

# 航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-28

疲労亀裂について

竹 中 幸 彦

1962年8月

航空技術研究所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

# 既 刊 報 告

TR-1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960 年 2 月	平 木 一, 石 井 孝 雄 大 島 信 彦
TR-2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960 年 5 月	山 内 正 男, 松 木 正 勝 塩 入 淳 平, 富 永 守 之
TR-3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960 年 8 月	小 橋 安 次 郎, 長 洲 秀 夫 高 島 一 明, 波 木 井 潔
TR-4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960 年 9 月	佐 藤 和 郎, 永 井 文 雄
TR-5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960 年 12 月	中 井 暎 一, 橋 爪 宏 中 村 泰 治
TR-6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960 年 12 月	竹 中 幸 彦
TR-7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961 年 1 月	村 崎 寿 満
TR-8	繰返し荷重装置試験の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961 年 3 月	竹 内 和 之, 飯 田 宗 四 郎
TR-9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961 年 3 月	細 川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961 年 3 月	松 木 正 勝, 高 原 北 雄 西 脇 英 夫, 森 田 光 男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961 年 4 月	佐 藤 和 郎, 永 井 文 雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961 年 5 月	川 井 忠 彦, 埴 武 敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961 年 7 月	須 郷 道 也, 伝 田 幸 雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961 年 7 月	須 郷 道 也, 小 沢 五 郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961 年 8 月	石 井 孝 雄, 柳 沢 三 憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961 年 11 月	樋 口 一 雄, 三 好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge- Beam Method of Measuring Gas Density	1961 年 12 月	和 田 勇, 細 川 巖 三 好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961 年 11 月	松 木 正 勝

# 疲労亀裂について\*

竹 中 幸 彦\*\*

## On Fatigue Cracks

By Yukihiro TAKENAKA

The plastic deformation always precedes the fatigue failure, and the portion subjected to repeated plastic deformation in the elastic matrix may play an essential role in the initiation and non-propagation as well as propagation of fatigue cracks.

The fatigue tests under repeated plastic strain were carried out and the following results were obtained.

(1) In the earlier stage of the test, strain hardening will progress, but subsequently the rate of stress increment will decrease gradually and the stress will saturate to a certain constant value, which corresponds to its strain amplitude.

(2) The relation between plastic strain amplitude  $\epsilon_p$  and the number of cycles up to fracture  $N$  is

$$\epsilon_p^\alpha N = C$$

where  $\alpha$  and  $C$  are material constants.

In this paper, a new theory based on these experimental facts is proposed, which can unifyingly explain the initiation, non-propagation and propagation of fatigue cracks.

## 1. 結 論

最近航空機性能の著しい向上と旅客輸送の急激な増大に伴い、機体構造の安全性を確保する必要性が一段と増し、機体の疲労度に関する研究の重要性が増大した。従来、疲労亀裂に関する研究では、亀裂発生についての研究が主であったが、最近航空機、車輛等構造重量の軽量化を強く要求される各種構造物においては、疲労亀裂の発生についてのみならず亀裂発生後の亀裂の挙動、すなわち亀裂の停留および進展についての研究が重要視されるようになってきた。特に、航空機においては Fail-Safe 構造の採用により疲労亀裂の発生、停留および進展についての理論の確立と信頼し得る設計資料の蓄積が、機体設計および航空機運用上の立場から強く要望されている。疲労亀裂に関する研究は、このように実用上の見地から必要であるのみならず、また疲労機構の本質とも関連して純学問的にも興味ある研究対象となっている。

\* 昭和37年8月25日受付

\*\* 機体部

疲労亀裂に関する従来の研究を分類すると、亀裂の発生、停留、進展の三部に分けることができる。このうち亀裂の発生については、既に古くから数多くの実験的研究がなされ、さらにその発生機構に関する理論が Orowan<sup>1)</sup>、その他多くの人達によって提案されている。一方、亀裂の停留および進展に関しては、前述のようにその研究の重要性が認識されたのは比較的最近のことであり、その現象の複雑さの故に、従来の研究の方向は主として実験的な面に向けられていた。しかしながら、最近亀裂の停留に関しては McEvily<sup>2)</sup>、Coffin<sup>3)</sup> 等の理論的考察が提案され、亀裂の進展に関しては Head<sup>4)</sup> および石橋教授<sup>5)</sup> の理論が発表されるに及び、疲労亀裂の停留および進展についての理論的研究がようやく活発化してきた。次に、これらの諸理論の内容について簡単に検討を加えてみよう。

(1) **Orowan の理論<sup>1)</sup>** 亀裂発生に関する理論のうちでも最も有名な理論である。Orowan は弾性母体中の微小欠陥部に着目し、この部分が繰返し荷重を受けることにより、塑性変形の繰返しを受けて次第に加工硬化し、ついにその部分の応力がその材料の静的破断応力に達すると、疲労亀裂が発生すると仮定し、そのような考えに基づいて  $S-N$  曲線を求めている。この理論は、材料中の微小欠陥部の繰返し塑性変形が疲労亀裂の発生に本質的な関係を有することをはじめて理論の基礎に取り入れたという点において重要な意義を有している。しかしながら、微小欠陥部の繰返し塑性変形による加工硬化と破断応力についての前述の仮定は、後述の筆者<sup>6)</sup>および Coffin<sup>7)</sup> らの塑性歪の繰返しによる疲労試験で認められる応力飽和の事実、つまり静的な歪硬化と疲労時における歪硬化との間に機構上大きな相違があるという実験事実と矛盾している。したがって、Orowan の理論から導かれる  $S-N$  曲線を実験結果と定量的に一致させるためには、塑性体の歪硬化係数として試験片全体の静的歪硬化係数の 100 分の 1 ないし 1,000 分の 1 のオーダーを用いなければならないことになり<sup>28)</sup> この理論はその点重大な欠陥を有している。

(2) **McEvily, Illg の理論<sup>2)</sup>** この理論は繰返しの初期に切欠き部に発生した疲労亀裂が、その後  $10^7$  以上の繰返しに対しても進展しないでそこに停留する現象、つまり停留亀裂に関する理論である。McEvily によれば、切欠き先端においては大きな応力集中により疲労亀裂が発生する。いったん亀裂が発生すれば、亀裂先端部では塑性変形を生じ、そのために応力集中率は低下し、その値が切欠き先端部の応力集中率以下のある一定値よりも減少すれば、亀裂は停留すると述べている。この理論は、停留亀裂の発生に亀裂先端部の塑性変形が重要な役割を演じていることを、はじめて指摘したという点において、意義を有している。しかしながら、亀裂先端部のみが塑性変形によって応力集中率の低下を生じ、切欠き先端部においては、なぜ応力集中率が低下しないのであるか、また切欠き先端部が弾性的であるとすれば、それによってどのようにして切欠き先端に疲労亀裂が発生するのであろうか、などについては McEvily はなんらの解答も与えていない。McEvily らの理論の欠点は、彼等が微小欠陥または亀裂先端部の塑性変形を一応考慮しているが、主として

変形による応力の変化のみに着目し、歪の変化にあまり考慮を払っていないことに起因すると思われる。

(3) **Coffin の理論**<sup>3)</sup> この理論では停留亀裂の発生を次のように説明している。すなわち、切欠き材が引張り圧縮の両振り荷重を受ける場合、切欠き先端部は両振りの塑性変形を受ける。そして、このような両振りの塑性変形をある回数受けると、切欠き先端に微小な亀裂が発生する。亀裂が一たん発生すれば、亀裂先端部には引張り荷重では塑性変形を生ずるが、圧縮荷重では亀裂が閉鎖するので、塑性変形を生じなくなる。すなわち、亀裂材では両振り荷重を受けても亀裂先端部の塑性歪は片振り状態となる。したがって、その歪振幅が最初に切欠き先端が受けた両振りの全振幅より小さくなるような場合には、亀裂先端部は荷重の繰返しによっても破壊しないで、亀裂が停留することになる。

このように、亀裂先端部における塑性歪振幅の減少が停留亀裂の原因であることを Coffin がはじめて明らかにした。このことは停留亀裂の本質を突くもので、きわめて重要であると考えられる。

しかしながら、この Coffin 論文では、どのような歪振幅のとき切欠き底に亀裂が発生し、また亀裂先端部の歪振幅がどの程度に減少したとき亀裂が停留するのであるかについては、何も明らかにしておらない。すなわち、この理論は停留亀裂に関する定性的な議論であって、定量的な面にはほとんどふれておらず、理論というよりもむしろ概念とでもいうべき性質のものである。筆者はこの点について、塑性歪の繰返しによる疲労試験結果をもととして、定性的にも定量的にも、より合理的な停留亀裂に関する理論を展開しようとするものである。

(4) **Head の理論**<sup>4)</sup> この理論は亀裂の進展に関する理論である。Head は亀裂先端部の微小塑性域および周囲弾性域を特殊なモデルで置き替えて、亀裂の進展を論じている。この理論では前記モデルの置き替えが果して妥当であるかどうか疑問が残る点と、理論的に導かれた亀裂の進展速度が亀裂長さの  $\frac{1/3}{3/2}$  乗に比例するという事は必ずしも実験結果と一致しないことに、問題が残されている。

(5) **石橋教授の理論**<sup>5)</sup> 同じく亀裂進展に関する理論であるが、亀裂先端の微小部分が前述の Coffin の理論におけると同様に片振りの塑性変形を受けると考え、この部分に塑性歪の繰返しによる金属の疲労破壊の条件をたくみに取り入れて亀裂の進展を論じている。すなわち、亀裂先端の微小塑性域（その幅を  $2\rho'$  とする）が  $dn$  回の歪の繰返しによって疲労破壊して、亀裂が  $2\rho'$  だけ進展するとすれば、塑性歪の繰返しによる金属の疲労破壊の実験結果から、第6節の(6.2)式に示すように、

$$\varepsilon_p^\alpha \cdot dn = C \text{ (一定)}$$

となる。ここで、 $\alpha$  および  $C$  は材料定数であって実験的に求められる。また、 $\varepsilon_p$  は亀裂先端にお

ける繰返し歪が定常的になったときの塑性歪振幅である。このような  $dn$  回の繰返しによって、亀裂が  $2\rho'$  だけ進展すると、その亀裂先端では再び同様な繰返し歪を受けて疲労破壊を生じて亀裂が進展する。以下同様な過程を経て亀裂が不連続に進展していくと考えると、亀裂長さが  $a_0$  から  $a$  まで進展するに要する繰返し数は

$$N = \int_0^N dn = \int_{a_0}^a \frac{C}{2\rho'\varepsilon_p^\alpha} da$$

となる。このように、この理論は疲労亀裂の進展にはじめて塑性歪の繰返しによる疲労の実験事実を取り入れ、亀裂の進展を定量的に計算する道を開かれた点で高く評価されるべき理論であると思われる。しかし、石橋教授は上記の式を適用して  $N$  を計算するさいに、亀裂先端の全歪振幅  $\varepsilon$  は近似的にその塑性歪成分  $\varepsilon_p$  に等しいとして計算されている。弾性歪成分を  $\varepsilon_e$  とすると、

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e$$

である。したがって、 $\varepsilon$  が大きくて  $\varepsilon_p$  が  $\varepsilon_e$  に対して相対的に大きな場合には、石橋教授のように

$$r = \varepsilon_e / \varepsilon$$

を無視し  $r \approx 0$  とし計算しても誤差は少ないが、 $\varepsilon$  の値が小さくなり  $\varepsilon_e / \varepsilon$  の比が次第に大きくなると、弾性歪成分の影響は大となり、 $r \approx 0$  として計算した結果は実験結果と著しく異なることが予想される。そこで筆者は、 $r = \varepsilon_e / \varepsilon$  を考慮することによって、より合理的な理論式を導いた。

疲労亀裂の発生、停留および進展に関する上記諸理論は疲労亀裂の理論的研究にいずれも前述のように重要な役割を果しており、それぞれ価値のある理論であると考えられる。しかし、これらの理論は既に述べたように、その基礎仮定が実験事実と矛盾していたり、考察が不十分であって理論結果が実験結果と一致しないなどの欠陥を有している。また、疲労亀裂に関するこれらの諸問題を統一的に説明しうる理論は今まで一つも提案されていない。

ここで述べた諸理論に共通した特色は、いずれもそれぞれ材料の内部欠陥または切欠き底および亀裂先端部における微小領域の塑性変形を考慮して、亀裂の発生、停留あるいは進展に関する理論を構成していることである。このことは疲労亀裂の発生、停留および進展にはこのような微小領域における塑性変形が決定的な役割を果していることを示しているものと考えられる。そこで、本論文においてはこのような繰返しの塑性変形による疲労破壊の現象を明らかにするために、まず「塑性歪の繰返しによる金属の疲労」に関する筆者の行なった実験について述べ、理論の基礎となる実験事実を明らかにし、次いで切欠き底および亀裂先端部の微小塑性域における歪の集中率について検討を加えた。そしてこれらの実験事実および考察結果に基づいて、疲労亀裂の諸問題、つまり亀裂の発生、停留および進展の諸現象を統一的に説明する新理論を展開し、前記諸理論の欠陥を是正発展させ、その理論結果が疲労亀裂に関する多くの実験結果ときわめてよく一致することを示した。

## 2. 塑性歪の繰返しによる金属の疲労

金属材料の疲労現象には必ず塑性変形が先行し、弾性母体中でこのような繰返しの塑性変形を受ける部分が疲労亀裂の発生および進展に本質的な役割を演じていることが現在一般に認められている。したがって、このような塑性部分の挙動を詳しく調べることができれば、疲労破壊の機構を解明し、亀裂の発生、停留および進展等の現象を明らかにすることができると考えられる。ここではこのような意図のもとに行なった軟鋼および黄銅薄肉管に塑性歪振幅がほぼ一定の様な繰返し歪を加えて疲労破壊させる実験と、それに関連して行なった数種の実験について述べる。

もちろん、このように試験片全体が様な塑性変形を受ける場合と、通常の疲労試験におけるように弾性母体中に微小な塑性部分がある場合とでは、両者の塑性的挙動は必ずしも完全に同一ではないであろうが、少なくとも後者の基本的特性がこのような実験によって明らかにされるものと考えられる。事実、実験結果から疲労機構の本質に関連していると考えられるいくつかの興味ある現象が見いだされた。

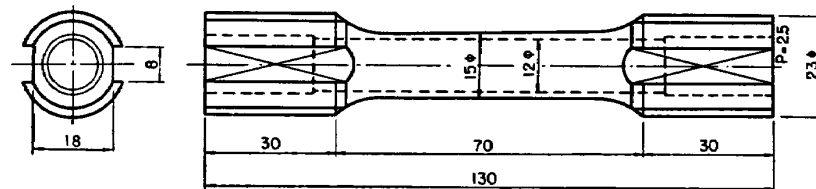
### 2.1 実験方法

まず、この種の実験を行なうさいに考えねばならぬことは、応力および歪が試験片の平行部全体にわたって様であるような実験を行なうべきであるということである。そうすれば、実験結果は応力勾配と歪勾配の影響を受けないので現象を理解するために最も好都合である。この条件を満足する実験は、引張り圧縮試験と薄肉円管の振り試験である。しかし、この2種類の試験は、いずれも座屈に対する対策を講じておかないと歪の繰返し中に試験片が座屈して破断まで実験を行なうことができなくなる。引張り圧縮試験では、試験機の容量および歪計の取付上の制限から太くて短い中実試験片を用いることができなかったため、薄肉円管試験片を用い、軟鋼では塑性歪振幅  $\varepsilon_p = 2.2\%$ 、黄銅では  $\varepsilon_p = 1.7\%$  のみで試験を行なった。これ以下の歪振幅だと、破断までの繰返し数が著しく増加して手動試験機による実験は困難になり、これ以上の振幅だと、繰返し中に座屈して実験を続けることが困難になる。次に、振り試験は引張り圧縮の場合と同一の薄肉円管試験片を用い、その中に油で潤滑した心がね（その直径は試験片内径より  $0.02\text{ mm}$  小さい）を入れて行なった。その結果、繰返し歪の疲労試験および静的一方向振り試験のいずれの場合にも破断まで座屈することがなかった。この場合、心がねによる拘束の影響は次に示す諸事実から無視しうる程度であることがわかった。(1) 後述の飽和応力  $\tau_s$  は、同一の歪振幅に対して心がねの有無にかかわらず同一であった。(2) 軸方向にけがき線を入れた試験片では、繰返し中にけがき線が不連続に曲ることがなかった。(3) 破断後心がねを取り除くのに  $10\sim 20\text{ kg}$  の力で簡単に抜けた。以上のことから実験は主として振りについて行なった。

試験機は「引張り振り組合わせ応力試験機」を、歪計は「組合わせ歪計」を用いた。これらにつ

いては、すでに報告<sup>9)</sup>してあるので説明を省略する。疲労試験にこの試験機を用いた理由は、同一チャック間で両振り荷重がかけられることと、手動によってゆっくり負荷できて、試験片の温度を常に室温に保つことができるからである。従来の疲労試験機では繰返し速度が速すぎて、このような塑性歪の実験では試験片が発熱し、熱的な効果が加わるので不都合である。

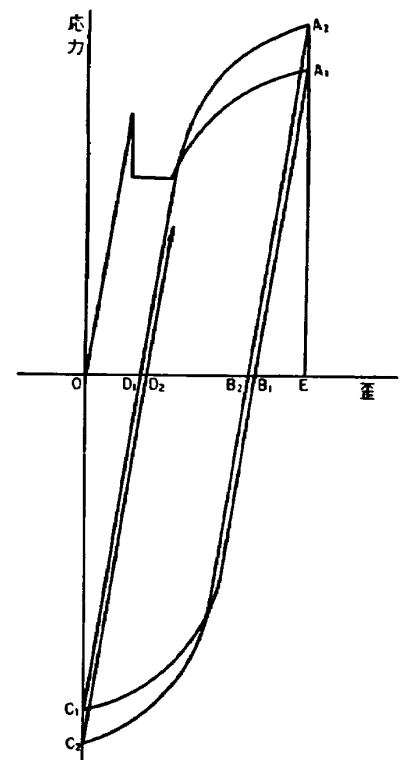
疲労試験に用いた試験片は、第1図に示すような薄肉円管である。軟鋼は炭素量 0.11% の熱間



第1図 試験片形状

引抜き丸棒材より機械加工した後、880°C で 1 時間焼なまししたものを用いた。黄銅は四六黄銅丸棒より機械加工した後 600°C で 30 分間焼なまししたものを用いた。

繰返し歪の実験は、引張り圧縮試験および振り試験のいずれの場合にも、第2図に示すようにして歪を繰返した。すなわち、 $OA_1B_1$  は処女材の最初の半サイクルの応力～歪曲線であって、 $\overline{OB_1}$  が塑性歪、 $\overline{B_1E}$  が弾性歪である。次に、逆方向に荷重を加えて試験片の幾何学的形状が最初の状態にもどる  $C_1$  点まで変形させてから除荷する。この点が  $D_1$  点である。この半サイクルにおける塑性歪は  $\overline{B_1D_1}$  であり、弾性歪は  $\overline{OD_1}$  である。このように  $\overline{OE}$  間を一定にして以下同様に繰返し歪を加えていくのである。この図のように、各半サイクルごとに加工硬化が進む場合、つまり  $\overline{EA_1} < \overline{OC_1} < \overline{EA_2} \dots$  のときには塑性歪振幅は  $\overline{OB_1} > \overline{B_1D_1} > \overline{D_1B_2} \dots$  となり次第に減少していく。そして、後に示すように加工硬化が飽和すればそれから後の塑性歪振幅は一定となる。以下で歪振幅というのは、このような飽和後の一定塑性歪振幅（片振幅）を意味する。



