

# 航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-23

いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題  
のモンテカルロ法による解法とその実験

樋口一雄・高橋利之・鳥海良三

1962年2月

航空技術研究所  
NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

既 刊 報 告

TR-1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960年2月	平木 一, 石井孝雄 大島信彦
TR-2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960年5月	山内正男, 松木正勝 塩入淳平, 富永守之
TR-3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960年8月	小橋安次郎, 長洲秀夫 高島一明, 波木井潔
TR-4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960年9月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960年12月	中井暎一, 橋爪 宏 中村泰治
TR-6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960年12月	竹中幸彦
TR-7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961年1月	村崎寿満
TR-8	繰返し荷重装置試験の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961年3月	竹内和之, 飯田宗四郎
TR-9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961年3月	細川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松木正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 埴 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961年11月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge- Beam Method of Measuring Gas Density	1961年12月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝

# いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験

樋口一雄・高橋利之・鳥海良三

## Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations

By Kazuo HIGUCHI, Toshiyuki TAKAHASHI  
and Ryozo TORIUMI

Monte Carlo Solutions of the boundary value problems of partial differential equations of elliptic, hyperbolic and simultaneous types are presented in this paper.

The stochastic models for each type were constructed, and simple numerical examples were given by using the Datatron 205 electronic digital computer.

The results showed that the time required for 1,500 trips was twenty-five minutes in the shortest and six hours in the longest cases, and that the accuracy was two or three figures.

### § 1. 緒 言

航空技術上の各種の境界値問題をモンテカルロ法によって解くための基礎的研究として、いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題について、その確率模型の理論構成ならびに実験を行ってきたが、以下はその成果をまとめたものである。

‘モンテカルロ法’という言葉がしばしば聞かれるようになったのは比較的最近のことである。

モンテカルロ法の定義はさまざまであり、いまだ決定的なものをみない。モンテカルロ法 of 具体的表現として、‘未知量(数)  $x$  に対して、それより  $x$  が解析的に容易に求まる他の未知量(数)  $y$  (むろん  $y=x$  なら最も好都合である。)を定め、次に  $y$  をその期待値とする確率変数  $Y$  を選んで、その実現値を十分多数獲得し、その相加平均をもって  $y$  の推定値とし、これから  $x$  の近似値を求める方法である。’といえそうである。そして本法のただ1つの理論的裏づけは大数の法則(中心極限定理)である。

この  $y$  (したがって  $x$ ) が(方程式の根のように)明確な解析的表現をもっているか、(1日の駅の乗客数のように)もっていないかによって、モンテカルロ法が適用される問題は2つに大別される。前者を決定論的問題、後者を統計的問題とよんでいる。

モンテカルロ法は今世紀の初頭から統計学者の間で統計的問題に対してさかんに使用され始めた。それが決定論的問題に対して意識的に適用され始めたのは、1940 年代 von Neumann と Ulam がこれに関する基本的な考え方を示して以来である。

いずれの種類に属する問題にせよ、すでに述べたように驚異的に多数回の無作為抽出操作を必要とするので、これを人間が担当することは不可能であるといつてよい。これを引き受けてくれるのが計数型電子計算機である。モンテカルロ法が最近になって著しく注目されるようになった大きな原因は電子計算機の出現と発展である。

さて、‘偏微分方程式の求解’という問題は明らかに決定論的問題であり、参考文献も少なかったので、それに着手する前に‘ $\pi$  の計算’や‘4 元連立一次方程式の求解’などの初歩的問題を当所の計算機 Datatron 205 に実行させてみた。その結果が良好であったので、Ehrlich, Louis W. の論文 [1] を出発点として、Datatron 205 による実行を開始した。

Louis の問題は、与えられた領域内部で、

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{K}{y} u_y = 0 \quad (1.1)$$

を満たし、その境界で与えられた境界値をとる関数  $u(x, y)$  の指定された内点における値を求めるものであるが、その実験例をみると境界値が境界の大部分で定数であるという単純なものばかりであったので、境界点ごとに境界値が異なるという境界条件下で (1.1) を実験したところ、かなりの好成果が得られたので、モンテカルロ法を適用できる偏微分方程式の境界値問題の Type を一つ一つ開発していくことに方針を定めて、現在までに §2. 以下に述べるような Type について良好な成績を得ている。

偏微分方程式の数値解法としてのモンテカルロ法の他の解法にみられない長所は、境界の形状や境界条件に対する制約がゆるやかであること、計算機に対するプログラム作成が容易であること、何台かの計算機に平行して実行させることなどがあげられるが、欠点としては、満足できる結果をうるまでに長時間を要すること、精度が劣ること、結果がいわゆる‘ツキ’に左右されることなどがある。

本報告の §2. ないし §5. において楕円型偏微分方程式の第 1 種および第 3 種の境界値問題を取り扱い、§6. および §7. ではそれぞれ双曲型および連立偏微分方程式の一例を、§8. では一般の場合についての考察を行なった。

これらすべての Type の実験において、無作為歩行過程 (ランダムウォーク) の遂行のために使用した乱数はレーマー (Lehmer) の方法による擬似乱数であり、必要に応じて計算機の乱数発生ルーチンに発生させた。レーマーの方法とは合同法の一様で、前の乱数  $x_n$  を 23 倍し、これを  $10^8 + 1$  で割った余り  $x_{n+1}$  を次の乱数とし、適当に選んだ出発乱数  $x_0$  から順次  $x_1$ ,

$x_2, \dots$  と求めていくものである。レーマー法の長所は

1. 発生された擬似乱数の質が出発乱数  $x_0$  によらないこと。
2. 各種の検定をパスしていること、とくに週期が長いこと。
3. Datatron 205 のような十進計算機向きであること。

などである。

なお、われわれはほとんどの場合、出発乱数  $x_0$  として '12345678' を使用した。

## § 2. Type I の理論と実験

与えられた領域  $\Omega$  で、

$$u_{xx} + u_{yy} + K(x, y)u = \rho(x, y) \quad (2.1)$$

を満たし、その境界  $\Gamma$  上で与えられた境界値  $f(x, y)$  をとる関数  $u(x, y)$  の必要な点  $(a, b)$  における値を求める問題を考える。ここに  $K(x, y)$  は  $\Omega$  内で常に負であり、 $\rho(x, y)$ ,  $f(x, y)$  は任意の関数、 $\Gamma$  すなわち境界の形状も任意とする。(図 2.1)

$x-y$  平面を 2 組の平行直線群

$$x = a + mh, \quad y = b + nh \quad (2.2)$$

( $m, n$  は任意の整数;  $h$  は十分小さい正数) によって一辺  $h$  の小さな正方形の集まりに分割し、各正方形を格子、その頂点を格子点と名づける。また、 $\Omega$  内の格子点を  $P_i$ ,  $\Gamma$  上の格子点を  $Q_j$ , この両者を合わせて  $R_k$  と(それぞれ適当に番号をつけて) 表わす。1 格子点  $R_k$  に着目したとき、 $R_k$  およびその隣接格子点に図 2.2 のように局所的相対番号をつける。そして任意の関数  $g(x, y)$  に対して、 $g_i = g(R_i)$  ( $i=0 \sim 4$ ) と略記する。

次に確率模型の構成に好都合な条件を備えた与えられた境界値問題の近似差分方程式を選定しなければならないが、着目する格子点  $R_0$  が内点のときは、

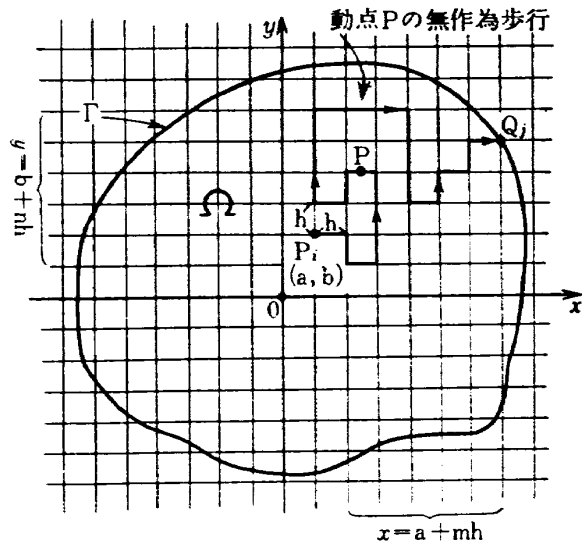


図 2.1

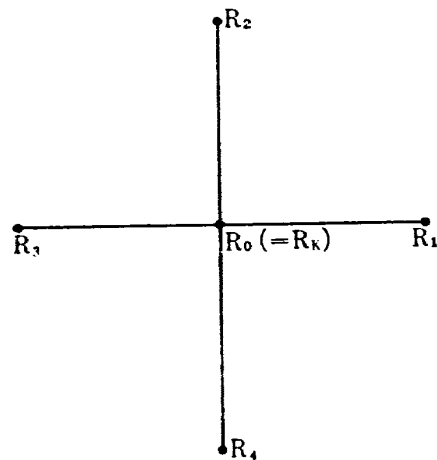


図 2.2

$$\begin{cases} (u_{xx})_0 \doteq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2} \\ (u_{yy})_0 \doteq \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

であるから、(2.3) を原方程式 (2.1) の左辺に代入して得られる差分方程式を用いた。

すなわち使用した差分方程式は、

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$U_0 = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 - \beta h^2 \rho_0 \quad (2.4)$$

ここに

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta = \frac{1}{4 - K_0 h^2}$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$U_0 = f(Q_j) \quad (2.5)$$

ここで動点  $P$  の格子点から格子点への無作為歩行過程を次のように定義する。

$P$  が格子点  $R_0$  から隣接格子点  $R_i$  ( $i=1\sim 4$ ) へ歩行する確率を  $p_i$  ( $i=1\sim 4$ )、 $R_0$  において死滅する (歩行が終了する) 確率を  $p_0$  とすると、

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = \beta_i & (i=1\sim 4) \\ p_0 = 1 - \sum_{i=1}^4 \beta_i \end{cases} \quad (2.6)$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = 0 & (i=1\sim 4) \\ p_0 = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$R_0$  から出発した動点  $P$  が死滅するまでに通過した経路 (出発点  $R_0$  を始点とし、死滅点  $R_i$  を終点とする格子点配列)  $t$  を道とよぶ。また、 $i=0\sim 4$  として、 $R_i$  を始点とする道  $t_i$  のすべての集合を  $T_i$  とする。次に  $t_0^i = (R_0, R_i, \dots, R_i)$  なるすべての道の集合を  $T_0^i$  と ( $i=1\sim 4$  について) 名づける。

