

UDC 533.6.011  
:517

# 航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-27

非定常遷音速流の近似解析

細川 巖・三好 甫

1962年7月

航空技術研究所  
NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

報 告

TR-1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960年2月	平木一, 石井孝雄 大島信彦
TR-2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960年5月	山内正男, 松木正勝 塩入淳平, 富永守之
TR-3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960年8月	小橋安次郎, 長洲秀夫 高島一明, 波木井潔
TR-4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960年9月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960年12月	中井暎一, 橋爪 宏 中村泰治
TR-6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960年12月	竹中幸彦
TR-7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961年1月	村崎寿満
TR-8	繰返し荷重装置試験の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961年3月	竹内和之, 飯田宗四郎
TR-9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961年3月	細川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松木正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 埜 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961年11月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge- Beam Method of Measuring Gas Density	1961年12月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝

# 非定常遷音速流の近似解析

網 川 巖・三 好 甫

## An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow

By Iwao HOSOKAWA and Hajime MIYOSHI

First, a theory of unsteady transonic flow is established on the basis of approximate treatment of the nonlinear equation of the small disturbance theory of unsteady transonic flow. The nonlinear correction theory which the author devised as the approximate method of treating the steady transonic flow is utilized in the theoretical procedure. Second, as an example of application, the problem of a biconvex circular-arc aerofoil pitching and vertically oscillating periodically at sonic speed ( $M_\infty=1$ ) is dealt with. The result of calculation is compared with Nelson and Berman's based on the linear theory of unsteady flow, and found to be more reasonable in the whole region of the reduced frequency  $k$ .

### §1. ま え が き

線型の微小攪乱理論が可能である亜音速と超音速の非定常流では、空気力の解析の手法はすでに研究されていて<sup>(1)(2)</sup>、多くの適用が行なわれているが、その中間の遷音速の流れについては、定常流の場合ですら問題があり、非定常流の場合にも本当に満足いく結果はまだ得られていない。

問題の困難は、基礎方程式が非線型の項を含むことにあり、 $M_\infty \cong 1$  でこれを無視すると解の本質が失われることにある。しかし、非定常流の場合には、流れの変化が速くなると、時間的変化の項に比べてこの非線型項の役割は相対的に小さくなり、線型理論でも有効な結果を出しうるこゝといえるので、結局、問題は  $M_\infty \cong 1$ ,  $k \cong 0$  ( $k$  は無次元の振動数で、流れの時間的変化の速さを示す) に近い範囲に絞られるであろう<sup>(1)(3)</sup>。

ここで筆者が報告するのは、この最も難かしい範囲に対する、簡単でしかも一般的な“接近”についての最近の研究である。先に筆者は、定常遷音速流の場合に有効な近似理論を提案したが<sup>(4)</sup>、この方法を非定常流の取扱いにも拡張することができれば、問題は一応の解決を見るであろう。もし、基礎方程式を一般的な非定常流のものにとって理論を出発させれば、その結果は  $k$  の大きい所でも妥当であり、したがってその辺では線型理論に漸近する解になっているはずである。

しかし、筆者の方法の非定常流への完全な拡張は今のところ可能でない。そこで  $k \cong 0$  と  $k$  の大きいところの両方で妥当と思われる近似計算を設定し、 $k$  の中間領域での結果は一種の内挿として理解する方法をとる。これが §3 で展開する混成理論である。混成理論の適用可能性は、定常流の非線型補正理論と同様に、薄翼や胴体等の周りの流れについて十分一般的である。

ここでは、一例として Nelson & Berman<sup>(5)</sup> のてがけた、二次元翼の  $M_\infty=1$  におけるピッチングと縦振動の場合の動空力係数（複素数で示される）の計算を行ない、彼らの結果（非定常線型理論）と比較する。このようなデータは遷音速の空力弾性問題に寄与することが期待される。

## §2. 基礎式

非定常の遷音速流を支配する基礎方程式は、流れが定常一様流から大きく変化しないという小擾乱の仮定においては、最も一般に次のような形に帰着させることができる。

$$(1-M_\infty^2)\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}-(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}-2M_\infty^2\Phi_{xt}-M_\infty^2\Phi_{tt}=0 \quad (2.1)$$

ここで、 $M_\infty, U_\infty$  は一様流のマッハ数および速度、 $\Phi$  は小擾乱の速度ポテンシャルを  $U_\infty$  で割ったもの、 $\gamma$  は気体の両比熱比、 $(x, y, z)$  は物体の代表長さ  $L$  で無次元化した空間座標で一様流は  $x$  方向に流れるとし、 $t$  は本当の時刻  $t_r$  に  $U_\infty/L$  を乗じたものである（たとえば Ref. 3 を見るとよい）。

そして境界条件は、もし境界の形が

$$B(x, y, z, t)=0 \quad (2.2)$$

で与えられるとすると、流れが物体面に平行であることから、物体面上 (2.2) で、

$$B_t+(1+\Phi_x)B_x+\Phi_yB_y+\Phi_zB_z=0 \quad (2.3)$$

となることである。 $x-y$  面上にある薄翼のような場合には、これは、 $z=0$  で

$$\Phi_z=-(B_t+B_x)/B_x \quad (2.4)$$

を要求すると、近似的に考える。

さて、境界条件によって (2.1) が解けたとすると、非定常の流れの圧力係数は、Bernoulli の定理から

$$C_p=-2\Phi_x(-\Phi_y^2-\Phi_z^2)-2\Phi_t \quad (2.5)$$

と導かれる。第2項  $(-\Phi_y^2-\Phi_z^2)$  はほぼ軸対称の細長い胴体の場合に他の項と同程度となるが、薄翼の場合には無視できる。この  $C_p$  を物体の周りに積分すれば、物体に働く縦横の力の係数、 $C_D$  (抵抗)、 $C_L$  (揚力) をうることができる。

(2.1) の方程式において、或る項を無視するとそれだけ式は簡単になる。たとえば、Landhal<sup>(3)</sup> は、 $(1-M_\infty^2)\Phi_{xx}$  と  $(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}$  を省略する場合を検討し、それは

$$k=\omega L/U_\infty \gg |1-M_L| \quad (2.6)$$

の時に可能であることを導いた。ただし、 $\omega$  は流れの変化の振動数、 $L$  は物体の代表長さ、 $M_L$  は局所マッハ数の最大のものである。その場合、方程式は線型である。これに対して、 $(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}$  だけを省略すると、従来の亜音速、超音速の非定常線型理論になる。

## § 3. 混成理論の試み

(2.1) を項の省略なしに解くことができれば、その解は  $M_\infty$  のあらゆる場合（極超音速を除く）を含み、非常に見通しが良くなるであろう。そこで、まず、遷音速線型理論の手法を借りて、

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}-K\varphi_x-2M_\infty^2\varphi_{xt}-M_\infty^2\varphi_{tt}=0 \quad (3.1)$$

のように、線型方程式を作ってみよう。 $K$  は、唯の定数である。そして、(2.1) と (3.1) を

$$\Phi=\varphi+g \quad (3.2)$$

によって関係づけ、未知函数  $g$  を追求する。

(2.1), (3.1), (3.2) から、 $g$  の満たすべき方程式は

$$g_{yy}+g_{zz}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\{(M_\infty^2-1)+(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_x\}g_x+\frac{1}{2}(\gamma+1)M_\infty^2g_x\right] \\ +\{(\gamma+1)M_\infty^2\varphi_{xx}-K\}\varphi_x+2M_\infty^2g_{xt}+M_\infty^2g_{tt} \quad (3.3)$$

となることが直ちにわかる。この式は複雑で、容易に解けそうもないが、もし、

$$2M_\infty^2g_{xt}+M_\infty^2g_{tt}\cong 0 \quad (3.4)$$

として、これを省略することが許されれば (3.3) は、すでに筆者によって研究された非線型補正理論 (NAL TR-9 参照) の適用できる形となり、物体近傍での近似解は容易に与えることができる。果して (3.4) の近似が妥当なものか、次のように検討してみよう。

$$(i) \text{ まず, } k \gg |1-M_L| \cong |\Phi_x| = O(\tau) \quad (3.5)$$

( $t$  は小擾乱の程度) の場合は、Lin-Reissner-Tsien<sup>(6)</sup> や Landhal<sup>(8)</sup> が論じたように、非線型項  $(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x\Phi_{xx}$  の役割は (2.1) で非常に小さくなり、解は線型理論によって十分予測できるはずである。これは、

$$\Phi \cong \varphi ; g \cong 0 \quad (3.6)$$

を意味する。したがって、 $\varphi, \varphi_{xt}, \varphi_{tt}$  に比べて

$$g, g_{xt}, g_{tt} \cong 0 \quad (3.7)$$

とすることは一応当を得たことである。

$$(ii) \text{ 次に, } k \ll O(\tau) \quad (3.8)$$

の場合は、もともと理論は定常理論に近接するので、(3.3) における  $g$  の時間微分そのものは他の項と比べて大きくなるはずはなく、(3.8) の極限ではなくなってしまうであろう。こうして再び (3.7) を結論することができる。

