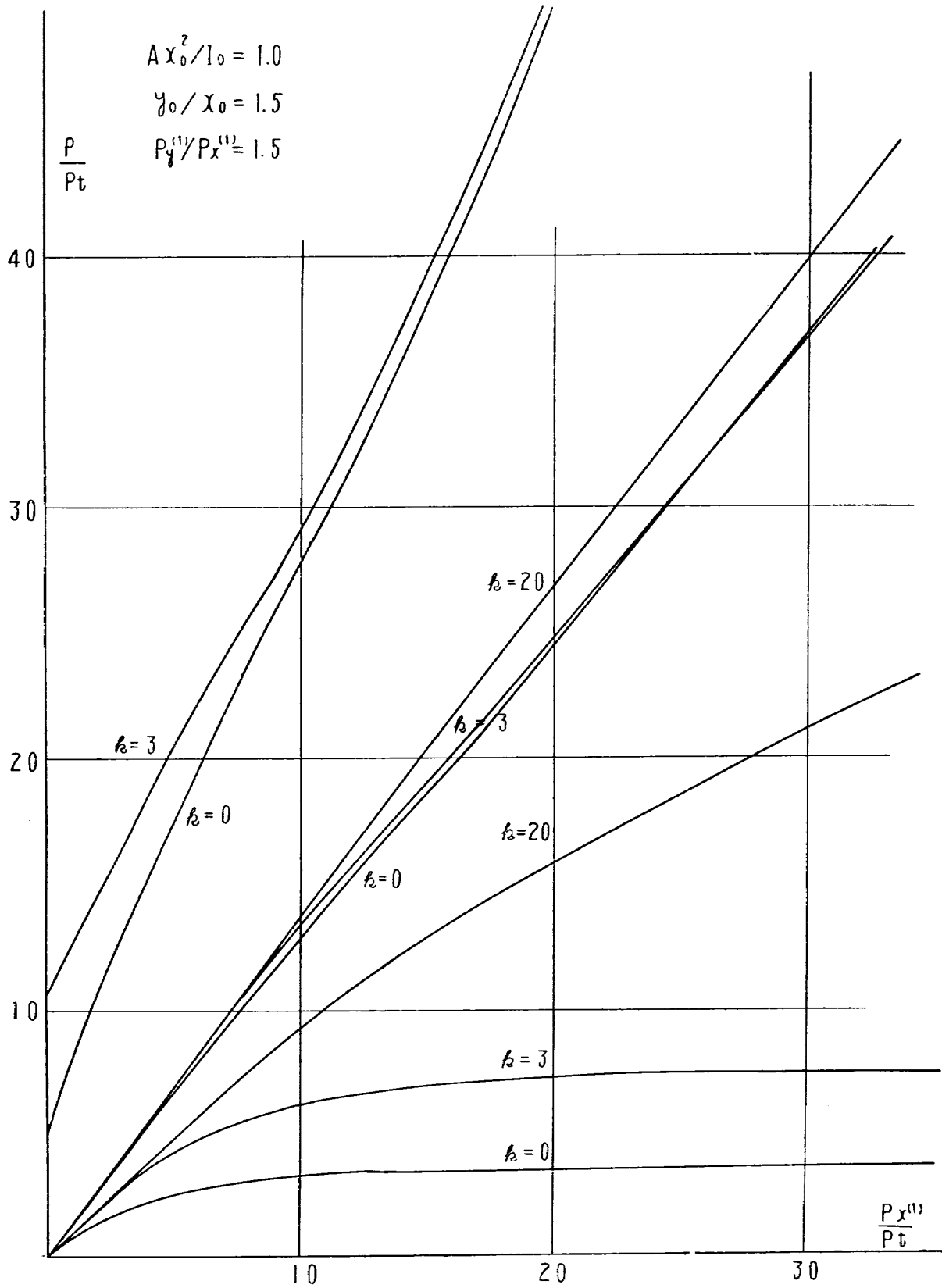
三重連成振動数，両端単純支持端（第一モード）

第 6 図 (g)