さらに、動点  $P$  が道  $t$  をたどったときに得るスコア  $\delta(t)$  を次のように規定する。

(1)  $R_i = P_j$  のとき

$$\delta(t) = -\frac{\beta}{p_0} h^2 \rho_0 \quad (R_0 = P_j) \quad (2.8)$$

(2)  $R_i = Q_j$  のとき

$$\delta(t) = f(Q_j) \quad (2.9)$$

$R_0$  から出発した動点  $P$  が死滅するまでの過程を  $R_0$  を始点とする旅行 (trip) とよぶが、

$R_0$  を始点とする旅行において、 $P$  が獲得するスコアの期待値を  $S_0$  とすれば、 $S_0$  は差分方程式 (2.4), (2.5) を満たす。(付記1参照)

そこで、原方程式および差分方程式の解がただ一つ存在することを仮定すれば、 $P$  を定点  $R_0$  から十分多数 ( $N$ ) 回出発させたときに得たスコアの総和を  $S$  とするとき、大数の法則から、

$$\frac{S}{N} \approx S_0 \doteq u_0$$

によって  $S/N$  を  $u_0$  の推定値とみなすことができる。

実験は、

$$\left\{ \begin{array}{l} K(x, y) = -400 \\ \rho(x, y) = 20y(1 - 200x^2) \\ \Gamma: 4 \text{ 点 } (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) \text{ を頂点とする正方形 (図 2.3)} \\ f(0, y) = f(x, 0) = 0, f(1, y) = 10y, \\ f(x, 1) = 10x^2 \\ h = 1/20 \end{array} \right.$$

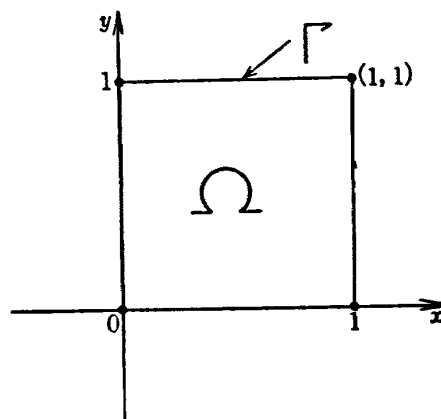


図 2.3

で行なったところ、表 2.1 に示すような結果が得られた。動点が内部の格子点で死滅する可能性があるため、 $N=1,500$  回の旅行が 25 分ほどであった。Louis の型が同回数旅行に 6 時

表 2.1 Type I の実験結果

$x$	$y$	$N$	$S/N$	厳密解
0.25	0.75	500	0.468	0.46875
		1,000	0.477	
		1,500	0.475	
0.25	0.50	500	0.313	0.31250
		1,000	0.318	
		1,500	0.318	
0.50	0.50	500	1.260	1.25000
		1,000	1.264	
		1,500	1.263	
0.75	0.25	500	1.421	1.40625
		1,000	1.417	
		1,500	1.415	
0.10	0.10	500	0.011	0.01000
		1,000	0.012	
		1,500	0.011	
0.95	0.95	500	8.626	8.57375
		1,000	8.587	
		1,500	8.595	
0.50	0.25	500	0.636	0.62500
		1,000	0.633	
		1,500	0.632	

間を要したことを思うと非常に速いといえる。また、結果の安定度、精度もかなり良好であった。

### § 3. Type II の理論と実験

以下とくに断わらないかぎり、記法、定義などは §2. のそれに従うものとする。

次のようなポアソン方程式の境界値問題を考える。

$$u_{xx} + u_{yy} = \rho(x, y) \quad (\text{in } \Omega) \quad (3.1)$$

$$u(x, y) = f(x, y) \quad (\text{on } \Gamma) \quad (3.2)$$

ただし、 $\rho(x, y)$  は任意;  $\Gamma$  は任意。

着目する格子点  $R_0$  の隣接格子点として Type I と同一のものをとり、 $R_0$  を内点とするとき、

$$\begin{cases} (u_{xx})_0 \doteq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2} \\ (u_{yy})_0 \doteq \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

を (3.1) の左辺に代入して得られる差分方程式を選ぶ。整理すると、

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$U_0 = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 - \frac{h^2 \rho_0}{4} \quad (3.4)$$

ここに

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{4}$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$U_0 = f(Q_j) \quad (3.5)$$

ここで動点  $P$  の無作為歩行過程を次のように定義する。

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = \beta_i & (i=1 \sim 4) \\ p_0 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = 0 & (i=1 \sim 4) \\ p_0 = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

また、動点  $P$  が道  $t$  をたどったときに得るスコアを次のように規定する。

$R_0 = R_j$  ( $= P_j$  または  $Q_j$ ) に対して

$$t = (R_{k_0}, R_{k_1}, R_{k_2}, R_{k_3}, \dots, R_{k_n})$$



$(R_{k_0}=R_0, R_{k_n}=R_l, n \geq 0)$  として,

$$\begin{aligned} \delta(t) &= f(R_{k_n}) & (n=0) \\ \delta(t) &= \sum_{l=1}^n \left( -\frac{h^2 \rho_l}{4} \right) + f(R_{k_n}) & (n \geq 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\rho_l = \rho(R_{k_l})$$

以上のように定めると, 1 格子点  $R_0$  から出発した動点  $P$  が得るスコアの期待値  $S_0$  は差分方程式 (3.4), (3.5) を近似的に満たす。(付記 2 参照)

そこで動点  $P$  が定格子点  $R_0$  を始点とする  $N$  回の旅行で得た総スコアを  $S$  とするとき,

$$\frac{S}{N} \approx S_0 \doteq u_0$$

実験は,

$$\rho(x, y) = 1$$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{図 3.1})$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + 1$$

$$h = 1/20$$

によって行なったところ, 表 3.1 および付録表 1 に示すような結果が得られた。

結果は試みた全 Type を通じて最も良く, この理由としては, 方程式, 境界の形状, 境界条件が対称であることが考えられる。しかし, この対称性は動点  $P$  が内部で死滅できないことと合わせて 1 回の旅行に要する時間を長くし,  $N=1,000$  回の旅行の達成が 6 時間程度であった。

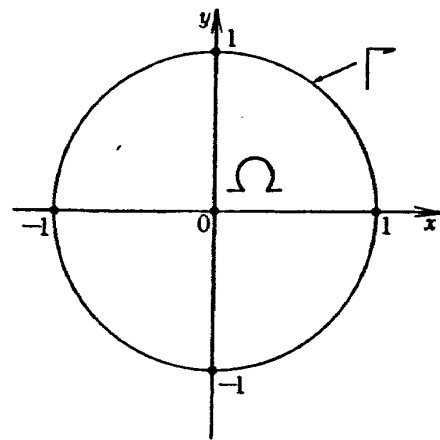


図 3.1

表 3.1 Type II の実験結果

$x$	$y$	$N$	$S/N$	厳密解
0.00	0.00	100	0.999	1.0000
		500	1.002	
		800	1.006	
0.50	-0.50	100	1.087	1.1250
		500	1.118	
		1,000	1.118	
-0.50	0.00	100	1.042	1.0625
		500	1.057	
		1,000	1.056	
0.00	-0.50	100	1.058	1.0625
		500	1.060	
		1,000	1.057	

### § 4. Type III の理論と実験

以上で説明した Type I, II はいずれも境界  $\Gamma$  上で  $u=f(x, y)$  により  $u$  の値が与えられた, いわゆる第 1 種の境界値問題であったが, 本節では  $\Gamma$  上で  $au+\beta(\partial u/\partial n)=0$  を満足する,

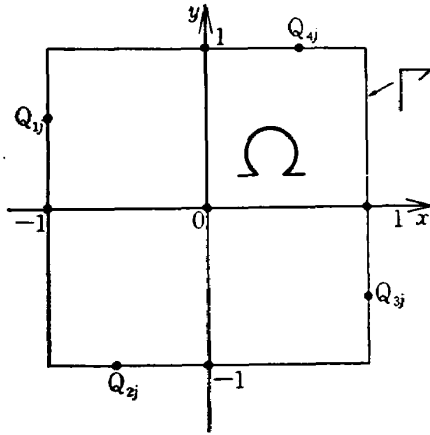


図 4.1

る, 第 3 種の境界値問題を取り扱う。本例は正方形断面の線状物体の定常温度分布を求めるものである。

原点が断面の中心であり, 両軸が辺に平行な直交座標系をとる。(図 4.1)

この座標系を用いて問題を表現すると次のようになる。

$$u_{xx}+u_{yy}=-1 \quad (\text{in } \Omega) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=u \quad (\text{on } \Gamma) \quad (4.2)$$

ここに  $\partial u/\partial n$  は境界に対する内向き法線方向微分である。

着目する格子点  $R_0$  の隣接格子点としてすでに説明した Type に対するものと同一の 4 点  $R_1, R_2, R_3, R_4$  をとる。また, 境界  $x=-1, y=-1, x=1, y=1$  上の格子点をそれぞれ (適当に番号をつけて)  $Q_{1j}, Q_{2j}, Q_{3j}, Q_{4j}$  と記すことにする。

$R_0$  が内点のときは,

$$\begin{cases} (u_{xx})_0 \doteq \frac{u_1+u_3-2u_0}{h^2} \\ (u_{yy})_0 \doteq \frac{u_2+u_4-2u_0}{h^2} \end{cases} \quad (4.3)$$

であるから, これを (4.1) の左辺に代入して得られる差分方程式をとる。

$R_0$  が境界点  $Q_{kj}$  ( $k=1\sim 4$ ) であるときは,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_0 \doteq \frac{u_k-u_0}{h} \quad (k=1\sim 4) \quad (4.4)$$

となるから, これを (4.2) の左辺に代入して得られる差分方程式を用いる。

整理すると,

(1)  $R_0=P_j$  のとき

$$U_0=\beta_1 U_1+\beta_2 U_2+\beta_3 U_3+\beta_4 U_4+\frac{h^2}{4} \quad (4.5)$$

ここに

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=\frac{1}{4}$$

(2)  $R_0=Q_{kf}$  ( $k=1\sim 4$ ) のとき

$$U_0=\beta_k U_k \quad (k=1\sim 4) \quad (4.6)$$

$$\left(\beta_k=\frac{1}{1+h}\right)$$

ここで動点  $P$  の無作為歩行過程を次のように定義する。

(1)  $R_0=P_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i=\beta_i & (i=1\sim 4) \\ p_0=0 \end{cases} \quad (4.7)$$

(2)  $R_0=Q_{kf}$  ( $k=1\sim 4$ ) のとき

$$\begin{cases} p_k=\beta_k, p_i=0 & (i\neq k) \\ p_0=1-\beta_k \end{cases} \quad (4.8)$$