第2図 繰返し歪の説明図

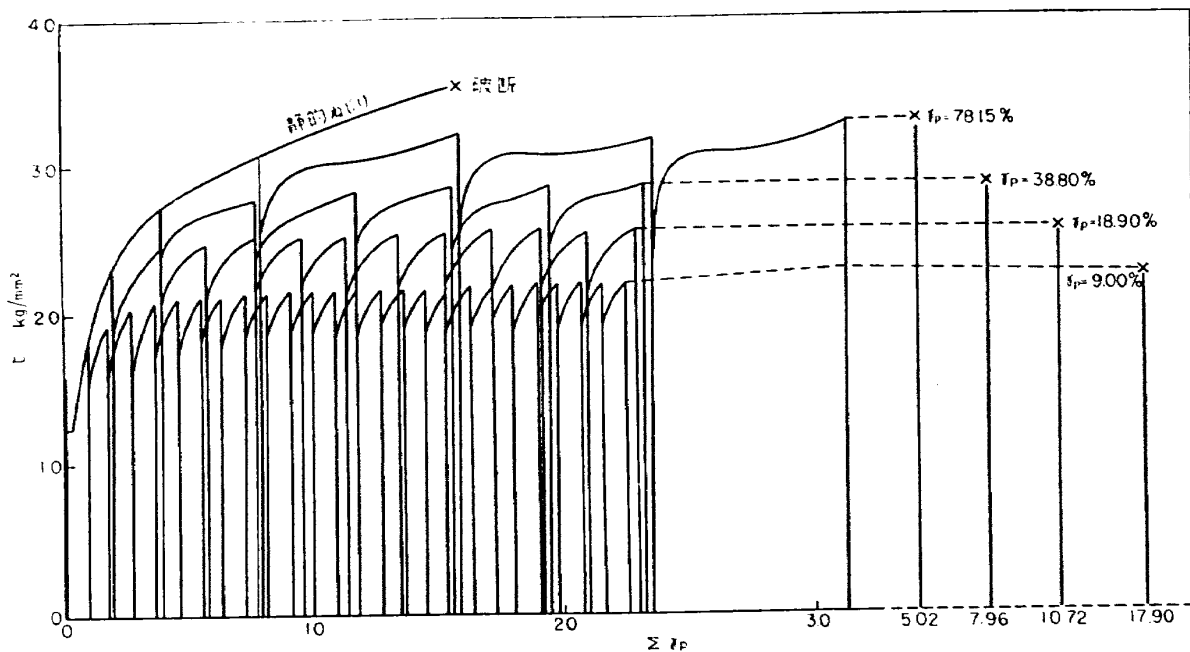
実験は、上に述べたようにして繰返し歪を加えて疲労破壊させる実験と、あらかじめ繰返し歪を加えた後に引張りによって破壊させる実験および二段二重重複繰返し歪による疲労試験の合計 3 種類の実験を行なった。



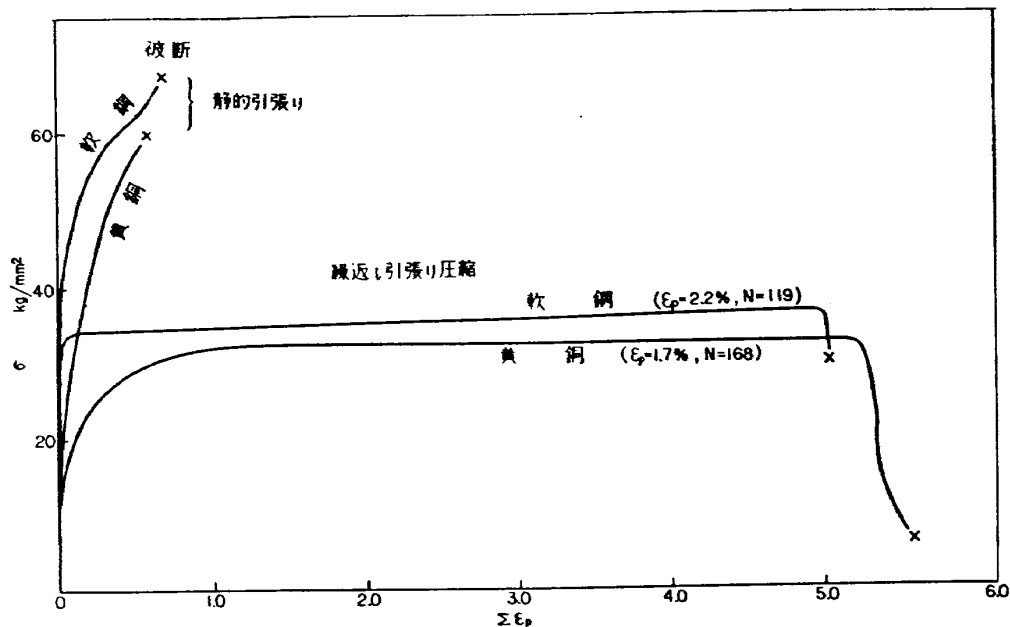
## 2.2 実験結果およびその考察

### 2.2.1 繰返し歪による疲労試験

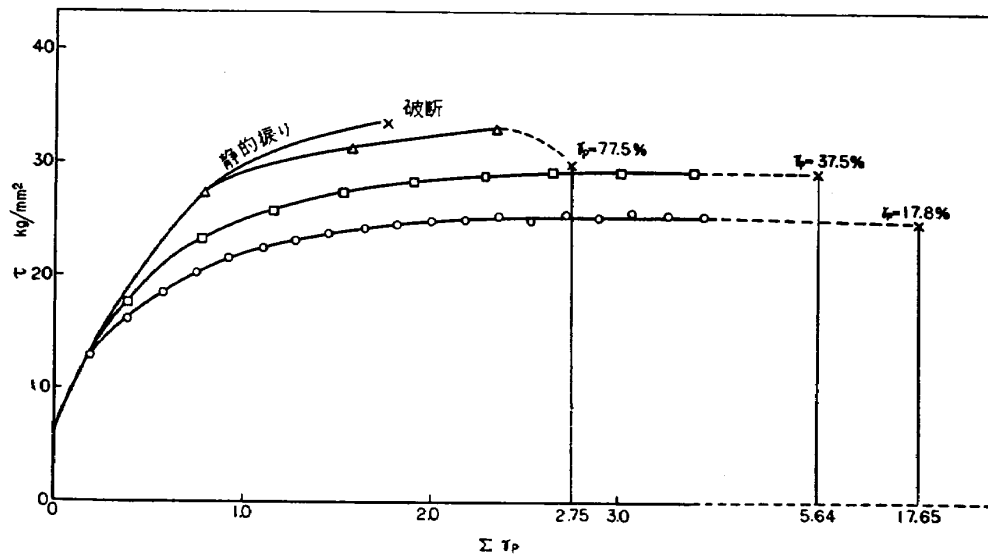
第3図に、軟鋼を静的に一方に振った場合と、歪振幅  $\gamma_p$  が 9.00, 18.90, 38.80, 78.15% で繰り返した場合の破断までの応力  $\tau$  と全歪  $\sum \gamma_p$  との関係を示す。この図の疲労の曲線では、逆方向の応力-歪曲線を正側に反転し、横軸は各半サイクルにおける塑性歪の絶対値の累加  $\sum \gamma_p$  を取っている。第4図は軟鋼と黄銅の静的引張りと繰返し引張り圧縮試験結果であり、第5図は黄銅の振りに関する同様な図である。ただし、第4図と第5図の疲労の曲線は縦軸に半サイクルにお



第3図 軟鋼の振りの応力-歪曲線



第4図 軟鋼および黄銅の静的引張りと繰返し引張り圧縮の応力-歪曲線



第 5 図 黄銅の振りの応力-歪曲

ける最高応力（第 2 図の  $A_1, C_1, A_2, \dots$  等の応力）のみを取って接続したものである。第 3 図および第 5 図に示す振りの疲労試験によって得られた歪振幅  $\gamma_p$ 、飽和応力  $\tau_s$ 、破断までの繰返し数  $N$ 、破断までの全歪  $\Sigma \gamma_p$  の値を第 1 表および第 2 表に示す。

第 1 表 軟鋼の振り疲労試験結果

$\gamma_p$ %	$\tau_s$ kg/mm <sup>2</sup>	$N$	$\Sigma \gamma_p$ %	備 考
160.00	35.63	0.5	160.0	{ 静的振り試験結果, この場合の $\tau_s$ は破断応力
79.15	32.91	3.5	502.0	
38.80	28.94	10.5	796.0	繰返し振り試験, $\tau_s$ は飽和応力
18.90	26.07	28.5	1,072.0	同 上
9.00	27.91	100.5	1,790.0	同 上

第 2 表 黄銅の振り疲労試験結果

$\gamma_p$ %	$\tau_s$ kg/mm <sup>2</sup>	$N$	$\Sigma \gamma_p$ %	備 考
177.5	33.62	0.5	177.5	{ 静的振り試験結果, この場合の $\tau_s$ は破断応力
77.5	32.60	1.8	275.0	
37.5	29.49	7.5	564.0	繰返し振り試験, $\tau_s$ は飽和応力
17.8	25.87	50.0	1,765.0	同 上

これらの実験結果から次のことが明らかとなった。

[1] 応力の変化 引張り圧縮試験および振り試験のいずれの場合にも、繰返しの初期には各半サイクルごとにその最高応力は次第に増加して材料が加工硬化していくことがわかる。しかしながら、その加工硬化はいずれも静的一方向試験の場合よりも低く、かつ繰返しが進むにつれて加工硬化は次第に飽和していき、ついにそれぞれの歪振幅に応じた一定応力  $\sigma_s$  または  $\tau_s$  に達する。そして、いずれの場合にもこの一定応力状態は各試験片の寿命の大部分を占め、 $\sigma_s$  または  $\tau_s$  は破

断の直前まではほぼ一定である。

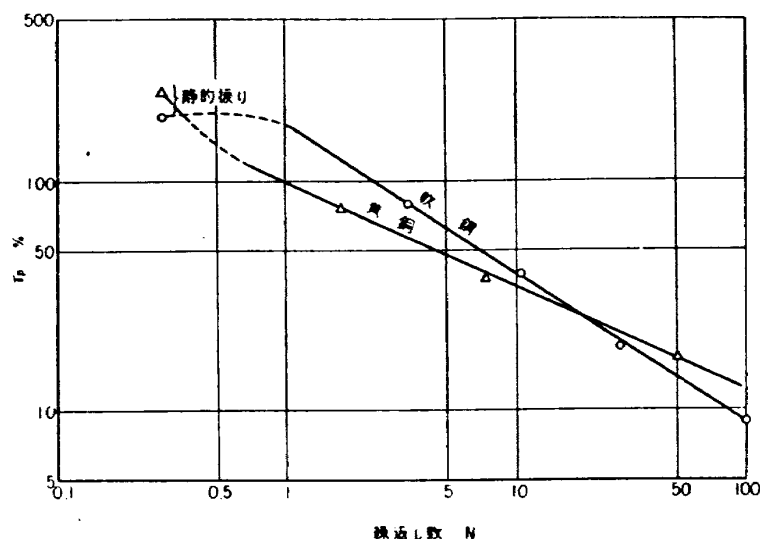
このように加工硬化が飽和することは Wood と Segall<sup>9)</sup> が銅、アルミニウム、純ニッケルの丸棒の振りについて行なった同様な実験結果と一致している。また、筆者の発表後 Coffin は銅、アルミニウム、低炭素鋼、ニッケル、ステンレス鋼、アルミニウム合金、チタン等各種金属の焼なまし材に引張り圧縮の繰返し歪を与える疲労試験を行ない同様な現象が見いだされたことを報告<sup>7)</sup>している。さらに、この応力飽和の現象は通常の疲労試験において、硬度が最初急激に増し後次第に一定値に飽和するという実験結果<sup>10)</sup>にも対応している。このように、応力が歪振幅に対応した一定値に飽和するという事実は、「疲労試験中に、内部の欠陥部の加工硬化は静的な応力～歪曲線にそって進む」という前述の Orowan の疲労理論<sup>1)</sup>における前提条件が成り立たないことを示している。このように、静的な一方向の塑性変形と繰返し塑性変形とが相違しているのは、両者のすべりの機構が異なることに起因するものと思われる。

以上のことから、通常の応力振幅一定の疲労試験においても、弾性母体中の塑性変形を受ける微小部分は加工硬化が飽和した後は、一定歪振幅の塑性変形を受けるものと考えられる。

[2]  $r_p$  と  $N$  および  $\sum r_p$  との関係 まず、 $r_p$  と  $N$  との関係は第1表および第2表に示すように、 $r_p$  の減少につれて  $N$  は急激に増加する。いまこの関係を両対数目盛で表わすと、第6図に示すように静的一方向振りによる破断点を除いて、軟鋼と黄銅のいずれもそれぞれ直線上に乗る。このことは  $r_p$  と  $N$  との間に

$$r_p^\alpha N = C_1 \text{ (一定)} \quad (2.1)$$

の関係が成り立つことを示している。ここで  $\alpha$  は第6図の直線の勾配を表わす材料定数であって、軟鋼では約 1.6, 黄銅では 2.3 である。(2.1) 式の形は Coffin がステンレス鋼の熱疲労の実験<sup>11)</sup>で得た結果と同一である。また Coffin<sup>7)</sup> はその後、前述のように各種金属について引張り圧縮の

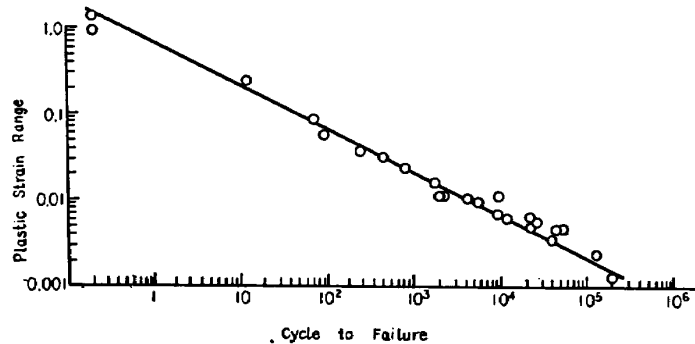


第6図 振りの歪振幅と破断までの繰返し数との関係

繰返し歪による疲労試験を行ない、この場合にも (2.1) 式と同様な関係式、つまり

$$\epsilon_p^\alpha N = C \quad (\text{一定}) \quad (2.1')$$

が成り立つことを報告している。ただし Coffin の場合には、熱疲労と定歪疲労のいずれの場合でも  $\alpha$  の値は材料のいかんにかかわらず約 2.0 であった。 $r_p$  がさらに小さい場合にも (2.1) 式が成り立つかいは疲労亀裂の問題を取り扱う場合には重要であるが、Coffin の実験では塑性歪振幅  $\epsilon_p$  が 0.1% 程度まで (2.1') 式の関係が成り立つことを示している。第 7 図に Coffin の実験結果の一例を示す。



第 7 図 Plastic strain range vs cycle to failure—347 stainless steel (solution treated) (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>)

この (2.1) および (2.1') 式の関係は後に示す疲労亀裂の進展に関する理論の基礎となる実験事実である。この関係を微視的な立場から誘導するのには転位論的な考察が必要であろうが、それについては現在のところまだ有効な方法は何も提案されておらない。

次に、 $r_p$  と  $\sum r_p$  との関係は第 1 表および第 2 表からわかるように、やはり  $r_p$  の減少とともに  $\sum r_p$  の値は急激に増加する。 $\sum r_p \approx 2 N r_p$  であるから (2.1) 式が成り立てば当然  $\log r_p$  と

$\log(\sum r_p)$  との間にも第 8 図に示すように直線関係が存在し、

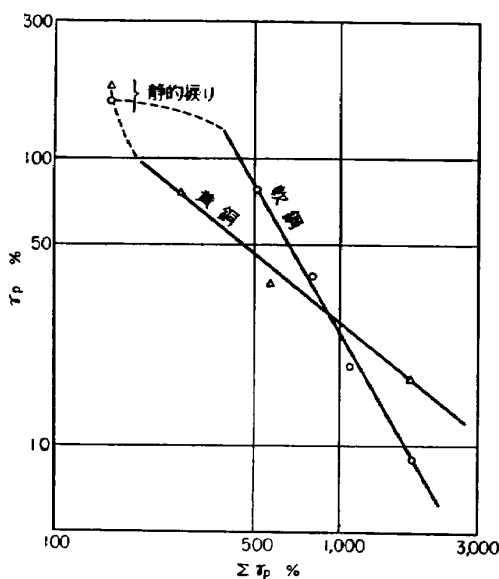
$$r_p^k (\sum r_p) = C_2 \quad (\text{一定}), \quad k = \alpha - 1 \quad (2.2)$$

の関係が成り立つ。

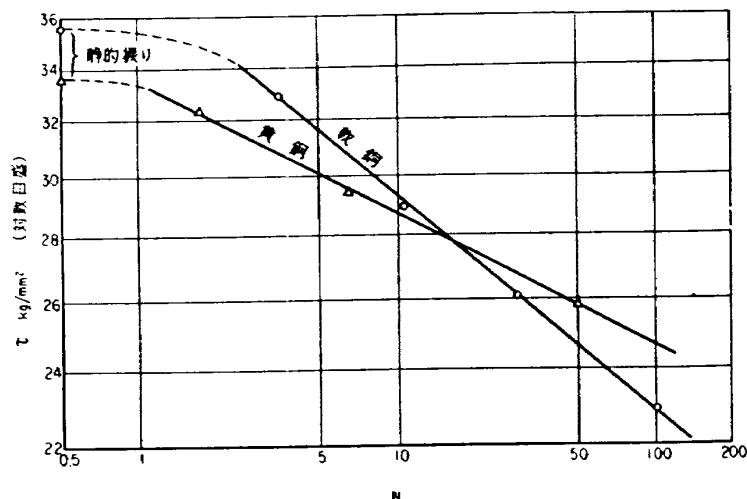
[3]  $\tau_s$  と  $N, r_p$  および  $\sum r_p$  との関係 通常の疲労試験における  $S-N$  曲線に相当する  $\log \tau_s \sim \log N$  の曲線は第 9 図に示すように直線となる。このことは  $\tau_s$  と  $N$  との間に

$$\tau_s^\beta N = C_3 \quad (\text{一定}) \quad (2.3)$$

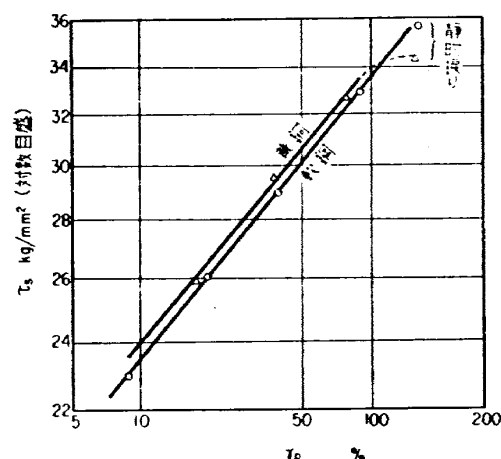
の関係が存在することを示している。ただし、 $\beta$  は第 9 図の直線の勾配を表わす材料定数であって、軟鋼では 9.1、黄銅では 14.3 である。



