

航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-20

Blasius 型微分方程式の両側無限
遠境界値問題の数値解法

樋口一雄・戸川隼人

1962年1月

航空技術研究所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

既 刊 報 告

TR-1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960年2月	平木 一, 石井孝雄 大島信彦
TR-2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960年5月	山内正男, 松木正勝 塩入淳平, 富永守之
TR-3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960年8月	小橋安次郎, 長洲秀夫 高島一明, 波木井潔
TR-4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960年9月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960年12月	中井暎一, 橋爪 宏 中村泰治
TR-6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960年12月	竹中幸彦
TR-7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961年1月	村崎寿満
TR-8	繰返し荷重装置試験の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961年3月	竹内和之, 飯田宗四郎
TR-9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961年3月	細川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松木正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 埴 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 n the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961年11月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge- Beam Method of Measuring Gas Density	1961年11月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄

Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題 の数値解法

樋口 一雄・戸川 隼人

A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation

By Kazuo HIGUCHI & Hayato TOGAWA

A numerical method for solving Blasius' type differential equation

$$f''' + ff'' = 0$$

with boundary conditions

$$f'(-\infty) = 0 \quad f'(+\infty) = 2$$

is presented. The method is as follows. Putting

$$x \equiv f \quad y \equiv f' \quad z \equiv f''$$

and differentiating z by y twice, the above equation reduces to

$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{y}{z} = 0$$

with boundary conditions $z=0$ for $y=0$ and $y=2$. It can be solved easily by relaxation method or trial-and-error method with only one unknown parameter. This equation gives a relation between f' and f'' . The corresponding values for f can be evaluated from.

$$f = -dz/dy.$$

Computed results are shown in table 1. The applications of this method for more general form of Blasius' type equation are discussed.

1. ま え が き

Free jet boundary における境界層方程式は、主流方向に x 軸、これと直角に y 軸をとり、 x および y 方向の速度成分をそれぞれ u , v とすれば

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

境界条件は

$$u(x, +\infty) = U_1$$

$$u(x, -\infty) = U_2$$

ここで、 U_1, U_2 は一定とする。これを解くために流れ関数の形を

$$\psi = \sqrt{U\nu x} \cdot g(\eta)$$

ただし

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y$$

と置けば、 u, v は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U g'(\eta) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta g'(\eta) - g(\eta)) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となるから (1) に代入すると

$$g'''(\eta) + \frac{1}{2} g(\eta) g''(\eta) = 0 \quad (3)$$

が得られる。境界条件は

$$g'(+\infty) = 1 + \lambda \quad g'(-\infty) = 1 - \lambda$$

ただし

$$\lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

である。以上は層流境界層の場合であるが、乱流境界層の平均速度分布を求める場合にも (3) 式と同じ形の方程式が現われる。すなわち、この場合乱流拡散係数を

$$\varepsilon = kx(U_1 - U_2)$$

と仮定すると運動方程式は

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = kx(U_1 - U_2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (4)$$

となる。 \bar{u}, \bar{v} は x, y 方向の平均速度成分である。流れ関数の形を

$$\psi = xUg(\eta)$$

ただし

$$\eta = \frac{y}{x} \quad U = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

と置き

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = Ug'(\eta) \\ \bar{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = U(\eta g'(\eta) - g(\eta)) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を (4) に代入すると

$$g'''(\eta) + \frac{1}{2k\lambda} g(\eta) g''(\eta) = 0 \quad (6)$$

境界条件は

$$g'(+\infty) = 1 + \lambda \quad g'(-\infty) = 1 - \lambda$$

である。これは jet mixing region における Görtler の方法として知られている。

(3) 式において変数を

$$\xi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \quad f(\xi) = \frac{g(\eta/\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

で変換すると

$$f'''(\xi) + f(\xi) f''(\xi) = 0 \quad (7)$$

$$f'(+\infty) = 1 + \lambda \quad f'(-\infty) = 1 - \lambda \quad (8)$$

になる。(6) 式を

$$\xi = \frac{\eta}{\sqrt{2k\lambda}} \quad f(\xi) = \frac{g(\eta/\sqrt{2k\lambda})}{\sqrt{2k\lambda}}$$

で変換しても同じものになる。

ここの境界条件は三階の微分方程式に対して二つしか与えられていないが、これを (7) 式が autonomous で、かつ、境界条件がともに無限遠点で与えられているから、勝手にもう一つ条件をつけ加えて解けばそれを左右に平行移動したものがいずれも (7), (8) を満足することになる。このもう一つの条件としては、物理的意味からいって、 $f'(0) = 1$ にとるのが適当である。