また,  $P$  が道  $t$  をたどったときに獲得するスコアを次のように規定する。

道  $t$  の長さ ( $t$  を構成する格子点の個数) を  $l(t)$  と記すことにして,

$R_0=R_j$  (任意の格子点) に対して

$$\Delta(t)=\frac{h^2}{4}(l(t)-1)-\frac{h}{4} \quad (4.9)$$

こう定めると 1 格子点  $R_0$  から出発した動点を得るスコアの期待値  $S_0$  は (4.5), (4.6) をある仮定のもとに満たす。(付記 3 参照)

そこで定格子点  $R_0$  を始点とする  $N$  回の旅行で  $P$  が得たスコアの総和を  $S$  とするとき,

$$\frac{S}{N}\approx S_0\div u_0 \quad (4.10)$$

実験は,

領域  $\Omega$  がこれまでの実験例のそれに比してやや広いことを考慮して,

$$h=1/10 \quad (4.11)$$

と選んだ。

表 4.1 は得られた結果の 1 部である。

厳密解が知られていないため, pure collocation interior method (以後 p.c.i.m. と略記する。)による近似解と比較したが, たとえば表 4.1 の数値について計算しても相対誤差は平均 3% ほどである。(p.c.i.m. は誤差の評価が困難で, このようなチェックに使用するのはいさし頼りないが) また, 原方程式 (4.1) および境界条件 (4.2) の対称性や動点  $P$  が内部で死滅できないことや,  $\Omega$  の広いことなどの理由から 1 回の旅行に長時間を要し,  $N=1,000$  回の旅行が平均 6 時間ほどで終了した。かなり荒い模型にもかかわらず結果が目標値の近くに落ち着く

ことは不思議である。

表 4.1 Type III の実験結果

$x$	$y$	$N$	$S/N$	p.c.i.m. による解
0.0	0.0	500 1,000	0.781 0.784	0.822
-0.5	0.0	500 1,000	0.724 0.722	0.758
0.3	0.2	500 1,000	0.801 0.789	0.789
0.8	0.8	500 1,000	0.533 0.534	0.525
0.2	-0.7	500 1,000	0.653 0.648	0.687

## §5. Type IV の理論と実験

本 Type は前述の各 Type の境界値問題に対する確率模型に手を加え、これから述べるような機能をもたせたもので、新たな Type の境界値問題ではなく、しいていえば新たな Type の確率模型である。

これまでの全 Type の確率模型を通じて、動点  $P$  が格子点から格子点へと無作為に歩行する過程は過去に依存しない独立な過程であった。

一方、格子点  $R_0$  を始点とする1つの道  $t_0$  が格子点  $R_k$  を  $n_k$  個含むということは、 $t_0$  が  $R_k$  を始点とする道を  $n_k$  個含むことを意味するから、動点  $P$  の歩行過程の独立性から、 $P$  が道  $t_0$  をたどったことは、その過程において  $R_k$  を始点とする道を  $n_k$  個たどったと実質上考えてさしつえない。

そこで、この  $n_k$  個の道に対する原模型でのスコアの総和を  $n_k$  で割ったものをもって、格子点  $R_k$  に対するスコアと定義すれば、任意の2つの格子点  $R_0, R_k$  に対し、 $R_0$  から出発した動点  $P$  が  $R_k$  にもたらすスコアの期待値  $S_k'$  は原模型の意味でのスコアの期待値  $S_k$  に一致する。すなわち対象とする差分方程式を満足する。

このようにスコアを変更した新模型の長所は、少なくとも原理的には同時にすべての格子点における  $S_k$  すなわち  $u_k$  の近似値が得られることであり、動点  $P$  が1つの道をたどる途中で得られる情報を余すところなく活用している点である。

また、従来の意味の1回の(形式的)旅行が新たな意味の(実質的)旅行を一般に多数含むから、従来と同一回数 of 旅行を達成するにはるかに少ない時間ですむはずである。つまり新模型は量と時間の点で旧模型に優るようである。しかし旧模型より分散が大きく、不安定にな

ることが予想される。

実験は、

Type III の境界値問題について行なった。

原理的には同時に何点でも処理できるのであるが出力装置の制約などのため、同時に4点を狙うにとどめた。

すなわち、少なくとも1個は内点である4点  $R_1, R_2, R_3, R_4$  を選び、内点であるものを1回交代で交互に  $R_0$  とした。(実質旅行回数の進みが点によって偏らないためである。)

出力は IBM407 ラインプリンターにより、その形式は、点  $R_i (i=1\sim 4)$  の実質旅行回数を  $N_i$ 、得たスコアの総和を  $S_i$  とするとき、下記のようなものである。

$$N_1 \frac{S_1}{N_1} \quad N_2 \frac{S_2}{N_2} \quad N_3 \frac{S_3}{N_3} \quad N_4 \frac{S_4}{N_4}$$

(これまでは1点ずつ求めていたので、出力装置はフレキシライターを使用した。)

結果は分散が大きく、不安定であるが、目標値からそうひどくずれることもなく、一応の目安をつけうるまでに要した時間は、Type III の実験で同じ状態になるまでに要した時間の1/3ほどであった。情報量が4倍になっているから、効率は  $3 \times 4 = 12$  倍になったと皮相的な考察ではいえそうである。結果の1部を表 5.1 および図 5.1 に示す。

表 5.1 Type IV の実験結果

$x$	$y$	$N$	$S/N$	p.i.c.m. による解
0.0	0.0	102	0.697	0.822
		200	0.803	
		404	0.796	
		608	0.815	
		1,000	0.786	
0.0	0.5	100	0.786	0.758
		201	0.772	
		402	0.781	
		601	0.804	
		1,000	0.756	
0.0	0.7	101	0.675	0.696
		202	0.727	
		402	0.652	
		600	0.686	
		1,012	0.688	

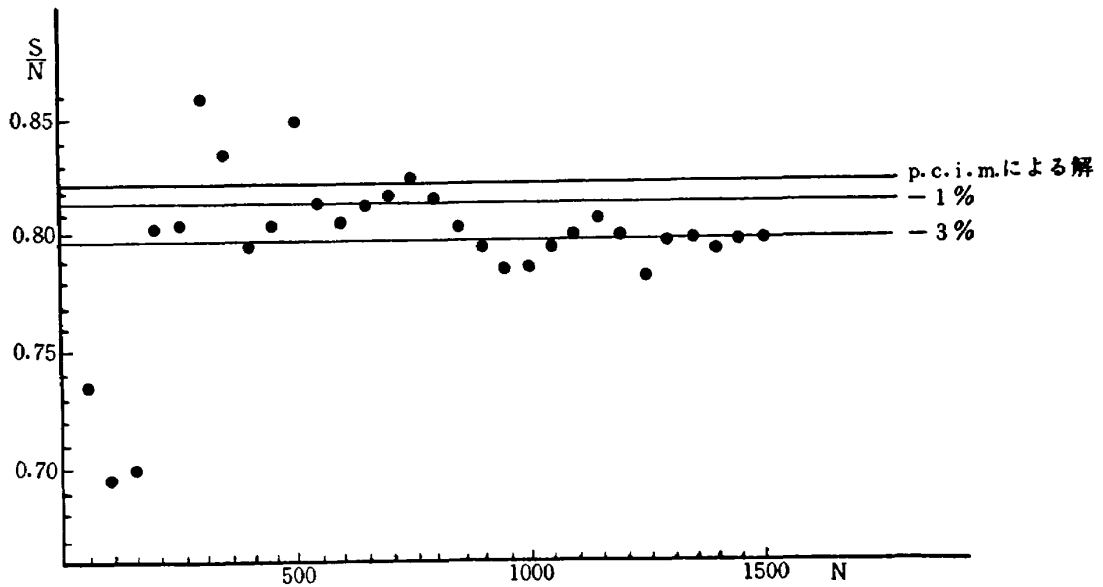


図 5.1 Type IV の  $S/N$  の推移,  $R_0=(0.00, 0.00)$

### § 6. Type V の理論と実験

前節までは主として楕円型偏微分方程式の境界値問題の実験について述べたが、本節では次のような双曲型偏微分方程式の境界値問題を取り扱う。

$$u_{xx} - u_{yy} + K(x, y)u = \rho(x, y) \quad (\text{in } \Omega) \quad (6.1)$$

$$u(x, y) = f(x, y) \quad (\text{on } \Gamma) \quad (6.2)$$

ただし,  $-2/h^2 \leq K(x, y) < 0$  [in  $\Omega$ ];  $\rho(x, y)$ ,  $f(x, y)$  は任意の関数;  $\Gamma$  は任意。

着目する格子点  $R_0$  の隣接格子点として Type I と同一の  $R_1, R_2, R_3, R_4$  をとり、近似差分方程式を導く。

$R_0$  が内点のとき、

$$\begin{aligned} (u_{xx})_0 &\doteq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2} \\ (u_{yy})_0 &\doteq \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2} \\ u_0 &\doteq \frac{u_2 + u_4}{2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

から (6.1) の左辺は、

$$\begin{aligned} (u_{xx})_0 - (u_{yy})_0 + K_0 u_0 &\doteq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2} \\ &\quad - \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2} - \frac{4}{h^2} u_0 + \frac{4}{h^2} \frac{u_2 + u_4}{2} + K_0 \frac{u_2 + u_4}{2} \\ &= \frac{1}{h^2} u_1 + \left( \frac{K_0}{2} + \frac{1}{h^2} \right) u_2 + \frac{1}{h^2} u_3 + \left( \frac{K_0}{2} + \frac{1}{h^2} \right) u_4 - \frac{4}{h^2} u_0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

(6.4) から (6.1) の近似差分方程式が得られる。整理して、

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$U_0 = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 - \frac{h^2 \rho_0}{4} \quad (6.5)$$

ここに 
$$\beta_1 = \beta_3 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = \beta_4 = \frac{1}{4} + \frac{K_0 h^2}{8}$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$U_0 = f(Q_j) \tag{6.6}$$

ここで、動点  $P$  の無作為歩行過程を次のように定義する。

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = \beta_i & (i=1 \sim 4) \\ p_0 = 1 - \sum_{i=1}^4 \beta_i \end{cases} \tag{6.7}$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

$$\begin{cases} p_i = 0 & (i=1 \sim 4) \\ p_0 = 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

また、動点  $P$  が道  $t$  をたどったときに得るスコア  $\delta(t)$  を次のように規定する。

(1)  $R_i = P_j$  のとき

$$\delta(t) = -\frac{h^2 \rho_0}{4p_0} \quad (R_0 = P_j) \tag{6.9}$$

(2)  $R_i = Q_j$  のとき

$$\delta(t) = f(Q_j) \tag{6.10}$$

このように定めると、1 格子点  $R_0$  から出発した動点  $P$  が得るスコアの期待値  $S_0$  が、近似差分方程式 (6.5), (6.6) を満たすことは §2. Type I と同様に証明しうる。