第 8 図 振りの歪振幅と破断までの全歪との関係



第9図 振りの飽和応力と破断までの繰返し数との関係



第10図 振りの飽和応力と歪振幅との関係

(2.1) および (2.3) 式が成り立つことから、直ちに

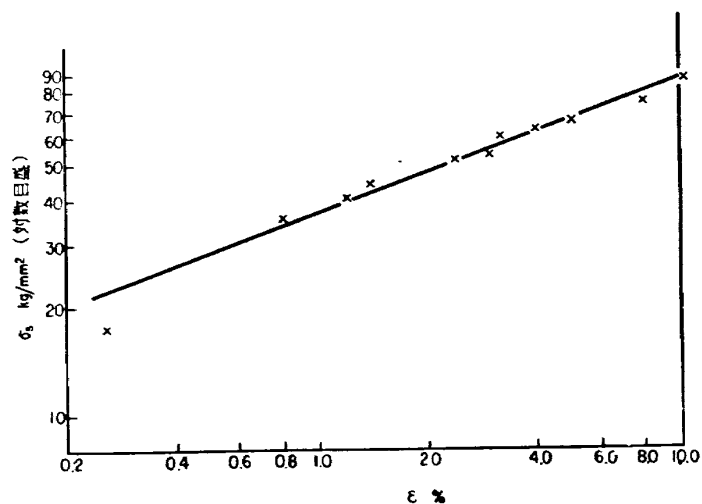
$$\tau_s^{-n} \gamma_p = C_4 \quad (\text{一定}), \quad n = \beta/\alpha \quad (2.4)$$

が成り立つことがわかる。つまり  $\log \tau_s$  と  $\log \gamma_p$  との間にも第10図に示すような直線関係が成り立ち、かつ  $n$  の値は軟鋼では約 5.9, 黄銅では約 6.2 であって、両直線の勾配はほぼ等しくなる。このことと関連して Coffin の前記引張り圧縮試験による結果を整理して  $\log \epsilon$  ( $\epsilon$  は歪振幅) と  $\log \sigma_s$  ( $\sigma_s$  は飽和応力) との関係を求めてみると、ニッケルでは第11図, 炭素鋼では第12図, 24ST Al 合金では第6節の第38図に示すように、いずれも直線的となり、

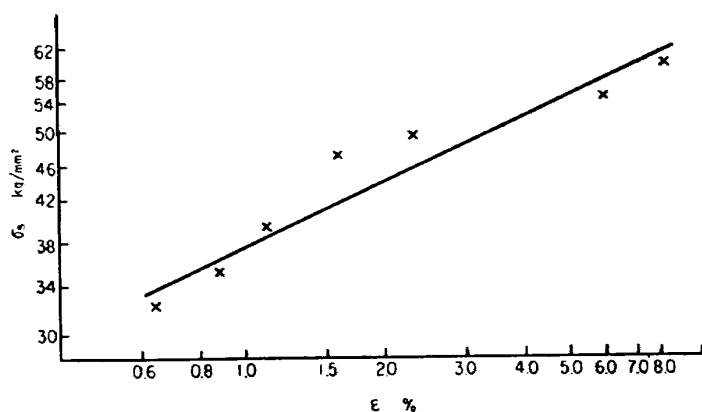
$$\sigma_s^{-n'} \epsilon = C_4' \quad (2.4')$$

が成り立つ。 $\epsilon$  の値が大きい場合には、

その弾性成分は小さいので、 $\epsilon \approx \epsilon_p$  となるから、筆者の振りにおいて得られた (2.4) 式と全く同様な関係、つまり



第11図 ニッケルの飽和応力  $\sigma_s$  と歪振幅  $\epsilon$  との関係 (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>より)

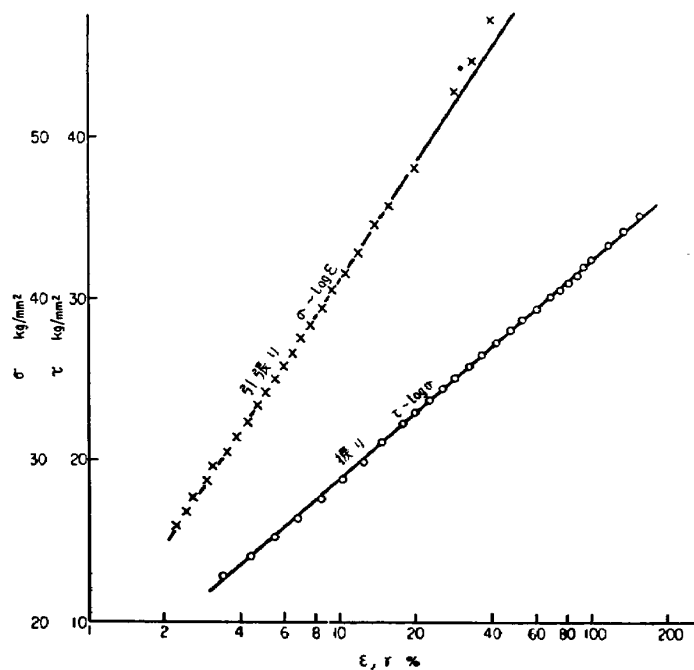


第12図 1018 炭素鋼の歪振幅  $\epsilon$  と飽和応力  $\sigma_s$  の関係 (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>より)

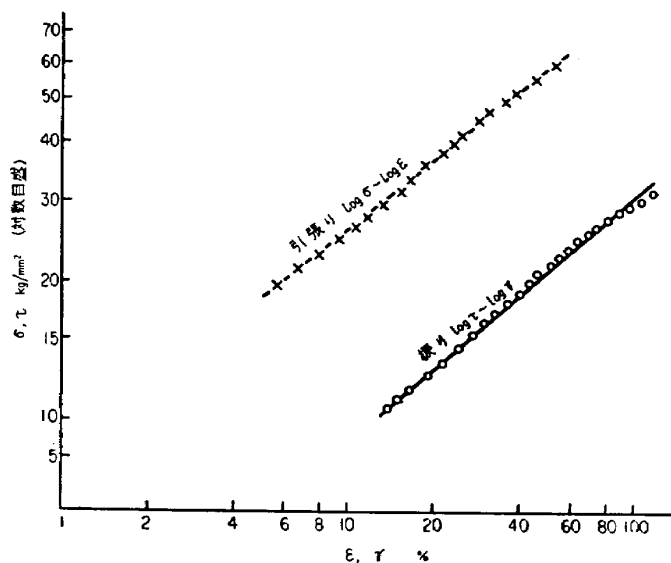
$$\sigma_s^{-n} \varepsilon_p \doteq C_4' \quad (2.4'')$$

が当然成り立つことになる。実験によって材料定数である  $n$ ,  $C_4$ , または  $n'$ ,  $C_4'$  等が求まれば, 各歪振幅または塑性歪振幅に対応する飽和応力  $\tau_s$  または  $\sigma_s$  の値は (2.4)~(2.4'') 式から求めることができる。

以上のことと関係して, 静的一方向引張り試験と静的一方向振り試験における応力~歪曲線を対数目盛で整理してみたところ, 軟鋼では第 13 図に示すように  $\sigma \sim \log \varepsilon$  (ただし,  $\varepsilon$  は自然歪) と  $\tau \sim \log \gamma$  はそれぞれ直線となり, 黄銅では  $\log \sigma \sim \log \varepsilon$ ,  $\log \tau \sim \log \gamma$  の関係は第 14 図に示すようにやはり直線になった。応力~歪曲線をこのように対数表示することは, 今まで試みられていないよ



第 13 図 軟鋼の静的一方向引張りおよび振りにおける応力と歪の関係



第 14 図 黄銅の静的一方向引張りおよび振りにおける応力と歪の関係

うである。したがって、一般的にすべての材料に対してこのような直線関係が成り立つか否かは、さらに検討を要するであろうが、ともかく興味ある現象であると思われる。

次に、(2.4) 式と (2.2) 式の関係から

$$\tau_s^m (\sum \gamma_p) = C_s \quad (\text{一定}), \quad m = \beta(\alpha - 1) / \alpha \quad (2.5)$$

が成り立ち、 $\log \tau_s$  と  $\log (\sum \gamma_p)$  との間にも第 15 図に示すように直線関係が存在する。

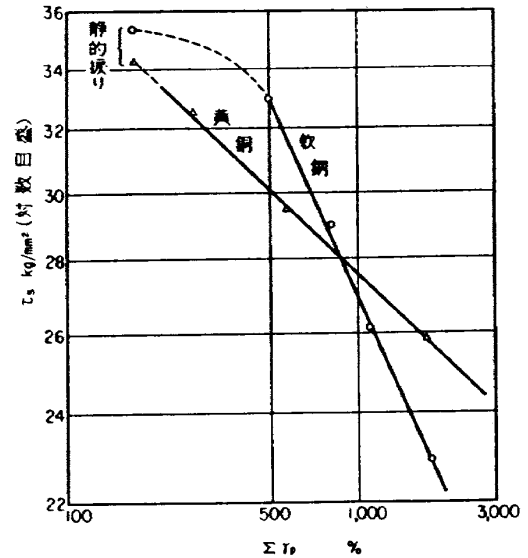
[4] 破断面の方向 軟鋼の振りの場合には破断は常に試験片の軸と直角な面でおこり、黄銅の振りでは軸に平行な場合と直角な場合とがあった。破

断面の方向が軸と平行になることは、通常の振りによる延性材料の疲労破断の場合と異なっている。引張り圧縮の場合には、いずれも軸と直角な面で破断した。

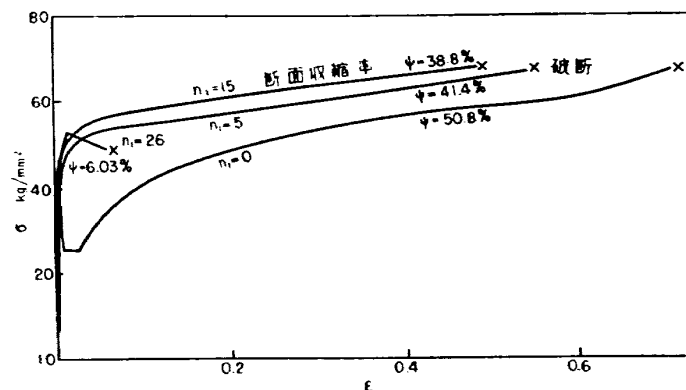
[5] 顕微鏡による表面の観察結果  $\gamma_p = 18.9\%$  で繰返し歪を与えた軟鋼試験片の表面を、繰返しの途中で数回顕微鏡を用いて観察した結果では、繰返し数が増すにつれて結晶粒内のすべり線の密度が増し、表面の凸凹が著しくなっていた。しかしながら、破断の直前まで亀裂らしいものを観測することができなかった。これは、この実験が通常の疲労試験の場合と異なり、試験片全体が一様な塑性変形を受けるので、ある繰返し数後に試験片全体に同時に亀裂が発生し、直ちに破断するためと考えられる。このことは第 3 図から第 5 図において、破断の直前まで応力がほぼ一定であるという事実からも首肯できる。

## 2.2.2 繰返し歪を加えた後の引張り試験

歪振幅  $\gamma_p = 18.90\%$  ( $N = 28.5$  で破断) であらかじめ  $n_1 = 5, 15, 26$  回の繰返し歪を与えた軟鋼を引張り試験で破断させたときの応力～歪曲線を第 16 図に示す。 $n_1 = 5$  および 15 の場合には



第 15 図 振りの飽和応力と破断までの全歪との関係

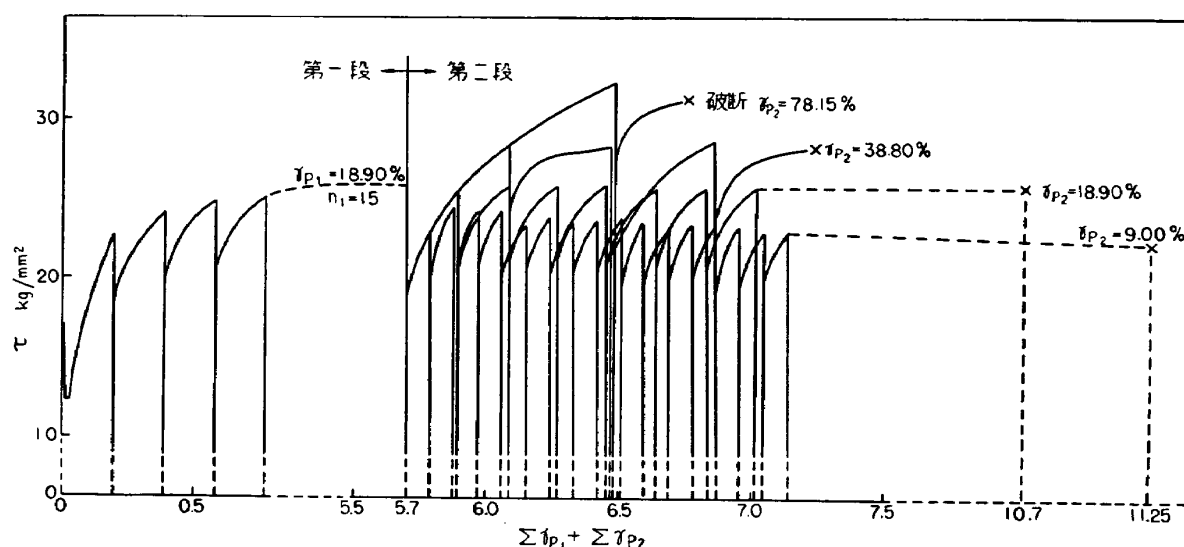


第 16 図  $\gamma_p = 18.9\%$  で  $n_1$  回繰返し歪を加えた後に行なった引張り試験の応力～歪曲線 (軟鋼)

引張りによっていずれも延性破断をし、その破断応力は処女材のそれにほぼ等しかった。しかし、繰返し歪のみで破断する直前の  $n_1=26$  の材料の引張り試験ではぜい性破断をし、この実験結果も疲労亀裂は破断直前に現われるという前述の推論が正しいことを裏づけている。

### 2.2.3 二段二重重複繰返し歪による疲労

軟鋼に最初歪振幅  $\gamma_{p1}=18.9\%$  でその寿命のほぼ半分にあたる繰返し数 ( $n_1=15$ ) を加えた後、第二段の歪振幅  $\gamma_{p2}=9.00, 38.80, 78.15\%$  でそれぞれ破断まで繰返した。その結果を第 17 図に示す。この実験から次のことがわかった。



第 17 図 二段二重重複繰返し歪の実験による応力-全歪曲線 (軟鋼の振り)

[1] 応力の変化  $\gamma_{p2} > \gamma_{p1}$  の場合には、第二段の初期のうちには加工硬化が進むが、繰返し数が増すにつれて硬化は次第に飽和して、応力振幅はある一定値に落ちつく。逆に  $\gamma_{p2} < \gamma_{p1}$  の場合には、加工軟化して応力は次第に低下していき、やはり一定値に落ちつく。Wood 等<sup>12)</sup> は、銅、アルミニウム、純ニッケルの冷間加工材に繰返し振り歪を与えると同様な軟化現象が生ずることを報告している。また、この飽和応力  $\tau_{s2}$  は第 3 表に示すように、いずれの場合にも最初から  $\gamma_{p2}$  の歪振幅で繰返した時に達する第 1 表の飽和応力  $\tau_s$  と一致し、 $\log \tau_{s2}$  と  $\log \gamma_{p2}$  との関係は第 10 図の  $\log \tau_s$  と  $\log \gamma_p$  の関係と全く同じになる。したがって、応力の点のみからみれば第 1 段の歪は

第 3 表 軟鋼の振りについての二段二重重複繰返し歪の疲労実験結果  
( $\gamma_{p1}=18.9\%$ ,  $n_1=15$ )

$\gamma_{p2} \%$	$\tau_{s2} \text{ kg/mm}^2$	$n_2$	$D$
18.90	26.07	13.50	0.53
78.15	32.45	0.75	0.79
38.80	29.10	2.00	0.81
9.00	23.05	31.50	0.69

(注) 表中  $n_2=0.75$  は 1/2 サイクルと 1 サイクルの中間で破断したことを示す。



第二段に影響を与えていないようにみえる。

〔2〕 被害率 第3表に繰返し数で測られた第一段の第二段に及ぼす被害率  $D$  を示した。ここで

$$D = (N_2 - n_2) / N_2 \quad (2.6)$$

$n_2$  は第二段における破断までの繰返し数

$N_2$  は最初から  $\gamma_{p2}$  で繰返した場合の破断までの繰返し数

である。この表から各歪振幅  $\gamma_{p2}$  に対する  $D$  の値は  $\gamma_{p2} = \gamma_{p1} = 18.90\%$  における値 ( $D = 0.53$ ) よりいずれも大きく、第一段が第二段の寿命を短縮させていることがわかる。 $\gamma_{p2} < \gamma_{p1}$  の場合に寿命が短縮することは、通常の疲労試験で第二段の応力を下げた場合の現象と同じであるが、 $\gamma_{p2} > \gamma_{p1}$  の場合にも寿命が短縮することは、通常の疲労試験で第二段の応力を上げたときに一般に寿命が伸びることと相違している。

〔3〕  $n_2$  と  $\tau_{s2}$ ,  $\gamma_{p2}$  および  $\sum \gamma_{p2}$  等との関係 この実験結果のみからでは資料不足で、これらの関係を明確にすることができなかった。これらの関係は前述の〔1〕,〔2〕の事項や(2.1)~(2.5)式の関係と関連して疲労機構を解明する上に重要な問題であって、この種の実験資料をさらに蓄積した上で考察を加える必要があると考えられる。

## 2.3 ま と め

疲労機構を解明し、疲労亀裂の発生、停留および進展等の問題に関連した材料の基本的な疲労特性を明らかにする一つの方法として、塑性歪振幅がほぼ一定の疲労試験とそれに関連した他の2種類の実験を行ない、その結果とそれについての考察を述べた。実験結果からいくつかの興味ある現象が見いだされ、さらに各因子間の相互関係が明らかにされた。ここに得られた現象および各因子間の相互関係は疲労の本質に直接関連していて、疲労機構を解明する上に重要な手がかりを与え、さらに疲労亀裂の発生、停留および進展の問題を解決するためにも有力な基礎事実を与えている。ここで見いだされた諸現象のうち、疲労亀裂の発生、停留および進展に直接関連のあるものを要約すると次のとおりである。

(1) 弾性歪+塑性歪=一定の歪を繰返した場合、繰返しの初期には加工硬化が進み一サイクルにおける塑性歪成分は減少していく。しかし、繰返しが進めば加工硬化は次第に飽和し、応力はそれぞれの歪振幅に応じた一定値に達し、以後各サイクルにおける弾性歪成分と塑性歪成分の比は一定となる。