境界値問題 (7), (8) はこれまで次のような方法で解かれてきた。すなわち、 ξ が大きい所では f' はほぼコンスタントであるから、 $f(\xi)$ の第一近似として

$$f_0(\xi) = \xi$$

をとり、

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(\xi)$$

と置いて (7) に代入し、 λ の係数を比較すると

$$f_1''' + \xi f_1'' = 0$$

$$f_2''' + \xi f_2'' = -f_1 f_1'$$

$$f_3''' + \xi f_3'' = -f_1 f_2'' - f_2 f_1''$$

.....

.....

境界条件は、 f_1 については f_0 と f_1 によって境界条件 (8) を満足するように

$$f'(-\infty)=-1, \quad f_1'(0)=0, \quad f_1'(+\infty)=+1$$

にとり、 f_2 以降については

$$f_m'(-\infty)=f_m'(0)=f_m'(+\infty)=0$$

とする。これを f_1 からはじめて上から順に解き、逐次その下の式の右辺に代入して積分してゆけばよい。この方法は原理的には簡単であるが電子計算機を用いて計算する場合にプログラムがかなり複雑になるという欠点がある。

著者らは当所原動機部における燃焼の研究に関連し、(7) 式を境界条件

$$f'(-\infty)=0 \quad f'(+\infty)=2$$

の下で解いて数値表を作成したが、この時に新しく考案した方法は他の同種の問題にも適用できるので、そこで用いた新しい解法を發表することにする。

2. 解 法

解くべき方程式は

$$f''' + ff'' = 0 \tag{9}$$

境界条件は

$$f'(-\infty)=0 \quad f'(+\infty)=2 \tag{10}$$

である。これを解く場合に問題となるのは

1. 境界条件が両側とも無限遠点で与えられていること
2. 境界条件が f の値としてではなく、 f' の値として与えられていること

の二つである。この困難を除くため

$$x=f \quad y=f' \quad z=f'' \tag{11}$$

と置いて z を y で二回微分し、(9) の関係を用いると

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f'''}{f''} = -f$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d(-f)}{df'} = -\frac{f'}{f''} = -\frac{y}{z}$$

となり、したがって

$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{y}{z} = 0 \tag{12}$$

なる二階の微分方程式となる。これは (x, y, z) を座標とする三次元 phase space において、解曲線を yz 平面に射影して得られる yz 平面上の曲線の微分方程式にはかならない。(9) 式の (10) に対応する (12) の境界条件は

$$y=0 \text{ および } y=2 \text{ のとき } z=0 \tag{13}$$

である。この場合、(12) の解は一価関数になる。なんとなれば、(9) を積分すると

$$f'' = A \exp\left(-\int f d\xi\right) \quad (A \text{ は積分常数})$$

になるから f'' は定符号であり

$$z = \frac{dy}{d\xi}$$

であるから z の定符号の範囲では曲線がもどってくることはないからである。

(12), (13) は二階の微分方程式の二点境界値問題だから簡単に解ける。試行錯誤法で解いてもよいが著者らは relaxation method によって解いた。その解法を次に示す。

y の区間 $[0, 2]$ に等間隔の分点 $y_0 (=0)$, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n (=2)$ をとり、 y_k に対応する z の値を z_k とすれば (12) の近似差分式は

$$\frac{z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1}}{h^2} + \frac{y_k}{z_k} = 0 \quad (14)$$

(ただし $h = (y_n - y_0)/n$) すなわち

$$2z_k^2 - (z_{k+1} + z_{k-1})z_k - h^2 y_k = 0$$

であるから relaxation pattern として

$$z_k = \frac{(z_{k+1} + z_{k-1}) + \sqrt{(z_{k+1} + z_{k-1})^2 + 8h^2 y_k}}{4} \quad (15)$$

を用いればよい。これはちょっと複雑なように見えるかもしれないが、電子計算機を用いているので困難はない。最初、 $n=2$ として (13) の条件を (15) に入れて $y=1$ に対する z の第一近似値を求め、次にこれを (15) に入れて $y=0.5$ と $y=1.5$ に対する z の第一近似値を求めて $n=4$ の relaxation をおこない、収斂したら分点の間隔を半分にして relaxation をおこなう。以下同様にして分点の間隔を逐次こまかくしてゆけばよい。 $y=2$ は特異点であるが微係数を差分で近似しているので、浮動小数点で計算すれば事実上問題なく解ける。

