

UDC 534.12.

629.13.014.3

航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-30

平板翼の振動について

川井忠彦・塙 武敏・戸川隼人
高橋利之・越出慎一

1962年10月

航空技術研究所

NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

既 刊 報 告

TR- 1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960年2月	平木 一, 石井孝雄 大島信彦
TR- 2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960年5月	山内正男, 松本正勝 塩入淳平, 富永守之
TR- 3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960年8月	小橋安次郎, 長洲秀夫 高島一明, 波木井潔
TR- 4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960年9月	佐藤和郎, 永井文雄
TR- 5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960年12月	中井暎一, 橋爪 宏 中村泰治
TR- 6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960年12月	竹中幸彦
TR- 7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961年1月	村崎寿満
TR- 8	繰返し荷重装置試験の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961年3月	竹内和之, 飯田宗四郎
TR- 9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961年3月	細川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松本正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 埴 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961年11月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge- Beam Method of Measuring Gas Density	1961年12月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄

平板翼の振動について*

川井忠彦**・塙 武敏**・戸川隼人***

高橋利之***・越出慎一**

On the Natural Vibration of Plate-Like Wings

By Tadahiko KAWAI, Taketoshi HANAWA, Hayato TOGAWA,
Toshiyuki TAKAHASHI & Shinichi KOSHIIDE

A practical method for the vibration analysis of plate-like wings whose shape may be either a parallelogram, a trapezoid or a triangle is proposed in this paper.

The method of solution is based upon the well known "Rayleigh-Ritz's Procedure" and the deflection of a given plate $W(x, y)$ is expressed by the general power series of variables x and y . It should be mentioned that the assumed deflection of the plate may not necessarily satisfy the free edge boundary conditions since the free edge boundary constitutes the so-called "Natural Boundary" in calculus of variations, and the condition of the minimum potential energy secures the fulfilment of such boundary conditions in a successively approximate manner.

Therefore, the deflection surface of a wing with all its edges can be expressed by Taylor series of x and y , while that of a cantilever wing may be expressed by the Taylor series which must satisfy the boundary conditions of a clamped edge.

1. 緒 言

航空機の高速化に伴い機体構造に大きな変化が起こってきたことは周知のとおりであるが、特に翼構造は超音速機の場合高い空気圧力に耐えうるよう十分な強度が要求されるので従来の亜音速機に比べるといろいろな点で大きな相違が見られる。いまその構造方式は問わず空力弾性の観点からその特徴点を考えてみると、

1. 翼断面が非常に薄くなったこと
2. 翼の縦横比 (aspect ratio) が小さくなったこと
3. 翼が後退角を有するようになり、一般にその形状が梯形または三角形となったこと

等があげられるであろう。このような翼構造の静的あるいは動的諸問題を従来のような翼を梁とみ

* 昭和 37 年 10 月 18 日受付

** 機体部

*** 計測工務部

なした理論で取り扱うことはもはや不可能に近く、翼を平板として取り扱う方が遙かに合理的であることは誰しも異論のないところであろう。しかしながら、翼を平板とみなした場合その解析的な取り扱いには次の二点できわめて困難になる。すなわち、

1. 板の境界条件が片持板（一辺固定，ほか三辺自由）ないしは周辺自由になること
2. 板の形状が一般に梯形（平行四辺形を含む）ないしは三角形となること

このような事情から板の固有値問題は昔から多くの人々により研究されているにもかかわらず、二三の簡単な場合にしか厳密解が求まっていない。したがって、数値解法に勢い頼らざるを得なくなるわけである。数値解法の代表的なものとしては階差法によって求める方法とエネルギー最小の原理により直接解法によって求める方法とがある。筆者らは後者の方法によって研究を進めたわけであるが、この方法による場合、問題となるのは、取り扱う対象と用いる試験函数の選定であって、Barton 等^{(4)*}の行なった方法は平行四辺形板を対象としているので斜交座標系を用い、板の撓みを梁の固有函数の積の和として表現し解析を行なっているが、一般に計算が煩雑な割には精度はそれほど良いとはいえず、精度もまた後退角が大きくなるとともに悪くなっている。いずれにしてもこの方法では矩形、高々平行四辺形板までしか取り扱えないのが欠点である。そこでわれわれは平行四辺形板、梯形板および三角形板を含めて任意形状の板の固有値問題を一般的に解く実用的な解法を求めようとしたわけである。まず、任意形状の翼の問題に適用できるように、試験函数として最も一般性のある x, y の冪級数を選んだ。特定の形状の板に対して、ある特に有効な試験函数は二三存在する。しかし、それらの函数はその目的のためにのみ限定され一般性はなく、また多かれ少なかれ電子計算機による数値解析になることを思えば、解析法の一般性の方が精度より重大であるとわれわれは考える。それにこのような冪級数表示による解析結果は、一般に精度の点では他の方法と同等であるばかりか往々にして良いことがわかった。次に、問題になるのは試験函数に対する束縛条件の与え方である。変分学から明らかなように、板の自由端の境界条件はいわゆる“自然境界条件”になっているため直接解法による場合は、板の撓み $w(x, y)$ としての試験函数には必ずしも前もってこの境界条件を満すようにおかなくともよいわけである。このような点について従来の研究ではあまり考慮が払われていない。われわれは意識的にその特性を考慮して解析を進めたのである⁽⁶⁾。ただし、片持板の固定端のような幾何学的境界条件は試験函数の束縛条件として入れておくことは必要である。

本報告では片持板と周辺自由板に関する振動数方程式を一般的に導出し、二三の平行四辺形板、梯形板および三角形板について数値解析を行ない、他の研究者によって行なわれた研究結果ならびに筆者らの行なった実験結果と比較検討したものである。

* () 内の数字は巻末文献の番号を示す。

2. 梯形板の振動解析

いま、問題を任意形状をした板厚一定の等方性梯形板の自由振動に限り第1図に示すような座標

系をとる。図からわかるように平板の形状は三つのパラメーター α, β および R によって規定されることになる。

$\overline{BC}, \overline{C'B'}$ は x 軸に平行な直線自由辺で、 $\overline{AB}, \overline{AB'}$ および $\overline{OC}, \overline{OC'}$ はそれぞれ β, α をパラメーターとして含む直線自由辺であり、 R は縦横比に関