そこで原方程式および差分方程式の解がただ一つ存在することを仮定すれば、動点  $P$  の 1 定格子点  $R_0$  を始点とする  $N$  回の旅行において得たスコアの総和を  $S$  とするとき、

$$\frac{S}{N} \approx S_0 \doteq u_0$$

実験は、

$$\begin{cases} K(x, y) = -160 \\ \rho(x, y) = -80(x^2 + y^2 + 1) \\ \Gamma: |x| + |y| = 1 \quad (\text{図 3.1}) \\ f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1) \\ h = 1/20 \end{cases}$$

で行なったところ、表 6.1 に示すような結果が得られた。

動点  $P$  が内部で死滅する可能性があるため、 $N=1,500$  回の旅行が 40 分ほどで達成され、

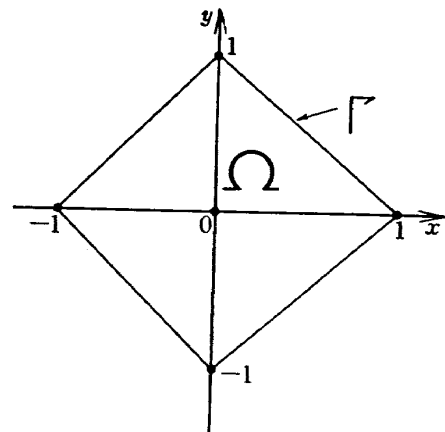


図 6.1

結果の安定度，精度もかなり良好であった。

表 6.1 Type V の実験結果

$x$	$y$	$N$	$S/N$	厳密解
0.00	0.00	500	0.511	0.50000
		1,000	0.511	
		15,000	0.512	
0.00	0.95	500	0.952	0.95125
		1,000	0.952	
		1,500	0.952	
0.10	0.80	500	0.830	0.82500
		1,000	0.831	
		1,500	0.832	
0.25	-0.45	500	0.646	0.63250
		1,000	0.643	
		1,500	0.644	
0.30	0.30	500	0.602	0.59000
		1,000	0.603	
		1,500	0.603	
0.40	0.40	500	0.671	0.66000
		1,000	0.671	
		1,500	0.671	
0.75	0.00	500	0.795	0.78125
		1,000	0.792	
		1,500	0.793	
-0.40	-0.20	500	0.608	0.60000
		1,000	0.609	
		1,500	0.610	
-0.50	0.35	500	0.691	0.68625
		1,000	0.694	
		1,500	0.694	
-0.75	0.15	500	0.795	0.79250
		1,000	0.796	
		1,500	0.798	

## § 7. Type VI の理論と実験

2つの未知関数  $u(x, y)$ ,  $w(x, y)$  に関する次のような2元連立偏微分方程式の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} u_{xx} + K(x, y)u + L(x, y)w = \rho(x, y) \\ w_{yy} + M(x, y)w + N(x, y)u = \lambda(x, y) \end{cases} \quad (\text{in } \Omega) \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = f(x, y) \\ w(x, y) = g(x, y) \end{cases} \quad (\text{on } \Gamma) \quad (7.3)$$

$$(7.4)$$

ただし， $-K(x, y) > L(x, y) > 0$ ， $-M(x, y) > N(x, y) > 0$  [in  $\Omega$ ];  $\rho(x, y)$ ,  $\lambda(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  はいずれも任意;  $\Gamma$  は任意。



三次元ユークリッド空間内に平行2平面 I, II を考える。平面 I 上の点 P に P を通る2平面の共通垂線  $n$  と平面 II との交点 Q を対応させれば、平面 I 上の点と平面 II 上の点の間の1対1対応が得られる。以下2平面の点間の‘対応’とはこの対応を指すものとする。

次に平面 I, II 上にそれぞれ直交座標系 (1), (2) を定めて、対応する2点 P, Q が同一座標をもつようにする。

座標平面 I をよこ軸に平行で等間隔  $h$  (十分小さい正数) の平行直線群とたて軸に平行で等間隔  $h$  の平行直線群によって1辺  $h$  の小さな正方形の集まりに分割する。そしてこの2組の平行直線群に対応する平面 II 上の2組の平行直線群によって平面 II をも小さな正方形の集まりに分割する。両平面上の小正方形を格子、その頂点を格子点という。

また、座標平面 I 上の  $\Omega, \Gamma$  をそれぞれ

$$\Omega_1, \Gamma_1$$

座標平面 II 上の  $\Omega, \Gamma$  をそれぞれ

$$\Omega_2, \Gamma_2$$

と名づける。(図 7.1)

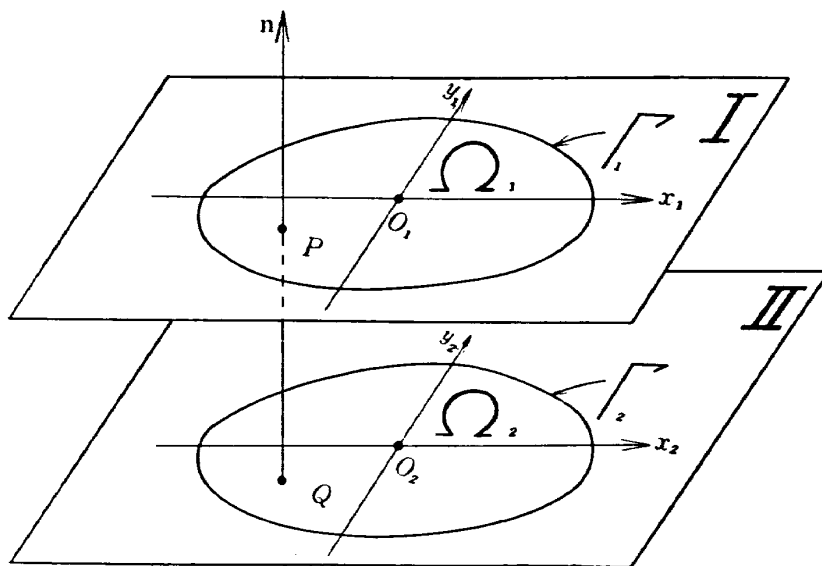


図 7.1

次に、

$\Omega_1$  内の格子点を  $P_{1i}$

$\Gamma_1$  上の格子点を  $Q_{1j}$

両者を合わせて  $R_{1k}$

$\Omega_2$  内の格子点を  $P_{2i}$

$\Gamma_2$  上の格子点を  $Q_{2j}$   
 両者を合わせて  $R_{2k}$

と (平面 I, II 上の対応する格子点が同一番号をもつように適当に番号をつけて) 表わす。

座標平面 I (II) 上の 1 格子点  $R_{1k} (R_{2k})$  に着目したとき, その隣接格子点に局所的相対番号を図 7.2 (図 7.3) のようにつける。

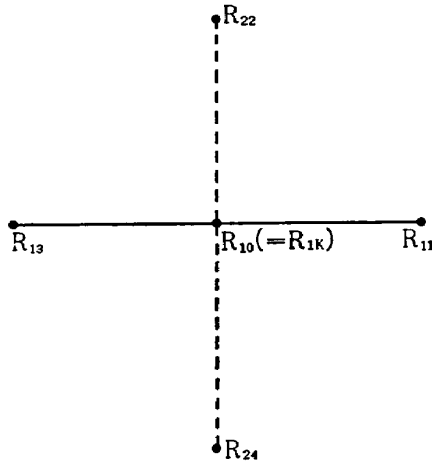


図 7.2

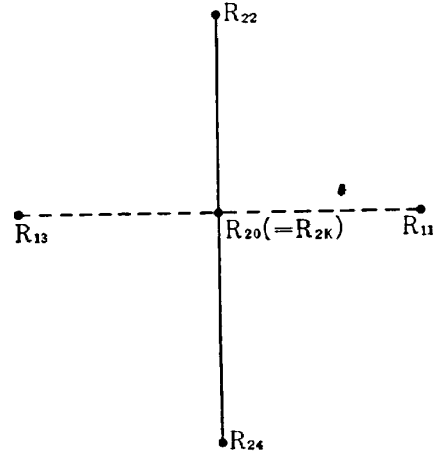


図 7.3

また, 任意の関数  $r(x, y)$  に対して,  $r_i = r(R_{1i}) = r(R_{2i})$  ( $i=0 \sim 4$ ) と略記する。

以上の準備から近似差分方程式を導くのであるが,

$R_{10}$  が内点のとき

$$(u_{xx})_0 \doteq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2} \quad (7.5)$$

$R_{20}$  が内点のとき

$$(w_{yy})_0 \doteq \frac{w_2 + w_4 - 2w_0}{h^2} \quad (7.6)$$

という近似式をそれぞれ対応させてみると,  $(u_{xx})_0, (w_{yy})_0$  の右辺はそれぞれ  $R_{10}, R_{20}$  の隣接点における  $u, w$  の値のみからなっていることがわかる。

そこで (7.5), (7.6) をそれぞれ (7.1), (7.2) に代入して得られる差分方程式をそれぞれ  $R_{10}, R_{20}$  のまわりの差分方程式とする。  $R_{10}, R_{20}$  が境界点のときは問題はないから, 記述を簡単にするために

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{10} = u_0, \quad u_{20} = w_0 \\ U_{1i} = U_i, \quad U_{2i} = W_i \quad (i=0 \sim 4) \\ \rho_{10} = \rho_0, \quad \rho_{20} = \lambda_0 \\ f_1(x, y) = f(x, y) \\ f_2(x, y) = g(x, y) \end{array} \right. \quad (7.7)$$

とにおいて選定した近似差分方程式を記す。

(1)  $R_{k0}=R_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$U_{k0}=\beta_{k1}U_{11}+\beta_{k2}U_{22}+\beta_{k3}U_{13}+\beta_{k4}U_{24}-\beta_k h^2 \rho_{k0} \quad (7.8)$$

ここに  $\beta_{11}=\beta_{13}=\beta_1=\frac{1}{2-h^2K_0}$ ,  $\beta_{12}=\beta_{14}=\frac{h^2L_0}{2(2-h^2K_0)}$ ;  $\beta_{21}=\beta_{23}=\frac{h^2N_0}{2(2-h^2M_0)}$ ,

$$\beta_{22}=\beta_{24}=\beta_2=\frac{1}{2-h^2M_0}$$

(2)  $R_{k0}=Q_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$U_{k0}=f_k(Q_{kj}) \quad (7.9)$$

ここで動点  $P$  の無作為歩行過程を次のように定義する。

まず,

$$R_1=R_{11}, R_2=R_{22}, R_3=R_{13}, R_4=R_{24} \quad (7.10)$$

と書く。

動点  $P$  が  $R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) からその隣接格子点  $R_i$  ( $i=1\sim 4$ ) に歩行する確率を  $p_{ki}$ ,  $R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) において死滅する確率を  $p_{k0}$  とするとき,

(1)  $R_{k0}=P_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$\begin{cases} p_{ki}=\beta_{ki} & (i=1\sim 4) \\ p_{k0}=1-\sum_{i=1}^4 \beta_{ki} \end{cases} \quad (7.11)$$