さて、上の考察は必ずしも厳密なものではなく、 $k \approx O(\tau)$  の狭い範囲では (3.7) の真偽は疑わしいと思われるが、工学的観点からは、理論的取扱いの上に著しい簡単性と統一性を与えるという利益をもち、しかも両極限における解の妥当性を十分保証しているので、大いに興味と期待をもつ

て良さそうである。混成理論というのは、 $k \gg O(\tau)$ ,  $k \ll O(\tau)$  という別々の極限で妥当な理論を内挿し、一元化した理論という意味である。

非線型補正理論の過程によって、混成理論の結果は、次のように定式化される。

$$\Phi_x = \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \pm \sqrt{Y(x)} \quad (3.9)$$

$$Y(x) = \left\{ \varphi_x - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\}^2 - 2 \int_{c^*}^x \left\{ \varphi_{xx} - \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\} \varphi_x dx \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right\}^2 + \varphi_x^2(c^*) - 2 \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \varphi_x(x) \\ &+ 2 \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \{ \varphi(x) - \varphi(c^*) \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$c^*$  および  $K$  は

$$\varphi_x(c^*) = (1 - M_\infty^2) / (\gamma + 1)M_\infty^2 \quad (3.12)$$

$$\varphi_{xx}(c^*) = K / (\gamma + 1)M_\infty^2 \quad (3.13)$$

の連立方程式から決定される。

非定常流においては、一般に非対称な流れを取り扱うので、 $\Phi_x$  は対称な部分と反対称な部分に分けて、

$$\Phi_x = \Phi_{s,x} + \frac{1}{2} \Delta \Phi_x \quad (3.14)$$

とするのが便利である。普通（揚力と抵抗は同程度であるから） $\Phi_{s,x} \gg 1/2(\Delta \Phi_x)$  であり、このことから、 $\Delta \Phi_x$  は (3.9), (3.10) より

$$\Delta \Phi_x = \pm \frac{\Delta Y(x)}{2\sqrt{Y_s(x)}} \quad (3.15)$$

$$\Delta Y(x) = -2 \left[ \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \{ \Delta \varphi_x(x) - \Delta \varphi_x(c^*) \} - \frac{K}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \{ \Delta \varphi(x) - \Delta \varphi(c^*) \} \right] \quad (3.16)$$

として簡単に与えることができる。この時、 $c^*$  と  $K$  は、 $\Phi_{s,x}$  において求められたものをそのまま使う。(3.16) における  $\Delta \varphi, \Delta \varphi_x$  は、もちろん、非定常遷音速線型理論 (3.1) において、揚力の境界条件に必ず解として決定されるはずである。

このようにして解  $\Phi_x$  が決められると、

$$\Phi_y, \Phi_z = \varphi_y, \varphi_z \quad (3.17)$$

(NAL TR-9, (3.14) 式参照) および (3.7) により

$$\Phi_i = \varphi_i \quad (3.18)$$

であるから、空気力の圧力係数  $C_p$  は完全に求まることになる。

## § 4. 非定常遷音速線型理論

(3.1) を解くこと、つまり  $\varphi$  を求めることが、 $C_p$  を求めることの出発点であることはすでに見られた。ここで簡単にその解決を与えて置こう。

振動数  $k$  の成分だけを与えれば十分であるから、(一般の場合は初期条件に応じて各振動数の解の重ね合わせをすればよい。)

$$\varphi = e^{ikz} \varphi_1(x, y, z) \quad (4.1)$$

として、(3.1) は、

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} + \varphi_{1zz} - (K + 2ikM_\infty^2) \varphi_{1x} + k^2 M_\infty^2 \varphi_1 = 0 \quad (4.2)$$

と表わされる。さらに、

$$(1 - M_\infty^2) y^2 \rightarrow y^2, \quad (1 - M_\infty^2) z^2 \rightarrow z^2 \quad (4.3)$$

と記し、

$$\varphi_1 = \varphi_0 e^{\alpha x} \quad (4.4)$$

$$\alpha = (K + 2ikM_\infty^2) / 2(1 - M_\infty^2) \quad (4.5)$$

と変換すると、(4.2) は

$$\Delta_L \varphi_0 - \chi \varphi_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$\chi = (K^2/4 - k^2 M_\infty^2 + ikM_\infty^2) / (1 - M_\infty^2)^2 \quad (4.7)$$

に帰着する。ただし、 $\Delta_L$  は新しい変数  $x, y, z$  によるラプラス演算子である。(4.6) の基礎解は

$$\varphi_0 = (-1/4\pi) e^{-\sqrt{\chi} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad M_\infty^2 < 1 \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} (-1/2\pi) \cosh(\sqrt{\chi} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ 0, \text{ 後流マッハ円錐の外側で, } M_\infty^2 > 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

であるから、これによって、境界条件 (2.3), (2.4) に応ずる解を作ることは容易である。実際、 $k \rightarrow 0$  とすると、 $\chi$  は定常の遷音速線型理論における  $\alpha^2 (= K/2(1 - M_\infty^2))$  となり、この時 (4.8), (4.9) からはすでに Maeder & Thommen によって研究された多くの解をうることができる。(このような基礎解から一般にいろいろな解をうる仕方については、未刊の「遷音速流小擾乱理論の研究 (II)」として報告する予定である。)  $\chi$  は一般に複素数であって、(4.8), (4.9) は定常 ( $\chi = \alpha^2$ ) の基礎解からの一種の解析延長になっている。

ところで、 $M_\infty \cong 1$  の時には、 $\varphi_1$  の基礎解は (4.8) あるいは (4.9) より、

$$\varphi_1 = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi x} \exp \left[ \frac{k^2 M_\infty^2}{K + 2ikM_\infty^2} x - \frac{K + 2ikM_\infty^2}{4x} (y^2 + z^2) \right] \\ 0, \quad x < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

となることが示される。ただし、ここでは  $x, y, z$  は元の座標空間に戻った。二次元の場合には、

対応する基礎解は ( $M_\infty=1$ )

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{\pi(K+2ik)x}} \exp\left[\frac{k^2}{K+2ik}x - \frac{K+2ik}{4x}z^2\right] \\ 0, \quad x < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

となる。(これは (4.10) を  $y$  で積分しても得られる。) (4.11) で,  $K \rightarrow 0$  とすれば, 直ちに Rott のえた二次元線型理論の基礎解<sup>(7)</sup>になり, また,  $k \rightarrow 0$  とすれば, これはすでに筆者の扱った定常遷音速線型理論の基礎解である<sup>(4)(8)</sup>。

一般に, 線型場の理論における基礎解と, 実際の解との関係は, 基礎解を  $G$  で示すと,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x', y', z') G(x-x', y-y', z-z') dS' \\ & - \iint \varphi(x', y', z') \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-x', y-y', z-z') dS' \end{aligned} \quad (4.12)$$

のようになる。ここに  $\iint dS'$  は場の境界における面積分,  $\partial/\partial \nu$  はその面積要素における法線微分である。第1項は Source の積分と呼ばれ, その強さ  $\partial \varphi/\partial \nu$  は, 翼理論の場合には境界条件から直接に与えることができ, 第2項は doublet の積分と呼ばれ, その強さ  $\varphi$  は直接わからず, 揚力の積分方程式によって求められるのが普通である\*。

### § 5. $M_\infty=1$ の二次元翼のピッチングと縦振動の場合

二次元翼がマッハ1で流れと直角に振動する場合は, 最も簡単な非定常遷音速流の例題であろう。ポテンシャルを対称部分と非対称部分に分けると, 非定常の振動は常に後者に属する。もし翼型がもともと上下対称なものであるなら, ポテンシャルの定常部分は  $\Phi_s$  および  $\varphi_s$  のみによって作られる。(つまり翼の厚みは時間によって変らないから, この境界条件がもたらす寄与は明らかに定常である。) この結果, この種の問題の中心は, 振動境界に対応する非対称の解  $1/2\Delta\varphi$  をいかに解くかということにかかるといえるであろう。 $\varphi_s$  および  $\Phi_s$  はすでに定常の理論で解決済みであるから。

さて, ここで境界条件 (2.4) を書き直そう。いま, 境界として二次元翼の振動するキャンバの型を

$$B \equiv z - h(x, t) = 0 \quad (5.1)$$

として, (3.17) を考慮すると, (2.4) は

$$\varphi_z = h_t + h_x \quad \text{on } z=0 \quad (5.2)$$

となる。

\* これらの基礎解によって, 現在, 細長い胴体と二次元翼の場合は, 一般に  $\varphi$  を解析することは比較的に簡単な見通しにあることを付記しておこう。