係したパラメーターである。このような板を考えれば α, β および R の特別な値に対して矩形板、平行四辺形板お

よび三角形板等の場合も含まれるようになるので、後退角を有する平板翼の振動を最も一般的に論

ずることができる。以上の座標系を用い Hamilton の原理を適用すると、薄板の曲げ理論による板

の曲げ振動のポテンシャルエネルギーは、

$$V = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (1)$$

となり、運動のエネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

となるから kinetic potential を表わす

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad (3)$$

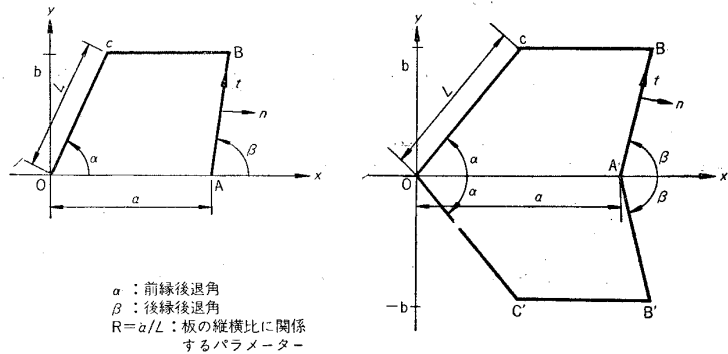
が停留値をとるべきである。

いま、 $w(x, y, t) = w_0(x, y)g(t)$ とおくと

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho h \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 w_0^2(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 \iint \rho h w_0^2(x, y) dx dy = \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 T^* \quad (4)$$

ここに

$$\begin{aligned} T^* &= \iint \rho h w_0^2(x, y) dx dy \\ V &= \frac{D}{2} (g)^2 \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ &= g^2 V^* \end{aligned} \quad (5)$$



α : 前縁後退角
 β : 後縁後退角
 $R = a/L$: 板の縦横比に関するパラメーター

境界条件：
 $\overline{OA}: y=0: w=0, \quad \partial w / \partial y = 0, \quad \overline{OC}, \overline{C'B'}, \overline{B'A}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CO}: M_n = 0$
 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}: M_n = 0$
 $V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0: \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0$
 Corner Reaction $r = 0: \quad r = 0$

第1図 座標系

ここに

$$V^* = \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy$$

となるゆえ, (3) の第一変分を 0 とおいたものは

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} 2 \left(\frac{dg}{dt} \right) \delta \left(\frac{dg}{dt} \right) T^* dt - \int_{t_0}^{t_1} 2g \delta g V^* dt = 0 \quad (6)$$

となる。\$t\$ に関して部分積分を行ない

$$\delta g(t_1) = \delta g(t_0) = 0$$

を用いて整理すると, Euler の方程式として

$$\ddot{g} T^* + g V^* = 0 \quad (7)$$

なる運動の方程式が得られる。\$T^*\$, \$V^*\$ は \$t\$ に無関係であるから

$$-\frac{\ddot{g}}{g} = \frac{V^*}{T^*} = k \quad (8)$$

を満たす正の常数 \$k\$ を求めればよい。つまり \$w_0(x, y)\$ を比較函数として

$$\Pi(k) = V^* - k T^* \quad (9)$$

さらに換言すれば

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda) = & \frac{D}{2} \left[\iint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \right. \\ & \left. - \lambda^2 \iint w_0^2 dx dy \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここに

$$\lambda^2 = \frac{\gamma h}{g D} p^2 \quad \frac{\gamma}{g}; \text{板の密度, } p; \text{角振動数, } h; \text{板厚, } D; \text{板の曲げ剛性}$$

なる \$\Pi\$ の最小値を求めればよいことになる。この場合試験函数には, 自然境界条件となっている条件は省いてよいから, 周辺自由の場合にはなんら境界条件に対する考慮は必要でなく, 片持板の場合のみ固定辺の束縛条件を満足するようにとればよい。すなわち, 試験函数として, (10) 式の撓み \$w_0(x, y)\$ を一般的な \$x, y\$ の Taylor 級数に展開して次式のようにおく。

$$w_0(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n \quad (11)$$

周辺自由板の場合は

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

片持板の場合は

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

とする。このようにとれば固定辺の条件

$$y=0 \text{ で}$$

$$w_0(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y}(x, 0)=0$$

は満足されることは明らかである。

(11) 式を (10) 式に代入して x, y に関する積分を遂行すると, x, y の積分域としては, (第 1 図参照),

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OC}; \quad y=x \tan \alpha \\ \overline{AB}; \quad y=(c-a) \tan \beta \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OC}'; \quad y=-x \tan \alpha \\ \overline{AB}'; \quad y=-(x-a) \tan \beta \end{array} \right\}$$

より

$$\left. \begin{array}{l} x=y \cot \alpha \\ x=a+y \cot \beta \end{array} \right\} \quad (OABC)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=-y \cot \alpha \\ x=a-y \cot \beta \end{array} \right\} \quad (OA'B'C')$$

となるゆえ x, y の任意次数の項について, 周辺自由板の場合には

$$I_{pq} = \iint_S x^p y^q dx dy = \int_0^b y^q dy \int_{y \cot \alpha}^{a+y \cot \beta} x^p dx + \int_{-b}^0 y^q dy \int_{-y \cot \alpha}^{a-y \cot \beta} x^p dx$$

$$= \{1 - (-1)^{q+1}\} \left\{ \sum_{i=0}^{p+1} \frac{p! \cot \beta^{p-i+1} a^i b^{p+q+2-i}}{(p+1-i)! i! (p+q+2-i)} - \frac{\cot \alpha^{p+1} b^{p+q+2}}{(p+1)(p+q+2)} \right\} \quad (12)$$

となり, したがって, q が奇数の場合には $I_{pq}=0$ となる。また, 片持板の場合には

$$I_{pq} = \iint_S x^p y^q dx dy = \int_0^b y^q dy \int_{y \cot \alpha}^{a+y \cot \beta} x^p dx$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{p+1} \frac{p! \cot \beta^{p-i+1} a^i b^{p+q+2-i}}{(p+1-i)! i! (p+q+2-i)} - \frac{\cot \alpha^{p+1} b^{p+q+2}}{(p+1)(p+q+2)} \right\} \quad (13)$$