(2)  $R_{k0}=Q_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$\begin{cases} p_{ki}=0 & (i=1\sim 4) \\ p_{k0}=1 \end{cases} \quad (7.12)$$

$R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) から出発した動点  $P$  が死滅するまでに通過した経路 (出発点  $R_{k0}$  を始点とし, 死滅点  $R_i$  を終点とする格子点配列)  $t$  を道とよぶ。

また,  $R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) を始点とする道  $t_{k0}$  のすべての集合を  $T_{k0}, R_i$  ( $i=1\sim 4$ ) を始点とする道  $t_i$  のすべての集合を  $T_i, t_{k0}^i=(R_{k0}, R_i, \dots, R_i)$  ( $k=1, 2$ ), ( $i=1\sim 4$ ) なる道のすべての集合を  $T_{k0}^i$  とする。

さらに, 動点  $P$  が道  $t$  をたどったときに得るスコア  $\delta(t)$  を次のように定義する。

(1)  $R_i=P_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$\delta(t)=-\frac{\beta_k h^2 \rho_{k0}}{p_{k0}} \quad (R_{k0}=P_{kj}) \quad (7.13)$$

(2)  $R_i=Q_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$$\delta(t)=f_k(Q_{kj}) \quad (7.14)$$

このように定めると、 $R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) から出発した動点を得るスコアの期待値を  $S_{k0}$  とすると、この  $S_{k0}$  は差分方程式 (7.8), (7.9) を満たす。(付記 4 参照)

そこで、動点  $P$  を定格子点  $R_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) から  $N$  回出発させたとき得たスコアの総和を  $S$  とするとき、

$$\frac{S}{N} \approx S_{k0} \doteq u_{k0} \quad (k=1, 2)$$

つまり  $S/N$  を  $u_{k0}$  の推定値としてよいことがわかる。

実験は、

$$K(x, y) = -200, \quad L(x, y) = 160$$

$$M(x, y) = -150, \quad N(x, y) = 100$$

$$\rho(x, y) = 122 - 40x^2 - 360y^2$$

$$\lambda(x, y) = -202 - 50x^2 + 250y^2$$

$$\Gamma: 4 \text{ 直線 } x=0, x=1,$$

$$y=0, y=1 \text{ に囲まれた正方形}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

$$h = 1/20$$

によって行なったところ、表 7.1 のような結果が得られた。動点  $P$  が内点で死滅する可能性があるため、 $N=1,500$  回の旅行が 70 分ほどであった。また、模型がやや複雑であるにもかかわらず結果の安定度と精度はかなり良好であった。

表 7.1 Type VI の実験結果

$u, w$	$x$	$y$	$N$	$S/N$	厳密解
$u$	0.50	0.50	100	1.702	1.000
			500	1.531	
			1,000	1.516	
			1,500	1.476	
$w$	0.50	0.50	100	1.695	2.000
			500	2.149	
			1,000	2.083	
			1,500	2.064	
$u$	0.75	0.75	100	2.209	2.125
			500	2.196	
			1,000	2.164	
			1,500	2.151	
$w$	0.75	0.75	100	2.009	2.000
			500	1.982	
			1,000	1.990	
			1,500	1.989	

## §8. Type VII の理論と実験

今まで考えてきた近似差分方程式はすべて

$$U_0 = \sum_{i=1}^4 \beta_i U_i + \alpha \rho_0 \quad (8.1)$$

なる形をもち、Type II, III, IV および Louis の論文では

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i = 1 \quad (8.2)$$

の場合であり、Type I, V, および VI では

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i < 1 \quad (8.3)$$

の場合で、前者が内点での死滅確率が 0 なのに反し、後者では  $1 - \sum_{i=1}^4 \beta_i = p_0$  を内点  $P_0$  における死滅確率として確率過程を構成したのである。

本節では  $\beta_i \geq 0$  なる条件だけが満たされている場合、すなわち

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i > 1 \quad (8.4)$$

なる場合も含めて、一般的考察を進める。

ある領域  $\Omega$  の内部である偏微分方程式を満たし、境界  $\Gamma$  上で与えられた境界値  $f(x, y)$  をとる関数  $U(x, y)$  を求める問題を考える。§2. と同じように、その領域を格子に分け、その偏微分方程式を差分方程式でおきかえたとき、少し記号を変更して

(1)  $R_i = P_i$  のとき、

$$U_i = \beta_{i1} U_{i1} + \beta_{i2} U_{i2} + \beta_{i3} U_{i3} + \beta_{i4} U_{i4} + \rho_i \quad (8.5)$$

$$\beta_{ij} \geq 0 \quad (j=1 \sim 4)$$

とする。 $\rho_i$  は  $(x, y)$  の既知関数、 $U_{ij} = U(P_{ij})$ 、 $P_{ij}$  ( $j=1 \sim 4$ ) は  $P_i$  の 4 隣点とする。

(2)  $R_i = Q_i$  のとき、

$$U_i = f(Q_i) \quad (8.6)$$

ここで例によって、動点  $P$  の無作為歩行過程における  $R_i$  から 4 隣点  $R_{ij}$  への歩行確率  $p_{ij}$  および  $R_i$  における死滅確率  $p_{i0}$  を次のように定義する。

(1)  $R_i = P_i$  のとき、

$C_i > \sum_{j=1}^4 \beta_{ij}$  なる  $C_i$  を定めて、

$$\begin{cases} p_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{C_i} & (j=1 \sim 4) \\ p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^4 p_{ij} = 1 - \frac{\sum \beta_{ij}}{C_i} \end{cases} \quad (8.7)$$

(2)  $R_i=Q_i$  のとき,

$$\begin{cases} p_{ij}=0 \\ p_{i0}=1 \end{cases} \quad (8.8)$$

この無作為歩行過程で  $R_0$  から出発した動点  $P$  の道  $t_0^j=(R_0, R_1, \dots, R_n, R_i)$  ( $R_1=R_{0j}$ ,  $j=1\sim 4$ ) と  $t_j=(R_1, R_2, \dots, R_n, R_i)$  との間には

$$p_r(t_0^j) = \frac{\beta_{0j}}{C_0} p_r(t_j) \quad (j=1\sim 4) \quad (8.9)$$

なる関係が成立している。

この  $t_0^j$  に対しスコア  $S(t_0^j)$  を次のように与える。

(1)  $R_i=P_i$  のとき,

$$S(t_0^j) = C_0 C_1 C_2 \dots C_n p_{i0}^{-1} \rho(P_i) \quad (8.10)$$

(2)  $R_i=Q_i$  のとき,

$$S(t_0^j) = C_0 C_1 C_0 \dots C_n f(Q_i) \quad (8.11)$$

したがって,

$$S(t_0^j) = C_0 S(t_j) \quad (8.12)$$

このとき,  $R_0$  を始点とする旅行の期待値  $S_0$  が (8.5), (8.6) において  $i=0$  とした差分方程式を満たす。(付記5参照)

実験は  $\Gamma$  として単位正方形をとり

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0 & (\text{in } \Omega) \\ f(0, y) = \sin y, f(x, 0) = \sin x, & (\text{on } \Gamma) \\ f(1, y) = \sin(1+y), f(x, 1) = \sin(x+1) \end{cases}$$

について行なった。

この場合すべての  $i, j$  について  $\beta_{ij} = 1/(4-2h^2)$  となり,  $\rho=0$  なので  $C_i$  としては  $\sum \beta_{ij} = 4/(4-2h^2)$  をとった。したがって, 内部死滅確率は 0 である。(h は mesh size)

実験結果は表 8.1 および図 8.1 に示してある。スコアを積で与えるためか, 分散が大きく, あまり良好な結果は得られなかった。

この Type は結果において von Neumann と Ulam によってなされたマトリックス  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求める確率模型とほとんど類似のものになってしまった。いまそれを説明する。

$A$  を  $n \times n$  行列として,  $A = E - B$ ,  $B = (b_{ij})$ ,

$$A^{-1} = (E - B)^{-1} = E + B + B^2 + B^3 + \dots$$

$B$  の固有値  $\lambda_i$  がすべて  $|\lambda_i| < 1$  と仮定すればこれは収束する。 $A^{-1}$  の  $(i, j)$  元を  $(A^{-1})_{ij}$  とすれば,

表 8.1 Type VII の実験結果

$x$	$y$	$h$	$N$	$S/N$	厳密解
0.25	0.75	0.05	500	0.822	0.8415
			1,000	0.821	
			1,500	0.832	
0.7	0.1	0.05	500	0.689	0.7173
			1,000	0.698	
			1,500	0.709	
0.8	0.8	0.1	500	0.979	0.9995
			1,000	0.965	
			1,500	0.974	
0.2	0.2	0.05	500	0.454	0.4794
			1,000	0.448	
			1,450	0.454	
0.5	0.5	0.05	500	0.826	0.8415
			1,000	0.796	
			1,500	0.803	

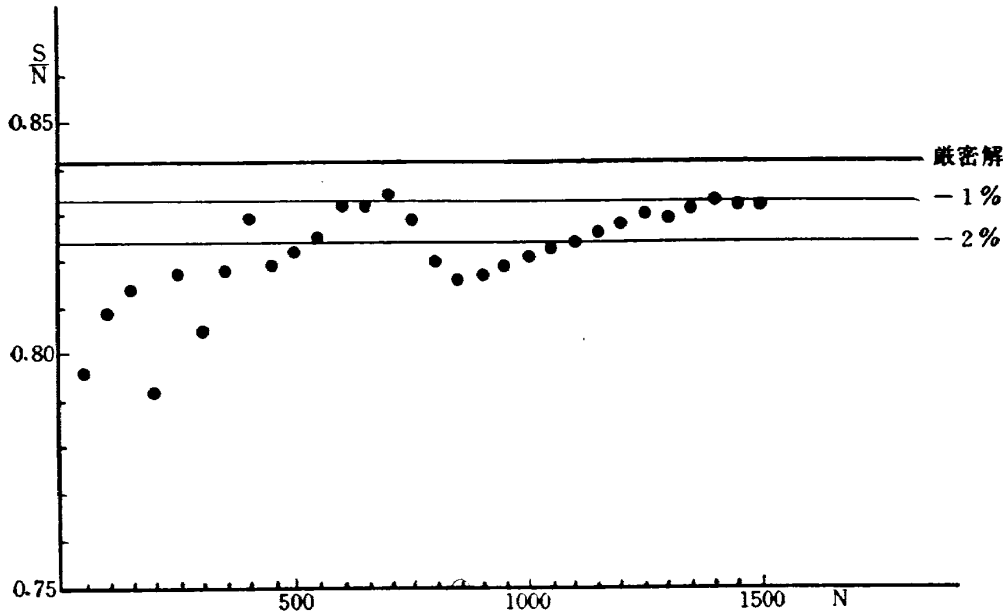


図 8.1 Type VII の  $S/N$  の推移,  $R_0=(0.25, 0.75)$

$$(A^{-1})_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij} + \sum_{k_1} b_{ik_1} b_{k_1j} + \sum_{k_1, k_2} b_{ik_1} b_{k_1k_2} b_{k_2j} + \dots \quad (8.13)$$