(2) 加工硬化が飽和した状態における塑性歪振幅  $\gamma_p$  と破断までの繰返し数  $N$  との間には

$$\gamma_p^\alpha N = C_1 \quad (\text{一定}) \quad (2.1)$$

の関係が成り立つ。ここで  $\alpha$  および  $C_1$  は材料定数である。

次節以下においては、このような実験事実を基礎にして、疲労亀裂の発生、停留および進展につ

いて理論を進めていく。

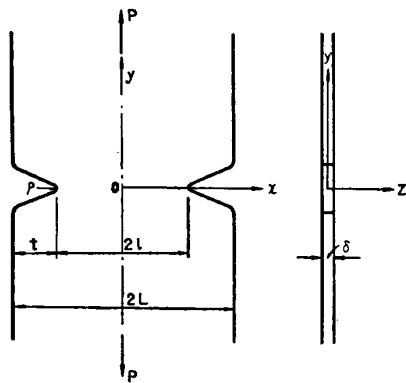
### 3. 切欠き底および亀裂先端部における応力と歪の状態

前述のように、疲労破壊には必ず塑性変形が先行することが一般に認められている。このような繰返しの塑性変形は、材料内部の微小欠陥の周囲とかまたは切欠き先端部や亀裂先端のような応力集中部に生じ、まず最初にそれらの部分に疲労破壊が起きるものと考えられる。したがって、亀裂の発生、停留および進展を考える場合、まず切欠き底および亀裂先端部等における応力と歪の状態を明らかにすることが必要である。

ここではそのためにまず切欠き半径の比較的大きな切欠き底における弾性応力集中率と、亀裂先端のように切欠き半径が極めて小さい場合の弾性応力集中率について考察する。次いで、これらの先端部に微小な塑性変形が生じた場合にもその歪集中率は、上記で求められたその部分の弾性応力集中率に等しくなることについて説明しよう。

#### 3.1 応力集中率および歪集中率の定義

議論を進めるためにまず、ここで用いる応力集中率および歪集中率の定義を明確にしておく必要がある。ここでは主として板材の疲労亀裂について論ずるので、第 18 図に示すような両側に対称



第 18 図 両側切欠き板

な切欠きを有する板に、軸方向荷重  $P$  が作用する場合を取って説明しよう。この場合、最小断面部においては、法線応力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  および剪断応力が分布するが、その中で軸方向応力  $\sigma_y$  の値が圧倒的に大である。また  $\sigma_y$  は切欠き底で最大であり、中心に向かうにつれて低下する。この切欠き底における  $\sigma_y$  の最大値を  $\sigma_{y \max}$  とする。いま最小断面に作用する  $\sigma_y$  の平均値を  $\sigma_m'$ 、切欠きのない場所での平均値を  $\sigma_m$  とすれば、図より

$$\sigma_m = P/2 L \delta$$

$$\sigma_m' = P/2 l \delta \quad (\delta \text{ は板厚})$$

である。

応力集中率としては  $\sigma_{y \max}/\sigma_m$  と、 $\sigma_{y \max}/\sigma_m'$  の二つが考えられるが、ここでは

$$\text{応力集中率 } K = \sigma_{y \max}/\sigma_m'$$

を取る。また、歪集中率は切欠き底における  $y$  方向の歪を  $\varepsilon_{y \max}$  とし、

$$\text{歪集中率} = \varepsilon_{y \max} / \left( \frac{\sigma_m'}{E} \right) \quad (E \text{ は材料のヤング率})$$

で表わす。

### 3.2 切欠き底における弾性応力集中率

切欠き底における切欠き半径  $\rho$  が材料の結晶粒の大きさに比して相当に大きな場合の弾性応力集中率の求め方については、すでに多くの理論的並びに実験的研究がなされている。ここではそれらのうち後に必要なもののみを引用する。

[1] 浅い両側切欠きの場合 第 18 図に示するように両側に浅い切欠き ( $t/L \ll 1$ ) を有する板に引張り荷重が作用するときの弾性応力集中率の値は、Neuber<sup>13)</sup> によると

$$K = 3\sqrt{t/2\rho} - 1 + \frac{4}{2 + \sqrt{t/2\rho}} \doteq 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad (3.1)$$

で表わされる。

[2] 深い両側切欠きの場合 第 18 図において、 $t/L$  の値が 1 に対して無視できない場合、つまり両側に深い切欠きがある板に引張り荷重が作用するときには、応力集中率の値は同じく Neuber<sup>13)</sup> によると次の式で表わされる。

$$K = \frac{2\left(\frac{l}{\rho} + 1\right)\sqrt{\frac{l}{\rho}}}{\left(\frac{l}{\rho} + 1\right)\tan^{-1}\sqrt{\frac{l}{\rho}} + \sqrt{\frac{l}{\rho}}} \quad (3.2)$$

[3] 有限幅の板の中央に極めて薄い楕円孔のある場合 第 19 図に示すように中央に極めて薄い楕円孔のある板の引張り荷重による応力集中率は石田氏<sup>14)</sup>の理論計算により

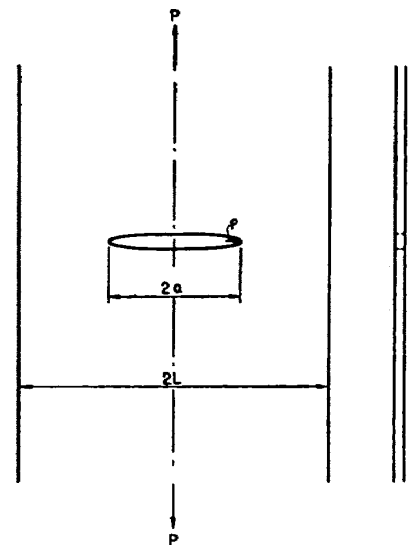
$$K = [\{2 + 1.190(a/L)^2 + 0.962(a/L)^4 + \dots\}\sqrt{a/\rho} + 1 + 1.389(a/L)^2 + 1.813(a/L)^4 + \dots](1 - a/L) \quad (3.3)$$

で表わされる。

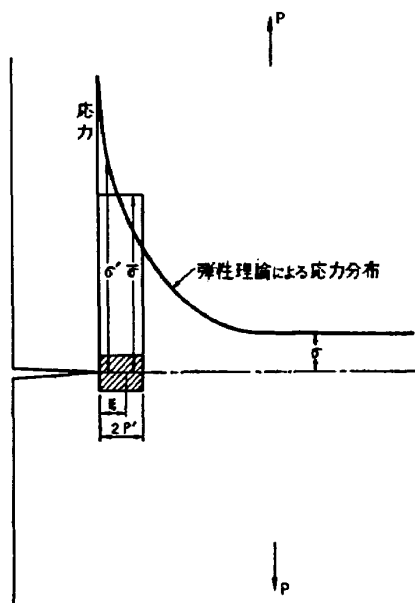
### 3.3 亀裂先端等における弾性応力集中率

亀裂の先端におけるように、切欠き半径  $\rho$  がその材料の結晶構造の大きさと同程度またはそれ以下になると、その先端の微小部分では距視的弾性論の基礎である物質の均一性や連続性が成り立たなくなる。したがって、この領域に対してはもはや距視的弾性論を適用することが不可能になり、材料組織を考慮した新たな考察が必要になってくる。この点について Neuber<sup>13)</sup> は一つの考え方を提案し、それに基づいて数種の鋭い切欠きを有する材料の弾性応力集中率を求めている。この方法は、疲労亀裂の問題を取り扱うのに極めて有効であるので、ここではそれについて簡単に考察を加えてみよう。

第 20 図に示すように、幅の広い板に鋭い切欠きがありこれに軸方向の引張り荷重が作用する場合について考えよう。この鋭い切欠きの先端部の応力集中には材料組織に関係した微小な長さ



第 19 図 中央に極めて薄い楕円孔を有する板



第 20 図 半無限板に鋭い切欠き  
のある場合

$2\rho'$  が重要な関係を有し、この  $2\rho'$  はその材料に固有な定数であるとする。古典弾性論はこの微小な応力集中部以外においてはもちろん有効であるから、弾性理論の解を基にして切欠き先端の微小領域における弾性応力集中率を求める。 $2\rho'$  の長さは小さいので、その側面に作用する応力は一様で応力の勾配はなく、その値は距視的弾性理論から求められる  $2\rho'$  部分の応力の平均値  $\bar{\sigma}$  に等しいと考える。すなわち、

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2\rho'} \int_0^{2\rho'} \sigma' d\xi \quad (3.4)$$

である。ただし、 $\sigma'$  は弾性理論より求めた  $2\rho'$  部分に作用する応力である。このような考え方の基礎には、 $2\rho'$  部分に塑性変形が生じ、その部分に応力の一様化が起こると

いう概念が含まれていた。さて、(3.4) 式によって  $\bar{\sigma}$  が求められれば、この  $\bar{\sigma}$  と外荷重による切欠き材の平均応力との比がこの鋭い切欠きに対する応力集中率として求められる。

Neuber はこのような考えに基づいて、第 18 図の切欠きが深くて鋭い場合の弾性応力集中率を求め、その値が

$$K = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{l}{\rho}} \quad (3.5)$$

となることを示した<sup>18)</sup>。一方、(3.2) 式において  $l/\rho \rightarrow$  大とすれば

$$K = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{l}{\rho'}} \quad (3.6)$$

となる。(3.5) と (3.6) 式の比較から、鋭い切欠きに対する応力集中率は、弾性理論から求めた応力集中率  $K$  の式において  $\rho$  を単に  $\rho'$  に置き換えれば得られることがわかる。Neuber はさらに、剪断または振りを受ける二次元応力分布の深くて鋭い回転体状の切欠きについても同様な計算を行ない、いずれの場合にも鋭い切欠きの応力集中率は、上記のように  $\rho$  を  $\rho'$  に置き替えることにより、 $\rho$  の大きな場合の  $K$  の式から求められることを示し、一般にこのような置き替えが可能であると述べている<sup>18)</sup>。

さて、この  $2\rho'$  値であるが、この値は前述のように鋭い切欠き先端における塑性変形部の幅を表わし、Neuber は材料定数であるとしているが、おそらくその値は外荷重に基づく試験片の平均応力のレベルによっても多少変化するものと思われる。この点については、将来実験的な研究が必要であると思われるが、Neuber は鋼に対しては  $2\rho' \doteq 0.99 \text{ mm}$  とすれば前記の  $K$  の値は実験値とよく合うと述べている<sup>18)</sup>。

Neuber の鋭い切欠きに対するこの理論を用いると、有限な幅の板の中央に極めて薄い楕円孔がある場合には、その最大応力集中率は (3.3) 式より

$$K = [\{2 + 1.190(a/L)^2 + 0.992(a/L)^4 + \dots\} \sqrt{a/\rho'} + 1 + 1.389(a/L)^2 + 1.813(a/L)^4 + \dots](1 - a/L) \quad (3.7)$$

で表わすことができると考えられる。ここで、 $2a$  および  $2L$  は第 19 図に示すようにそれぞれ楕円孔の長軸の長さおよび試料の幅を表わす。亀裂を近似的にこのような楕円孔で表わせば、その先端に対しては (3.7) 式を適用することができる。

### 3.4 切欠き底および亀裂先端部の微小領域における弾性応力集中率と歪集中率の等価性

切欠き底または亀裂先端部の最大応力が、その材料の降伏応力以下であれば、応力と歪の直線関係から弾性応力集中率と弾性歪集中率が等しくなることはいうまでもない。しかしながら、これらの部分に塑性変形が生ずると、もはや応力と歪の非直線性から応力集中率と歪集中率とは等しくなくなる。そして、このような塑性変形部分の応力および歪を一義的に決定することは、現在のところ塑性理論によってもまだ解決されておらないようである。

しかしながら、疲労亀裂の問題においては、切欠き底および亀裂先端部に生ずる塑性領域は一般に周囲弾性体に比較して極めて微小であるので、ここではこのような特殊な微小領域における歪集中のみに限って考察を進めよう。この微小塑性領域は前述のように周囲の大きな弾性領域に包囲されそれによって著しい拘束を受けている。したがって、その変形は周囲弾性体の弾性変形の影響を著しく受ける。切欠き底または亀裂先端部の変形が弾性的である場合には、その変形は当然周囲弾性体の弾性変形に比例するのであるから、この微小部分に塑性変形を生じて、その変形はやはり周囲弾性体の弾性変形にほぼ比例すると考えることができる。このように考えれば、この微小塑性領域における歪集中率は、その部分が弾性状態であったときの歪集中率つまり応力集中率に近似的に等しくなるという結論が導かれる。この結論はもちろん仮定であり、当然実験的な裏づけが必要であるが、まだそのような実験は行なわれていないようである。しかし、最近の進歩した光弾性技術を応用すれば、実験的にこの仮定を検討することは不可能でないと考えられる。筆者も将来光弾性被膜法などによってこの仮定を確かめたいと考えている。

この仮定は最初 Neuber によって提案され<sup>13)</sup>、後石橋教授<sup>15)</sup>および Forrest<sup>16)</sup>等によって支持された。この仮定を用いると、弾性計算によって求めた弾性応力集中率から直ちに鋭い切欠き底および亀裂先端部等における歪の集中状態を知ることができる。したがって、鋭い切欠き底や亀裂先端部等の微小領域が、弾性または塑性状態である場合の応力集中率と歪集中率との相互関係は次に示すようになる。

$$\begin{array}{l} \text{弾 性 状 態} \cdots \frac{\text{応力集中率}}{\text{}} = \frac{\text{歪集中率}}{\text{}} \\ \text{塑 性 状 態} \cdots \frac{\text{応力集中率}}{\text{}} \neq \frac{\text{歪集中率}}{\text{}} \end{array}$$

上述のように、大きな弾性母体に包囲された微小塑性域の歪集中率は、その部分が弾性的であったときの応力集中率に等しいというこの仮定は実験的には確認されてはおらないが上に述べた推論と多くの研究者によって支持されていることから妥当な仮定と考えられる。次節以下においては、この仮定を用いて、弾性計算より求めた応力集中率から切欠き底および亀裂先端部の歪を計算し、亀裂の発生、停留および進展に関する理論を進めていく。

#### 4. 切欠き底における疲労亀裂の発生条件

本節においては第2節で述べた「塑性歪の繰返しによる金属の疲労試験」の結果と第3節の鋭い切欠き底における歪の求め方を基礎にして、繰返し荷重を受ける切欠き材の切欠き底における歪の状態について考察し、そこに疲労亀裂が発生する条件を求める。

##### 4.1 記 号

本節で用いる記号は次のとおりである。

- $O$  : 切欠き底における応力～歪曲線の原点
- $B_1, B_2, \dots$  : 応力～歪曲線が歪軸を切る点
- $F_1, F_2, \dots$  : 応力～歪曲線が歪軸を切る点
- $A_1, A_2, \dots$  : 一荷重サイクルにおける最高応力の点
- $D_1, D_2, \dots$  : 一荷重サイクルにおける最低応力の点
- $C_1, C_2, \dots, G_1, G_2, \dots$  : 応力～歪曲線が応力軸を切る点
- $P, Q$  : 一荷重サイクルにおける最高または最低応力に対応する歪軸上の点
- $E$  : 材料のヤング率
- $K$  : 切欠きの応力集中率
- $K_0$  : 分岐点に対応する切欠きの応力集中率
- $\sigma$  : 試験片に作用する平均の応力振幅＝荷重振幅/試験片の最小断面積
- $\sigma_0$  : 分岐点における応力  $\sigma$  の値
- $\sigma_{cr}$  : 切欠き底において歪振幅  $\varepsilon_{cr}$  に対応する応力振幅
- $\sigma_Y$  : 材料の降伏応力
- $\varepsilon$  : 切欠き底における歪振幅（片振幅）
- $\varepsilon_p$  : 切欠き底における塑性歪振幅（片振幅）
- $\varepsilon_{cr}$  : 切欠き底に疲労亀裂を発生する最低臨界歪振幅（片振幅）

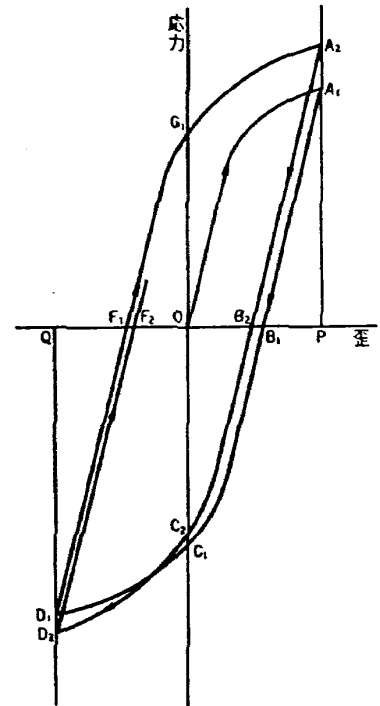
##### 4.2 切欠き底における繰返し歪の状態

疲労破壊には必ず塑性変形が先行することはすでに述べたとおりである。したがって、平滑材においてはその内部の微小欠陥周りの応力集中部に、切欠き材ではその切欠き先端部に、それぞれ塑

性変形を生じ、その塑性変形が繰り返されることによって、その部分に疲労亀裂が発生すると考えられる。よって、切欠き底等に疲労亀裂が発生する条件を求めるためには、まずこれらの部分における繰返し歪の状態を明らかにすることが必要である。

ここでは、一例として第 18 図に示すような両側に切欠きを有する幅の広い板に、引張り圧縮両振り荷重が作用する場合の切欠き底における繰返し歪の状態について考察しよう。

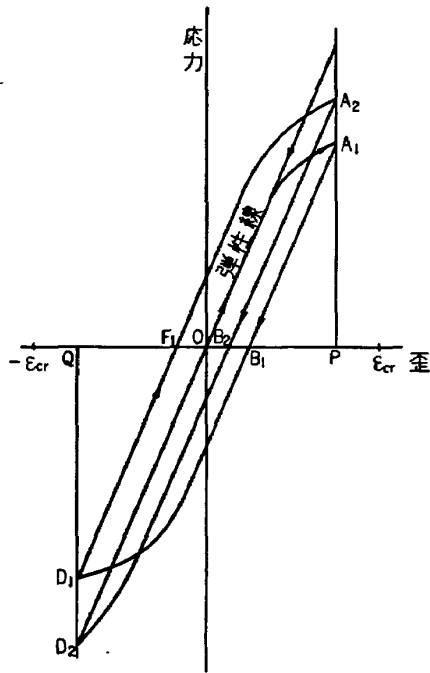
この切欠き先端には当然大きな応力集中を生じ、荷重がある値以上になれば先端の微小部分に塑性変形を生ずる。もし最初に引張り荷重が作用すれば第 21 図に示すように、その変形は引張りの応力～歪曲線  $OA_1$  にそって進行し、最高荷重で  $A_1$  点に達する。この切欠きの弾性応力集中率を  $K$ 、引張り最高荷重における試験片の平均応力を  $\sigma$  とし、材料のヤング率を  $E$  とすれば、第 3 節の仮定から切欠き底における最大の歪は  $\overline{OP} = \epsilon = \sigma K / E$  となる。次に、荷重が次第に減少すると切欠き先端部の歪は  $A_1B_1C_1$  曲線にそって変化し、外荷重が零になればついに歪が零の  $C_1$  点に到達し圧縮残留応力  $\overline{OC}_1$  を生ずる。なぜならば、この塑性変形部分は極めて微小な領域であって、周囲の大きな弾性領域から著しい拘束を受けているので、外荷重が零となり周囲弾性体の幾何学的形状が最初の無荷重状態にもどれば、塑性変形を生じた微小部分の形状もまた最初の無荷重における状態、すなわち歪が零の状態に復元されるからである。次に圧縮荷重が増せば圧縮による塑性変形が進み、最大圧縮荷重において  $D_1$  点に達する。このときの最大圧縮歪  $\overline{OQ}$  もまた  $\sigma K / E$  に等しくなる。次に、圧縮荷重が減少すれば応力と歪は  $D_1F_1G_1$  曲線にそって進み、外荷重が零になれば歪が零の  $G_1$  点に達し、引張り残留応力  $\overline{OG}_1$  を生ずる。次に、再び引張り荷重が増し最高荷重になれば  $A_2$  点に達する。以下同様に、 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \epsilon = \sigma K / E$  =一定の一定歪振幅による繰返し歪を受ける。