となる。 S は積分領域を示す。

$a/b=k$ とおき (12) 式, (13) 式を整理すれば,

$$I_{pq} = H \left\{ \sum_{i=0}^{p+1} \frac{p!}{(p+1-i)! i! (p+q+2-i)} \left(\frac{\cot \beta}{k} \right)^{p+1-i} - \frac{1}{(p+1)(p+q+2)} \left(\frac{\cot \alpha}{k} \right)^{p+1} \right\} a^{p+1} b^{q+1} \quad (14)$$

$$\text{周辺自由} \quad H = \{1 - (-1)^{q+1}\}$$

$$\text{片持} \quad H = 1$$

となる。さて

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= \sum_m \sum_n a_{mn} m(m-1) x^{m-2} y^n \\
 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= \sum_m \sum_n a_{mn} n(n-1) x^m y^{n-2} \\
 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} &= \sum_m \sum_n a_{mn} mn x^{m-1} y^{n-1} \\
 w_0 &= \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

であるから、(15) 式を用いて Π を計算すれば、 a_{mn} の二次形式として次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{D} \Pi &= \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s a_{mn} a_{rs} [m(m-1)r(r-1)I_{m+r-4, n+s} + n(n-1)s(s-1)I_{m+r, n+s-4} \\
 &\quad + 2\nu m(m-1)s(s-1)I_{m+r-2, n+s-2} + 2(1-\nu)mnr s I_{m+r-2, n+s-2} - \lambda^2 I_{m+r, n+s}] \quad (16)
 \end{aligned}$$

これを停留値とする条件より、 a_{mn} に関して微分し次のような a_{rs} に関する無限次元の斉一次連立方程式が求められる。すなわち、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = \sum_r \sum_s a_{rs} A_{mnr s} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \text{周辺自由;} & \quad \begin{pmatrix} m, & n \\ r, & s \end{pmatrix} = 0, 1, 2, \dots \\
 \text{片 持;} & \quad \begin{pmatrix} m, & r=0, 1, 2, \dots \\ n, & s=2, 3, 4, \dots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここに、 $A_{mnr s}$ は

$$\begin{aligned}
 A_{mnr s} &= [m(m-1)r(r-1)k^{-2}M_{m+r-4, n+s} + n(n-1)s(s-1)M_{m+r, n+s-4} \\
 &\quad + \nu m(m-1)s(s-1)k^{-2}M_{m+r-2, n+s-2} + \nu n(n-1)r(r-1)k^{-2}M_{m+r-2, n+s-2} \\
 &\quad + 2(1-\nu)mnr s k^{-2}M_{m+r-2, n+s-2} - \lambda^2 a^4 k^{-4} M_{m+r, n+s}] k^{m+r-1} b^{m+n+r+s-2} \quad (18)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$M_{pq} = \frac{I_{pq}}{a^{p+1} b^{q+1}}$$

とする。これより (17) 式の a_{rs} が零以外の解を有する条件から

$$\begin{vmatrix}
 A_{0000}, & A_{0001}, & A_{0010} \cdots A_{00rs} \cdots \\
 A_{0100}, & A_{0101}, & \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 A_{mn00} \cdots \cdots \cdots A_{mnr s} \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots
 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{周辺自由}) \quad (19)$$

$$\begin{vmatrix}
 A_{0202}, & A_{0203}, & A_{0204} \cdots A_{02rs} \cdots \\
 A_{0302}, & A_{0303}, & \cdots \cdots \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 A_{mn02} \cdots \cdots \cdots A_{mnrs} \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots
 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{片持}) \quad (20)$$

なる無限次元の振動方程式が得られる。理論的には上の (19), (20) 式より、厳密な固有値と、それに対応する固有函数とが求まるわけであるが、実際には逐次近似法により近似固有値および固有函数を求めることになる。

3. 数 値 計 算

(1) 片持板の場合

試験函数として x, y に関する最高5次までの項をとり、次のような 10 項よりなる多項式で近似した。すなわち、

$$\begin{aligned}
 w_0(x, y) = & a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5 \\
 & + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}xy^4 \\
 & + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^2y^3 \\
 & + a_{32}x^3y^2
 \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式を用いた場合の (18) 式で与えられる A_{mnr} を計算すると、振動数方程式は 10 行 10 列の 100 項からなる行列式で与えられる。(20) 式で与えられる λ^2 に関する 10 次の振動数方程式を解き、(第4表 (b)) 根として 10 ヶの正の実根を得る。次に、おのおのの根に対応する固有函数は、その根の値を (17) 式で与えられる 10 ヶの a_{rs} に関する連立一次方程式に代入し各係数比を決定すれば求められることになる。以上の実際の計算は Datatron 205 によって行なった。なお、計算行程の詳細については著者の一人戸川が別の機会に航空技術研究所報告として発表する予定である。

計算結果を第1表に、また計算機のプログラムワード数およびおおよその計算時間を第3表に示した。

(2) 周辺自由平板の場合

試験函数としては剛体変位を含めて (19) 式で与えられる振動数方程式を 10 次にそろえるために初めの函数を次の 23 項よりなる多項式で近似した。

$$\begin{aligned}
 w_0(x, y) = & a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5 + a_{06}y^6 \\
 & + a_{10}x + a_{11}xy + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}xy^4 + a_{15}xy^5 \\
 & + a_{20}x^2 + a_{21}x^2y + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^2y^3 \\
 & + a_{30}x^3 + a_{31}x^3y + a_{32}x^3y^2 \\
 & + a_{40}x^4 + a_{41}x^4y \\
 & + a_{50}x^5
 \end{aligned} \quad (22)$$

この場合 (12) 式の q ((18) 式で $n+s$, $n+s-4$, $n+s-2$ に対応する) が奇数の場合 $M_{pq}=0$ となるから 23 行 23 列からなる振動方程式 (19) は、実際には初めから (22) 式を分離した

$$\begin{aligned} \omega_{0 \text{ EVEN}}(x, y) = & a_{00} + a_{10}x + a_{02}y^2 + a_{20}x^2 + a_{12}xy^2 \\ & + a_{30}x^3 + a_{04}y^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{40}x^4 + a_{14}xy^4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \omega_{0 \text{ ODD}}(x, y) = & a_{01}y + a_{11}xy + a_{03}y^3 + a_{21}x^2y + a_{13}xy^3 \\ & + a_{31}x^3y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y + a_{15}xy^5 \end{aligned} \quad (24)$$