ここで、(4.12) を利用し、解の非対称部分にはいまの問題で第2項の doublet 分布だけが寄与することを考えて、境界面として翼およびウェークの上下面を取ると、

$$\varphi_z = \iint \Delta\varphi(x', y', 0) \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(x-x', y-y', z) dx' dy' \quad (5.3)$$

が得られる。二次元の場合には、

$$\varphi_z = \int \Delta\varphi(x') \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(x-x', z) dx' \quad (5.4)$$

と書かれ、この  $G$  は (5.3) の  $G$  の積分  $\left(\int_0^\infty G dy'\right)$  によってえられる二次元の (3.1) の基礎解である。ただし、 $\Delta\varphi$  は上下面における  $\varphi$  の差を表わす。(5.2) と (5.4) によって、 $\Delta\varphi$  に関する揚力積分方程式ができ上がったわけである。しかし、(5.4) の積分記号の中の微分は古典的に発散の問題を含むので、これを意義あらしめるためには Hadamard の有限積分、あるいは超函数による裏付けが必要である。(ここでは煩雑になるので触れない。)

さて、 $M_\infty=1$  の時に、 $G$  は (4.11) によって与えられているので、揚力積分方程式は、

$$h_x + h_t = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^x \Delta\varphi(x', t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(x-x', z) dx' \quad (5.5)$$

( $\int$  は Hadamard の有限積分を考慮せることを示す。) 翼の前縁は  $x=0$  にあるとした。積分の上限が  $x$  になるのは (4.11) のように  $x < 0$  で  $G=0$  であることによる。

$$h = h_0 e^{ikt} - \alpha_0 x e^{ikt} \quad (5.6)$$

を入れ、

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(x, z) = \frac{\sqrt{K+2ik}}{4\sqrt{\pi} x^{3/2}} \exp\left[\frac{k^2}{K+2ik} x\right] \quad (5.7)$$

を代入すると、(5.5) は

$$-\alpha_0 + ik(h_0 - \alpha_0 x) = \frac{\sqrt{K+2ik}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^x \Delta\varphi_1(x') \frac{\exp[k^2/(K+2ik) \cdot (x-x')]}{(x-x')^{3/2}} dx' \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\sqrt{K+2ik}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \left\{ \Delta\varphi_1'(x') - \frac{k^2}{K+2ik} \Delta\varphi_1(x') \right\} \\ &\quad \times \frac{\exp[k^2/(K+2ik) \cdot (x-x')]}{\sqrt{x-x'}} dx' \end{aligned} \quad (5.9)$$

と計算される。これは、ラプラス変換によって解ける形である。

## §6. $M_\infty=1$ の二次元揚力積分方程式の解

ここで、(5.9) の解き方を述べる。

$$\begin{aligned} -\alpha_0 + ikh_0 &= a \\ -ik\alpha_0 &= b \end{aligned} \quad (6.1)$$

と書くと,

$$\mathcal{L}(a+bx; p) = \int_0^{\infty} (a+bx)e^{-px} dx = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} \quad (6.2)$$

( $\mathcal{L}$  はラプラス変換を示す。) 次に,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left[\frac{k^2}{K+2ik}x\right]; p\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left[\frac{k^2}{K+2ik}x - px\right] x dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p - k^2/(K+2ik)}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

(5.9) のラプラス変換は

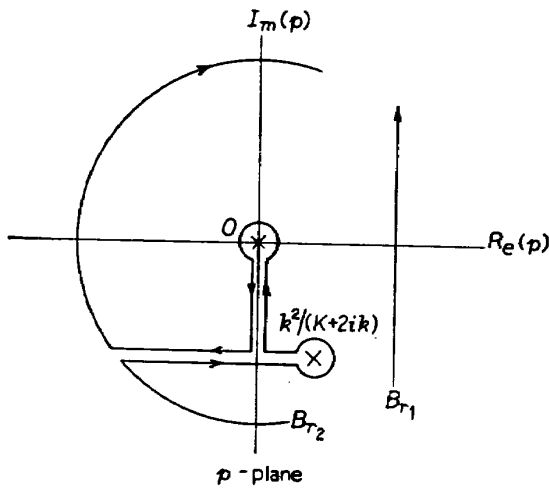
$$\mathcal{L}(a+bx) = -\frac{\sqrt{K+2ik}}{2\sqrt{\pi}} \left(p - \frac{k^2}{K+2ik}\right) \mathcal{L}(\Delta\varphi) \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left[\frac{k^2}{K+2ik}x\right]\right) \quad (6.4)$$

であるから, 直ちに

$$\mathcal{L}(\Delta\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{K+2ik}} \frac{(a/p + b/p^2)}{\sqrt{p - k^2/(K+2ik)}} \quad (6.5)$$

がえられる。したがって,

$$\Delta\varphi = \frac{-2}{\sqrt{K+2ik}} \int_0^x \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{(a+b/p)e^{px}}{\sqrt{p - k^2/(K+2ik)}} dp dx \quad (6.6)$$



$Br$  はガウス平面の Bromwich 積分路を示す。(Ref. 9 参照) ここで,  $\Delta\varphi(0)=0$  を考慮した。

(6.6) の積分内の特異点は,

$$\begin{aligned} p &= k^2/(K+2ik) \\ &= (K-2ik)k^2/(K^2+4k^2) : \text{分岐点} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$p=0 : \text{1位の極} \quad (6.8)$$

であるから, Bromwich-積分路は左図のように取ることができる。(Br<sub>1</sub> が元の Bromwich-積分路, Br<sub>2</sub> は変形したもので, Cauchy の定理によって, 両方

は等価である。) したがって, (6.6) は

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{-2}{\sqrt{K+2ik}} \int_0^x \frac{1}{2\pi i} \left\{ \text{Res.}(p=0) + \oint_{p=k^2/(K+2ik)} \frac{(a+b/p)e^{px}}{\sqrt{p - k^2/(K+2ik)}} dp \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-\infty - i\frac{2k^2}{K^2+4k^2}}^{k^2/(K+2ik)} \frac{(a+b/p)e^{px}}{\sqrt{p - k^2/(K+2ik)}} dp \right\} dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

(大円弧で示される外周積分は、その半径を無限にした時は消える。) そこで、

$$\text{Res.}(p=0)=2\pi i \frac{b}{ik/\sqrt{K+2ik}} \quad (6.10)$$

$$\text{第2項}=0 \quad (6.11)$$

であり、

$$\int_{-\infty-i\frac{2k^2}{K^2+4k^2}}^{k^2/(k+2ik)} \frac{(a+b/p)e^{px}}{\sqrt{p-k^2/(K+2ik)}} \alpha_p = I. \quad (6.12)$$

とすると、

$$\Delta\varphi = \frac{-2}{\sqrt{K+2ik}} \int_0^x \left\{ \frac{b}{ik/\sqrt{K+2ik}} - \frac{1}{\pi i} I \right\} dx \quad (9.13)$$

となる。

$I$  の計算を考えよう。

$$p = t - i \frac{2k^2}{K^2+4k^2} + \frac{k^2 K}{K^2+4k^2} = t + k^2/(K+2ik) \quad (6.14)$$

と変数変換すると、

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{[k^2/(K+2ik)]x}}{\sqrt{t}} \left\{ a + \frac{b}{t+k^2/(K+2ik)} \right\} e^{tx} dt \quad (6.15)$$

これはさらに、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} e^{[k^2/(K+2ik)]x} \int_0^{\infty} \left\{ a + \frac{b}{k^2/(K+2ik)-t} \right\} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{i} e^{[k^2/(K+2ik)]x} \left\{ a \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} + \int_0^{\infty} \frac{b}{k^2/(K+2ik)-t} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

と書かれる。この第2項を計算するために、

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{c-t} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \quad (6.17)$$

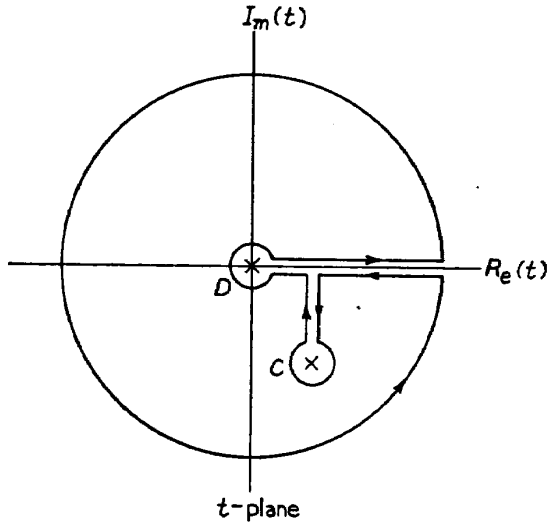
とし、これを微分する。

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \int_0^{\infty} \frac{-t}{c-t} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{c}{c-t} \right) \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} - c\psi(x) \end{aligned} \quad (6.18)$$