このようにして得られた解を後に述べる方法 ((18) 式) で積分して f を求めてもよいが、数値表にするためには、ある一点における f, f', f'' だけを正確に求めてこれを出発値として Runge-Kutta 法で積分する方が簡単である。出発値として $f'=1$ になる点を用いることにすると、 f'' は (12) の解の $f'=1$ に対応する値とし得られ、また、 f は

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df''}{df'} = \frac{f'''}{f''}$$

および (9) 式より得られる

$$f = -\frac{f'''}{f''} = -\frac{dz}{dy}$$

という関係を用いて求めることができる。

3. 数 値 計 算

計算には当所の計数型電子計算機データトロン 205 を用いた。この場合のプログラムは二つの部分に分けることができる。一つは微分方程式 (12) を境界条件 (13) のもとで解くプログラムであり、もう一つはこの結果を用いて (9) 式を積分するプログラムである。

この内、第一の部分については先に述べた relaxation method のプログラムを作成して使用した。分点の数を増すプロセスも自動化しある程度まで収斂すると分点の間隔が半分になるようにした。分点の数の少ないうちは一回のくりかえしに要する時間が非常に短いから、できるだけ精度をあげてから次のステップ（分点の数を増加しての relaxation）に移るほうがよい。

第二の部分は Runge-Kutta 法で積分するサブルーチンがすでにできているので、これに補助のプログラムを書き加えて用いた。初期値として先に得られた結果を用いると、計算された $f'(-\infty)$, $f'(+\infty)$ と与えられている境界条件 (10) との間に若干の差が出る。これは出発値のわずかな誤差でも長い区間にわたって積分されて大きくなるために生ずるもので、出発値を試行錯誤法的に数回修正してやれば (10) を満足するようにはできる。積分の間隔は 0.1 程度で十分であった。

計算所要時間は、第一の部分で 3桁の精度を出すために約 3 時間、第二の部分は $\xi = \pm 10$ までの積分が約 7 分であった。

4. 結 果

計算の結果を第一表に示す。(2) 式または (5) 式を用いて v を計算するときの便宜のために

$$\xi f'(\xi) - f(\xi)$$

の値も計算しておいた。第一表の一番右側の列の数字がそれである。(2) 式の場合には v は η だけの関数ではなくて x もはいつているので、 x の二三の値についての v の値を計算した。その結果が第二表である。これはちょっとラフであるが大体の傾向はつかめることと思う。

5. 他の問題への応用

境界層の問題には

$$f''' + \alpha f f'' + \beta \xi f'' + \phi(f', f'') = 0 \quad (16)$$

の形の微分方程式がしばしば現われる。ただし、 ξ は独立変数、 α , β は常数、 $\phi(f', f'')$ は f' , f'' および常数のみからなる式である。

前と同様に

$$x=f, \quad y=f', \quad z=f''$$

と置き, z を y で二回微分すると

$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{\alpha y + \beta}{z} + \frac{d}{dy} \left(\frac{\phi(y, z)}{z} \right) = 0 \quad (17)$$

が得られる。これを与えられた境界条件で解けばよい。 y, z の値に対応する f, ξ の値は

$$f = \int \frac{y}{z} dy \quad \xi = \int \frac{1}{z} dy \quad (18)$$

によって計算することができる。原式よりも階数が一階少なく、境界条件も有限のところにもってきてあるので解きやすい。

ただし、この場合に次の事に注意する必要がある。すなわち、一般の (16) の形の微分方程式においては、(17) の解は一価関数になるとは限らない。そのような場合には relaxation method で解くことはできないし、試行錯誤法で解くとしても特別な工夫を必要とする。(17) の解が多数関数になるのは、それを (16) の式で考えた場合 f' の値が $f'(-\infty)$ から $f'(+\infty)$ まで単調に増加せず、 f' のカーブに山や谷ができる場合である。このようなケースは、この種の問題においてはめずらしくないので十分に注意する必要がある。

このような困難があるので、たとえば

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 2$$

というような境界条件の場合には (16) 式をそのまま $\xi = 0$ から出発する試行錯誤法で解いても未知の初期値は $f''(0)$ 一箇だけだから、そのほうが簡単である。(17) の形にして有利になるのは先に述べたような、境界条件が両側の無限遠点で与えられている場合に限られるようである。