のごとき 10 項からなる多項式近似をした場合の二つの振動数方程式となる。つまり (19) 式は分離して

$$\begin{vmatrix} A_{0000}, & A_{0010}, & A_{0002} \cdots & A_{00rs}, & \cdots \\ & & & & \vdots \\ A_{1000}, & A_{1010}, & \cdots & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ A_{0200}, & A_{0210}, & \cdots & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ A_{2000}, & A_{1210}, & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m700}, & \cdots & \cdots & \cdots & A_{mnr}, \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{EVEN}) \quad (19-1)$$

および

$$\begin{vmatrix} A_{0101}, & A_{0111}, & A_{0103} \cdots & A_{01rs}, & \cdots \\ & & & & \vdots \\ A_{1101}, & A_{1111}, & \cdots & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ A_{0301}, & A_{0311}, & \cdots & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ A_{2101}, & \cdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m701}, & \cdots & \cdots & \cdots & A_{mnr}, \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ODD}) \quad (19-2)$$

の二式となる。(23), (24) 式からわかるように, (23) 式は y に関して対称 (第 1 図参照), (24) 式は非対称な函数である。この (23), (24) 式を用いて (18) 式より A_{mnr} を求め, (19) 式の分離した振動数方程式から根および固有函数を求めることは片持板の場合と同様である。ただし, 周辺自由の場合には根の中に EVEN の場合は 2 つの零根, ODD の場合には 1 つの零根を持つ。これはおのおの振動数方程式の初めの 2 行, 2 列および 1 行, 1 列がおのおの λ^2 の項のみとなることに示されている (第 4 表 (a))。以上による計算結果を第 2 表に示す。計算行程および計算時間は片持板の場合と同程度である。

パラメーターは片持, 周辺自由いずれの場合にも α , β および R の三種であるが (ν は 0.3 とした) 本報告では $R=1$ の場合限定し縦横比は一定としたが, プログラムは自由に変えられるようにしてあることはもちろんである。

4. 梯形板の振動実験

片持板の振動実験については、Barton, Young, Dalley, Ripperger, の平行四辺形片持板⁽²⁾および Gustafson, Stokey, Zorowski の三角形片持板⁽³⁾の振動実験などきわめて精度のよい資料が多くある。特に前者の実験においては、ポアソン比、寸法および密度など 3~4 桁の値を測定して用い結果の誤差も 1% 以下であろうとっている。また、わが国では林, 小林⁽⁴⁾, の実験などがその代表的なもので振動特性についての詳細な吟味がなされている。われわれも梯形板を用い片持の場合と周辺自由の場合の簡単な振動実験を行なったので、解析結果の精度の検証としては不十分であったが、多少の目安となるので示しておく。

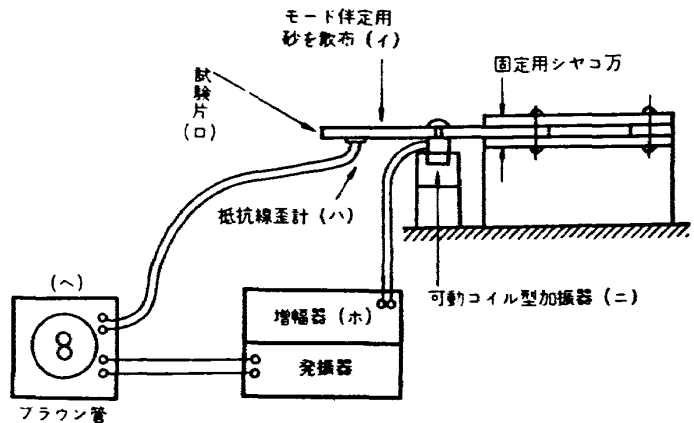
(1) 試験片

材質は 17ST ジュラルミン、板厚 2mm の板より実験室で切出し、ヤスリ等で仕上げた程度の試験片で寸法は約 20 cm × 20 cm、重量約 500 g 前後とした。

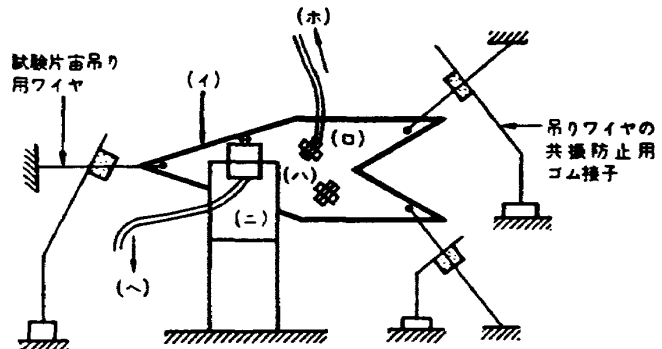
(2) 支持装置

片持板の場合は第 2 図 (a) に示すような固定条件で行なったもので、コンクリート床にボルトで止めた丈夫なチャンネル台に取り付けられた 2 枚の厚い固定板の間に試験片を挟み、シャコマンおよびボルトで強く締めてできるだけ固定の条件を満足させるようにした⁽⁵⁾。

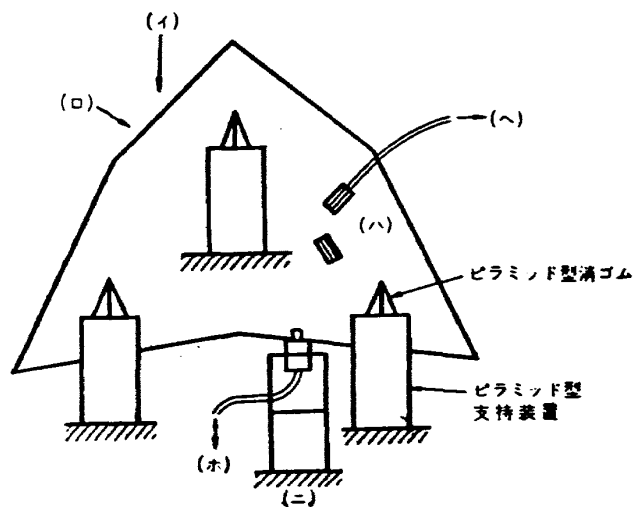
周辺自由板の場合は第 2 図 (b) (c) に示すような支持方法により自由辺条件を近似した。一つは 5cm × 10cm × 8cm 程度の鉄材ブロックにピラミッド形に切った消しゴムを接着し、これで試験片の三点を下面で支持した。これら三つの支持