(6.18) より、容易に

$$\psi(x) = e^{-cx} \int_0^x \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} e^{cx} dx \quad (6.19)$$

が得られる。ただし積分定数は、(6.17) より



$$\psi(0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(c-t)\sqrt{t}} dt \quad (6.20)$$

の条件より決めなければならない。(6.20)の積分内には,

$$t=0 : \text{分岐点} \quad (6.21)$$

$$t=c : \text{1位の極} \quad (6.22)$$

の特異点がある。そこで、 $t$ のガウス平面で、左図のような閉じた積分路の上の複素積分:

$$\oint \frac{1}{(c-t)\sqrt{t}} dt = 0 \quad (6.23)$$

を考えると、これは、

$$2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(c-t)\sqrt{t}} dt = \text{Res.}(t=c) + \oint_{t=0} \frac{dt}{(c-t)\sqrt{t}} \quad (6.24)$$

$$= 2\pi i / \sqrt{c} \quad (6.25)$$

を与える。したがって、

$$\psi(0) = \pi i / \sqrt{c} \quad (6.26)$$

この結果、

$$\psi(x) = e^{-cx} \left( \int_0^x \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} e^{cx} dx + \frac{\pi i}{\sqrt{c}} \right) \quad (6.27)$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} e^{cx} \left\{ a \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} + b\psi(x) \right\} \\ &= \frac{a\sqrt{\pi}}{i} \frac{e^{cx}}{\sqrt{x}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{i} \int_0^x \frac{e^{cx}}{\sqrt{x}} dx + \frac{b\pi}{\sqrt{c}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

ただし、

$$c = k^2 / (K + 2ik) \quad (6.29)$$

これを(6.13)に入れると、

$$\Delta\varphi = - \frac{2}{\sqrt{\pi(K+2ik)}} \int_0^x \left\{ a \frac{e^{cx}}{\sqrt{x}} + b \int_0^x \frac{e^{cx}}{\sqrt{x}} dx \right\} dx \quad (6.30)$$

または、

$$\Delta\varphi = - \frac{4}{\sqrt{\pi(K+2ik)}} \left\{ a \int_0^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt + b \int_0^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt dx \right\} \quad (6.31)$$

がえられる。

§7.  $M_\infty=1$  の揚力分布の表現

$\Delta\varphi$  が決定できれば, (3.15) によって  $\Delta\Phi_x$  を求めることができる。(3.15) を (2.5) に入れ,  $\bar{C}_p=[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/2}/t^{1/2} \cdot C_p$  (ここでは  $t$  は厚み比) の表現を使うと,  $M_\infty=1$  の場合,

$$\Delta\bar{C}_p = \frac{4K}{t^{1/2}(\gamma+1)^{1/2}} \cdot \frac{\Delta\varphi(x) - \Delta\varphi(c^*)}{\bar{C}_{p,s}} - 2 \left[ \frac{(\gamma+1)^{1/2}}{t^{1/2}} \right] ik \Delta\varphi \quad (7.1)$$

と示される。 $k=0$  の時は, この表式は定常音速流の揚力分布公式となり, 位置座標  $x$  と迎角比  $\alpha_0/t$  に依存することを確認することができる。 $\bar{C}_{p,s}$  あるいは  $C_{p,s}$  は, 翼型の対称部分の圧力分布である。(厚み分布が変化しない限り,  $C_{p,s}$  は定常。) (Ref. 8 参照)

(6.31) を (7.1) に入れると,

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_p = & -\frac{8}{\sqrt{\pi(1+2i\nu)}} \left\{ \left( \frac{2d \int_{c^*}^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt}{\bar{C}_{p,s}} - d^{-1} ik \int_0^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt \right) \frac{a}{t} \right. \\ & \left. + \left( \frac{2d \int_{c^*}^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt dx}{\bar{C}_{p,s}} - d^{-1} ik \int_0^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{ct^2} dt dx \right) \frac{b}{t} \right\} \quad (7.2) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \nu &= k/K, \quad c = k\nu/(1+2i\nu) \\ d &= K^{1/2}/[(\gamma+1)t]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$c^*$  と  $\bar{C}_{p,s}$  は翼型の厚み分布によって決定されるが, 対称円弧翼の場合には, Ref. 10 から導かれるように

$$\bar{C}_{p,s} = \pm 4 \frac{d^{1/2}}{\pi^{1/2}} \sqrt{\left( \frac{8}{3} x^{1/2} - 2x \right) \Big|_{c^*}^x} \quad (7.4)$$

$$c^* = 1/4 \quad (7.5)$$

である<sup>(8)</sup>。± は  $x \leq c^*$  による。

(7.2) を翼の長さについて積分すると

$$\bar{C}_L = \int_0^1 (-\Delta\bar{C}_p) dx, \quad \bar{C}_M = \int_0^1 (x \Delta\bar{C}_p) dx \quad (7.6)$$

として揚力係数およびモーメント係数を得, (6.1) によってこれからピッチングと縦振動の揚力勾配:  $d\bar{C}_L/d(\alpha_0/t)$ ,  $d\bar{C}_L/d(ikh_0/t)$  およびモーメント勾配:  $d\bar{C}_M/d(\alpha_0/t)$ ,  $d\bar{C}_M/d(ikh_0/t)$  を簡単に表わすことができる。 $t^{1/2}/(\gamma+1)^{1/2}$  を乗ずれば, これは  $dC_L/d\alpha_0$ ,  $dC_L/d(ikh_0)$  および  $d\bar{C}_M/d\alpha_0$ ,  $d\bar{C}_M/d(ikh_0)$  に直る。

ここで, (3.15), (3.16) を再考察しよう。(3.9), (3.11) からこれらに移行する際に, 実は  $K$  と  $c^*$  は不変としていたのであるが, 物理的に考えてみると, これらの量が翼の上下面であるずれ

を生じ、これが  $\Delta C_p$  に及ぼす効果を考慮することは理論の精度をさらに良くするものと思われる。そうすると、この場合には、(3.16) にさらに付加項：

$$+ 2 \frac{\Delta K}{(\gamma+1)M_\infty^2} \{\varphi(x) - \varphi(c^*)\} \quad (7.7)$$

が付くことになり、この影響は  $\Delta \bar{C}_p$  において

$$+ \frac{1}{2} \bar{C}_p \frac{\Delta K}{K} \quad (7.8)$$

となる。ここで、(3.12)、(3.13) より

$$\Delta K/K = \{-\varphi_{xxx,s}(c^*)\Delta\varphi_x(c^*) + \varphi_{xx,s}(c^*)\Delta\varphi_{xx}(c^*)\} / \varphi_{xx,s^2}(c^*) \quad (7.9)$$

である。 $\varphi_s$  と  $\Delta\varphi$  はすでにわかっているから、これを求めるのに困難はない。

このようにして、われわれは (7.8) を考慮した上で、揚力勾配の計算を行なった。計算機は航空技術研究所データトロン 205 を使用した。(7.2) の中の不定積分を計算する時には、プログラムの都合上 (6.30) の方の積分表現を使った。しかし、この型の数値積分に通常のニュートン・コーツ型公式を適用すると  $x=0$  の近傍で精度が落ちるので、 $x=0$  の近傍では積分間隔を 0.002 とし、数値積分した。