なお、これは当然のことであるが、あらかじめ解の唯一性を確認しておくことが必要である。(16) の形の問題では三箇の境界条件を与えても、それを満足する解が無限箇存在することがあるので注意を要する。

6. 結 果

一般に、次のことがいえる。三階の微分方程式で

$$f'(-\infty) = a \quad f'(+\infty) = b \quad (a, b \text{ は常数})$$

という形の境界条件が与えられた場合、これを満足するためには

$$f''(-\infty) = 0 \quad f''(+\infty) = 0$$

でなければならないから、解の f' と f'' との関係を表わす微分方程式が求められれば、上の無限遠境界値問題は

$$\begin{cases} f' = a \text{ の時 } f'' = 0 \\ f' = b \text{ の時 } f'' = 0 \end{cases}$$

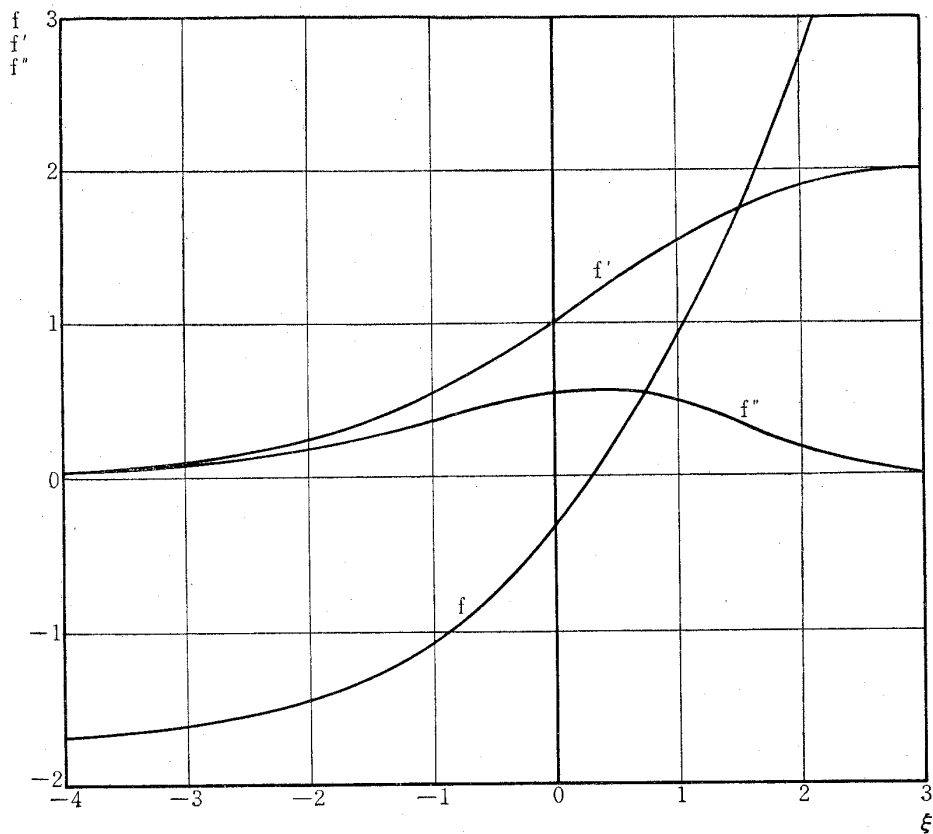
なる有限の所の境界値問題となる。前節で注意したように、このように変換しても必ず解けるとは限らないが一応、検討してみる価値がある。すくなくとも、解の phase space における性質を考えてみるということは、境界値問題を扱う場合でも有益であろう。

以上がこの報告の主な結論であるが、この報告書は (9) 式の解の数値表を空気力学研究者に提供するという意味ももっている。これを利用して物理的、工学的になんらかの良き結論を得られることを期待する。