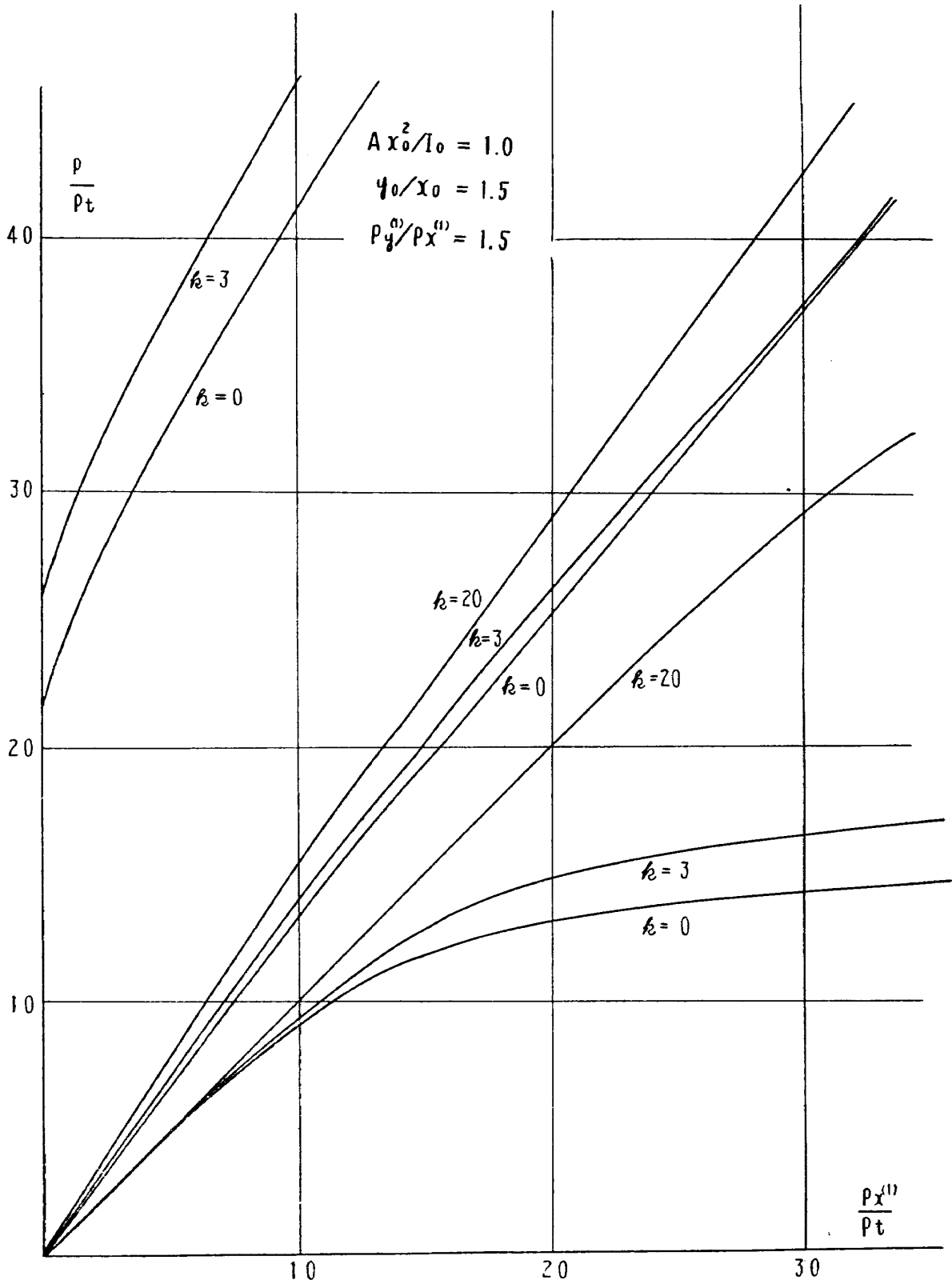
三重連成振動数，両端固定端（第一モード）

第 6 図 (h)