第 21 図 切欠き底における繰返し歪の状態

#### 4.3 切欠き底における疲労亀裂発生条件

第 21 図に示すような一定歪振幅の繰返し歪による金属の疲労については、第 2 節で述べたとおりである。すなわち、繰返しの初期においては加工硬化が進み、第 21 図の  $\overline{PA_1}$ ,  $\overline{AP_2}$ , ... および  $\overline{QD_1}$ ,  $\overline{QD_2}$ , ... 等の応力値は繰返しのたびに増加する。したがって、一荷重サイクルにおける全塑性歪振幅  $\overline{B_1F_1}$ ,  $\overline{B_2F_2}$ , ... は次第に減少し、全歪振幅  $\overline{PQ} = 2\epsilon$  中に占める弾性歪成分 ( $\overline{PB_1} + \overline{QF_1}$ ), ( $\overline{PB_2} + \overline{QF_2}$ ), ... の割合が増えてくる。ゆえに、歪振幅  $\overline{OP} = \overline{OQ} = \epsilon$  がその材料に固有なある一定値  $\epsilon_{cr}$  より小さければ第 22 図に示すように、加工硬化が飽和する前に塑性歪は完全に消



第 22 図 切欠き底における変形が、歪の繰返しによる加工硬化により完全に弾性変形のみに移行する状態

減し、変形は純弾性的となり、それ以後の繰返しに対して疲労は進行しなくなるであろう。もし歪振幅  $\varepsilon$  が  $\varepsilon_{cr}$  より大きければ、繰返しの進行によって加工硬化が飽和しても塑性歪成分  $\varepsilon_p$  は消滅せず、以後応力～歪曲線は定常なヒステリシスループを描き、第 2 節の (2.1') 式、

$$\varepsilon_p^a N = C \text{ (一定)}$$

の条件を満足する繰返し数  $N$  で切欠き底は破断し、そこに亀裂を生ずる。

歪振幅がちょうど上記の二つの場合の境界上にあるとき、すなわち  $\overline{OP} = \overline{OQ} = \varepsilon_{cr}$  の場合には切欠き底に疲労亀裂が発生する臨界状態となる。したがって、歪振幅  $\varepsilon_{cr}$  (材料定数) は切欠き底に亀裂を発生させる最小の歪振幅となり、亀裂発生を決定する。すなわち、切欠き底において、

$$\varepsilon = \sigma K / E < \varepsilon_{cr} \text{ ならば亀裂は発生しない} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \sigma K / E = \varepsilon_{cr} \text{ ならば亀裂発生時の臨界状態} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = \sigma K / E > \varepsilon_{cr} \text{ ならば亀裂が発生する} \quad (4.3)$$

よって、亀裂を発生する臨界状態では

$$\sigma K = E \varepsilon_{cr} = \text{一定} = \sigma_{cr} \quad (4.4)$$

となり、亀裂を発生する最小応力  $\sigma$  と切欠きの応力集中率  $K$  との関係は双曲線的になる。

さて次に、切欠き底に亀裂を生ずる最小歪振幅  $\varepsilon_{cy}$  または応力振幅  $\sigma_{cr}$  (いずれも切欠き底におけるもの) はどのような値をもつものであるかについて考察しよう。まず、これらの値が材料定数であることおよび  $\sigma_{cr}$  の値はその材料の降伏応力よりもわずかに高い値であることは、いままでの議論から明らかである。したがって

$$E \varepsilon_{cr} = \sigma_{cr} \geq \sigma_Y \quad (4.5)$$

である。よって、 $\varepsilon_{cr}$  および  $\sigma_{cr}$  の値は材料の降伏応力  $\sigma_Y$  から大略の値を推定することができる。また、次節で説明する分岐点における応力および応力集中率をそれぞれ  $\sigma_0$ ,  $K_0$  とすれば、この点における歪振幅  $\varepsilon$  はちょうど  $\varepsilon_{cr}$  に等しくなっているから

$$\sigma_{cr} = \varepsilon_{cr} E = \sigma_0 K_0 \quad (4.6)$$

である。したがって、 $\sigma_0$  および  $K_0$  が与えられれば  $\varepsilon_{cr}$  および  $\sigma_{cr}$  を正確に決定することができる。なお、この場合当然のことではあるが

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 K_0 \geq \sigma_Y \quad (4.7)$$



の成り立つことが一般に実験的に認められており<sup>5)</sup>, このことは (4.5) 式の正しいことを裏づけている。

#### 4.4 Frost らの実験結果と理論の比較

前節において切欠き底に疲労亀裂が発生する臨界条件は

$$\sigma K = E \varepsilon_{cr} = \sigma_{cr} \quad (\text{一定}) \quad (4.4)$$

であることを説明した。ここでは (4.4) 式の条件が実験結果とよく合うことを示そう。

Frost と Dugdale<sup>17)</sup> は第 23 図に示すように, 両側に切欠きを有する軟鋼板 (0.22% 炭素鋼) に引張り圧縮両振り荷重を加え, 切欠き底に亀裂が発生する応力  $\sigma$  と切欠きの応力集中率  $K$  との関係ならびに停留亀裂の存在する応力範囲について実験を行なっている。その実験結果を第 24 図に示す。この図において分岐点では

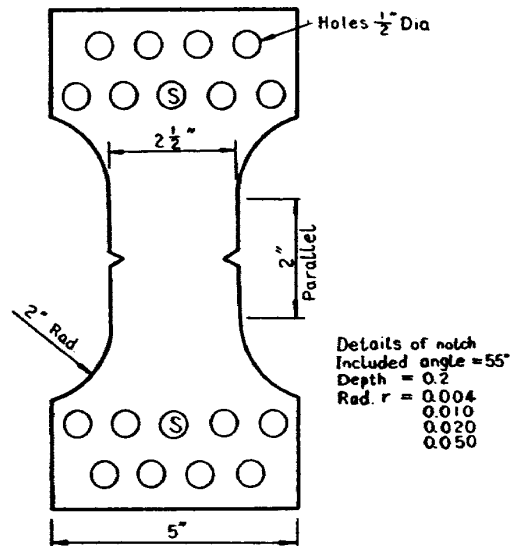
$$K = 4.95$$

$$\sigma_0 = 3.25 \text{ ton/in}^2 = 5.04 \text{ kg/mm}^2$$

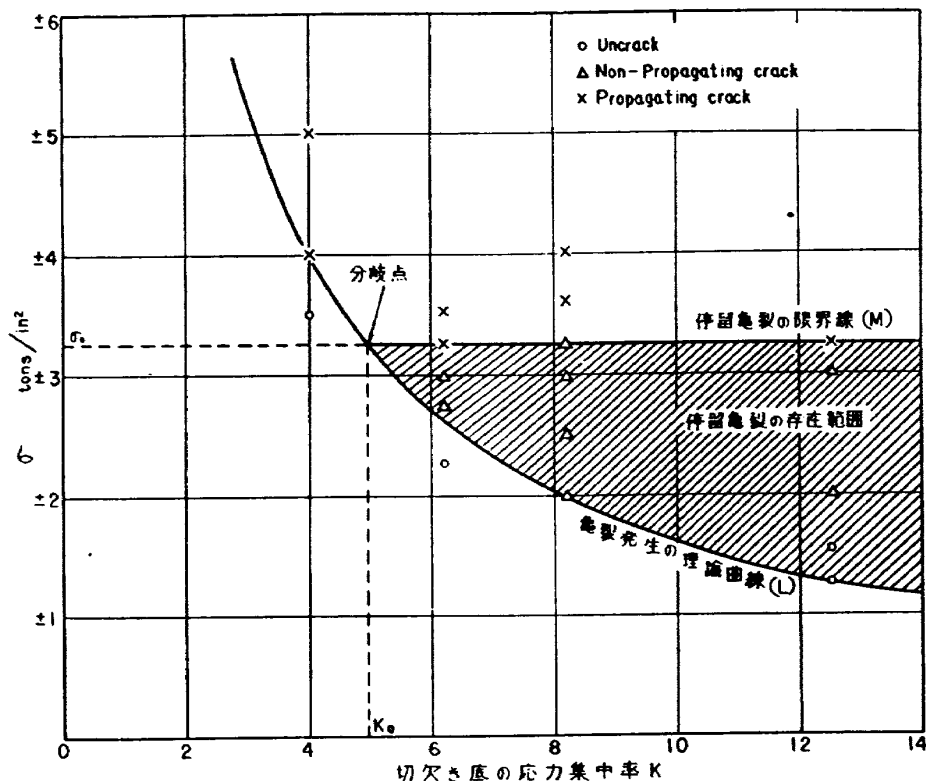
であるとみなせるから, (4.6) 式より

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 K_0 \doteq 16 \text{ ton/in}^2 = 24.8 \text{ kg/mm}^2$$

となる。ゆえに, 切欠き底に亀裂の発生する臨界状態で



第 23 図 Frost らの用いた試験片



第 24 図 Frost の実験結果<sup>17)</sup>および亀裂発生 の 理論曲線

は (4.4) および (4.7) 式より

$$\sigma K = \sigma_0 K_0 = \sigma_{cr} = 24.8 \text{ kg/mm}^2$$

となる。上式から得られた  $\sigma$  と  $K$  との双曲線関係を第 24 図の実線 L 曲線で示す。この理論計算曲線は図からわかるように、実験上の亀裂発生境界線とよく一致し、このような考え方が実験的に妥当であることを証明している。

なお、この材料の下降伏点応力  $\sigma_Y$  は  $24 \sim 25 \text{ kg/mm}^2$  である。したがって、 $\sigma_{cr} \approx \sigma_Y$  となり、前述の (4.5) 式がやはり成立することを示している。

## 5. 切欠き底における疲労亀裂の停留

切欠き材に一定の振幅の繰返し荷重を加えて疲労試験を行なう際、繰返しの初期に切欠き底に微小な疲労亀裂が発生するにもかかわらず、その亀裂は以後ほとんど進展せず  $10^7 \sim 10^8$  の荷重の繰返しに耐えることがある。このような切欠き底に停留する疲労亀裂を停留亀裂 (non-propagating crack) と称する。このような停留亀裂の存在が発見されたのは、比較的最近のことである。すなわち、Lessels 等<sup>18)</sup> が 1950 年に炭素鋼の回転曲げ試験で停留亀裂の存在をはじめて発見した。このことはわが国においても再確認され<sup>19)</sup>、さらに純銅<sup>20)</sup>、球状黒鉛鋳鉄<sup>21)</sup>、アルミニウム合金<sup>22)</sup> の回転曲げ試験においてもその存在が確認された。さらに、回転曲げ以外に引張り圧縮<sup>17), 23), 24)</sup> 振りの繰返し荷重のもとでも停留亀裂の存在が認められた。

切欠き底のように、応力集中の著しい部分に生じた亀裂が停留するという事実は、材料力学的な常識では理解しがたい現象であり、それだけに学問的に興味のある現象である。また、航空機の運用上の見地からは、発生した疲労亀裂が進展する亀裂であるかまたは停留する亀裂であるかを判定することは、航空機の安全性に関する重要な問題である。このように、停留亀裂の問題は学問的にもまた実用的にも現在重要な研究対象となっている。したがって、停留亀裂の存在が発見されて以来それについての研究は数多くなされてきたが、その研究は主として実験的なものが多く、亀裂の停留する条件を物理的に明確に説明した理論研究はあまり見あたらず、わずかに Coffin<sup>3)</sup> と McEvily<sup>2)</sup> の理論およびそれ以外に数種の理論が提案されているに過ぎないようである。

ここで、いままでの停留亀裂に関する実験結果をまとめてみると次のようになる。

(1) 停留亀裂は平滑材には存在しない。

(2) 切欠き部の応力集中率  $K$  の値が大きいほど亀裂は停留しやすい。そして、 $K$  の値がある値  $K_0$  以下であると停留亀裂は存在しなくなる。すなわち、 $K$  には下限値  $K_0$  が存在し、この  $K_0$  は材料によって一定である。

(3) 試験片に加わる平均の応力振幅  $\sigma$  が小さいほど亀裂は停留しやすい。そして、この  $\sigma$  がある値  $\sigma_0$  より大きくなると停留亀裂は存在しなくなる。すなわち、停留亀裂には応力の上限值  $\sigma_0$

が存在し、この  $\sigma_0$  は材料によって一定である。

このような停留亀裂が存在する応力集中率の下限  $K_0$  と応力の上限  $\sigma_0$  によって表わされる  $K \sim \sigma$  図上の点を分岐点と称する。

以上の実験事実から、亀裂の停留には切欠きによる応力または歪分布が主要な作用をしていることがわかる。この節では切欠き底に発生した微小亀裂の先端における歪振幅が、切欠きによる応力または歪分布によってどのような影響を受けるかについて考察し、その結果に基づいて停留亀裂の生ずる合理的な条件を導くことにする。そして、第1節で述べた McEvily<sup>2)</sup> および Coffin<sup>3)</sup> 等の理論よりさらに進んだ停留亀裂に関する理論を展開し、この理論が実験結果を明快に説明しうることを示そう。

## 5.1 記 号

本節で用いる記号は次のとおりである。

$A, B, C, D$  : 歪分布を表わす曲線

$O$  : 切欠き先端の位置

$K$  : 切欠き部の応力集中率

$K_0$  : 分岐点における  $K$  の値

$t$  : 亀裂の長さ

$E$  : 材料のヤング率

$x$  : 試験片の最小断面上の点  $P$  の切欠き底  $O$  よりの距離

$\varepsilon_D$  : 亀裂先端における歪振幅

$\varepsilon$  : 切欠き底における歪振幅

$\varepsilon_{cr}$  : 亀裂が発生する最小歪振幅

$\sigma$  : 試験片最小断面部の平均応力振幅 = 荷重/最小断面積

$\sigma_0$  : 分岐点における  $\sigma$  の値

$\sigma_{\max}$  : 停留亀裂の存在する応力振幅  $\sigma$  の上限値

$\sigma_{\min}$  : 切欠き底に亀裂を生ずる応力振幅  $\sigma$  の最小値

$t_{\max}$  : 最大停留亀裂長さ

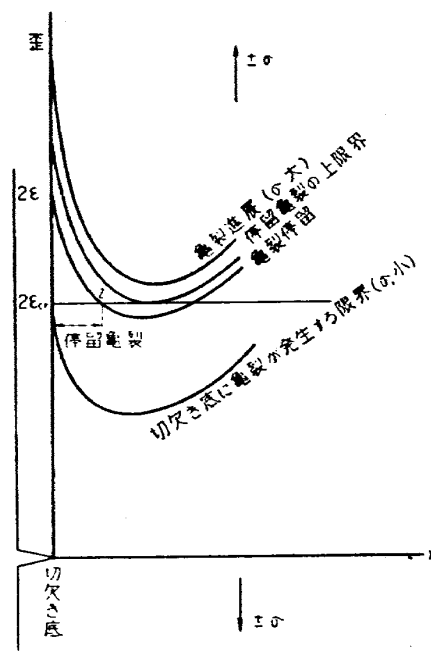
## 5.2 切欠き底に生じた微小亀裂の先端における歪状態ならびに停留亀裂の条件

すでに述べたように、切欠き先端における亀裂の停留には切欠きによる歪分布が主要な作用をしている。したがって、停留亀裂の条件を導くにはまず亀裂先端の歪振幅が切欠きによってどのような影響を受けるかについて考察する必要がある。ここでは、第 25 図に示すような両側に切欠きを有する幅の広い板に引張り圧縮両振り荷重が作用する場合を例にとりて考えよう。まず、切欠き底に亀裂が存在しない場合には、引張りおよび圧縮の各最大荷重における最小断面部の弾性歪分布は



力集中率  $K$  が一定で、ある一定値  $K_0$  ( $K_0$  は後に示すように分岐点における応力集中率を示す材料定数である) より大きい場合、つまり  $K > K_0$  の場合には  $D$  曲線の形は第 25 図に示すように、亀裂の進展とともに最初いったん低下し、次いで次第に上昇する。この最初の低下は切欠きによる応力分布の減衰、つまり  $A$  および  $B$  曲線の  $x$  方向への減衰によるものであって、切欠きの応力集中率が大きいほどこの低下は著しい。 $D$  曲線がいったん低下した後には上昇するのは、亀裂長さが大きくなり亀裂そのものによる歪集中が大となること、すなわち  $C$  曲線の上昇によっておきる。第 25 図に示すように、 $D$  曲線が最初低下して  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切るような場合には、その交点  $Z$  までの範囲では切欠き底および亀裂先端における全歪振幅は  $2\varepsilon_{cr}$  より大きくなり、亀裂は  $Z$  点まで進行する。 $Z$  点までの亀裂長さを  $l$  とすると  $l$  が停留亀裂長さとなる。なぜならば、 $Z$  点における亀裂先端の全歪振幅はちょうど  $2\varepsilon_{cr}$  となり、それ以上亀裂は進展せず、亀裂はそこに停留するようになるからである。

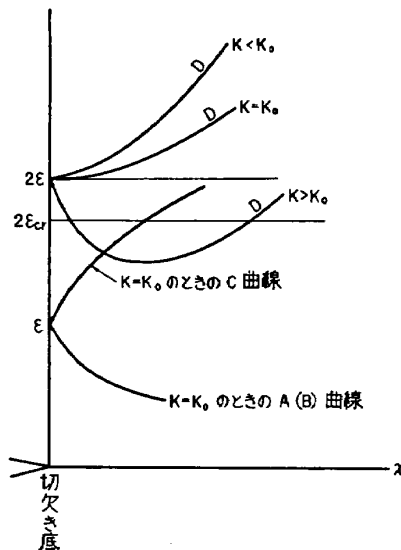
この  $D$  曲線は荷重振幅が増し、応力振幅  $\sigma$  が増加すれば、そのレベルは上昇して第 26 図に示すようになる。すなわち、 $\sigma$  が小さくて切欠き底の歪振幅  $2\varepsilon$  が  $2\varepsilon_{cr}$  より小さい場合には切欠き底には亀裂が発生しないが、 $\sigma$  がさらに大きくなり  $2\varepsilon > 2\varepsilon_{cr}$  であり、かつ  $D$  曲線が  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切る場合には、その交点まで亀裂が進展し、以後亀裂は停留する。この交点は  $\sigma$  が増大するにつれて図では右に移動するから、停留亀裂長さは  $\sigma$  の増加とともに増すことがわかる。さらに、応力振幅  $\sigma$  が増すと  $D$  曲線はついに  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線と一点において接するようになる。この状態は停留亀裂が存在するかしないかの臨界の状態を表わす。次いで、 $\sigma$  がさらに増せば  $D$  曲線のレベルが上り、 $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線に交わったり接したりすることが全くなくなる。このような場合には、切欠きにいったん発生した亀裂は留まることなく進展していく。