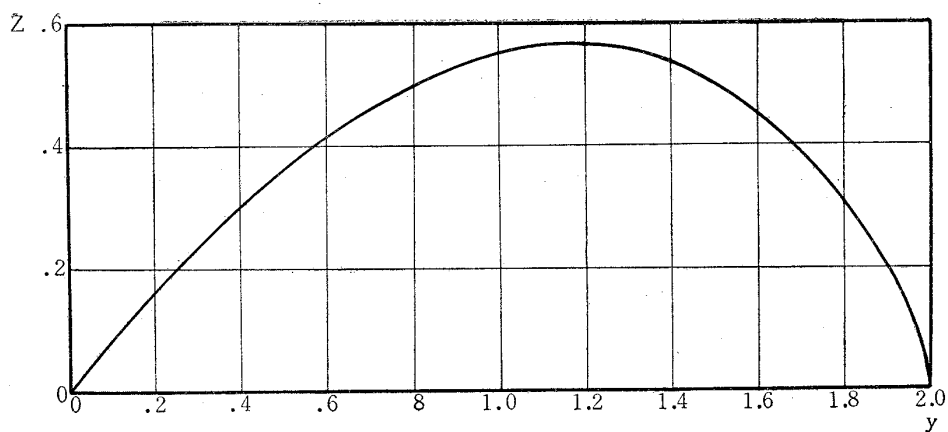
終りにのぞみ、問題を提起され、多くの貴重な助言を与えられた、原動機部西村肇技官に厚くお礼申し上げたい。

文 献

- [1] S. I. Pai: Viscous flow theory, I, II., D. van Nostrand Co., Princeton (1957).
- [2] L. G. Fox: The numerical solution of two point boundary problems, Oxford (1957).
- [3] D. A. Pope: A method of "alternating corrections" for the numerical solution of two point boundary value problems, Mathematics of Computation, Vol. 14, No. 72 (1960).
- [4] L. G. Napolitano: The Blasius equation with three-point boundary conditions, Q. of Appl Math, Vol. 16 (1958.)



第 1 図



第 2 図

第一表 $f''' + ff'' = 0$, $f'(-\infty) = 0$, $f''(+\infty) = 2$ の解

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
- 10.0	- 1.74945	.00002	.00021	- 17.49476
- 9.9	- 1.74945	.00004	.00023	- 17.31980
- 9.8	- 1.74944	.00006	.00025	- 17.14482
- 9.7	- 1.74943	.00009	.00027	- 16.96982
- 9.6	- 1.74942	.00012	.00030	- 16.79480
- 9.5	- 1.74941	.00015	.00032	- 16.61975
- 9.4	- 1.74939	.00019	.00035	- 16.44467
- 9.3	- 1.74937	.00022	.00039	- 16.26957
- 9.2	- 1.74935	.00026	.00042	- 16.09444
- 9.1	- 1.74932	.00031	.00046	- 15.91928
- 9.0	- 1.74928	.00036	.00051	- 15.74409
- 8.9	- 1.74924	.00041	.00055	- 15.56886
- 8.8	- 1.74920	.00047	.00060	- 15.39360
- 8.7	- 1.74915	.00053	.00066	- 15.21829
- 8.6	- 1.74909	.00060	.00072	- 15.04294
- 8.5	- 1.74903	.00068	.00079	- 14.86755
- 8.4	- 1.74895	.00076	.00086	- 14.69212
- 8.3	- 1.74887	.00085	.00094	- 14.51663
- 8.2	- 1.74878	.00095	.00102	- 14.34108
- 8.1	- 1.74868	.00106	.00112	- 14.16548
- 8.0	- 1.74857	.00117	.00122	- 13.98982
- 7.9	- 1.74845	.00130	.00133	- 13.81409
- 7.8	- 1.74831	.00144	.00145	- 13.63830
- 7.7	- 1.74816	.00159	.00159	- 13.46243
- 7.6	- 1.74799	.00176	.00173	- 13.28648

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
- 7.5	- 1.74780	.00194	.00189	- 13.11045
- 7.4	- 1.74760	.00214	.00206	- 12.93433
- 7.3	- 1.74737	.00236	.00225	- 12.75812
- 7.2	- 1.74713	.00259	.00246	- 12.58180
- 7.1	- 1.74685	.00285	.00268	- 12.40538
- 7.0	- 1.74655	.00313	.00293	- 12.22885
- 6.9	- 1.74623	.00344	.00320	- 12.05219
- 6.8	- 1.74587	.00377	.00349	- 11.87541
- 6.7	- 1.74547	.00414	.00381	- 11.69849
- 6.6	- 1.74504	.00453	.00415	- 11.52143
- 6.5	- 1.74456	.00497	.00453	- 11.34421
- 6.4	- 1.74404	.00544	.00495	- 11.16684
- 6.3	- 1.74347	.00596	.00540	- 10.98929
- 6.2	- 1.74285	.00652	.00589	- 10.81157
- 6.1	- 1.74216	.00714	.00643	- 10.63365
- 6.0	- 1.74142	.00781	.00701	- 10.45554
- 5.9	- 1.74060	.00854	.00765	- 10.27721
- 5.8	- 1.73970	.00934	.00834	- 10.09866
- 5.7	- 1.73873	.01022	.00910	- 9.91987
- 5.6	- 1.73766	.01117	.00993	- 9.74084
- 5.5	- 1.73649	.01221	.01083	- 9.56155
- 5.4	- 1.73521	.01334	.01181	- 9.38198
- 5.3	- 1.73382	.01457	.01288	- 9.20214
- 5.2	- 1.73229	.01592	.01405	- 9.02200
- 5.1	- 1.73063	.01739	.01532	- 8.84155