第 2 図 (a) 片持試験片実験装置



第 2 図 (b) 周辺自由板試験片用実験装置



第 3 図 (c) 周辺自由板試験片用実験装置

点は移動可能とし、測定時に適当に動かして丁度板の振動形の節線上にくるように調整してから実験を行なった。もう一つの支持方法は長さ 30~40 cm の 3 本のアース線で宙吊りにするやり方で、この場合にも三点を変えられるようにし、ワイヤーの共振をさける可動接触端を別にもうけた。

(3) 加振方法

第 2 図に示すようにオシレーターからの電圧を増幅し試験片のできるだけ付根部に近い所でボルト止めした可動線輪 (3.5 g) に加え加振した。

(4) 共振点の判定

試験片裏面の数ヶ所に抵抗線歪ゲージを接着し、適当な点 (腹部でノーダルラインに直角方向が最良) の歪を増幅し、加振オシレーター電圧とこの電圧とのリサージュ図をかかせ共振振動数を決定し、振動数決定後砂 (一度水に洗った、土の混ってないものがよい) を散布することによって振動モードを求めたわけであるが、精度の点を吟味するといろいろな問題点がある。定量的な吟味は行なわなかったが、吟味に必要な項目についてのおおよその値を参考までに列記すると、

寸法: 長さ約 ± 1 mm, 角度約 $\pm 1^\circ$

ρ : 2.77×10^{-3} kg/cm³ ($\pm 4\%$)

E : 梁形試験片の振動実験値より算定 7.3×10^5 kg/cm² ($\pm 5\%$)

ν : 測定しなかった。計算 0.3, 実測より $\lambda_n a^2$ の算定の際は 0.34

支持条件として

固定条件 (片持): 試験片の寸法誤差に入るべき固定位置の誤差約 ± 0.5 mm, 固定条件たる $w_0=0$, $\partial w_0/\partial y=0$, の物理的近似がどの程度満されているかは定量的には行なわなかった。ただ共振点が飽和するとみられる程度に締付けた⁽⁵⁾。

周辺自由条件: ピラミット支持方法の方が吊った場合より近似がよいと思われるが、定量的には確かめなかった。自由の条件にある程度の束縛を加えた近似条件であるから振動数は完全に自由な場合より上っていると思われる。ピラミット支持および宙吊り支持の振動数の相違は最低次振動においてその相違が大きく最大 5% 位あったが第 2 モードで 2% 位, 高次のモードではほとんど差を認めなかった。振動モードに多少の差はあったがその相違は第 4 図 (c) に例として示しておいた。周辺自由の場合には振動数零, すなわち, 物理的には剛体変位詳しくは平行移動および回転運動に対応して三点支持用のゴムまたは宙吊り用ワイヤーとの連成振動と考えられる, 平行, 回転運動を伴った不安定な振動が観察された, しかしこれは除外してある。

加振コイルの重量: コイルの重量による振動数の低下を吟味するため, 片持矩形板についてコイル部の重量を増加した場合と, コイル位置の影響を吟味するため, その位置を二三変化させた場合との測定をした結果を第 3 図に示した。この場合コイル重量零の場合を外挿によって各測定時に行なえば, この重量による誤差は取り除くことができるが, この図 (第 3 図 (e)~(i) によれば

3.5 g の点の接線が水平となるので、実際にはできるだけ付根の位置、または節線近辺におくようにして実験を行ない外挿は行なわなかった。ただし、高次の振動についてのこの重量の影響は大きくなると思われるが、これについては吟味をしなかった。

オシレーター：これは市販のもので士 (2%+0.2 c/s) 精度である。

判定に関する誤差：オシレーターとリサージュの位相が反転時（円が右楕円と左楕円とに反転する）を共振点と判断したわけであるが反転と認めるに必要なオシレーターの目盛変化は約 2 %程度で位相の反転と振幅の最大とはほぼ一致していた。減衰のある構造物の振動試験ではこの吟味も問題となるであろう。

以上のような実験により求めた各種の板の振動数および振動モードは第 1 表、第 2 表および第 4, 6, 7, 9, 10 図に示したが、この種の実験で一番問題となるのは支持条件であると思われる。片持板の場合には固定条件のゆるみにより振動数の低下をきたし、周辺自由板の場合には三支点または宙吊り等の小さな束縛による振動数の上昇が考えられる。実験はこれらによる測定値の誤差をできるだけ少なくなるように行なったが、定量的な誤差量は示すことができなかった。振動試験に用いた装置および振動試験結果の写真は第 9 図、第 10 図に示した。

5. 解析結果と振動実験との比較

固有値問題の数値解析で一番問題となるのは計算の近似を高めた場合の収束性とその収束点であるが、これは解析の出発点に戻って試験函数の仮定から吟味すべき問題である。これまで行なった数値解析の結果から判断して近似を高めるにつれて固有値は単調に収束していき、無限の項数をとった時には厳密解に一致するものと思われる⁽⁶⁾。実際には有限項で打ち切って近似計算をするために近似度とその解の精度の関係、つまり収束の速度が残る問題となる。そこで厳密解のない場合には実験値との比較を行なうのが一番近道ではないかと思われたので、3. で述べたような実験を行なってその目安としたのである。もっとも変分法を用いて厳密解の存在範囲を決定することはできなくはないが下限の決定も同様な計算となるのでここでは行なわず、ただ実験値との比較および他の近似計算値⁽²⁾との比較を行なうにとどめた。(第 1, 2 表および第 5 図参照)

試験函数の項数を増して行なった場合の理論値の収束性を片持板の場合の代表例につき第 8 図に示しておいた。

振動モードに関しては代表的な二、三の例についての試験函数の係数値および実測モードと計算モードの比較を第 5 表、第 4 図に示した。

振動数に関して、平行四辺形片持板の場合 Barton の計算値および実験値と本論文の計算値とを比較したものを第 5 図に集録しておいたが、Barton のものに比較して、10 項位までとれば低次の振動に関しては十分であることや高次のものまで相当有効であることを知った。また、他の梯形析

の場合（第6図，第7図）等も考えると Barton の行なわなかった広範囲のものまで有効なことがわかると思う。

このようにして，われわれは本報告で述べた振動解析の方法がきわめて一般的でしかも従来の方法と比較し少しも精度が劣っていないばかりか，むしろ良好であり，薄い後退翼の振動解析に最も実用的であることを知った。