第 26 図 荷重振幅の増減による  $D$  曲線の移動

以上の考察から、一定の応力集中率  $K$  (ただし、 $K > K_0$ ) を有する切欠き試験片は、ある応力範囲において停留亀裂を生ずること、およびその停留亀裂の長さ  $l$  は応力振幅の値によって変化することがわかった。これらのことは実験結果と極めてよく一致することを後に示そう。

〔2〕 切欠きの応力集中率  $K$  の変化による  $D$  曲線の変動  $K$  の値が変化しても、亀裂そのものによる引張り歪の集中率を表わす  $C$  曲線の形はあまり変わらない。しかし、 $A$  および  $B$  曲線は  $K$  の値の増加とともに切欠き底近くで鋭く立ってくる。したがって、 $K$  の値が大きいほど  $D$  曲線の切欠き底近くにおける低下率は大きくなる。ゆえに、 $K$  が大きい場合ほど第 27 図に示すように  $D$



第 27 図 切欠き底における応力集中率  $K$  の値の変化による  $D$  曲線の変化

曲線は  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切り易く、したがって、停留亀裂を生じ易くなることがわかる。このようにして、前に述べた実験事実、すなわち  $K$  が大きいほど停留亀裂が生じ易いということを明快に説明することができた。さて  $K$  の値が減少し、第 27 図に示すように、切欠き底の近くで  $B$  曲線の低下率と  $C$  曲線の上昇率が一致するような場合には、 $D$  曲線は切欠き底から水平に出発して途中低下することなく亀裂の進展とともに上昇する。ゆえに、このような場合には切欠き底に亀裂がいったん発生すれば、 $D$  曲線は  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切ることはないので、亀裂は留まることなく進展する。さらに、 $K$  の値が小さくなると  $D$  曲線は切欠き底から単調増加の曲線となり、切欠き底にいったん亀裂が発生すれば、 $D$  曲線は  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切ることはないので、亀裂は留まることなく進展する。したがって、 $D$  曲線が水平に出発する場合は、停留亀裂を生ずる  $K$  の値の下限である。この下限値を  $K_0$  とすれば、この  $K_0$  は材料定数であり、分岐点における  $K$  の値を示すことになる。

以上の結果をまとめてみると次のようになる。

- (1)  $K < K_0$  の場合には、切欠き底に亀裂がいったん発生すればその亀裂は留まることなく進展する。
- (2)  $K > K_0$  の場合には、切欠き底に亀裂がいったん発生してもその亀裂はある応力範囲においては停留する。
- (3)  $K = K_0$  の場合には、前二者の境界状態となる。

以上の [1] および [2] の考察により、停留亀裂が存在するには応力振幅および切欠きの応力集中率にはそれぞれ限界があり、応力振幅の上限  $\sigma_0$  と応力集中率の下限  $K_0$  とは停留亀裂の限界であるいわゆる分岐点を表わすことがわかり、分岐点の存在理由が明確にされた。また、切欠き部の応力集中率  $K$  の値が大きいほど、亀裂が停留しやすいという常識的には理解しがたい事実が極めて明確に説明された。

このように、ここでは停留亀裂に関する上述の考察結果が実験事実を明快に説明できることを示したが、次節以下においてはさらにこの理論結果が、停留亀裂長さおよび停留亀裂の存在する応力範囲に関する実験結果と極めてよく一致することを示そう。

なお、ここでは一例として両振り引張り圧縮荷重下における亀裂の停留について考察したが、上述の説明からわかるように、両振り荷重のみでなく、少なくとも圧縮荷重が存在する荷重状態では疲労亀裂が存在しうることがわかる。Frost と Dugdale<sup>7)</sup> は種々の平均荷重のもとで切欠き材の引

張り圧縮疲労試験を行ない、停留亀裂の存在する範囲は第 28 図に示すように片振り引張り荷重までであって、それ以上の平均荷重の下では停留亀裂が存在しないことを見いだしている。この実験事実上述の停留亀裂に関する考え方が妥当であることを裏づけている。しかしながら、McEvilly<sup>2)</sup> および Frost<sup>25)</sup> のその後の実験によれば、引張り平均荷重が大きくて圧縮荷重がないような荷重状態においても停留亀裂が存在することを報告しているので、このような場合の停留亀裂については今後さらに検討を進めたいと考えている。

### 5.3 実験結果と理論の比較

#### 5.3.1 停留亀裂の長さ

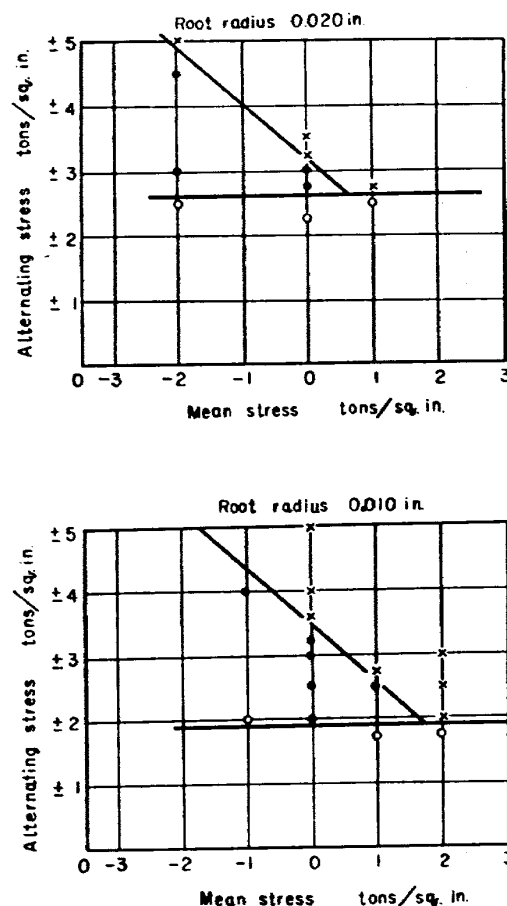
前節において切欠き材の応力集中率  $K$  と試験片に作用する応力振幅  $\sigma$  がそれぞれ  $K > K_0$  および  $\sigma < \sigma_0$  である範囲では、停留亀裂が存在しうることを説明した。いま応力集中率  $K$  が  $K_0$  より大きな切欠きを有する試験片に引張り圧縮両振り荷重が作用する場合を考えると、 $\sigma < \sigma_0$  の応力範囲では  $D$  曲線は第 25 図に示すように  $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線と  $Z$  点で交わり、停留亀裂を生じてその長さは  $t$  となる。この応力振幅  $\sigma$  が増加すると第 26 図に示すように  $D$  曲線のレベルは上り  $Z$  点は右に移動して停留亀裂長さ  $t$  は増加する。このような停留亀裂長さ  $t$  の応力振幅  $\sigma$  による変化の状態は、ある与えられた切欠き材については次に示す方法によって簡単に求めることができる。すなわち、切欠きによる歪分布を表わす  $B$  曲線を弾性論によって求める。次に、亀裂先端における引張り荷重による歪集中率を第 3 節に示した方法を用いて決定し  $C$  曲線を求める。この  $B$  および  $C$  曲線より  $D$  曲線を決定する。次に、材料の降伏応力  $\sigma_Y$  から第 4 節の (4.7) 式の関係を用いて

$$\varepsilon_{cr} \geq \sigma_Y/E \quad (5.1)$$

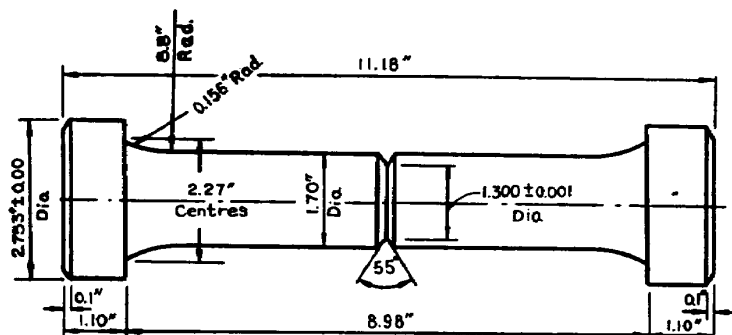
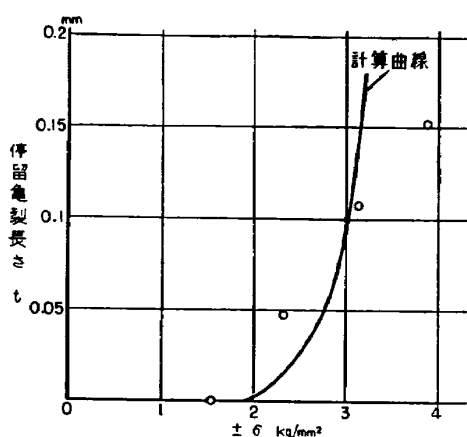
を求める。このようにして  $D$  曲線と  $2\varepsilon_{cr}$  とが求まれば第 25 図の  $Z$  点は図上で求まり、亀裂長さ  $t$  を得ることができる。また、計算によって  $t$  を求めるには、 $Z$  点では亀裂先端の全歪振幅  $\varepsilon_D$  が

$$\varepsilon_D = 2\varepsilon_{cr} \div 2\sigma_Y/E \quad (5.2)$$

であり、 $\varepsilon_D$  を応力  $\sigma$  と亀裂長さ  $t$  の関数として表わすことができるので、(5.2) 式を  $t$  について解くことによって亀裂長さを求めることができる。



第 28 図 Mild steel plate MBJM.  
Relation between alternating stress and mean stress. × Broken; ● Unbroken but cracked; ○ Uncracked.  
(Frost と Dugdale の実験結果<sup>17)</sup>)

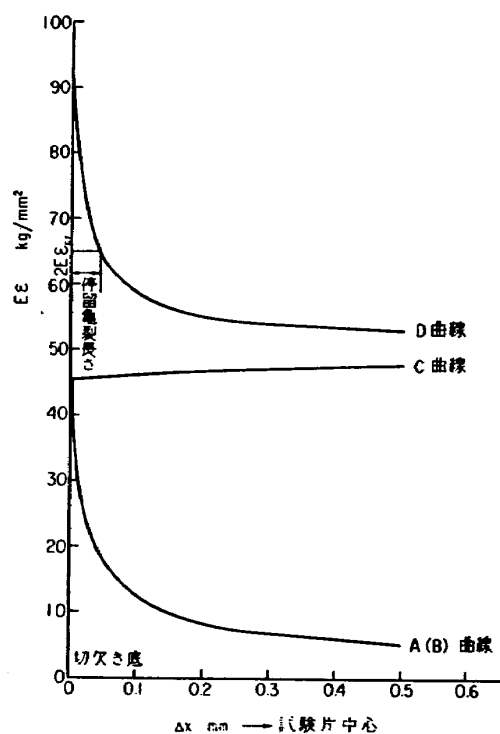
第 29 図 Frost と Phillips<sup>26)</sup> の用いた試験片第 30 図 停留亀裂長さと応力振幅との関係 (Frost と Phillips の実験結果<sup>26)</sup>)

Frost と Phillips<sup>26)</sup> は第 29 図に示すような深く鋭い切欠きを有するアルミニウム合金の丸棒に引張り圧縮両振り荷重を加えて停留亀裂を生じさせ、試験後試験片を切断してその停留亀裂の長さを測定した。その実験結果を第 30 図に示す。

この停留亀裂長さを計算で求めるために、切欠きによる歪分布を表わす  $B$  曲線を Neuber の深い回転状切欠きに対する応力分布の式から計算し、 $C$  曲線は  $\rho' = 0.05$  mm として同じく Neuber の式を用いて計算した。このようにして計算した  $B$ ,  $C$  および  $D$  曲線の一つ例を第 31 図に示す。また、24 ST 3 アルミニウム合金の降伏応力  $\sigma_Y$  は  $30 \text{ kg/mm}^2$  程度であるので、この値から  $2E\epsilon_{cr} = 2\sigma' = 64 \text{ kg/mm}^2$  とした。このようにして (5.2) 式の条件から停留亀裂長さ  $t$  と応力振幅  $\sigma$  との関係を計算し、その結果を第 30 図の実線で示す。試験片が丸棒であって亀裂長さの測定には誤差が大きいことを考慮に入れば、この図は定性的にはもちろんのこと定量的にも理論曲線が実験値とかなり良く合っていることを示しているといえよう。

#### 5.4.2 停留亀裂の応力範囲

切欠きの応力集中率  $K$  が  $K > K_0$  を満足する一定値を有する切欠き材において、停留亀裂が存

第 31 図 Frost らの実験<sup>26)</sup>における  $A(B)$ ,  $C$ ,  $D$  曲線の一つ例 (試験片の平均応力  $= 2.5 \text{ kg/mm}^2$  の場合)



在しうる試験片の応力振幅は第 26 図に示すように、 $D$  曲線の始点（切欠き底）がちょうど  $2\varepsilon_{cr}$  になるような応力振幅  $\sigma_{min}$  から応力振幅が増し  $D$  曲線のレベルが上って  $2\varepsilon_{cr}$ ＝一定の直線に接する応力振幅  $\sigma_{max}$  までの応力範囲である。そしてこの  $\sigma_{min}$  はすでに第 4 節に述べたように、切欠き底に亀裂を生ずる最小の応力振幅であって、(4.2) 式より

$$\sigma_{min}K/E=\varepsilon_{cr}$$

である。一方、 $\sigma_{max}$  については次のように考えることができる。すなわち、 $D$  曲線が  $2\varepsilon_{cr}$ ＝一定の直線に接する場合には、切欠き底からその接点までの亀裂長さはその切欠き材における最大の停留亀裂長さである、いまその長さを  $t_{max}$  とする。さて、第 25 図において  $x$  がある程度以上大きい点では、 $D$  曲線は  $C$  曲線のみによってきまり、 $A$  または  $B$  曲線の影響をほとんど受けなくなる。したがって、 $x=t_{max}$  の亀裂先端はもはや上述のように  $A$  または  $B$  曲線の影響、すなわち切欠きによる歪分布の影響を受けない範囲にはいっていると考えると、停留亀裂の存在する上限応力  $\sigma_{max}$  の値は切欠きの応力集中率  $K$  の値のいかんにかかわらずほぼ一定となる。そして、この一定値は分岐点における応力  $\sigma_0$  の等しくなることは当然である。

第 4 節の第 24 図に示すように、Frost らの実験<sup>17)</sup>では切欠き底に亀裂の発生する応力限界  $\sigma_{min}$  は  $L$  曲線で表わされ、停留亀裂の存在する上限応力は分岐点から水平に引いた直線  $M$  によって表わされる。このように、応力の上限が分岐点応力  $\sigma_0$  に等しい  $M$  直線によって表わされるという事実は、上述の推論が正しいことを示している。

## 6. 疲労亀裂の進展

第 4 節においては切欠き底に疲労亀裂が発生する条件について考察し、第 5 節においては切欠き底に生じた微小亀裂の先端における歪振幅が切欠きの影響をどのように受けるかについて考察し、その考察結果に基づいて停留亀裂の条件を論じた。そこで本節においては、亀裂がさらに進みもはや切欠きそのものの影響を少しも受けない領域における疲労亀裂の進展について論じよう。

疲労亀裂の進展については、すでに数多くの実験的研究が進められてきた。このことは疲労亀裂の進展問題が実用的にも、また学問的にも重要な意義を有するためと考えられる。事実、疲労亀裂の進展を予知することは航空機の保守、ならびに運航の安全性を確保するためにきわめて重要である。また、純学問的にも疲労機構の本質とも関連して、きわめて興味ある研究対象である。すでに第 1 節で述べたように、この疲労亀裂の進展については最近 Head<sup>4)</sup> および石橋教授<sup>5)</sup> らの理論が提案されているが、これらの理論は前述のような欠陥を有していて必ずしも完全な理論ということとはできない。

本節においては、まず進展する疲労亀裂の先端の歪状態について考察し、第 2 節で述べた「塑性歪の繰返しによる金属の疲労試験」の結果を基にして疲労亀裂の進展に関する理論式を導き、次の

で実験結果と理論計算値とがきわめてよく一致することを示そう。

## 6.1 記 号

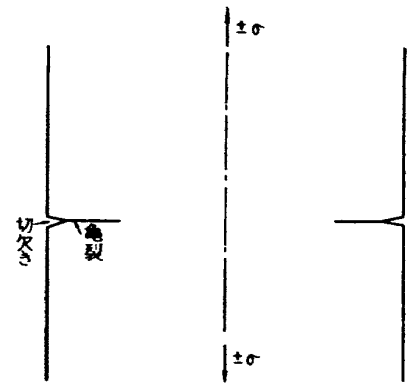
本節で用いる記号は次のとおりである。

- $A_s$  : 定常繰返し歪状態における最高応力点
- $C_s$  : 同上状態における最低応力点
- $B_s, D_s$  : 同上状態における応力～歪曲線が歪軸を切る点
- $A_1, A_2, \dots$  : 一荷重サイクルにおける最高応力点
- $C_1, C_2, \dots$  : 一荷重サイクルにおける最低応力点
- $B_1, B_2, \dots, D_1, D_2, \dots$  : 応力～歪曲線が歪軸を切る点
- $O$  : 応力～歪曲線の原点
- $P$  : 最高応力点に対応する歪軸上の点
- $E$  : 材料のヤング率
- $n, N$  : 荷重の繰返し数
- $C$  : 材料定数
- $2a_0$  : 試験片中央に最初から与えられた亀裂長さ
- $a$  : 試験片中央から計った亀裂長さ
- $a_{\max}$  : 観測された亀裂長さ  $a$  の最大値
- $\delta$  : 試験片の厚さ
- $2L$  : 試験片の幅
- $\alpha$  : 材料定数
- $2\rho'$  : 亀裂先端の微小塑性変形部分の幅
- $\sigma$  : 試験片の最小断面に作用する平均応力振幅
- $\sigma_s$  : 飽和応力
- $\varepsilon$  : 亀裂先端における歪振幅＝塑性歪＋弾性歪
- $\varepsilon_e$  : 弾性歪成分
- $\varepsilon_p$  : 塑性歪成分
- $r$  : 弾性歪成分/歪振幅＝ $\varepsilon_e/\varepsilon$
- $K$  : 亀裂先端における歪集中度