そこで今、次のような確率模型を考える。

$n$  個の点  $P_k (k=1 \sim n)$  と  $P_0$  があって、 $P_k$  から  $P_i$  への歩行確率  $p_{ki}$  を  $v_{ki} p_{ki} = b_{ki}$ ,  $\sum p_{ki} < 1$  なるごとく  $v_{ki}$  を定める。 $P_k$  から  $P_0$  への歩行確率を  $p_{k0} = 1 - \sum_{e=1}^n p_{ke}$ , そして  $P_0$  にきたら旅行を終ることとする。 $a_{ij}^{-1}$  を求めるには  $P_i$  を始点とする道  $(P_i, P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_n}, P_0)$  に対し、

$$P_{k_n} = P_j$$

なら  $v_{ik_1}v_{k_1k_2}v_{k_2k_3}\cdots v_{k_{n-1}j}p_{j0}^{-1}$  をスコアとして与え、

$$P_{k_n} \equiv P_j$$

なら 0 を与える。

このとき  $P_i$  を始点とするあらゆる道のスコアの期待値は (8.13) を満足する。なぜならそれを  $S_{ij}$  とすると、

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \delta_{ij} p_{j0} \cdot p_{j0}^{-1} + p_{ij} p_{j0} \cdot v_{ij} p_{j0}^{-1} + \sum_{k_1} p_{ik_1} p_{k_1j} p_{j0} v_{ik_1} v_{k_1j} p_{j0}^{-1} + \cdots \\ &= \delta_{ij} + b_{ij} + \sum_{k_1} b_{ik_1} b_{k_1j} + \cdots \end{aligned}$$

実際 Type VII においては、 $\rho(x, y) = 0$  の場合に、 $C_i = \sum_{j=1}^4 \beta_{ij}$  として、確率模型を構成し、その結果と逆行列の場合との類似性に気がついて  $\rho(x, y) \equiv 0$  にまで拡張したのである。

上のような境界値問題においては、 $\Omega$  の各点に対する差分方程式の全体を考えると、それは連立一次方程式に帰してしまう以上、この類似は当然の帰結であったといわねばならない。

## §9. 死 滅 確 率

すべての実験および Type II, III, V の確率模型の構成理論において、動点  $P$  が有限歩で死滅する確率が 1 であることを仮定してきたが、次にこれの厳密な証明を与える。

単純マルコフ過程の一般理論において、状態が有限個の場合には、一時的な状態より回帰的な状態に移る確率が 1 であることが証明されている。

したがって、すべての Type の模型が単純マルコフ過程となり、かつ有限歩で死滅するという事象が、一時的な状態より回帰的な状態に移るという事象におきかえられることを示せばよい。以下これを示す。

ある確率空間の列  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \cdots$  があって、

(1)  $\Omega_0 \ni \omega_{i_0}$  の起こる確率  $p_r(\omega_{i_0})$ , ( $\sum_{i_0} p_r(\omega_{i_0}) = 1$ ) が定められている。

(2)  $\Omega_j \ni \omega_{i_j}$ ,  $j=0 \sim k-1$  が与えられたとき、 $\Omega_k \ni \omega_{i_k}$  の起こる条件付確率  $p_r(\omega_{i_0}, \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_{k-1}} \rightarrow \omega_{i_k})$  は  $\omega_{i_0}, \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_{k-1}}$  に関係せず、 $\omega_{i_{k-1}}$  だけによってきまり  $p_r(\omega_{i_{k-1}} \rightarrow \omega_{i_k})$  とかける。 $(\sum_{i_k} p_r(\omega_{i_{k-1}} \rightarrow \omega_{i_k}) = 1)$

このとき、 $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$  とおいて  $\{\Omega, p_r(\omega_{i_0}), p_r(\omega_{i_{k-1}} \rightarrow \omega_{i_k})\}$  の系を単純マルコフ連鎖といい、 $\Omega_k$  に  $\{X_k = i_k\} = \omega_{i_k}$  なる確率変数  $X_k$  を導入すれば、 $X_0, X_1, X_2, \cdots$  は単純マルコフ過程といわれる。

$\Omega_0 \ni \omega_i$  が与えられたとき、少なくとも一つの  $\Omega_h$  ( $h \geq 1$ ) の中で  $\omega_i$  が再び起こる確率を  $f_i$  とするとき、

$$f_i < 1 \quad \text{ならば} \quad \omega_i \quad \text{は一時的}$$



$f_i=1$  ならば  $\omega_i$  は回帰的

という。

また, 
$$p_r^{(n)}(\omega_i \rightarrow \omega_j) = p_r(\omega_i \in \Omega_0 \rightarrow \omega_j \in \Omega_n)$$

とおくとき,  $p_r^{(n)}(\omega_i \rightarrow \omega_j) > 0$  なる  $n$  があれば,  $p_r^{(m)}(\omega_j \rightarrow \omega_i) > 0$  なる  $m$  があるとき,  $\omega_i$  は本質的 (essential), そうでないときすなわち  $p_r^{(n)}(\omega_i \rightarrow \omega_j) > 0$  なる  $n$  があるが  $p_r^{(m)}(\omega_j \rightarrow \omega_i) > 0$  なる  $m$  がないような  $\omega_j$  が存在するとき  $\omega_i$  は非本質的 (inessential) という。

定理 1, 非本質的な状態は一時的である。([9] p. 18)

定理 2,  $\Omega$  に属する状態が有限個のときは, 一時的状態から出発した動点が一時的状態に永久にとどまっている確率は 0 である。([8] p. 364)

われわれが扱ったあらゆる Type は  $\Omega_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) として格子点全体と死滅点  $R_d$  を加えたものとなり,  $p_r(R_0)=1$ ,  $p_r(R_0, R_1, \dots, R_{k-1} \rightarrow R_k) = p_r(R_{k-1} \rightarrow R_k)$ ,  $p_r(R_d \rightarrow R_d) = 1$  であるから単純マルコフ連鎖になる。

そして,  $p_r^{(n)}(R_k \rightarrow R_d) > 0$  なる  $n$  が存在するが, あらゆる  $m$  に対して  $P^{(m)}(R_d \rightarrow R_k) = 0$  であるから, 内点および境界点のすべてが非本質的, したがって定理 1 より一時的となる。また,  $R_d$  は明らかに回帰的であるから, 定理 2 より有限歩で死滅する確率は 1 である。

## § 10. 結 言

以上述べたごとく, 偏微分方程式の境界値問題をモンテカルロ法によって解くためには,

1. 原方程式の近似差分方程式を作る。
2. この差分方程式を満たすような確率模型を構成する。すなわち, 遷移確率とスコアを設定する。
3. この模型を元にして, ランダムウォークにより解を求める。

の手順をとる。

緒言において述べたように, われわれはまず, モンテカルロ法による解法の可能性を確かめるため, (2) の確率模型の構成について, 一つ一つの Type を開発することに主力をおき, これらについて実験により精度, 速度などを確かめた。現在までの実験では, 最も速い Type で 25 分ほど, 最も遅い Type で 6 時間ぐらいで  $N=1,000 \sim 1,500$  回の旅行を達成し, 2~3 ケタの精度で安定したが, この実験に用いられた計算機の数百倍ないし千倍の演算速度をもつ計算機を使用すれば, 現在と同程度の時間で 3~4 ケタを期待でき, モンテカルロ法は強力な存在となるであろう。

Type VI の模型構成の考え方は, 自然に特殊な型の  $m$  次元の  $n$  元連立偏微分方程式の境界値問題の模型構成に適用できる。この場合動点  $P$  は  $m+1$  次元ユークリッド空間に広がる  $n$

個の平行超平面を‘肌に掛けて’格子点から格子点へと無作為に歩行することになる。実際には、たとえば  $m=2$ ,  $n=3$  としても模型構成はかなり複雑なものとなろうが、境界の形状などで他の解法が無力な場合、無作為が最も確実な作為となろう。

Type VII の確率模型はいくつかの Type を抱括している。すなわち、これまでの Type では個々別々に確率模型を構成してきたが、この Type の確率模型の構成法により統一的に取り扱うことができる。さらに逆行列との類似性について指摘したように、近似的に連立一次方程式を解く問題は、皆この模型を適用できると見られ、一層広い分野を抱括できる可能性がある。ただ、この構成法はスコアを積で与えるため分散がかなり大きくなる欠点をもつ。

われわれの議論では、精度、速度についての理論的な取り扱い、すなわち与えられた精度を、与えられた確率で保証するには何回の試行が必要かという問題には何らふれなかった。[6, p. 50]によれば、確率  $P_\sigma$  で  $m$  ケタの精度を保証するのに必要な試行回数  $n$  は、

$$n = 4 \cdot 10^{2m} a^2 \sigma^2(\theta_i)$$

で与えられる。ここに

$$P_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-z^2/2} dz,$$

$\sigma^2(\theta_i)$  は各試行の分散である。そこで、Type VII の確率模型に対し、 $\sigma^2(\theta_i)$  を格子間隔  $h$  および  $C_i$  の関数として評価し、最適な  $h$  と  $C_i$  を決定し、一般性のある最良の確率模型構成理論をたてることは今後に残された問題であろう。

#### 付記 1: §2. の証明

(1)  $R_0 = P_j$  のとき

$T_0^i$  に属する道  $t_0^i = (R_0, R_i, \dots)$  に、 $T_i$  に属する道  $t_i = (R_i, \dots)$  ( $i=1 \sim 4$ ) を対応させると、この対応によって  $T_0^i$  に属する道と  $T_i$  に属する道とは 1 対 1 に対応し、(2.6), (2.8), (2.9) から対応する道  $t_0^i, t_i$  の間に関係、

$$P_r(t_0^i) = \beta_i P_r(t_i), \quad \lambda(t_0^i) = \lambda(t_i) \quad (i=1 \sim 4) \quad (\text{A-1.1})$$

が成立する。

(2.6), (2.8), (A-1.1) から、

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) \lambda(t_0) = \sum_{i=1}^4 \sum_{T_0^i} P_r(t_0^i) \lambda(t_0^i) + P_r((R_0)) \lambda((R_0)) \\ &= \sum_{i=1}^4 \beta_i \sum_{T_i} P_r(t_i) \lambda(t_i) + p_0 \left( -\frac{\beta}{p_0} h^2 \rho_0 \right) \\ &= \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \beta_3 S_3 + \beta_4 S_4 - \beta h^2 \rho_0 \end{aligned} \quad (\text{A-1.2})$$