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
- 5.0	- 1.72881	.01899	.01671	- 8.66078
- 4.9	- 1.72682	.02073	.01821	- 8.47968
- 4.8	- 1.72466	.02264	.01986	- 8.29824
- 4.7	- 1.72229	.02471	.02164	- 8.11643
- 4.6	- 1.71971	.02697	.02359	- 7.93427
- 4.5	- 1.71689	.02944	.02571	- 7.75173
- 4.4	- 1.71381	.03212	.02801	- 7.56881
- 4.3	- 1.71046	.03504	.03051	- 7.38550
- 4.2	- 1.70679	.03823	.03323	- 7.20179
- 4.1	- 1.70280	.04170	.03619	- 7.01769
- 4.0	- 1.69844	.04548	.03940	- 6.83320
- 3.9	- 1.69369	.04959	.04289	- 6.64831
- 3.8	- 1.68851	.05407	.04668	- 6.46304
- 3.7	- 1.68286	.05894	.05078	- 6.27740
- 3.6	- 1.67671	.06424	.05523	- 6.09140
- 3.5	- 1.67000	.07000	.06005	- 5.90507
- 3.4	- 1.66269	.07626	.06527	- 5.71844
- 3.3	- 1.65473	.08307	.07092	- 5.53154
- 3.2	- 1.64606	.09046	.07702	- 5.34442
- 3.1	- 1.63661	.09849	.08361	- 5.15713
- 3.0	- 1.62634	.10720	.09071	- 4.96973
- 2.9	- 1.61515	.11665	.09837	- 4.78232
- 2.8	- 1.60298	.12690	.10661	- 4.59496
- 2.7	- 1.58974	.13800	.11547	- 4.40778
- 2.6	- 1.57535	.15001	.12498	- 4.22090

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
- 2.5	- 1.55970	.16302	.13517	- 4.03444
- 2.4	- 1.54271	.17707	.14608	- 3.84859
- 2.3	- 1.52425	.19226	.15772	- 3.66350
- 2.2	- 1.50421	.20864	.17012	- 3.47941
- 2.1	- 1.48248	.22631	.18332	- 3.29653
- 2.0	- 1.45891	.24533	.19731	- 3.11513
- 1.9	- 1.43336	.26580	.21210	- 2.93550
- 1.8	- 1.40570	.28778	.22771	- 2.75797
- 1.7	- 1.37575	.31137	.24411	- 2.58289
- 1.6	- 1.34337	.33663	.26128	- 2.41067
- 1.5	- 1.30837	.36365	.27919	- 2.24175
- 1.4	- 1.27057	.39249	.29779	- 2.07660
- 1.3	- 1.22980	.42323	.31700	- 1.91575
- 1.2	- 1.18586	.45591	.33674	- 1.75978
- 1.1	- 1.13855	.49059	.35690	- 1.60931
- 1.0	- 1.08768	.52730	.37733	- 1.46501
- .9	- 1.03302	.56606	.39788	- 1.32761
- .8	- .97439	.60688	.41837	- 1.19788
- .7	- .91158	.64973	.43857	- 1.07668
- .6	- .84438	.69457	.45826	- .96489
- .5	- .77260	.74135	.47718	- .86348
- .4	- .69605	.78998	.49503	- .77345
- .3	- .61455	.84032	.51153	- .69590
- .2	- .52793	.89223	.52636	- .63195
- .1	- .43605	.94552	.53922	- .58282