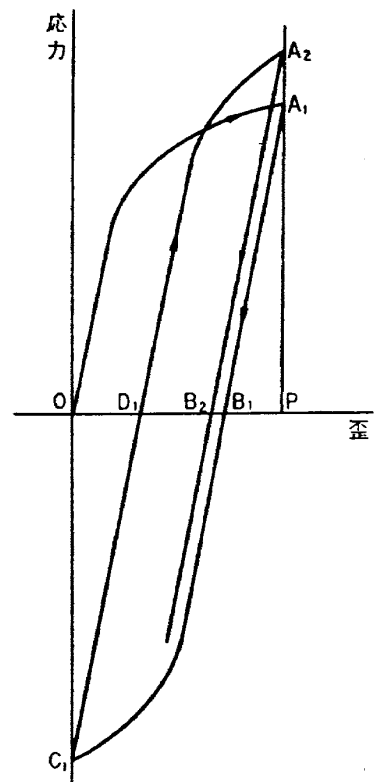
## 6.2 亀裂先端における歪の繰返し状態および亀裂の進展

前節においては切欠き底に発生した微小亀裂の停留について論じた。ここでは疲労亀裂がさらに進み、切欠き部の影響がすでに消滅した領域での亀裂の先端の歪状態について考察し、その考察結果に基づいて亀裂進展に関する理論式を導くことにする。

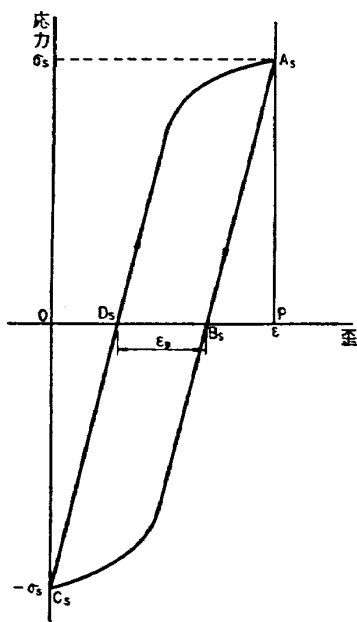
まず、第 32 図に示すような両側に切欠きを有する幅の広い板に、その切欠き底から対称な深い亀裂が最初から与えられている場合について考察しよう。このような試験片に両振り引張り圧縮荷重が作用すれば、その亀裂先端部における歪状態は次のようになる。すなわち、最初に引張り荷重が作用すれば第 33 図に示すように、亀裂先端部では  $OA_1$  曲線にそって変形が進み、荷重が最高時  $A_1$  点に達する。次に荷重が減少すれば変形は  $A_1B_1C_1$  曲線にそって進み、荷重が零になれば歪が零の  $C_1$  点に達する。次に圧縮荷重が増加していけば亀裂は閉鎖し、亀裂の全面にわたって荷重が伝達されるので亀裂先端には歪の集中は起こらない。したがって、第 33 図の  $C_1$  点に達した変形は圧縮荷重が増しても、周囲弾性体の弾性変形に等しいわずかな歪増加を伴うのみで、変形はそれ以上ほとんど進行せずその点に留まっている。次に引張り荷重が増加すると第 33 図に示すように、 $C_1D_1A_1$  曲線にそって変形は進み最高荷重で  $A_2$  点に達する。以下同様な繰返し変形を受けて疲労が進行する。したがって、このような切欠きの影響が及ばない領域にある疲労亀裂の先端では、たとえ試験片が両振り荷重を受けても、その変形はほぼ片振り引張りの繰返し変形を受けることになる。



第 32 図 深い亀裂を有する板



第 33 図 深い亀裂の先端における繰返し歪の状態



第 34 図 亀裂先端部の定常繰返し歪状態

になる。このような状態は第 2 節で述べた実験と全く同様であって、その実験結果を直接亀裂先端の疲労破壊に適用させることができる。すな

わち、このような一定歪振幅の繰返しを受ける亀裂先端部では、第 2 節で述べたように、繰返しの初期に応力が増し加工硬化が進むが後次第に一定飽和応力  $\sigma_s$  に達する。そして、応力が飽和した後は第 34 図に示すように、各荷重サイクルごとに応力と歪は定常なループを描き、(2.1') 式の関係、つまり

$$n\varepsilon_p^\alpha = C \quad (6.1)$$

を満足する繰返し数  $n$  で亀裂先端は疲労破壊し、その結果亀裂は微小長さだけ進展することになる。ただし、ここで  $\varepsilon_p$  は定常な

状態における塑性歪振幅であり、 $\alpha$  および  $C$  は材料定数である。

さて、亀裂先端部が前述のように一定振幅の片振り引張り歪の繰返しを受け、その先端の微小塑性域（その長さを  $2\rho'$  とする）が  $dn$  回の歪の繰返しによって疲労破壊するとすれば、(6.1) 式より

$$\varepsilon_p^\alpha dn = C \quad (6.2)$$

の関係が成り立つ。そして  $2\rho'$  の長さの塑性部分が破壊し、亀裂は  $2\rho'$  だけ進展することになる。亀裂が  $2\rho'$  だけ進むと、その亀裂の先端では再び同様な歪の繰返しを受けて疲労破壊をおこし亀裂がさらに進展する。以下同様な過程を経て、亀裂は順次  $2\rho'$  の長さずつ不連続に進展していくと考えられる。

いま亀裂長さを  $a$ 、亀裂先端の塑性変形部の長さを  $2\rho'$  とし、 $dn$  回の荷重サイクルで  $2\rho'$  の長さだけ疲労亀裂が進展するとすれば

$$da = 2\rho' \quad (6.3)$$

である。したがって、亀裂の平均進展速度は

$$v = \frac{da}{dn} = 2\rho' \frac{\varepsilon_p^\alpha}{C} \quad (6.4)$$

となる。ゆえに、亀裂が  $a_0$  から  $a$  まで進展するに要する繰返し数は

$$N = \int_0^N dn = \int_{a_0}^a \frac{C}{2\rho'\varepsilon_p^\alpha} da \quad (6.5)$$

で与えられる。(6.5) 式において  $C$  および  $\alpha$  は材料定数であって、前述のように塑性歪の繰返しによる疲労試験結果から得られるので、 $\rho'$  と  $\varepsilon_p$  が与えられれば亀裂が  $a_0$  から  $a$  まで進展するに要する繰返し数  $N$  を計算することができる。そこで次に  $\rho'$  と  $\varepsilon_p$  について検討してみよう。

まず、 $2\rho'$  は前に述べたように亀裂先端に生じた微小塑性域の幅である。したがって、その値は材料により、または荷重の大きさによって変わるであろう。石橋教授は亀裂先端における塑性変形部は大体  $\rho'$  の半径をもつ円形であると考え、疲労破面附近を X 線で調べて  $\rho'$  の値を求めた。すなわち、破面および破面より少し内部の X 線反射写真を取り（内部の写真を取るには表面を腐食して表面層を取り除いた）、その写真のボケの状態から判断して、破壊に影響を及ぼした層の厚さを求め、この厚さがほぼ  $\rho'$  に近い値を示すものと考えた。石橋教授<sup>5)</sup> が炭素鋼について、このような方法で求めた  $\rho'$  の値は

$$\rho' < 0.1 \sim 0.08 \text{ mm (応力 } \sigma = 13 \text{ kg/mm}^2 \text{ にて)}$$

であった。この  $\rho'$  の正確な値を各材料について試験片の応力  $\sigma$  に応じて求めることは今後の重要な研究題目であると思われる。

次に (6.5) 式中に含まれる定常状態における塑性歪振幅  $\varepsilon_p$  について考察しよう。第 34 図は亀裂先端部の微小塑性域が、加工硬化の飽和後に定常的な歪の繰返しを受ける場合の応力と歪のルー

プを示している。一荷重サイクルにおける歪振幅は  $\overline{OP}=\varepsilon$  であり、そのうち弾性成分および塑性成分は

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &= \overline{OD_s} + \overline{B_sP} \\ \varepsilon_p &= \overline{D_sB_s}\end{aligned}$$

である。第2節の実験結果によれば飽和応力  $\sigma_s$  は

$$\sigma_s = \overline{PA_s} = \overline{OC_s}$$

であるから、材料のヤング率を  $E$  とすると

$$\varepsilon_e = \overline{OD_s} + \overline{B_sP} = 2\sigma_s/E \quad (6.6)$$

である。一方、亀裂の先端における歪集中率  $K$  は、第3節に示したように弾性応力計算によって求めることができる。したがって、試験片に加わる応力振幅を  $\sigma$  とすれば、亀裂先端における歪振幅は

$$\varepsilon = \sigma K/E \quad (6.7)$$

で表わされる。よって、(6.6) および (6.7) 式より塑性歪振幅は

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \varepsilon - \varepsilon_e = (\sigma K/E) - (2\sigma_s/E) \\ &= \frac{\sigma K}{E} \left(1 - \frac{2\sigma_s}{\sigma K}\right) = \frac{\sigma K}{E} (1-r)\end{aligned} \quad (6.8)$$

となる。ただし、ここで

$$r = \varepsilon_e/\varepsilon = 2\sigma_s/\sigma K \quad (6.9)$$

であって、弾性歪成分と全歪振幅との比を表わす。この  $r$  の値をきめるには、まず弾性歪成分

$$\varepsilon_e = 2\sigma_s/E$$

を決定しなければならない。そのためには飽和応力  $\sigma_s$  の値が歪振幅  $\varepsilon$  によってどのように変わるかを知る必要がある。すでに第2節において、 $\sigma_s$  と  $\varepsilon$  との間には (2.4') 式が実験的に成り立つことを示した。したがって

$$\begin{aligned}\sigma_s &= (\varepsilon/C_4')^{1/n'} = (\sigma K/EC_4')^{1/n'} \\ r &= \frac{2\sigma_s}{\sigma K} = 2 \left( \frac{\sigma K}{EC_4'} \right)^{\frac{1}{n'}} \cdot \frac{1}{\sigma K}\end{aligned} \quad (6.9')$$

となる。つまり、 $C_4'$ 、 $n'$  が材料定数として与えられ、かつ  $\varepsilon = \sigma K/E$  がわかれば、上式によって飽和応力  $\sigma_s$  および  $r$  の値が求まりさらに (6.8) 式より  $\varepsilon_p$  の値が決定される。

(6.8) および (6.9') 式を (6.5) 式に代入すると

$$N = \int_{a_0}^a \frac{Cda}{2\rho' \left( \frac{\sigma K}{E} \right)^a (1-r)^a} = \int_{a_0}^a \frac{Cda}{2\rho' \left( \frac{\sigma K}{E} \right)^a \left\{ 1 - 2 \left( \frac{\sigma K}{EC_4'} \right)^{\frac{1}{n'}} \cdot \frac{1}{\sigma K} \right\}^a} \quad (6.10)$$

となる。材料定数としての  $C$ 、 $C_4'$ 、 $\alpha$ 、 $n'$  および  $\rho'$  が与えられ、かつ  $K$  が亀裂長さ  $a$  の関数とし

て表わされれば、亀裂長さが  $a_0$  から  $a$  まで進展するに要する繰返し数  $N$  は (6.10) 式より計算することができる。(6.10) 式を直接積分することは實際上困難なことが多いので、 $a_0 \rightarrow a$  の区間を  $K$  および  $r$  の値がそれぞれほぼ一定とみなせる微小区間に  $m$  分割して次のように計算するとよい。

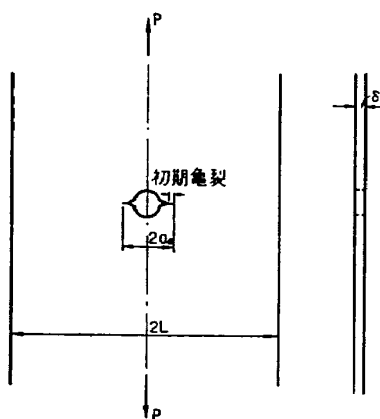
$$N = \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta a_i}{\rho'(\sigma K_i/E)^\alpha (1-r_i)^\alpha} \quad (6.11)$$

次節においては Weibull の実験結果と、このような理論計算の比較を示そう。

なお、亀裂の先端のように歪振幅  $\varepsilon$  が小さいときには、 $\varepsilon$  の中に占める弾性歪成分  $\varepsilon_e$  は相対的に大きく、(6.10) 式で  $N$  に及ぼす  $r$  の影響は大きくなる。したがって、石橋教授が提案されている  $r \approx 0$  の式を用いて計算すれば、誤差が大きくて計算結果が実験と合わなくなるのは当然である。

### 6.3 疲労亀裂の進展に関する実験と理論の比較

Weibull<sup>27)</sup> は第 35 図に示すように、中央に切欠きがあり、その切欠きの両側に最初から亀裂を



第 35 図 Weibull<sup>28)</sup> の用いた試験片

与えた 24ST アルミニウム合金板に、片振り引張りの繰返し荷重を加えて疲労亀裂の進展状況を観察した。この場合、亀裂が 1 mm 進展するたびに荷重振幅を減少させ、試験片の最小断面の未破壊部分に作用する平均の応力振幅が常に一定に保たれるようにして実験を行なった。先に述べたように、亀裂先端における歪の状態は、このような片振り引張り荷重の状態においても両振り荷重の場合と同様であると考えられるので、前述の理論をこの実験に適用することができる。ここではこの場合の計算結果と実験との比較について述べる。

試験片の材質、形状寸法および応力振幅等を一括して示すと

次のとおりである。

材 質 : 24ST アルミニウム合金板

ヤング率 : 7200 kg/mm<sup>2</sup>

全 幅 :  $2L = 68.25$  mm

板 厚 :  $\delta = 2$  mm

初期切欠き長さ :  $2a_0 = 9.51$  mm, ただしこの  $2a_0$  の中には、切欠き底の両側に最初から与えられた疲労亀裂(その長さはそれぞれ 0.63 mm)を含んでいる。

応力振幅 :  $\sigma = 4$  kg/mm<sup>2</sup> = 一定(片振り引張り) この  $\sigma$  は最小断面部の未破壊部における平均の応力振幅である。

次にこの材料における  $C$ ,  $\alpha$ ,  $C_1'$ ,  $n'$  および  $\rho'$  等の材料定数を求め、さらに亀裂先端における歪集中率  $K$  を亀裂長さ  $a$  の関数として表わそう。

(1)  $C$  および  $\alpha$  の値 第 36 図に示す Coffin の 24 ST アルミニウム合金についての実験結果<sup>7)</sup>を用いると

$$\alpha = 2.0$$

$$C = 0.26$$

が得られる。

(2)  $C_1'$  および  $n'$  の値 上記 Coffin の実験において、歪の繰返しによる応力範囲の変化は第 37 図に示すとおりである。この図から、歪振幅  $\epsilon$  に対する飽和応力  $\sigma_s$  を求め、両者の関係を両対数目盛で示すと第 38 図のように直線的になり、やはり (2.4') 式が成り立つことを示している。この直線から (2.4') 式の  $C_1'$  および  $n'$  を求めると

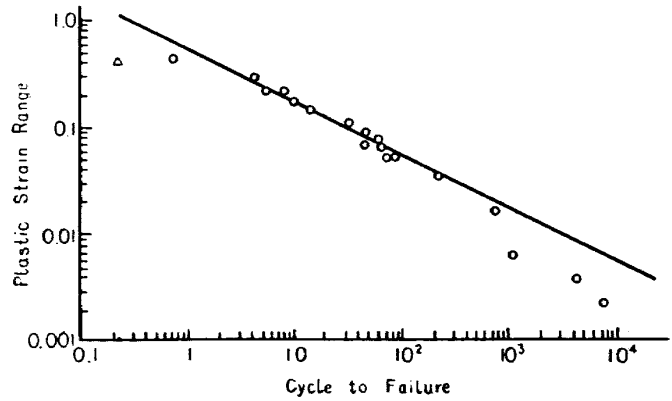
$$C_1' = 8.455 \times 10^{-11}$$

$$n' = 5.52$$

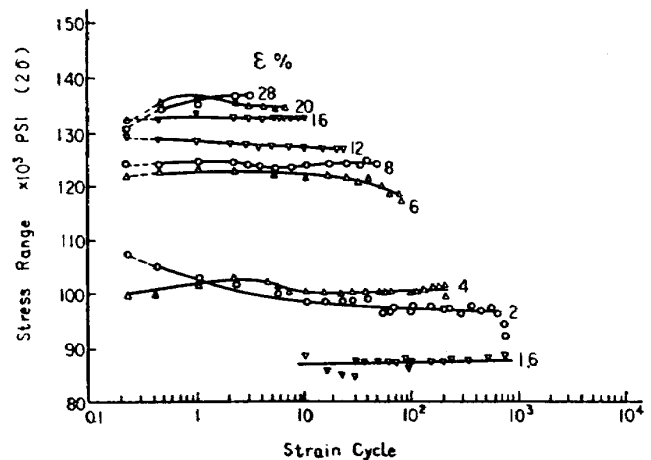
となる。

(3)  $\rho'$  の値 アルミニウム合金に対する  $\rho'$  の実測値はまだ求められていないので、ここでは前述の軟鋼についての石橋教授の測定値を参照して、一応  $\rho' = 0.05$  mm=一定と仮定して計算を進めることにする。

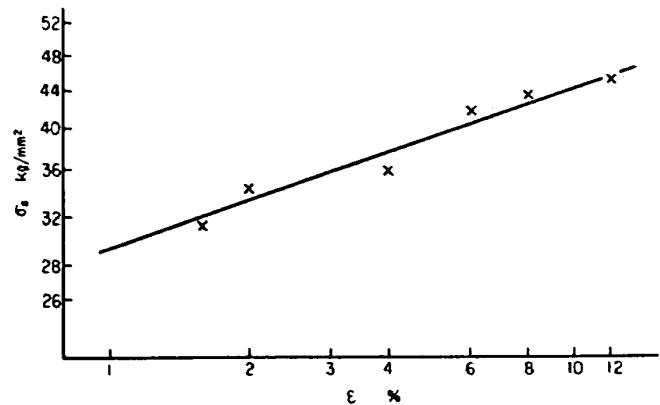
(4)  $K$  の式 初期切欠きおよび疲労亀裂を、短軸の長さがきわめて小さな楕円孔とみなせば、その先端における歪集中率  $K$  の式としては (3.7) 式が適用できる。この Weibull の実験では初期亀裂長さは  $a_0 = 4.755$  mm で、 $a_0/L = 0.1393$  であり、観測された最大亀裂長さは  $a_{\max} = 18.425$  mm で、 $a_{\max}/L = 0.540$  である。よって、(3.7) 式において  $(a/L)$  の 4 乗以上の項を省



第 36 図 Plastic strain range vs cycle to failure-24 ST aluminum alloy. (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>)



第 37 図 Stress range vs strain cycle-24 ST aluminum alloy. (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>)



第 38 図 24 TS Al 合金の歪振幅  $\epsilon$  と飽和応力  $\sigma_s$  との関係 (Coffin の実験結果<sup>7)</sup>より)