(2)  $R_0 = Q_j$  のとき

(2.7), (2.9) から、

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) \lambda(t_0) = P_r((R_0)) \lambda((R_0)) = 1 \cdot f(Q_j) \\ &= f(Q_j) \end{aligned} \quad (\text{A-1.3})$$

(A-1.2), (A-1.3) はそれぞれ  $S_0$  が (2.4), (2.5) を満たすことを示す。

付記 2: §3. の証明

(1)  $R_0=P_j$  のとき

(3.6), (3.8) から対応する ( $T_0^i$  の道)  $t_0^i$  と ( $T_i$  の道)  $t_i$  の間に,

$$P_r(t_0^i) = \beta_i P_r(t_i), \quad \Delta(t_0^i) = \Delta(t_i) - \frac{h^2 \rho_i}{4} \quad (i=1 \sim 4) \quad (A-2.1)$$

(3.6), (A-2.1) から,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) \Delta(t_0) = \sum_{i=1}^4 \sum_{T_0^i} P_r(t_0^i) \Delta(t_0^i) \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{T_i} \beta_i P_r(t_i) \left( \Delta(t_i) - \frac{h^2 \rho_i}{4} \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \beta_i \sum_{T_i} P_r(t_i) \Delta(t_i) - \sum_{i=1}^4 \beta_i \frac{h^2 \rho_i}{4} \sum_{T_i} P_r(t_i) \quad (*) \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{T_i} P_r(t_i) = 1 \quad (i=1 \sim 4) \quad (A-2.2)$$

(格子点  $R_i$  から出発した動点  $P$  が有限歩で死滅する確率が 1 であることを示す。)

を仮定し, また,

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i \frac{h^2 \rho_i}{4} \doteq \frac{h^2 \rho_0}{4}$$

(関数  $h^2 \rho / 4$  の  $R_0$  の隣接点  $R_i$  ( $i=1 \sim 4$ ) における値の重み  $\beta_i$  による平均が  $R_0$  における値に十分近いことを示す。)

が許されるものとするれば, 上式 (\*) は,

$$S_0 = \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \beta_3 S_3 + \beta_4 S_4 - \frac{h^2 \rho_0}{4} \quad (A-2.3)$$

(2)  $R_0=Q_j$  のとき,

(3.7), (3.8) から,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) \Delta(t_0) = P_r((R_0)) \Delta((R_0)) = 1 \cdot f(Q_j) \\ &= f(Q_j) \end{aligned} \quad (A-2.4)$$

(A-2.3), (A-2.4) はそれぞれ  $S_0$  が (3.4), (3.5) を満たすことを表わす。

付記 3: §4. の証明

(1)  $R_0=P_j$  のとき

付記 2 と同様に証明しうる。

(2)  $R_0=Q_{kj}$  ( $k=1 \sim 4$ ) のとき

(4.8), (4.9) から, 対応する ( $T_0^i$  の道)  $t_0^i$  と ( $T_i$  の道)  $t_i$  の間に次の等式が成立する。

$$\begin{cases} P_r(t_0^k) = \beta_k P_r(t_k), \quad P_r(t_0^i) = 0 \quad (i \neq k) \\ \Delta(t_0^i) = \Delta(t_i) + \frac{h^2}{4} \quad (i=1 \sim 4) \end{cases} \quad (A-3.1)$$

(4.8), (4.9), (A-3.1) と  $\beta_k$  の定義から,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) \Delta(t_0) = \sum_{i=1}^4 \sum_{T_0^i} P_r(t_0^i) \Delta(t_0^i) + P_r((R_0)) \Delta((R_0)) \\ &= \sum_{T_0^k} P_r(t_0^k) \Delta(t_0^k) + (1 - \beta_k) \left( -\frac{h}{4} \right) \\ &= \sum_{T_k} \beta_k P_r(t_k) \left( \Delta(t_k) + \frac{h^2}{4} \right) - \frac{h^2}{4(1+h)} \\ &= \beta_k \sum_{T_k} P_r(t_k) \Delta(t_k) + \beta_k \frac{h^2}{4} \sum_{T_k} P_r(t_k) - \frac{h^2}{4(1+h)} \quad (*) \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{T_k} P_r(t_k) = 1 \quad (\text{A-3.2})$$

(これは隣接格子点  $R_k$  から出発した動点が有限歩で死滅する確率が1であることを示す。) を仮定すると, 式 (\*) は,

$$S_0 = \beta_k S_k + \frac{h^2}{4(1+h)} - \frac{h^2}{4(1+h)} = \beta_k S_k \quad (\text{A-3.3})$$

(A-3.3) は  $S_0$  が差分方程式 (4.6) を満たすことを示している。

付記 4: §7. の証明

(1)  $R_{k0} = P_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

$t_{k0}^i = (R_{k0}, R_i, \dots, R_i)$  に  $t_i = (R_i, \dots, R_i)$  ( $i=1 \sim 4$ ) を対応させると, この対応によって  $T_{k0}^i$  に属する道と  $T_i$  に属する道が1対1に対応し, 対応する道  $t_{k0}^i$  と  $t_i$  の間に (7.11), (7.13), (7.14) から次の関係が成立する。

$$P_r(t_{k0}^i) = \beta_{ki} P_r(t_i), \quad \Delta(t_{k0}^i) = \Delta(t_i) \quad (i=1 \sim 4) \quad (\text{A-4.1})$$

(7.11), (7.14), (A-4.1) から,

$$\begin{aligned} S_{k0} &= \sum_{T_{k0}} P_r(t_{k0}) \Delta(t_{k0}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{T_{k0}^i} P_r(t_{k0}^i) \Delta(t_{k0}^i) + P_r((R_{k0})) \Delta((R_{k0})) \\ &= \sum_{i=1}^4 \beta_{ki} \sum_{T_i} P_r(t_i) \Delta(t_i) + p_{k0} \left( -\frac{\beta_k h^2 \rho_{k0}}{p_{k0}} \right) \\ &= \beta_{k1} S_{11} + \beta_{k2} S_{22} + \beta_{k3} S_{13} + \beta_{k4} S_{24} - \beta_k h^2 \rho_{k0} \end{aligned} \quad (\text{A-4.2})$$

(2)  $R_{k0} = Q_{kj}$  ( $k=1, 2$ ) のとき

(7.12), (7.14) から,

$$\begin{aligned} S_{k0} &= \sum_{T_{k0}} P_r(t_{k0}) \Delta(t_{k0}) = P_r((R_{k0})) \Delta((R_{k0})) = 1 \cdot f_k(Q_{kj}) \\ &= f_k(Q_{kj}) \end{aligned} \quad (\text{A-4.3})$$

(A-4.2), (A-4.3) はそれぞれ  $S_{k0}$  が (7.8), (7.9) を満たすことを示す。

付記 5: §8. の証明

(1)  $R_0 = P_0$  のとき,

(8.7), (8.9), (8.10), (8.11) から

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} S(t_0) p(t_0) = \sum_{j=1}^4 \sum_{T_{0j}} p_r(t_{0j}) S(t_{0j}) + p_r((R_0)) S((R_0)) \\ &= \sum_{j=1}^4 \sum_{T_j} \frac{\beta_{0j}}{C_0} p_r(t_j) C_0 S(t_j) + p_{00} (p_{00}^{-1} \rho(P_0)) \\ &= \sum_{j=1}^4 \sum_{T_j} \beta_{0j} p_r(t_j) S(t_j) + \rho_0 \\ &= \sum_{j=1}^4 \beta_{0j} S_{0j} + \rho_0 \end{aligned}$$

(2)  $R_0 = Q_0$  のとき,

(8.10), (8.11) から

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{T_0} P_r(t_0) S(t_0) = P_r((R_0)) S((R_0)) = 1 \cdot f(Q_0) \\ &= f(Q_0) \end{aligned}$$

## 文 献

- (1) Ehrlich, Louis W.: Monte Carlo Solution of Boundary Value Problems Involving the Difference Analogue of  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{K}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , Journal of the A.C.M., 1959, Vol. 6.
- (2) Suyama, H., Miyatake, O.: Design of "Random Walker" for Monte-Carlo Method, Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University, 1958.
- (3) Symposium on Monte Carlo Methods, Edited by Herbert A. Meyer, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1956, p. 382.
- (4) Kac, Mark: Application of Statistical Methods to Differential and Integral Equations, Notes on lectures delivered at Massachusetts Institute of Technology, 1949.
- (5) Metropolis, N. and Ulam, S.: The Monte Carlo Method, J. Amer. Stat. Assoc., 44 (1949), 335-341.
- (6) Curtiss, J. H.: Sampling Methods Applied to Differential and Difference Equations, Proceeding of I.B.M. Seminar on Scientific Computation, I.B.M. Corp., New York, 1950.
- (7) Cramér, Harold: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946, p. 575.
- (8) Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1, New York, John Wiley & Sons, 1960, p. 450.
- (9) Chung Kai Lai: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer-Verlag., Berlin, 1960, p. 270.
- (10) Bharucha-Reid: Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, McGraw-Hill Comp. Inc., New York, 1960, p. 468.
- (11) 宮武 修・中山 隆: モンテカルロ法, 日刊工業新聞社, 1960, p. 235.