6. 結 論

本報告において一般的な形状をした梯形板の片持および周辺自由条件の場合の振動数および振動モードの近似解をエネルギー法によって求め，簡単な振動実験と比較してその実用性を吟味した。結果を要約すると，Barton などの行なわなかった一般的な形状の梯形板について容易に実用的な解が得られ，一般に片持板の場合には 10 項近似により第 4 モードまで，また周辺自由板の場合には第 8 モードまで精度の良い解が得られることが判った。平行四辺形片持板の場合でも Barton の得た結果と精度も同等あるいはそれより良好である。





そこでわれわれは目下 α ， β および k の 3 つのパラメーターをいろいろ変化させて実際の後退翼の振動解析，強度解析に使用できるような広範囲にわたる固有値および固有函数の数値表を作成することを考慮中である。

本報告を作るにあたっては，振動実験装置関係について熱弾性研究室の小川，伊藤両技官，計算の誤りを指摘していただいた空力弾性研究室の中村技官および計測工務部計算研究室の各氏の献身的な御協力をいただいた。ここに改めて関係各位に厚い感謝の意を表する次第である。

文 献

- (1) M. V. Barton: Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates, Jour. Applied Mechanics. 1951, June.
- (2) J. W. Dalley, E. A. Ripperger: Experimental Values of Natural Frequencies for Skew and Rectangular Cantilever Plates, Experimental Stress Analysis. 1952, Vol. 9, No. 2.
- (3) P. N. Gustafson, W. F. Stokey and C. F. Zorowski: An Experimental Study of Natural Vibrations of Cantilevered Triangular Plates, Jour. Aeronautical Sciences 1953, May.
- (4) 林 毅・小林繁夫: 後退板翼の振動特性について, CAS 研究報告 No. 3, 1960.
- (5) 鈴木真一: 後退角を有する薄板の固有振動数について, 航空学会誌, 第 5 巻, 第 38 号.
- (6) 寺沢寛一: 数学概論 (応用編), 岩波書店.

第1表 (a) $\lambda_n a^2$ の計算値と実験値, Barton との比較 (片持板)

$\alpha = \beta = \theta, a/L = 1$						
θ	n	$\lambda_n a^2$				
		6項近似	10項近似	BARTON		AUTHORS
				CAL.	EXP.	EXP.
90° 	1	3.517	3.503	3.494	3.37	3.4
	2	8.986	8.565	8.547	8.26	8.3
	3	22.23	21.61	21.44	20.55	19.
	4	36.05	31.70	27.46	27.15	26.
	5	47.04	32.01	31.17	29.75	29.
	6	118.2	63.49	—	—	
60° 	1	4.124	3.990	3.961	3.82	4.2
	2	11.84	10.25	10.190	9.23	9.1
	3	30.18	27.98	—	24.51	26.
	4	57.27	30.33	—	25.54	27.
	5	87.86	47.56	—	40.64	40.
	6		76.48	—	—	50.
45° 	1	5.303	4.95	4.824	4.26	4.4
	2	15.50	13.00	13.75	11.07	10.
	3	45.93	35.29	—	26.52	24.
	4	65.76	40.56	—	30.13	29.
	5	246.4	64.49	—	50.19	46.
	6		93.29	—	—	
30° 	1	8.441	7.382	—	5.12	5.2
	2	23.61	20.13	—	15.56	15.
	3	68.79	45.05	—	29.21	29.
	4	94.66	77.78	—	43.72	44.
	5	204.7	113.2	—	58.54	58.
	6	519.1	162.8	—	—	77.

第1表 (b) λ_{na}^2 の計算値と実験値 (片持板)















$a/L=1$					
α	β	n	λ_{na}^2		
			6項近似	10項近似	EXP.
45°	90°	1	8.83	8.760	8.7
		2	32.47	28.66	27.
		3	49.57	46.92	44.
		4	95.46	82.20	66.
		5	173.4	128.9	90.
		6	252.9	138.8	112.
60°	90°	1	5.403	5.413	5.1
		2	15.82	17.48	15.
		3	45.73	30.23	29.
		4	52.85	51.00	47.
		5	129.24	79.46	63.
		6		88.23	74.
45°	60°	1	6.327	6.173	5.8
		2	21.61	16.71	14.
		3	47.64	42.19	36.
		4	85.49	49.91	39.
		5	241.3	82.27	63.
		6		115.5	70.
30°	45°	1	10.83	10.08	8.9
		2	31.73	26.93	22.
		3	87.25	69.47	50.
		4	102.9	81.71	59.
		5	238.4	145.9	85.
		6	515.9	194.8	127.

第1表 (c) λ_{na}^2 の計算値と実験値 (片持板)

$a/L=1$					
α	β	n	λ_{na}^2		
			6項近似	10項近似	EXP.
30°	90°	1	18.84	18.71	18.
		2	73.96	53.20	45.
		3	113.4	99.23	92.
		4	210.0	158.6	101.
		5	354.1	244.0	172.
		6	933.5	279.1	196.
30°	60°	1	13.08	12.68	12.
		2	52.63	34.31	31.
		3	101.7	85.31	64.
		4	162.8	95.61	74.
		5	296.0	182.7	110.
		6		219.9	

$a/L=1/\sqrt{2}$					
α	β	n	λ_{na}^2		
			6項近似	10項近似	EXP.
45°	90°	1	6.295	6.189	5.7
		2	25.53	24.32	22.
		3	35.74	33.41	31.
		4	82.85	65.70	54.
		5	177.8	90.64	72.
		6		144.3	97.