非定常線型理論 (§2 参照) による Nelson & Bermann の  $M_\infty=1$  での計算結果と比較するために、直接、

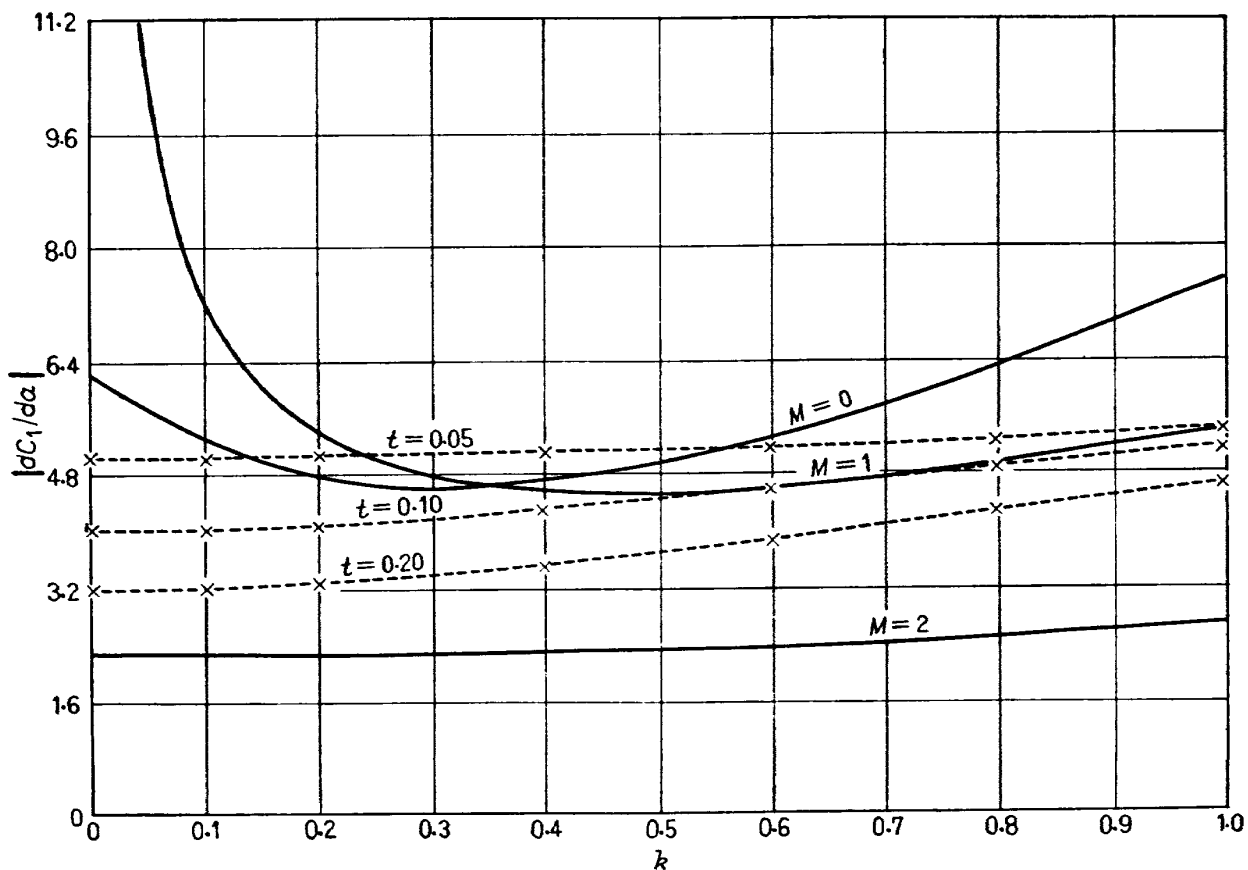
$$\begin{aligned} dC_L/d\alpha_0 &= L_\alpha e^{i\theta_\alpha}, \\ dC_L/d(ikh_0) &= L_h e^{i\theta_h}, \\ dC_M/d\alpha_0 &= M_\alpha e^{i\theta_{\alpha m}}, \\ dC_M/d(ikh_0) &= M_h e^{i\theta_{hm}} \end{aligned} \quad (7.10)$$

を求めた。 $L_\alpha, \theta_\alpha, L_h, \theta_h, M_\alpha, \theta_{\alpha m}, M_h, \theta_{hm}$  が第 1~8 図に  $M_\infty=0, 1, 2$  の線型理論の結果とともに示される。

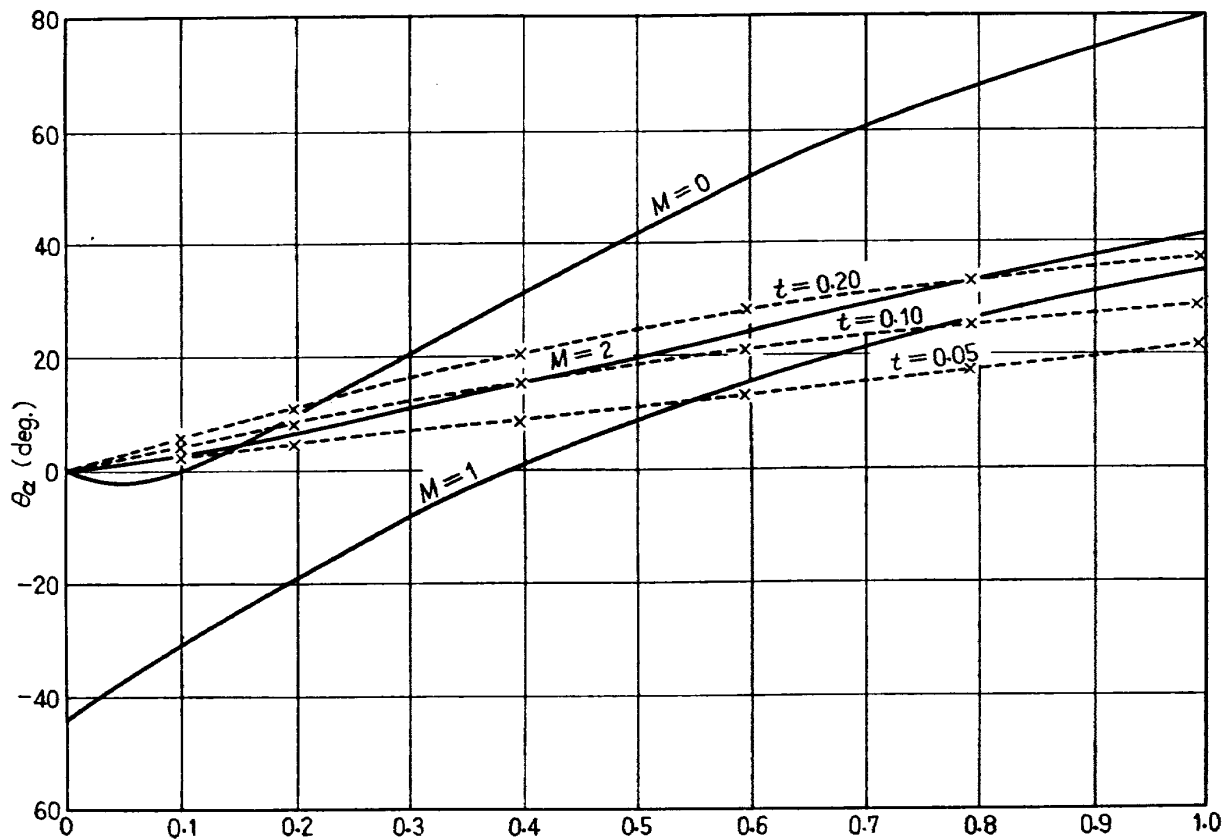
全体を通じて、結果の特徴は次のような点である。

- (i)  $k$  が大きくなると現在の理論は線型理論に漸近する。 $k \rightarrow 0$  では特異性の行動は示さず、揚力およびモーメント勾配の絶対値は有限に止まり、位相は  $M_\infty \neq 1$  での線型理論と全く同じ値になる\*。これらの様子は、 $M_\infty \neq 1$  において、 $k$  の全域で従来の非定常線型理論より優れた結果を約束するもののように思われる。
- (ii) 揚力およびモーメント勾配は一般に厚み分布のプロファイルと厚み比に依存する。一般に、その絶対値は  $k \neq 0$  では、線型理論の  $k$  の大きいところでの傾向を  $k$  の小さい方に外挿し

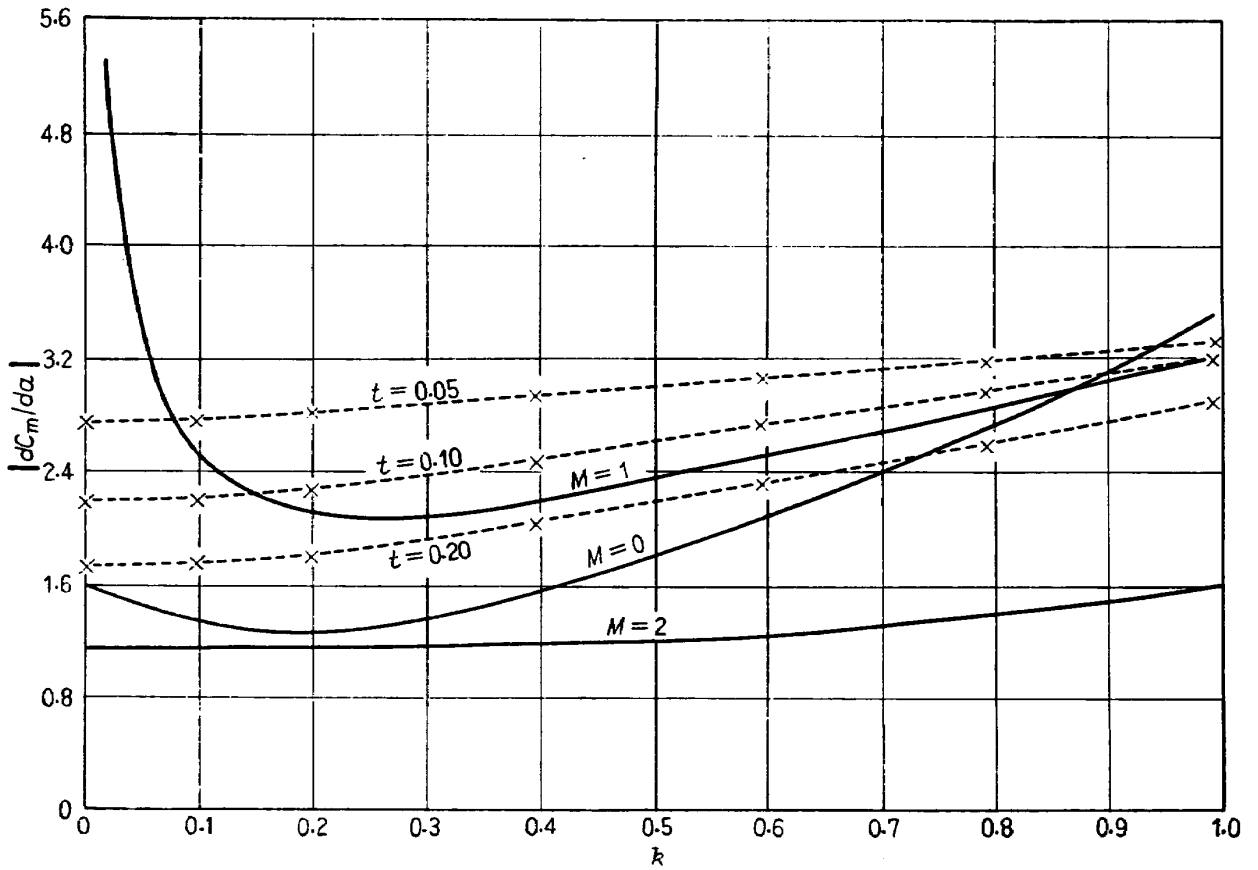
\*  $k=0$  に対し、 $M_\infty=1$  の時だけ位相が不連続に変化することは物理的に不自然で、これは線型理論の  $k=0, M_\infty=1$  における特異性に基いている。