表 1 Type II の実験結果

 $R_0 = (-0.50, 0.00)$ , 厳密解:  $u_0 = 1.0625$ 

$N$	$S/N$	$N$	$S/N$	$N$	$S/N$	$N$	$S/N$
0	0	80	1.040	160	1.055	240	1.058
1	1.052	81	1.042	161	1.052	241	1.058
2	1.137	82	1.044	162	1.052	242	1.057
3	1.110	83	1.046	163	1.052	243	1.057
4	1.096	84	1.043	164	1.053	244	1.058
10	1.062	90	1.042	170	1.056	250	1.057
11	1.026	91	1.044	171	1.053	251	1.056
12	1.031	92	1.045	172	1.054	252	1.056
13	1.020	93	1.046	173	1.054	253	1.056
14	1.003	94	1.045	174	1.055	254	1.056
20	1.026	100	1.042	180	1.056	260	1.053
21	1.035	101	1.042	181	1.057	261	1.053
22	1.037	102	1.042	182	1.057	262	1.053
23	1.043	103	1.044	183	1.058	263	1.053
24	1.049	104	1.045	184	1.055	264	1.053
30	1.023	110	1.041	190	1.056	270	1.052
31	1.022	111	1.041	191	1.057	271	1.051
32	1.028	112	1.043	192	1.057	272	1.051
33	1.032	113	1.044	193	1.057	273	1.051
34	1.030	114	1.044	194	1.058	274	1.052
40	1.029	120	1.045	200	1.057	280	1.049
41	1.032	121	1.046	201	1.056	281	1.050
42	1.028	122	1.048	202	1.056	282	1.051
43	1.019	123	1.049	203	1.057	283	1.051
44	1.022	124	1.050	204	1.057	284	1.052
50	1.032	130	1.051	210	1.058	290	1.052
51	1.030	131	1.051	211	1.057	291	1.052
52	1.032	132	1.052	212	1.057	292	1.053
53	1.033	133	1.053	213	1.058	293	1.053
54	1.031	134	1.054	214	1.058	294	1.053
60	1.039	140	1.054	220	1.060	300	1.053
61	1.038	141	1.055	221	1.060	301	1.054
62	1.041	142	1.054	222	1.060	302	1.054
63	1.043	143	1.056	223	1.059	303	1.054
64	1.044	144	1.056	224	1.060	304	1.054
70	1.029	150	1.056	230	1.060	310	1.055
71	1.032	151	1.056	231	1.060	311	1.055
72	1.031	152	1.057	232	1.061	312	1.055
73	1.032	153	1.058	233	1.061	313	1.053
74	1.031	154	1.058	234	1.061	314	1.054

$N$	$S/N$	$N$	$S/N$	$N$	$S/N$	$N$	$S/N$
320	1.056	410	1.059	500	1.057	590	1.057
321	1.056	411	1.059	501	1.057	591	1.057
322	1.056	412	1.059	502	1.056	592	1.057
323	1.057	413	1.059	503	1.056	593	1.058
324	1.057	414	1.060	504	1.056	594	1.058
330	1.057	420	1.060	510	1.056	600	1.058
331	1.057	421	1.060	511	1.056	601	1.058
332	1.056	422	1.060	512	1.056	602	1.057
333	1.057	423	1.060	513	1.057	603	1.058
334	1.057	424	1.060	514	1.057	604	1.058
340	1.055	430	1.059	520	1.054	610	1.056
341	1.055	431	1.059	521	1.055	611	1.056
342	1.056	432	1.059	522	1.055	612	1.056
343	1.056	433	1.059	523	1.054	613	1.056
344	1.056	434	1.059	524	1.055	614	1.056
350	1.055	440	1.060	530	1.055	620	1.057
351	1.054	441	1.058	531	1.055	621	1.056
352	1.055	442	1.058	532	1.055	622	1.056
353	1.055	443	1.059	533	1.055	623	1.056
354	1.055	444	1.058	534	1.055	624	1.056
360	1.056	450	1.058	540	1.056	630	1.055
361	1.056	451	1.058	541	1.056	631	1.055
362	1.056	452	1.058	542	1.057	632	1.056
363	1.055	453	1.059	543	1.057	633	1.056
364	1.056	454	1.059	544	1.057	634	1.055
370	1.057	460	1.058	550	1.057	640	1.055
371	1.057	461	1.059	551	1.057	641	1.055
372	1.057	462	1.059	552	1.057	642	1.055
373	1.058	463	1.058	553	1.057	643	1.055
374	1.058	464	1.059	554	1.057	644	1.055
380	1.060	470	1.059	560	1.058	650	1.055
381	1.060	471	1.059	561	1.057	651	1.055
382	1.060	472	1.059	562	1.057	652	1.055
383	1.060	473	1.058	563	1.058	653	1.055
384	1.059	474	1.058	564	1.058	654	1.055
390	1.059	480	1.058	570	1.058	660	1.055
391	1.059	481	1.059	571	1.057	661	1.055
392	1.059	482	1.057	572	1.057	662	1.056
393	1.059	483	1.057	573	1.057	663	1.056
394	1.059	484	1.057	574	1.057	664	1.056
400	1.058	490	1.057	580	1.058	670	1.055
401	1.058	491	1.057	581	1.057	671	1.055
402	1.059	492	1.057	582	1.058	672	1.055
403	1.058	493	1.057	583	1.058	673	1.055
404	1.058	494	1.057	584	1.058	674	1.055

<i>N</i>	<i>S/N</i>	<i>N</i>	<i>S/N</i>	<i>N</i>	<i>S/N</i>	<i>N</i>	<i>S/N</i>
680	1.056	770	1.058	860	1.058	950	1.056
681	1.056	771	1.058	861	1.058	951	1.056
682	1.056	772	1.058	862	1.058	952	1.056
683	1.056	773	1.058	863	1.058	953	1.056
684	1.056	774	1.058	864	1.058	954	1.056
690	1.055	780	1.058	870	1.058	960	1.056
691	1.055	781	1.058	871	1.057	961	1.056
692	1.055	782	1.059	872	1.058	962	1.056
693	1.055	783	1.059	873	1.058	963	1.056
694	1.055	784	1.059	874	1.058	964	1.056
700	1.055	790	1.058	880	1.058	970	1.056
701	1.056	791	1.058	881	1.057	971	1.056
702	1.056	792	1.058	882	1.058	972	1.056
703	1.056	793	1.058	883	1.058	973	1.056
704	1.056	794	1.058	884	1.058	974	1.056
710	1.057	800	1.058	890	1.057	980	1.056
711	1.056	801	1.058	891	1.057	981	1.056
712	1.056	802	1.058	892	1.057	982	1.056
713	1.056	803	1.058	893	1.057	983	1.056
714	1.056	804	1.058	894	1.057	984	1.056
720	1.057	810	1.059	900	1.057	990	1.056
721	1.057	811	1.059	901	1.057	991	1.056
722	1.057	812	1.059	902	1.057	992	1.056
723	1.057	813	1.059	903	1.057	993	1.056
724	1.057	814	1.059	904	1.056	994	1.056
730	1.058	820	1.058	910	1.057	1000	1.056
731	1.058	821	1.058	911	1.057	1001	1.056
732	1.058	822	1.058	912	1.057	1002	1.056
733	1.058	823	1.058	913	1.057	1003	1.056
734	1.058	824	1.058	914	1.056	1004	1.056
740	1.058	830	1.057	920	1.056		
741	1.058	831	1.057	921	1.056		
742	1.058	832	1.057	922	1.056		
743	1.058	833	1.057	923	1.056		
744	1.058	834	1.057	924	1.056		
750	1.059	840	1.056	930	1.056		
751	1.059	841	1.056	931	1.056		
752	1.059	842	1.056	932	1.056		
753	1.059	843	1.056	933	1.056		
754	1.059	844	1.056	934	1.056		
760	1.059	850	1.057	940	1.056		
761	1.059	851	1.057	941	1.056		
762	1.059	852	1.057	942	1.056		
763	1.059	853	1.057	943	1.056		
764	1.059	854	1.057	944	1.056		



<p>NAL TR-23 航空技術研究所 いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験</p> <p>1962年2月 30頁</p> <p>だ円型, 双曲型, だ円型連立などのいくつかの型の2階線型偏微分方程式の境界値問題をモンテカルロ法によって数値的に解くための理論構成と Datatron 205 電子計算機による実験についての報告である。'道'の概念の導入で, 従来なされた方法より一層広い範囲を統一的に論じられるようになり, 新しい型に対する模型構成が容易になった。所要時間は最も早い型で 1,500 回の試行が 25 分, 最も遅い型で 1,000 回の試行が 6 時間ほどであった。精度はどの型も 1,000 回の試行で 5% 以内に安定した。</p>	<p>I. 樋口一雄 高橋利之 島海良三 II. NAL TR-23 III. 517.941.9</p>	<p>NAL TR-23 航空技術研究所 いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験</p> <p>1962年2月 30頁</p> <p>だ円型, 双曲型, だ円型連立などのいくつかの型の2階線型偏微分方程式の境界値問題をモンテカルロ法によって数値的に解くための理論構成と Datatron 205 電子計算機による実験についての報告である。'道'の概念の導入で, 従来なされた方法より一層広い範囲を統一的に論じられるようになり, 新しい型に対する模型構成が容易になった。所要時間は最も早い型で 1,500 回の試行が 25 分, 最も遅い型で 1,000 回の試行が 6 時間ほどであった。精度はどの型も 1,000 回の試行で 5% 以内に安定した。</p>	<p>I. 樋口一雄 高橋利之 島海良三 II. NAL TR-23 III. 517.941.9</p>
<p>NAL TR-23 航空技術研究所 いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験</p> <p>1962年2月 30頁</p> <p>だ円型, 双曲型, だ円型連立などのいくつかの型の2階線型偏微分方程式の境界値問題をモンテカルロ法によって数値的に解くための理論構成と Datatron 205 電子計算機による実験についての報告である。'道'の概念の導入で, 従来なされた方法より一層広い範囲を統一的に論じられるようになり, 新しい型に対する模型構成が容易になった。所要時間は最も早い型で 1,500 回の試行が 25 分, 最も遅い型で 1,000 回の試行が 6 時間ほどであった。精度はどの型も 1,000 回の試行で 5% 以内に安定した。</p>	<p>I. 樋口一雄 高橋利之 島海良三 II. NAL TR-23 III. 517.941.9</p>	<p>NAL TR-23 航空技術研究所 いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験</p> <p>1962年2月 30頁</p> <p>だ円型, 双曲型, だ円型連立などのいくつかの型の2階線型偏微分方程式の境界値問題をモンテカルロ法によって数値的に解くための理論構成と Datatron 205 電子計算機による実験についての報告である。'道'の概念の導入で, 従来なされた方法より一層広い範囲を統一的に論じられるようになり, 新しい型に対する模型構成が容易になった。所要時間は最も早い型で 1,500 回の試行が 25 分, 最も遅い型で 1,000 回の試行が 6 時間ほどであった。精度はどの型も 1,000 回の試行で 5% 以内に安定した。</p>	<p>I. 樋口一雄 高橋利之 島海良三 II. NAL TR-23 III. 517.941.9</p>

- |       |   |          |                    |
|-------|---|----------|--------------------|
| TR-19 | 高速翼車の回転強度<br>Strength of High-Speed Rotor   | 1961年12月 | 佐藤和郎, 永井文雄         |
| TR-20 | Blasius 型微分方程式の両側無限遠<br>境界値問題の数値解法<br>A Numerical Method for Solving Blasius'<br>Type Differential Equation | 1962年1月  | 樋口一雄, 戸川隼人         |
| TR-21 | 遷音速における二次元操縦面の研究 (I)<br>An Investigation of Two-dimensional<br>Control Surface at Transonic Speed (I)       | 1962年1月  | 神谷信彦               |
| TR-22 | 変断面梁の曲げ自由振動について<br>On the Free Lateral Vibration of a Beam<br>with Variable Cross Section                   | 1962年2月  | 川井忠彦, 戸川隼人<br>林 洋一 |

---

## 航空技術研究所報告 23 号

昭和 37 年 2 月 発行

発行所 航空技術研究所  
東京都三鷹市新川 700  
電話武蔵野 (0422) (3) 5171 (代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53

---