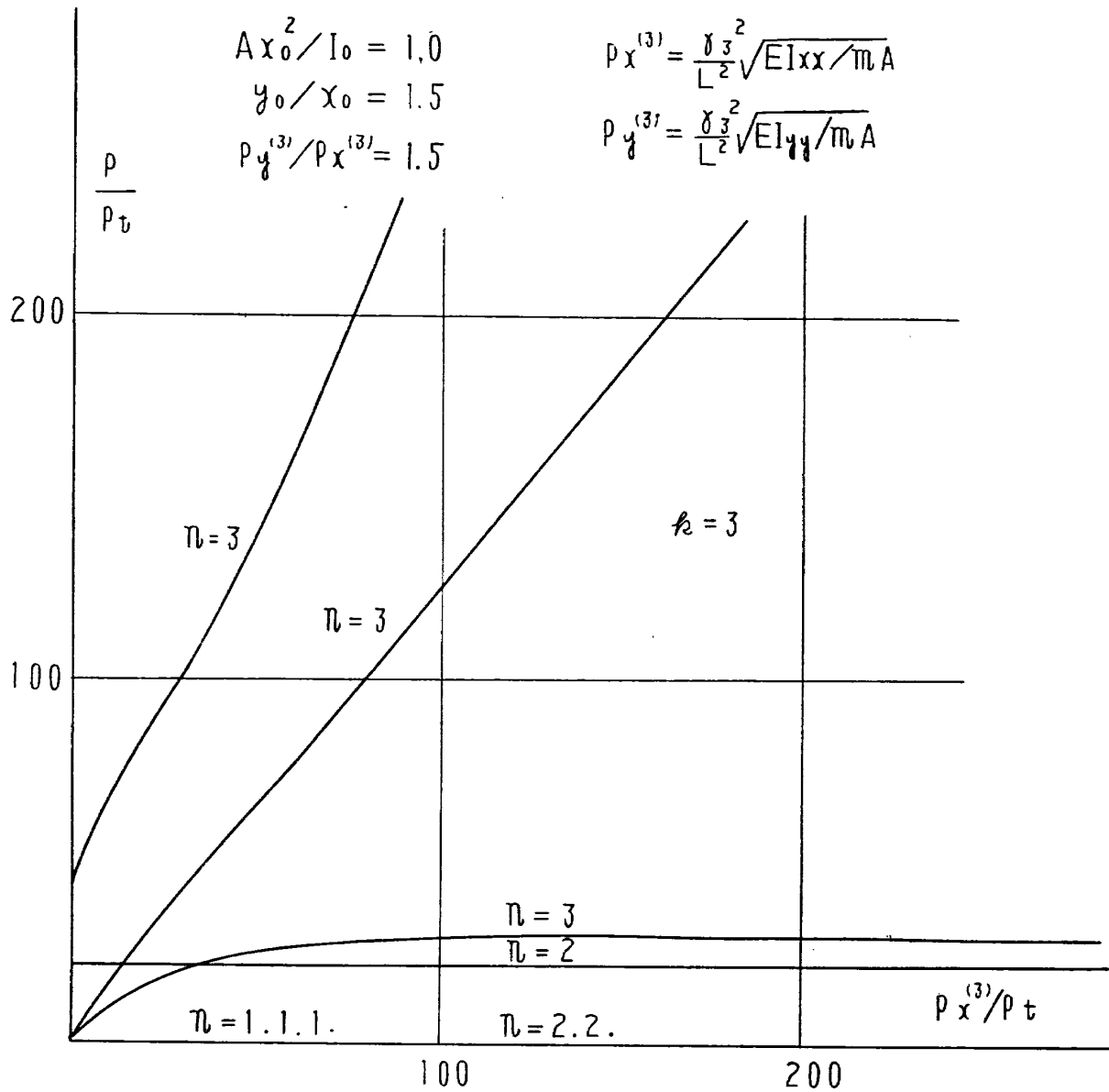
三重連成振動数，固定—自由端（第一モード）

第 6 図 (i)



三重連成振動数，固定一単純支持端（第一モード）

第 6 図 (j)



三重連成振動数，両端自由端

第 6 図 (k)

5. 結 論

本報告において筆者等は一様で真直な薄肉開断面梁の自由振動の一般的解法を展開し従来あまり組織的な研究の行われていなかった曲げ振り振動について研究を行ったがその結果を要約すれば次のとおりである。

(a) この方法を用いれば一本の梁の自由振動の問題はいかなる曲げおよび振りに対する組合せ境界条件に対しても容易に解を求めることができる。すなわち本報告で取扱わなかった境界が相似でない場合（たとえば u に対しては両端支持で v および φ に対しては両端固定となる両端回転端（pin jointed）の場合など）もすべて同じように解を求めることができる。

(b) またこの方法では振動数方程式が逐次近似的にしか求められないが有理式の形で求められるので数値計算が容易でありかつ解の収斂性も片持梁の基本振動のごとき場合を除外すれば良好で実用的には第二近似まで進めば十分な精度の値が得られる。

(c) 二重連成振動の場合に Gere が得た振動数曲線には “hump” が見られるがわれわれの研究したところではこのような “hump” の存在は疑わしいと思われる。