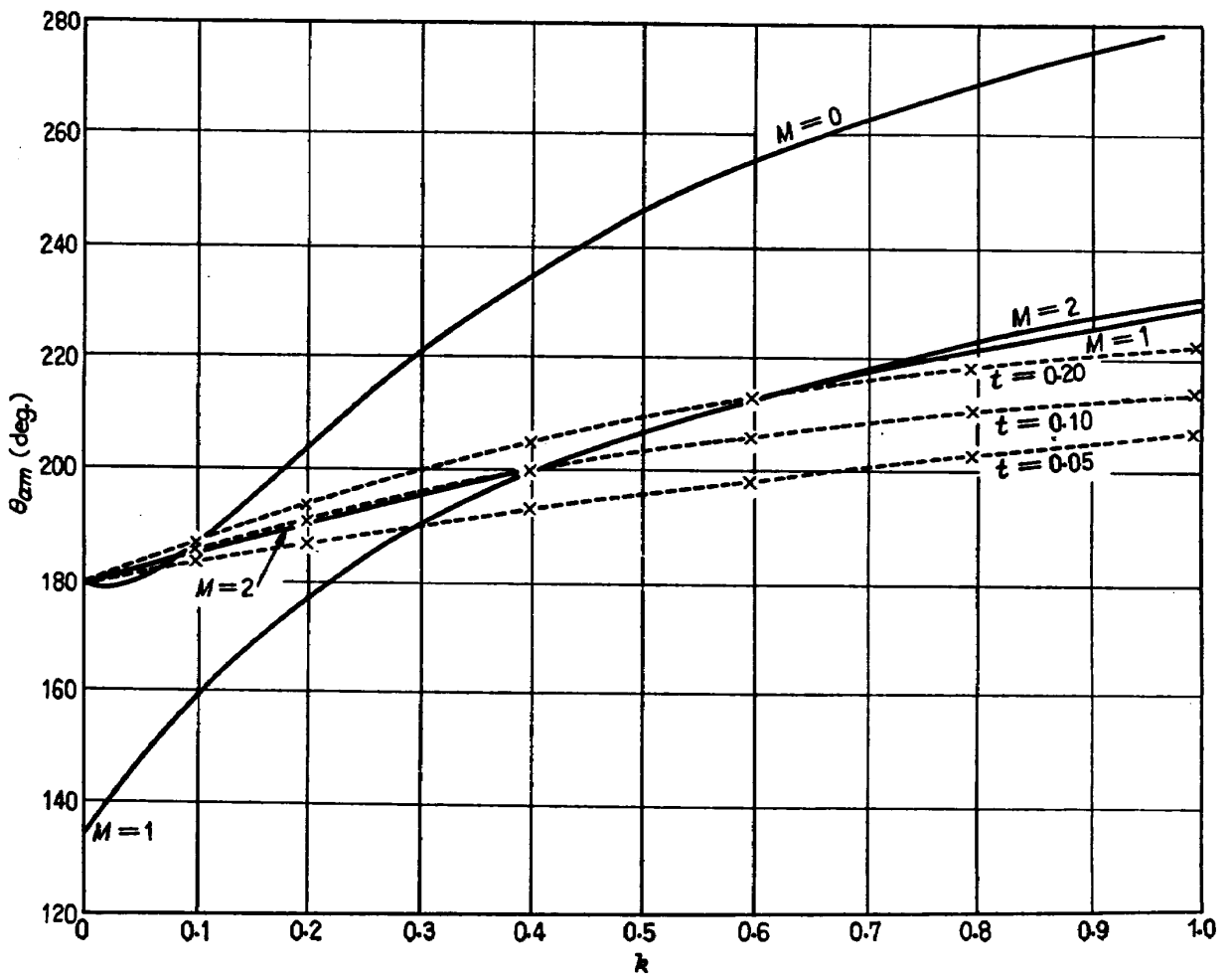
第 1 図



第 2 図

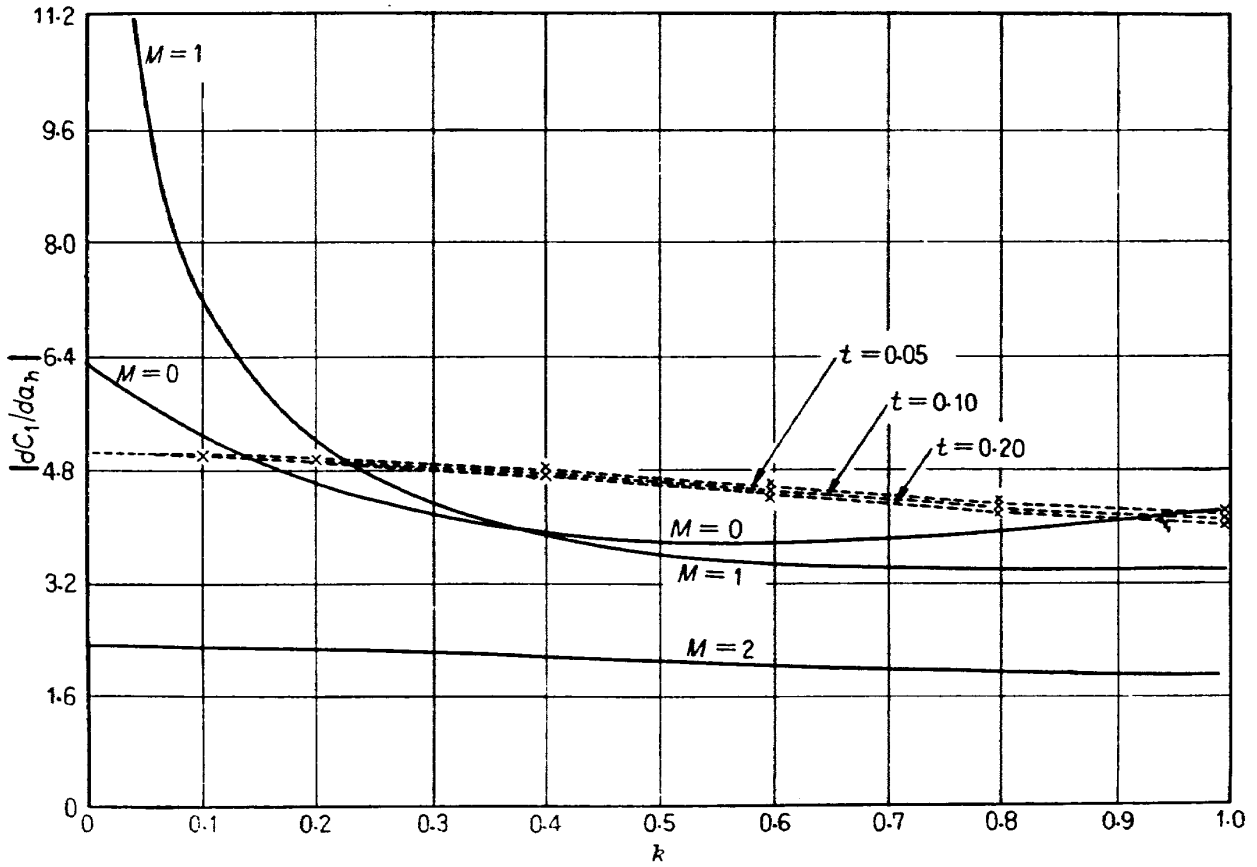


第 3 图

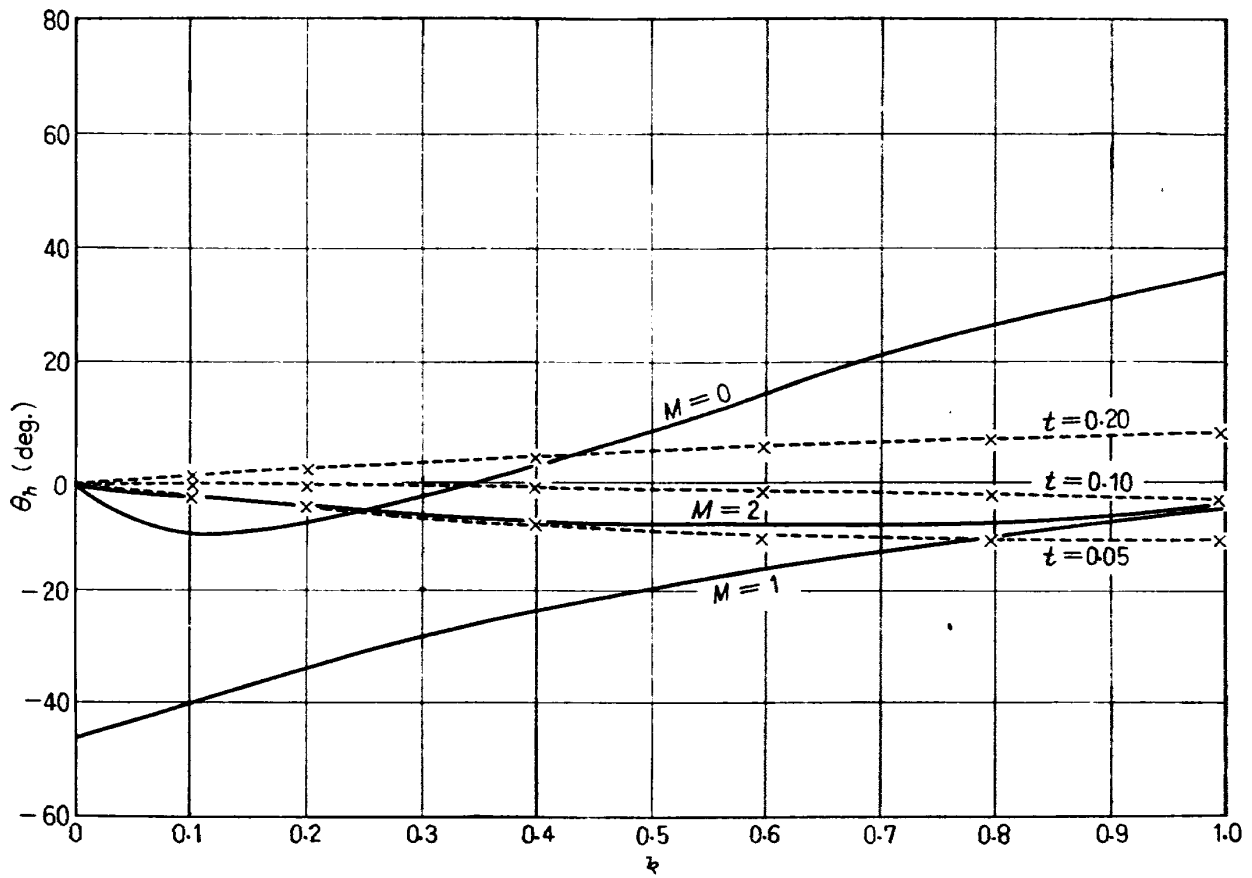


第 4 图

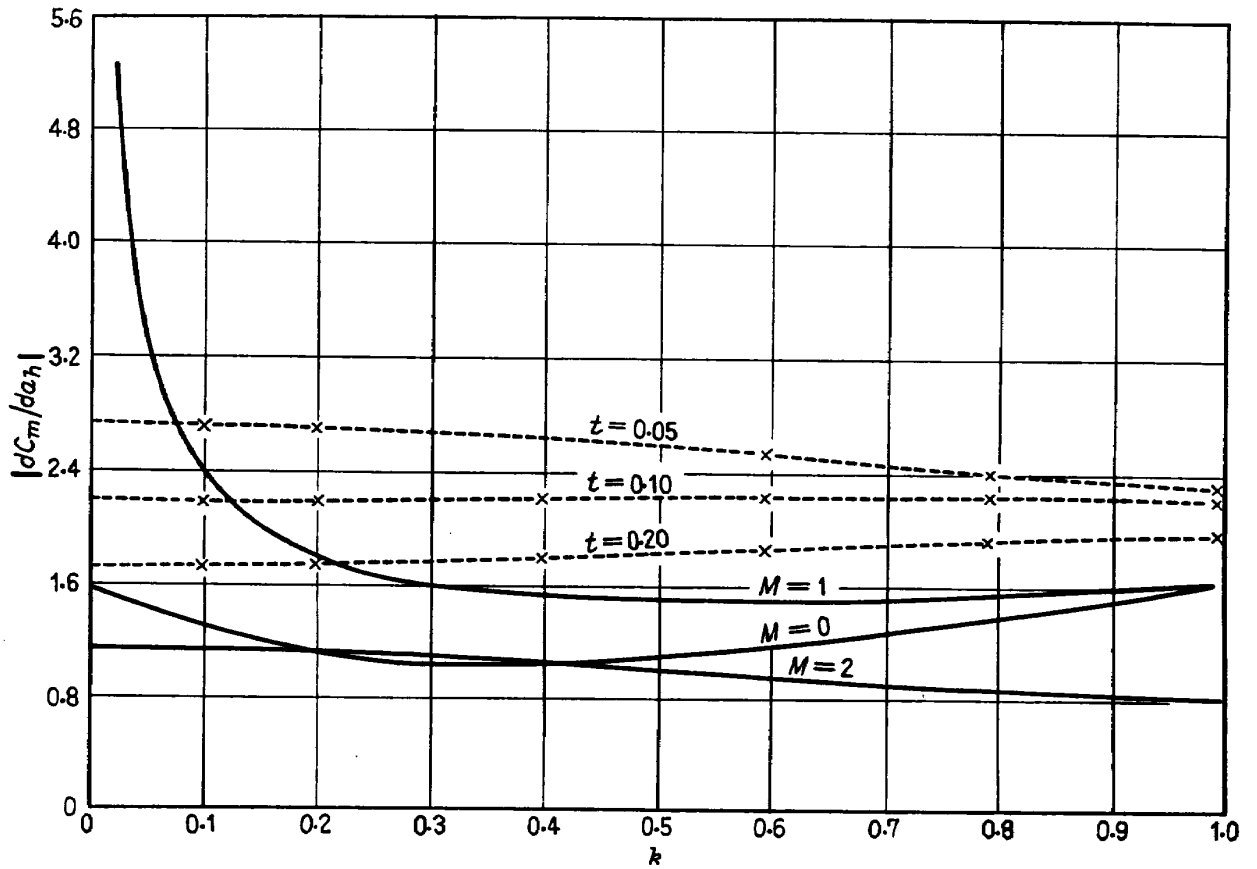




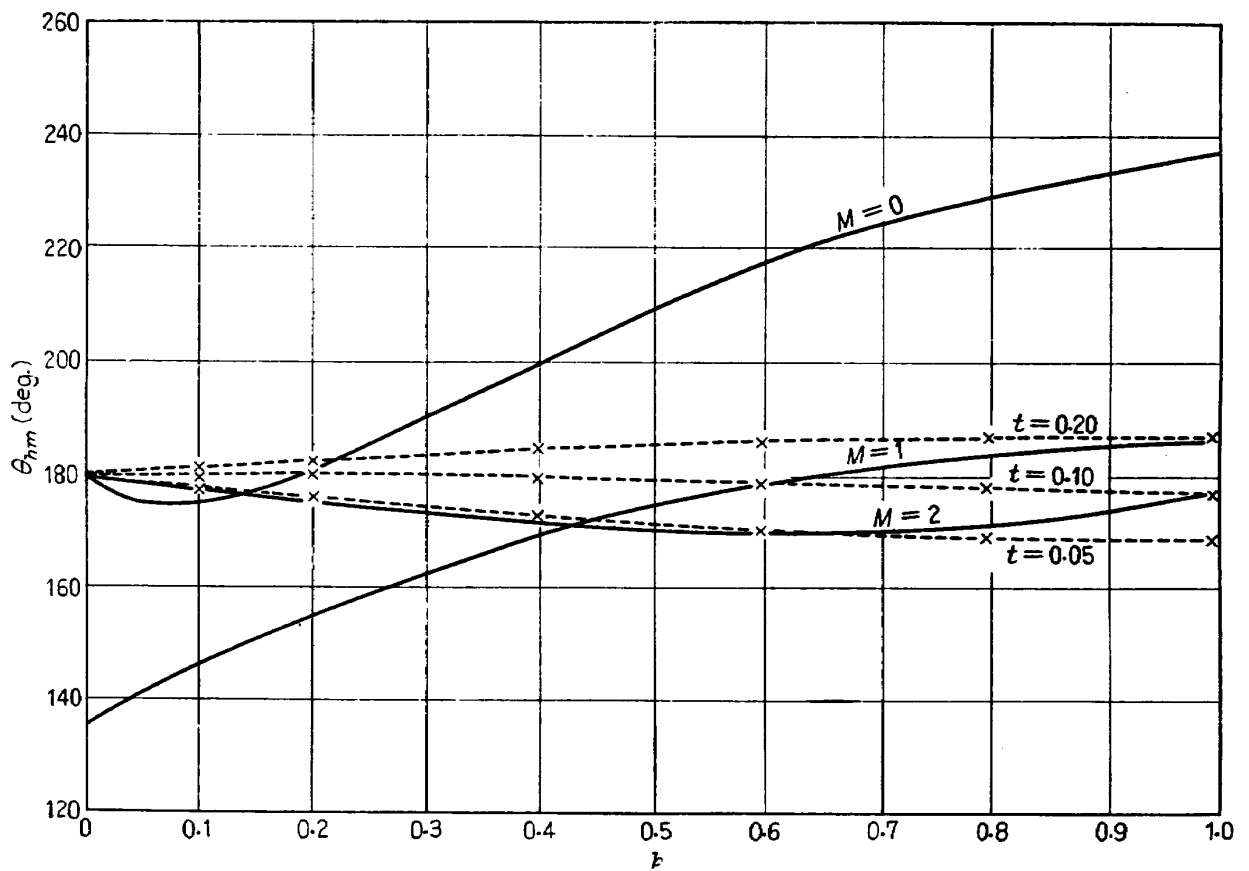
第 5 図



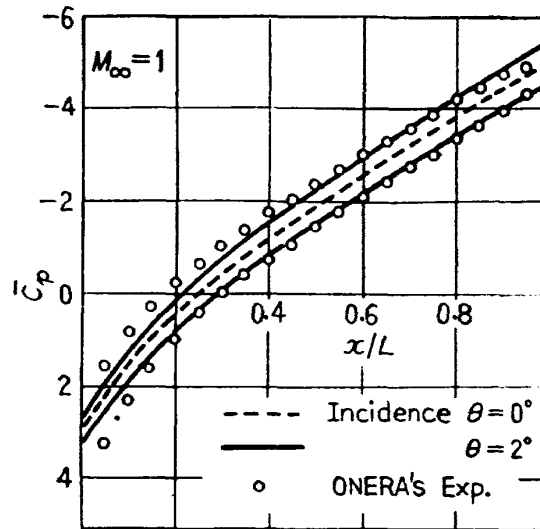
第 6 図



第 7 图



第 8 图

第9図 迎角  $2^\circ$  の円弧翼の両面の圧力分布

た値に近い。また、その位相は、線型理論における  $M_\infty=1$  の  $k$  の大きいところと、同じ線型理論の  $M_\infty \neq 1$  の  $k=0$  における共通した値とをつないだ曲線によって与えられ、物理的に考えてもこの傾向は自然である。

(iii)  $k=0$  の時の結果の現実性について、ある程度のヒントを第9図に与える。これは、定常の  $M_\infty=1$  の揚力問題を円弧翼について計算したもので（現在の理論で  $k=0$  としたものと等価の表式になる。）、 $\bar{C}_{p,s} + (1/2)\Delta\bar{C}_p$  を実験と比較した。理論的に計算した  $d\bar{C}_L/d(\alpha_0/t)$  は、図の実験値から推定したその約  $2/3$  を与える。

非定常遷音速流の問題として、ここにとり上げた場合以外にも多くの興味ある現象があるが、これらの解法はこれに順じて行なうことができるであろう。そしてその結果、従来の線型理論を修正するはなはだ実用的な多くの収穫が期待される。（細長い胴体を扱う場合には、 $\Delta\varphi, \Delta\theta$  は断面の方位角によることになる\*）

## 文 献

- (1) 鷲津久一郎：空力弾性学，応用力学講座 7-C，共立出版（昭和32年）。
- (2) J. W. Miles：Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow, Cambridge Press (1959)。
- (3) M. T. Landahl：Theoretical Studies of Unsteady Transonic Flow, Part I, FFA Rep. 77 (1958)。
- (4) 細川 巖：遷音速流小擾乱理論の研究—非線型補正理論—，NAL TR-9 (1961)。
- (5) H. C. Nelson and J. H. Berman：Calculations on the Forces and Moments for an Oscillating Wing-Ailron Combination in two-dimensional Potential Flow at Sonic Speed, NACA Rep. 1128 (1953)。