第2表 λ_{na}^2 の計算値 (10 項近似) と実験値および実験モード
(周辺自由平板)

$a/L=1$						
α	β	n	計 算	実 験		
			λ_{na}^2	λ_{na}^2	振 動 モ ー ド	
45°	45°		4	7.619 ODD	7.1	
			5	11.34 EVEN	11.	
			6	12.26 EVEN	12.	
			7	21.59 ODD	20.	
			8	29.72 EVEN	24.	
			9	33.14 ODD	26.	
45°	60°		4	10.49 ODD	10.	
			5	12.56 EVEN	13.	
			6	15.63 EVEN	15.	
			7	28.81 ODD	28.	
			8	35.02 ODD	30	
			9	40.10 EVEN	34	

第3表 片持板の計算 (10 項近似の場合)

行 程	ワ ー ド	時 間
(20) 式の A_{mnr} 位置引出	40	} 30分
(18) 式の計算	460	
(20) 式の計算 (根と係数の計算) 10ヶ	2100	20分
(21) 式の零点計算 (モード) 10ヶ	100	20分

第 5 表 (a) $\alpha=45^\circ, \beta=60^\circ, a/L=1$

第 5 表 (b) $\alpha=45^\circ, \beta=45^\circ, a/L=1$

EVEN

$$w(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{02}y^2 + a_{20}x^2 + a_{12}xy^2 + a_{30}x^3 + a_{04}y^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{40}x^4 + a_{14}xy^4$$

w_{even} の係数

M a_{mn}	5	6
a_{00}	-1.00000000	-1.00000000
a_{10}	+4.5682421	+2.6014266
a_{02}	-4.9299716	+1.2637966
a_{20}	+2.1852948	-0.45014023
a_{12}	-21.902655	-1.4696008
a_{30}	+5.8033921	-1.8697023
a_{04}	-1.0951600	-0.26004714
a_{22}	+3.2601436	+0.11985935
a_{40}	-2.7798439	+0.76573209
a_{14}	+5.9681689	+0.31480240
λa^2	12.5585386	15.6297078

MODE a_{mn}	5	6
a_{00}	-1.00000000	-1.00000000
a_{10}	+2.1724352	+0.3766283
a_{02}	+0.8129449	+8.9229280
a_{20}	-0.0516288	-6.6781157
a_{12}	-0.8802880	+24.502899
a_{30}	-1.3307484	-5.8872581
a_{04}	-0.1474721	-0.2398307
a_{22}	+0.0052726	-3.8116161
a_{40}	+0.4118904	+2.9491386
a_{14}	-0.1990147	-5.6160388
λa^2	11.335133	12.260926

ODD

$$w(x, y) = a_{01}y + a_{11}xy + a_{03}y^3 + a_{21}x^2y + a_{13}xy^3 + a_{31}x^3y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y + a_{15}xy^5$$

w_{odd} の係数

M a_{mn}	4	7
a_{01}	-1.00000000	-1.00000000
a_{11}	-0.052262560	-0.12577950
a_{03}	+0.18992202	+1.0692561
a_{21}	+1.4327930	+5.2992905
a_{13}	+0.42924063	-1.2811722
a_{31}	-0.25498998	-6.0346862
a_{05}	-0.25458033	-0.090825600
a_{23}	-0.69231411	+0.69900020
a_{41}	+0.035704910	+1.7276441
a_{15}	+0.28929162	-0.069604000
λa^2	10.4927160	28.808022

MODE a_{mn}	4	7
a_{01}	-1.00000000	-1.00000000
a_{11}	+0.11096091	-0.61688170
a_{03}	+0.17568146	+0.79541420
a_{21}	+0.49775861	+5.53277263
a_{13}	+0.40696770	-1.2010654
a_{31}	+0.40331213	-4.9247058
a_{05}	-0.29570763	-0.0045575
a_{23}	-0.60201721	+0.5408748
a_{41}	-0.10855484	+1.1361476
a_{15}	+0.31488549	-0.0282890
λa^2	7.6186164	21.589978



固有函数 (正規化してない) の例
(周辺自由板)

第 4 表 (a) 振動数方程式の例



周辺自由平板 $x = \lambda_n^2 a^4 k^{-4}$

$\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, R = 1, \text{ EVEN } 10 \text{ 項近似}$

-0.8505708 x,	-0.6485686 x,	-0.2586187 x,	-0.5692204 x,	-0.2353954 x,	-0.5433567 x,	-0.1501903 x,	-0.2306447 x,	-0.5492969 x,	-0.1442319 x,
-0.6485686 x,	-0.5692204 x,	-0.2353954 x,	-0.5433567 x,	-0.2306447 x,	-0.5492969 x,	-0.1442319 x,	-0.2387991 x,	-0.5792938 x,	-0.1466212 x,
-0.2586187 x,	-0.2353954 x,	3.4022832 - 0.1501903 x,	0.5103425 - 0.2306447 x,	2,5942744 - 0.1442319 x,	1.1674234 - 0.2387991 x,	6.2068490 - 0.1054998 x,	2.4320527 - 0.1466212 x,	2.0491933 - 0.2579082 x,	5.6494896 - 0.1039411 x,
-0.5692204 x,	-0.5433567 x,	0.5103425 - 0.2306447 x,	0.8505708 - 0.5492969 x,	0.3891412 - 0.2387991 x,	1.9457058 - 0.5792938 x,	0.9310273 - 0.1466212 x,	0.6001509 - 0.2579082 x,	3.4153221 - 0.6312643 x,	0.8474234 - 0.1560880 x,
-0.2353954 x,	-0.2306447 x,	2.5942744 - 0.1442319 x,	0.3891412 - 0.2387991 x,	3.0010139 - 0.1466212 x,	1.0245967 - 0.2579082 x,	5.6494896 - 0.1039411 x,	3.6328782 - 0.1560880 x,	1.9560841 - 0.2878608 x,	6.3765389 - 0.1076515 x,
-0.5433567 x,	-0.5492969 x,	1.1674234 - 0.2387991 x,	1.9457058 - 0.5792938 x,	1.0245966 - 0.2579082 x,	5.1229832 - 0.6312643 x,	2.5422703 - 0.1560880 x,	1.6842282 - 0.2878608 x,	9.7804202 - 0.7061761 x,	2.4909629 - 0.1724485 x,
-0.1501903 x,	-0.1442319 x,	6.2068490 - 0.1054998 x,	0.9310273 - 0.1466212 x,	5.6494896 - 0.1039411 x,	2.5422703 - 0.1560880 x,	21.6273960 - 0.0812253 x,	6.0761584 - 0.1076515 x,	4.9819259 - 0.1724485 x,	20.7693870 - 0.0812289 x,
-0.2306447 x,	-0.2387991 x,	2.4320527 - 0.1466212 x,	0.6001509 - 0.2579082 x,	3.6328782 - 0.1560880 x,	1.6842282 - 0.2878608 x,	6.0761584 - 0.1076515 x,	5.2073723 - 0.1724485 x,	3.3613372 - 0.8297548 x,	7.8658102 - 0.1162767 x,
-0.5492969 x,	-0.5792938 x,	2.0491933 - 0.2579082 x,	3.4153221 - 0.6312643 x,	1.9560841 - 0.2878608 x,	9.7804202 - 0.7061761 x,	4.9819259 - 0.1724485 x,	3.3613372 - 0.3297548 x,	19.774689 - 0.8071750 x,	5.1580609 - 0.1962754 x,
-0.1442319 x,	-0.1466212 x,	5.6494896 - 0.1039411 x,	0.8474234 - 0.1560880 x,	6.3765389 - 0.1076515 x,	2.4909629 - 0.1724485 x,	20.769387 - 0.0812289 x,	7.8658102 - 0.1162767 x,	5.1580609 - 0.1962754 x,	22.2950550 - 0.0850825 x,

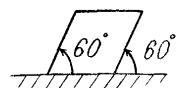
= 0.