(d) この方法を用いて変断面梁の自由振動を論ずることは剪断中心軸が直線である限り容易であり、実際二三のジェット輸送機やロケット等の振動解析にすでに応用して良好な結果を得ている^{(10),(11)}。したがって次の目標は実際の航空機やロケットの固有振動数の推定やさらに進んでフラッター解析に応用することである。

(e) またこの方法は梁の曲げ振りの静的問題さらに各種の安定問題にも拡張応用することが出来る⁽¹²⁾。梁の安定の問題は振動の問題とならんで航空機の構造力学において重要な問題の一つであり空力弾性学における翼のダイバーゼンスは梁の空気力による横倒れ座屈と考えることができる。いずれ梁の安定問題についての研究結果もまとめ次第報告したいと考えている。

文 献

- (1) J. M. Gere and Y. K. Lin: “Coupled Vibration of Thin Walled Beams of Open Cross Section”, Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 80, 1958 p. 373.
- (2) J. M. Gere: “Torsional Vibration of Beams of Thin Walled Open Section”, Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol. 76 1954 p. 381.
- (3) D. Young: “Vibration of Rectangular Paltcs by the Ritz's Method”, Journal of Applied Mechanics. December 1950 p. 448.
- (4) Lord Rayleigh: “Theory of Sounds” Dover Publications 1954.
- (5) K. Federhofer: “Free Vibrations of Straight Bars with Thin-Walled and Open Cross Section” (German), Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Math-Natur. Klasse, Vol. 156 IIa 1947.
- (6) 山本善之: 振動論 応力講座 (共立出版社)。
- (7) Dana Young, Robert P. Felgar. TR.: “Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam”, The University of Texas Publication No. 4913. July 1 1949.
- (8) R. E.'D. Bishop and D. C. Johnson: “Vibration Analysis Tables”. Cambridge University Press, 1956.
- (9) 川井, 埴: “薄肉開断面梁の強制振動”, 第10回応用力学連合講演会 (1960)。
- (10) 川井: “翼の固有振動数に関する一算定法”, 日本航空学会秋季大会前刷 昭和35年度。
- (11) 川井, 林: “生研カップ=6型および8型ロケットの固有振動数の算定”, 宇宙科学技術シンポジウム前刷 昭和35年2月。
- (12) 川井: “薄肉開断面材の安定に関する一般的理論”, 日本航空学会秋季大会前刷 昭和35年度。

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|--|----------|---------------------------|
| TR-1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験
Preliminary Investigation of N. A. L.
Transonic Wind-Tunnel Test-Section | 1960年2月 | 平木一, 石井孝雄
大島信彦 |
| TR-2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機
I. 模型送風機による性能試験
22.5 MW Main Blower for N. A. L.
Transonic Wind Tunnel
I. Performance Test of the Model
Blower | 1960年5月 | 山内正男, 松木正勝
塩入淳平, 富永守之 |
| TR-3 | 風洞用角度計の試作実験
An Experiment on Angle Measuring
Instruments of Airplane Models in
Wind Tunnel Test | 1960年8月 | 小橋安次郎, 長洲秀夫
高島一明, 波木井潔 |
| TR-4 | 回転円板の強度
Strength of Rotating Discs | 1960年9月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音
速フラッタ試験設備の計画と整備試験
Design and Development of N. A. L.
60 cm×60 cm Transonic Blowdown
Wind Tunnel for Flutter Testing | 1960年12月 | 中井暎一, 橋爪宏
中村泰治 |
| TR-6 | 高温歪ゲージの温度特性
Temperature Characteristics of High
Temperature Strain Gage | 1960年12月 | 竹中幸彦 |
| TR-7 | 遷音速風洞の測定部
On the Transonic Test Section | 1961年1月 | 村崎寿満 |
| TR-8 | 繰返し荷重試験装置の予備試験
Preliminary Study for Development
of Repeated Load Testing Rigs
for Full-Scale Aircraft Structures | 1961年3月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR-9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance
Theory of Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory— | 1961年3月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger
Compressor Blades | 1961年3月 | 松木正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild
Steel | 1961年4月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |

航 空 技 術 研 究 所 報 告 12 号

昭和36年5月 発行

発 行 所 航 空 技 術 研 究 所
 東京都三鷹市新川700
 電話武蔵野(022)(3)5171(代表)

印 刷 所 笠 井 出 版 印 刷 社
 東京都港区芝南佐久間町1の53