\* この場合の解析方法は、定常流の場合に、追って「遷音速流小擾乱理論の研究 (II)」において報告する予定である。

- (6) C. C. Lin, E. Reissner and H. S. Tsien: On Two-dimensional Nonsteady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid, J. Math. Phys., Vol. 27, 220-231 pp (1948).
- (7) N. Rott: Oscillating Airfoils at Mach Number 1, J. Aero. Sci., Vol. 16, 380-381 pp (1949).
- (8) I. Hosokawa: An Approximate Solution of the Lifting Problem of thin Airfoils at Sonic Speed, J. Aero. Sci., Vol. 28, 588-590 pp (1961).
- (9) N. W. McLachlan: Complex Variable & Operational Calculus with Technical Applications, Cambridge Press (1939).
- (10) I. Hosokawa: A Refinement of the Linearized Transonic Flow Theory, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 15, No. 1, 149-157 pp (1960).

<p>NAL TR-27 航空技術研究所 非定常遷音速流の近似解析</p> <p>1962年7月 18頁</p> <p>非定常遷音速流の非線型の基礎方程式を出発点としてその近似解法を提案する。この解法は、非線型補正理論 (TR-9) の非定常流への拡張であり、流れの振動数が非常に大きい時と非常に小さい時の極限で妥当になるように作られている。例として、円弧翼のマッハ1における振動問題が取り扱われるが、Nelson &amp; Berman の線型理論による結果と比較してみて、相당한改善をみることができ</p>	<p>I. 細川 巖 三好 甫 II. NAL TR-27 III. 533.6.011: 517</p>	<p>NAL TR-27 航空技術研究所 非定常遷音速流の近似解析</p> <p>1962年7月 18頁</p> <p>非定常遷音速流の非線型の基礎方程式を出発点としてその近似解法を提案する。この解法は、非線型補正理論 (TR-9) の非定常流への拡張であり、流れの振動数が非常に大きい時と非常に小さい時の極限で妥当になるように作られている。例として、円弧翼のマッハ1における振動問題が取り扱われるが、Nelson &amp; Berman の線型理論による結果と比較してみて、相당한改善をみることができ</p>	<p>I. 細川 巖 三好 甫 II. NAL TR-27 III. 533.6.011: 51</p>