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
.0 -	.33879	1.00000	.54978	.33879
.1 -	.23602	1.05539	.55775	.34156
.2 -	.12768	1.11145	.56285	.34997
.3 -	.01372	1.16786	.56486	.36408
.4	.10588	1.22431	.56357	.38384
.5	.23112	1.28046	.55886	.40910
.6	.36195	1.33597	.55065	.43962
.7	.49829	1.39048	.53894	.47504
.8	.64001	1.44364	.52383	.51490
.9	.78696	1.49514	.50549	.55866
1.0	.93897	1.54464	.48415	.60567
1.1	1.09581	1.59188	.46014	.65525
1.2	1.25726	1.63660	.43386	.70665
1.3	1.42304	1.67859	.40575	.75912
1.4	1.59288	1.71770	.37629	.81190
1.5	1.76648	1.75382	.34598	.86424
1.6	1.94355	1.78689	.31534	.91547
1.7	2.12376	1.81689	.28485	.96496
1.8	2.30683	1.84388	.25499	1.01216
1.9	2.49244	1.86793	.22616	1.05662
2.0	2.68032	1.88916	.19873	1.09800
2.1	2.87018	1.90773	.17298	1.13605
2.2	3.06178	1.92382	.14914	1.17062
2.3	3.25487	1.93763	.12735	1.20167
2.4	3.44924	1.94936	.10770	1.22923

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
2.5	3.64468	1.95924	.09020	1.25342
2.6	3.84103	1.96747	.07480	1.27440
2.7	4.03813	1.97427	.06143	1.29240
2.8	4.23585	1.97982	.04995	1.30766
2.9	4.43406	1.98432	.04022	1.32046
3.0	4.63268	1.98792	.03206	1.33108
3.1	4.83162	1.99078	.02530	1.33979
3.2	5.03082	1.99302	.01977	1.34686
3.3	5.23021	1.99477	.01530	1.35253
3.4	5.42976	1.99611	.01172	1.35703
3.5	5.62942	1.99714	.00889	1.36056
3.6	5.82918	1.99791	.00667	1.36331
3.7	6.02900	1.99849	.00496	1.36542
3.8	6.22887	1.99892	.00365	1.36702
3.9	6.42878	1.99923	.00266	1.36823
4.0	6.62872	1.99946	.00192	1.36912
4.1	6.82867	1.99962	.00137	1.36978
4.2	7.02864	1.99974	.00097	1.37026
4.3	7.22862	1.99982	.00067	1.37061
4.4	7.42860	1.99988	.00047	1.37086
4.5	7.62859	1.99991	.00032	1.37103
4.6	7.82859	1.99994	.00021	1.37115
4.7	8.02858	1.99996	.00014	1.37124
4.8	8.22858	1.99997	.00009	1.37130
4.9	8.42858	1.99998	.00006	1.37134

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
5.0	8.62858	1.99998	.00004	1.37136
5.1	8.82858	1.99999	.00002	1.37138
5.2	9.02857	1.99999	.00001	1.37139
5.3	9.22857	1.99999	.00001	1.37140
5.4	9.42857	1.99999	.00000	1.37140
5.5	9.62857	1.99999	.00000	1.37140
5.6	9.82857	1.99999	.00000	1.37141
5.7	10.02857	1.99999	.00000	1.37141
5.8	10.22857	1.99999	.00000	1.37141
5.9	10.42857	1.99999	.00000	1.37141
6.0	10.62857	1.99999	.00000	1.37141
6.1	10.82857	1.99999	.00000	1.37141
6.2	11.02857	1.99999	.00000	1.37141
6.3	11.22857	1.99999	.00000	1.37141
6.4	11.42857	1.99999	.00000	1.37141
6.5	11.62857	1.99999	.00000	1.37141
6.6	11.82856	1.99999	.00000	1.37142
6.7	12.02856	1.99999	.00000	1.37142
6.8	12.22856	1.99999	.00000	1.37142
6.9	12.42856	1.99999	.00000	1.37142
7.0	12.62856	1.99999	.00000	1.37142
7.1	12.82856	1.99999	.00000	1.37142
7.2	13.02856	1.99999	.00000	1.37142
7.3	13.22856	1.99999	.00000	1.37142
7.4	13.42856	1.99999	.00000	1.37142