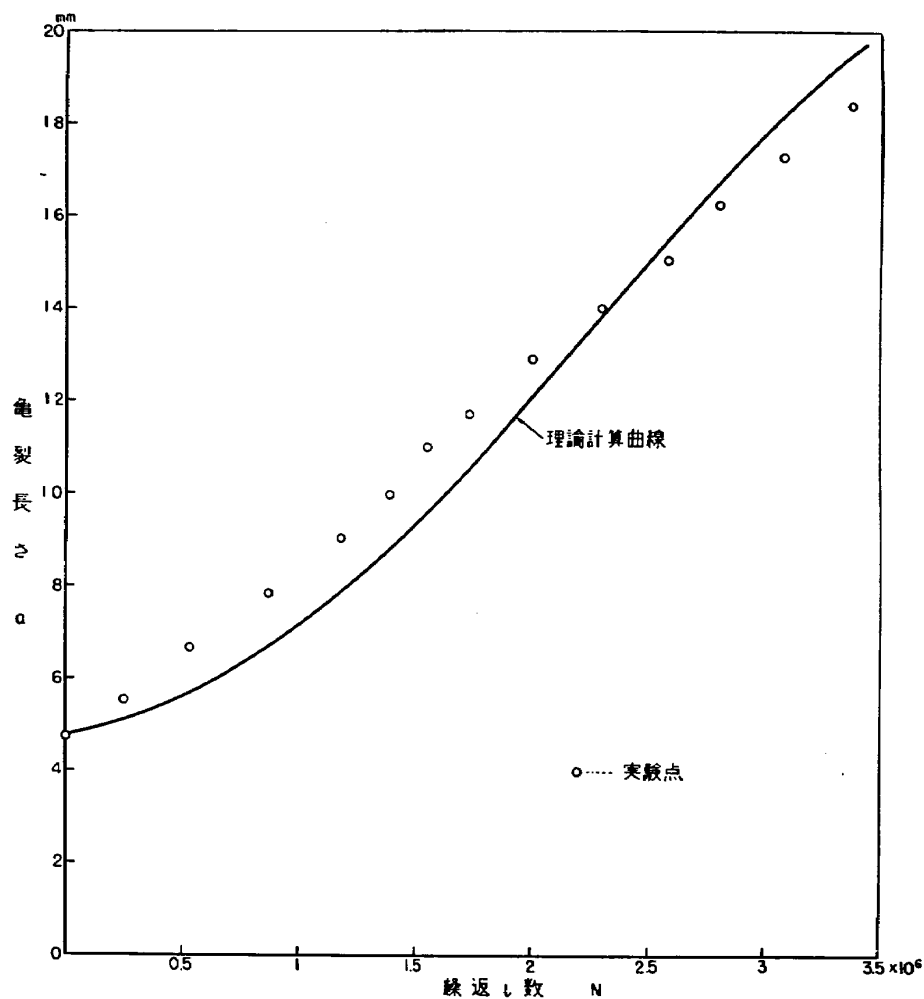
第4表 Weibull の実験条件において、疲労亀裂長さ  $a$  に対する繰返し数  $N$  の計算表

$a$ mm	$\Delta a$ mm	$K$	$\varepsilon\%$	$\sigma_s$	$r$	$\Delta N \times 10^{-6}$	$N \times 10^{-6}$
4.755	0						
5.755	1	18.43	1.024	29.0	0.7865	0.5442	0.5442
6.755	1	19.45	1.081	29.2	0.7504	0.3575	0.9017
8.755	2	20.60	1.144	29.6	0.7187	0.5016	1.4033
10.755	2	21.64	1.202	30.0	0.6930	0.3818	1.7851
12.755	2	22.17	1.232	30.2	0.6813	0.3373	2.1224
14.755	2	22.32	1.240	30.3	0.6787	0.3277	2.4501
16.755	2	22.07	1.226	30.2	0.6843	0.3469	2.7970
18.755	2	21.47	1.193	29.9	0.6961	0.3958	3.1928

$$N = \sum \Delta N = \left( \frac{C}{2\rho'} \right) \left( \frac{E}{\sigma} \right)^2 \sum \frac{\Delta a}{K^2(1-r)^2}$$

$$C=0.28, \quad \rho'=0.05 \text{ mm}$$

$$\sigma=4 \text{ kg/mm}^2, \quad E=7,200 \text{ kg/mm}^2$$



第39図 繰返し数と亀裂長さに関する Weibull の実験結果と理論計算の比較

略することができ、 $K$  は近似的に



$$K = \left(1 - \frac{a}{L}\right) \left[ \left\{ 2 + 1.19 \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right\} \sqrt{\frac{a}{\rho'} + 1} \right] \quad (3.7')$$

で表わすことができる。

さて、これらの材料定数および  $K$  の式を用いて、亀裂長さを第4表に示すように 1 mm ないし 2 mm ごとに区切って、それぞれの区間における  $K$  および  $r$  の値を求め、(6.11) 式によって繰返し数  $N$  を計算した。このようにして計算した結果と、Weibull の観測結果を図に示すと第39図のようになる。この結果は理論曲線が実験点ときわめてよく合うことを示している。

ここでは一例として、24ST 材についての Weibull の実験結果と理論計算との比較について述べたが、他の材料でもその材料定数  $C, \alpha, \dots$  等がわかっているれば、同様にして疲労亀裂の進展を計算することができる。

## 7. 総 括

構造重量の軽量化をきびしく要求される航空機構造においては、機体構造の安全性を確保し、運用効率を上げるために疲労強度に関する研究の重要性が増大した。特に、最近 Fail-Safe 構造の採用により、疲労強度のうちでも亀裂の発生のみならず、亀裂発生後の挙動に関する研究が一段と重要性を加えてきた。

従来、疲労亀裂に関する研究では、亀裂の発生、停留および進展の個々の問題についての研究がなされてきたが、これらの問題を統一的に説明し得る理論はまだ一つも提案されていない。

本論文においては、疲労亀裂の発生、停留および進展は元来個々別々の現象ではなく、互に相関連した現象であることを明らかにし、「塑性歪の繰返しによる金属の疲労試験」によって得られた実験事実を基礎にして疲労亀裂の発生、停留および進展を統一的に説明しうる新理論を導き、この理論が実験的にも妥当であることを種々の実験事実と対照して立証した。すなわち、まず従来の諸研究から、疲労亀裂の発生、停留および進展は、切欠き底および亀裂先端部の微小領域が繰返しの塑性変形を受けることによって生ずるものであることを明らかにした。次いで、このような繰返しの塑性変形を受ける金属の疲労現象を明らかにするために、「塑性歪の繰返しによる金属の疲労」試験を行ない、疲労亀裂に関係ある現象として次の実験事実を得た。

(1) 歪振幅（弾性歪＋塑性歪）＝一定の繰返し歪を加える場合、繰返しの初期には加工硬化が進み、一荷重サイクルにおける塑性歪成分は次第に減少していく。しかし、歪振幅がある程度大きければ、繰返しが進むにつれて加工硬化は次第に飽和し応力はそれぞれの歪振幅に応じた一定値に達し、以後各サイクルにおける弾性歪成分と塑性歪成分との比は一定となる。

(2) 加工硬化が飽和したときの塑性歪振幅  $\gamma_p$  と破断までの繰返し数  $N$  との間には

$$\gamma_p^\alpha N = C \quad (\text{一定}) \quad (2.1)$$

の関係が成り立つ。ここで  $\alpha$  および  $C$  は材料定数である。Coffin は引張り圧縮の繰返し歪試験によって (2.1) 式と同一の関係式を得ている。

次に、鋭い切欠き底および亀裂先端部等に生じた微小塑性域は周囲の大きな弾性体に包囲され、その変形は周囲弾性体の変形に著しく拘束されているので、その部分の歪集中率は弾性応力集中率に近似的に等しいことを導き、さらにこの弾性応力集中率は Neuber の鋭い切欠きに対する理論から求められることを示した。

以上で疲労亀裂に関する理論を構成するに必要な基礎が整ったので、これらを基にして疲労亀裂の発生、停留および進展についての理論を構成した。すなわち

[1] 切欠き底における疲労亀裂発生条件 切欠き材が両振り荷重を受ければ、切欠き底では両振りの繰返し歪を受ける。切欠き底での歪振幅 (片振幅)  $\varepsilon$  がある一定値  $\varepsilon_{cr}$  (材料定数) よりも大きければ、(2.1') 式を満足するある繰返し数  $N$  によって切欠き底は疲労破壊し、そこに疲労亀裂が発生する。もし  $\varepsilon$  が  $\varepsilon_{cr}$  より小さければ、第 22 図に示すように繰返し中に加工硬化が飽和する以前に塑性歪は完全に消滅し、その後の変形は純弾性的となり、疲労が進行せず切欠き底には亀裂が発生しない。したがって、この両者の境界である  $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$  のときが切欠き底に亀裂の発生する臨界状態となる。よって、試験片に加わる応力振幅を  $\sigma$  (荷重振幅/試験片最小断面積)、切欠きの応力集中率を  $K$  とすれば、切欠き底に亀裂の発生する条件は、

$$\varepsilon = \sigma K / E \geq \varepsilon_{cr} \quad (E \text{ は材料のヤング率})$$

すなわち、

$$\sigma K \geq E \varepsilon_{cr} = \sigma_{cr} = \text{一定}$$

である。この  $\sigma$  と  $K$  との関係は第 24 図のように実験結果ときわめてよく一致することを示した。

[2] 停留亀裂の条件 切欠き底に繰返し初期に生じた微小な疲労亀裂が  $10^7 \sim 10^8$  の繰返しを受けても進展せず、切欠き底に停留することがある。このような停留亀裂が切欠き底に生ずるのは、切欠きによる応力分布の影響に起因すると考えた。すなわち、第 25 図に示すように、両振り荷重を受ける切欠き底の近くの亀裂先端では圧縮荷重によって亀裂が閉鎖するので、その全歪振幅は切欠きによる歪分布 ( $A$  または  $B$  曲線) の影響を受けて  $D$  曲線のようになる。切欠き底にいったん発生した亀裂はこの  $D$  曲線が  $2\varepsilon_{cr} = \text{一定}$  の直線を切る点まで進み、以後亀裂はそこに停留する。 $D$  曲線は切欠きの影響によって切欠き底の近くで下り、切欠き底より離れるにつれて次第に上昇するが、その高さのレベルは応力振幅  $\sigma$  (荷重振幅/試験片最小断面積) に比例して変化する (第 26 図)。したがって、停留亀裂が生ずるには応力限界があり、その下限は切欠き底に亀裂が発生する臨界応力であり、上限は  $D$  曲線が  $2\varepsilon_{cr} = \text{一定}$  の直線に接するようになる応力である (第 26 図)。また、停留亀裂長さは  $D$  曲線が  $2\varepsilon_{cr} = \text{一定}$  の直線を切る点までの長さであって、応力の関数である。このような考えに基づいて計算した停留亀裂長さに関する計算値は、実験値とはかなり

よく合うことを示した (第 30 図)。また、この  $D$  曲線の形状は切欠きの応力集中率  $K$  の値によって変化し (第 27 図)、 $K$  の値が大きいほど切欠き底近くでの降下率は大となり、 $2\varepsilon_{cr}$  = 一定の直線を切り易く、したがって停留亀裂を生じ易くなる。一方、 $K$  の値が小さくなるとこの降下率は次第に減少し、ある一定値  $K_0$  以下では全然  $D$  曲線は降下せず、したがって停留亀裂を生じなくなる。つまり停留亀裂を生ずるには、切欠きの応力集中率  $K$  に下限があることを示した。

このように停留亀裂には応力の上下限と応力集中率の下限とがあることを示し、それによって実験的に認められている分岐点の存在理由を明快に説明した。停留亀裂の条件をこのように明快に説明することができ、しかも実験的にその妥当性が立証された理論は本理論以外には現在提案されていない。

[3] 疲労亀裂の進展 亀裂が長くなり、その先端部の歪振幅が切欠きの影響を受けない場合には、亀裂先端部の微小塑性域は (2.1') 式の関係満足する繰返し数で次々と疲労破壊して、亀裂が進展していく。このように (2.1') 式を用いて亀裂長さが  $a_0$  から  $a$  まで達するに要する繰返し数  $N$  との関係とを求めると

$$N = \int_{a_0}^a \frac{Cda}{2\rho'(\sigma K'/E)^{\alpha}(1-r)^{\alpha}} \quad (6.10)$$

となる。この (6.10) 式を中央に初期亀裂を有する 24 ST アルミニウム合金板の亀裂進展に適用して計算することによって、第 39 図のように実験点と理論計算曲線とがきわめてよく一致することを示した。

このように本論文においては、塑性歪の繰返しによる疲労試験の結果を基礎にして、疲労亀裂の発生、停留および進展に関する統一理論を確立し、その理論結果が疲労亀裂に関する諸実験結果と きわめてよく一致することを示した。

終りに臨み、本研究に対して御指導を賜わった 東京大学航空研究所 池田健教授、吉村慶丸教授、名古屋大学工学部 井町勇教授、大久保肇教授、西村融教授、大橋義夫教授並びに有益な御助言を賜わった上山忠夫機体部長および石田誠技官に深甚なる感謝の意を表します。

## 文 献

- 1) E. Orowan: Proc. Roy. Soc. London, Sec. A 171 (1939), 79
- 2) J. McEvily & W. Illg: NASA TN. D-208 (1959)
- 3) L.F. Coffin: Proc. Am. Soc. Testing Materials Vo. 58 (1958), 570
- 4) A.K. Head: Phil. Mag. 44 (1953), 925  
A.K. Head: Jour. App. Mech. 23 (1956), 407
- 5) 石橋: 機械の研究, Vol. 10, No. 5 (1958), 609  
石橋: 第 1 回材料試験連合講演会前刷 (1958)  
石橋: 機械学会第 35 期総会講演会前刷 (1958)
- 6) 竹中: 機械学会第 36 期総会講演会前刷 (1959), 4 月 2 日

- 竹中： 機械学会論文集, 26 (1960), 102  
Y. Takenaka: Bull. JSME, 3 (1960), 419
- 7) L.F. Coffin & J.F. Travernelli: Trans. Metal. Soc. AIME, 25 (1959), 794
  - 8) 吉村, 竹中, 阿部: 日本機械学会論文集, 25, 151 (1959), 140
  - 9) W.A. Wood & R.A. Segall: Proc. Roy. Soc. London, Sec. A. 242 (1957), 180
  - 10) T. Yokobori: Jour. Phys. Soc. Japan, 6 (1951)
  - 11) L.F. Coffin: Trans. ASME, 76 (1954), 931
  - 12) W.A. Wood & R.A. Segall: Jour. Inst. Metals, 86 (1957~1958), 225
  - 13) M. Neuber: Theory of Notch Stresses, J.W. Edward, Ann Arbor, Michigan
  - 14) 石田: 機械学会論文集, 21 (1955), 511
  - 15) 石橋: 金属の疲労と破壊の防止 (養賢堂), (1954)
  - 16) P.G. Forrest: Inst. Mech. Eng. ASME, International Cont. Fatigue of Metals (1956), 171
  - 17) N.E. Frost & D.S. Dugdale: Jour. Mech. Phys. Solid, 5 (1957), 182
  - 18) J.M. Lessels: Jour. Am. Weld. Soc. 29 (1950), 74-S
  - 19) 石橋: 九大工学部紀要, 12 (1951), 281
  - 20) 石橋: 機械学会論文集, 22 (1956), 144
  - 21) 石橋: Proc. 6th Japan Natio Cong. App. Mech. (1956), 11
  - 22) N.E. Frost: Engineers 200 (1955), 464, 501
  - 23) C.E. Phillips Proc. Inst. Mech. Engrs. 165 (1951)
  - 24) N.E. Frost & C.E. Phillips: Proc. Roy. Soc. 242 (1957)
  - 25) N.E. Frost & D.S. Dugdale: Jour. Mech. Phys. Solid, 6 (1958), 92
  - 26) N.E. Frost & C.E. Phillips: Inter. Conf' Fatigue of Metals, (1956) 520
  - 27) W. Weibull: Colloquium on Fatigue, May 1955, Stockholm, 289
  - 29) 横堀: 材料強度学, (技報堂) (1955), 230

<p>NAL TR-28 航空技術研究所 疲労亀裂について</p> <p>1962 年 8 月 42 頁</p> <p>疲労亀裂の発生、停留および進展には、切欠き底または亀裂先端部等の微小領域における繰返しの塑性変形が主要な役割を果していると考えられる。そこでまず、塑性変形の繰返しによる疲労試験を行ない、理論の基礎となる実験事実を明らかにし、次いで切欠き底および亀裂先端における歪の繰返し状態に検討を加えた。これらの実験事実および考察結果に基づいて、疲労亀裂の発生、停留および進展の諸現象を統一的に説明する新理論を提案し、その理論結果が実験結果ときわめてよく一致することを示した。</p>	<p>I. 竹中 幸彦 II. NAL TR-28 III. 539.4.43</p>	<p>NAL TR-28 航空技術研究所 疲労亀裂について</p> <p>1962 年 8 月 42 頁</p> <p>疲労亀裂の発生、停留および進展には、切欠き底または亀裂先端部等の微小領域における繰返しの塑性変形が主要な役割を果していると考えられる。そこでまず、塑性変形の繰返しによる疲労試験を行ない、理論の基礎となる実験事実を明らかにし、次いで切欠き底および亀裂先端における歪の繰返し状態に検討を加えた。これらの実験事実および考察結果に基づいて、疲労亀裂の発生、停留および進展の諸現象を統一的に説明する新理論を提案し、その理論結果が実験結果ときわめてよく一致することを示した。</p>	<p>I. 竹中 幸彦 II. NAL TR-28 III. 539.4.43</p>
<p>NAL TR-28 航空技術研究所 疲労亀裂について</p> <p>1962 年 8 月 42 頁</p> <p>疲労亀裂の発生、停留および進展には、切欠き底または亀裂先端部等の微小領域における繰返しの塑性変形が主要な役割を果していると考えられる。そこでまず、塑性変形の繰返しによる疲労試験を行ない、理論の基礎となる実験事実を明らかにし、次いで切欠き底および亀裂先端における歪の繰返し状態に検討を加えた。これらの実験事実および考察結果に基づいて、疲労亀裂の発生、停留および進展の諸現象を統一的に説明する新理論を提案し、その理論結果が実験結果ときわめてよく一致することを示した。</p>	<p>I. 竹中 幸彦 II. NAL TR-28 III. 539.4.43</p>	<p>NAL TR-28 航空技術研究所 疲労亀裂について</p> <p>1962 年 8 月 42 頁</p> <p>疲労亀裂の発生、停留および進展には、切欠き底または亀裂先端部等の微小領域における繰返しの塑性変形が主要な役割を果していると考えられる。そこでまず、塑性変形の繰返しによる疲労試験を行ない、理論の基礎となる実験事実を明らかにし、次いで切欠き底および亀裂先端における歪の繰返し状態に検討を加えた。これらの実験事実および考察結果に基づいて、疲労亀裂の発生、停留および進展の諸現象を統一的に説明する新理論を提案し、その理論結果が実験結果ときわめてよく一致することを示した。</p>	<p>I. 竹中 幸彦 II. NAL TR-28 III. 539.4.43</p>

TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠 境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Diffrential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 島海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン 要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N.A.L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の 計画と構造 Design and Constraction of the National Aeronautical Laboratory 2 m×2 m Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノルズの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫

---

## 航空技術研究所報告 28 号

昭和 37 年 8 月 発行

発 行 所      航 空 技 術 研 究 所  
                  東京都三鷹市新川 700  
                  電話武蔵野 (0422) (3) 5171 (代表)

印 刷 所      笠 井 出 版 印 刷 社  
                  東京都港区芝南佐久間町1の53

---