<p>NAL TR-27 航空技術研究所 非定常遷音速流の近似解析</p> <p>1962年7月 18頁</p> <p>非定常遷音速流の非線型の基礎方程式を出発点としてその近似解法を提案する。この解法は、非線型補正理論 (TR-9) の非定常流への拡張であり、流れの振動数が非常に大きい時と非常に小さい時の極限で妥当になるように作られている。例として、円弧翼のマッハ1における振動問題が取り扱われるが、Nelson &amp; Berman の線型理論による結果と比較してみて、相당한改善をみることができ</p>	<p>I. 細川 巖 三好 甫 II. NAL TR-27 III. 533.6.011: 517</p>	<p>NAL TR-27 航空技術研究所 非定常遷音速流の近似解析</p> <p>1962年7月 18頁</p> <p>非定常遷音速流の非線型の基礎方程式を出発点としてその近似解法を提案する。この解法は、非線型補正理論 (TR-9) の非定常流への拡張であり、流れの振動数が非常に大きい時と非常に小さい時の極限で妥当になるように作られている。例として、円弧翼のマッハ1における振動問題が取り扱われるが、Nelson &amp; Berman の線型理論による結果と比較してみて、相당한改善をみることができ</p>	<p>I. 細川 巖 三好 甫 II. NAL TR-27 III. 533.6.011: 51</p>

TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠 境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン 要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N.A.L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の 計画と構造 Design and Construction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m. Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノルズの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚

---

## 航空技術研究所報告 27 号

昭和 37 年 7 月 発行

発行所 航空技術研究所  
東京都三鷹市新川 700  
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53

---