ξ	f	f'	f''	$\xi f' - f$
7.5	13.62856	1.99999	.00000	1.37142
7.6	13.82855	1.99999	.00000	1.37142
7.7	14.02855	1.99999	.00000	1.37142
7.8	14.22855	1.99999	.00000	1.37143
7.9	14.42855	1.99999	.00000	1.37143
8.0	14.62855	1.99999	.00000	1.37143
8.1	14.82855	1.99999	.00000	1.37143
8.2	15.02855	1.99999	.00000	1.37143
8.3	15.22855	1.99999	.00000	1.37143
8.4	15.42855	1.99999	.00000	1.37143
8.5	15.62855	1.99999	.00000	1.37143
8.6	15.82854	1.99999	.00000	1.37143
8.7	16.02854	1.99999	.00000	1.37143
8.8	16.22854	1.99999	.00000	1.37143
8.9	16.42854	1.99999	.00000	1.37143
9.0	16.62854	1.99999	.00000	1.37144
9.1	16.82854	1.99999	.00000	1.37144
9.2	17.02854	1.99999	.00000	1.37144
9.3	17.22854	1.99999	.00000	1.37144
9.4	17.42854	1.99999	.00000	1.37144
9.5	17.62854	1.99999	.00000	1.37144
9.6	17.82853	1.99999	.00000	1.37144
9.7	18.02853	1.99999	.00000	1.37144
9.8	18.22853	1.99999	.00000	1.37144
9.9	18.42853	1.99999	.00000	1.37144
10.0	18.62853	1.99999	.00000	1.37144

第二表 $\frac{u}{U}$ および $\frac{v}{\sqrt{Uv}}$ (層流境界層の場合)

上段の数字が u/U , 下段の数字が v/\sqrt{Uv} を示す。

y	$x=1$	$x=2$	$x=5$	$x=10$
.0	1.00000 .16939	1.00000 .11978	1.00000 .07573	1.00000 .05356
1.0	1.54464 .30283	1.28046 .14464	1.11145 .07824	1.05539 .05400
2.0	1.88916 .54900	1.54464 .21413	1.22431 .08581	1.11145 .05533
3.0	1.98792 .66554	1.75382 .30555	1.33597 .09828	1.16786 .05756
4.0	1.99946 .68456	1.88916 .38820	1.44364 .11511	1.22431 .06069
5.0	1.99998 .68568	1.95924 .44315	1.54464 .13540	1.28046 .06468
6.0	1.99999 .68570	1.98792 .47061	1.63660 .15797	1.33597 .06951
7.0	1.99999 .68571	1.99714 .48103	1.71770 .18150	1.39048 .07511
8.0	1.99999 .68571	1.99946 .48405	1.78689 .20466	1.44364 .08141
9.0	1.99999 .68572	1.99991 .48473	1.84388 .22627	1.49514 .08833
10.0	1.99999 .68572	1.99998 .48485	1.88916 .24546	1.54464 .09576

<p>NAL TR-20 航空技術研究所 Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法</p> <p>1962 年 1 月 18 頁</p> <p>Blasius 型の微分方程式を free jet boundary の問題に対応する境界条件で解くための数値解法。微分方程式 $f'''' + ff'' = 0$ (境界条件 $f'(-\infty) = 0, f(+\infty) = 2$) の解の数値表を含む。</p>	<p>I. 樋口一雄 戸川隼人 II. NAL TR-20 III. 518.6 532.526</p>	<p>NAL TR-20 航空技術研究所 Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法</p> <p>1962 年 1 月 18 頁</p> <p>Blasius 型の微分方程式を free jet boundary の問題に対応する境界条件で解くための数値解法。微分方程式 $f'''' + ff'' = 0$ (境界条件 $f'(-\infty) = 0, f(+\infty) = 2$) の解の数値表を含む。</p>	<p>I. 樋口一雄 戸川隼人 II. NAL TR-20 III. 518.6 532.526</p>
<p>NAL TR-20 航空技術研究所 Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法</p> <p>1962 年 1 月 18 頁</p> <p>Blasius 型の微分方程式を free jet boundary の問題に対応する境界条件で解くための数値解法。微分方程式 $f'''' + ff'' = 0$ (境界条件 $f'(-\infty) = 0, f(+\infty) = 2$) の解の数値表を含む。</p>	<p>I. 樋口一雄 戸川隼人 II. NAL TR-20 III. 518.6 532.526</p>	<p>NAL TR-20 航空技術研究所 Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法</p> <p>1962 年 1 月 18 頁</p> <p>Blasius 型の微分方程式を free jet boundary の問題に対応する境界条件で解くための数値解法。微分方程式 $f'''' + ff'' = 0$ (境界条件 $f'(-\infty) = 0, f(+\infty) = 2$) の解の数値表を含む。</p>	<p>I. 樋口一雄 戸川隼人 II. NAL TR-20 III. 518.6 532.526</p>

航空技術研究所報告 20 号

昭和 37 年 1 月 発行

発行所 航空技術研究所
東京都三鷹市新川 700
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53