$\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, R = 1, \text{ ODD } 10 \text{ 項近似}$

-0.2586187 x,	-0.2353954 x,	-0.1501903 x,	-0.2306447 x,	-0.1442319 x,	-0.2387991 x,	-0.1054998 x,	-0.1466212 x,	-0.2579082 x,	-0.1039411 x,
-0.2353954 x,	0.5953996 - 0.2306447 x,	-0.1442319 x,	0.9079960 - 0.2387991 x,	0.5430993 - 0.1466212 x,	1.1953627 - 0.2579082 x,	-2.1039411 x,	0.9886068 - 0.1560880 x,	1.5213987 - 0.2878608 x,	0.5256659 - 0.1076515 x,
-0.1501903 x,	-0.1442319 x,	9.3102735 - 0.1054998 x,	0.4655137 - 0.1466212 x,	8.4742344 - 0.1039411 x,	1.2711351 - 0.1560880 x,	18.0228300 - 0.0812253 x,	8.5735526 - 0.1076515 x,	2.4909629 - 0.1724485 x,	17.3078230 - 0.0812289 x,
-0.2306447 x,	0.9079960 - 0.2387991 x,	0.4655137 - 0.1466212 x,	1.8524357 - 0.2579082 x,	1.4123724 - 0.1560880 x,	2.9882843 - 0.2878608 x,	0.9011415 - 0.1076515 x,	2.5027663 - 0.1724485 x,	4.4599310 - 0.3297548 x,	1.8750141 - 0.1162767 x,
-0.1442319 x,	0.5430993 - 0.1466212 x,	8.4742344 - 0.1039411 x,	1.4123724 - 0.1560880 x,	9.2494088 - 0.1076515 x,	2.6985432 - 0.1724485 x,	17.3078230 - 0.0812289 x,	10.6737070 - 0.1162767 x,	4.5849430 - 0.1962754 x,	18.7022950 - 0.0850825 x,
-0.2387991 x,	1.1953627 - 0.2579082 x,	1.2711351 - 0.1560880 x,	2.9882843 - 0.2878608 x,	2.6985432 - 0.1724485 x,	5.5363730 - 0.3297548 x,	2.5961734 - 0.1162767 x,	4.7310796 - 0.1962754 x,	9.1644516 - 0.3857098 x,	4.1787050 - 0.1300158 x,
-0.1054998 x,	-0.1039411 x,	18.0228300 - 0.0812253 x,	0.9011415 - 0.1076515 x,	17.3078230 - 0.0812289 x,	2.5961734 - 0.1162767 x,	42.1999320 - 0.0660042 x,	18.2275460 - 0.0850825 x,	5.2783642 - 0.1300158 x,	41.5764320 - 0.0666547 x,
-0.1466212 x,	0.9886068 - 0.1560880 x,	8.5735526 - 0.1076515 x,	2.5027663 - 0.1724485 x,	10.6737070 - 0.1162767 x,	4.7310796 - 0.1962754 x,	18.2275460 - 0.0850825 x,	13.6128860 - 0.1300158 x,	7.9979935 - 0.2287925 x,	21.5369660 - 0.0927265 x,
-0.2579082 x,	1.5213987 - 0.2878608 x,	2.4909629 - 0.1724485 x,	4.4599310 - 0.3297548 x,	4.5849430 - 0.1962754 x,	9.1644516 - 0.3857098 x,	5.7283642 - 0.1300158 x,	7.9979935 - 0.2287925 x,	16.3548550 - 0.4588965 x,	7.8043994 - 0.1495323 x,
-0.1039411 x,	0.5256659 - 0.1076515 x,	17.3078230 - 0.0812289 x,	1.8750141 - 0.1162767 x,	18.7022950 - 0.0850825 x,	4.1787050 - 0.1300158 x,	41.5764320 - 0.0666547 x,	21.5369660 - 0.0927265 x,	7.8043994 - 0.1495323 x,	44.4820540 - 0.0703463 x,

= 0.

第 4 表 (b) 振動数方程式の例



R=1. 片持平板 $x = \lambda_n^2 a^4 k^{-4}$

4.0000000 - 0.2000000 x,	6.0000000 - 0.1666666 x,	7.9999999 - 0.1428571 x,	10.0000000 - 0.1250000 x,	3.0000000 - 0.1833333 x,	4.9999999 - 0.1547619 x,	6.9999999 - 0.1339286 x,	2.9666666 - 0.1857143 x,	4.9749999 - 0.1582341 x,	3.4124999 - 0.2025298 x,
6.0000000 - 0.1666666 x,	11.9999999 - 0.1428571 x,	18.0000000 - 0.1250000 x,	24.0000000 - 0.1111111 x,	4.9999999 - 0.1547619 x,	10.4999999 - 0.1339286 x,	16.2000000 - 0.1180556 x,	5.4249999 - 0.1582341 x,	10.8399999 - 0.1378968 x,	6.7474996 - 0.1738591 x,
7.9999999 - 0.1428571 x,	18.0000000 - 0.1250000 x,	28.8000000 - 0.1111111 x,	39.9999999 - 0.1000000 x,	6.9999999 - 0.1339286 x,	16.2000000 - 0.1180556 x,	26.3999999 - 0.1055556 x,	7.9466666 - 0.1378968 x,	17.0999999 - 0.1222222 x,	10.2699999 - 0.1523810 x,
10.0000000 - 0.1250000 x,	24.0000000 - 0.1111111 x,	39.9999999 - 0.1000000 x,	57.1428560 - 0.0909091 x,	9.0000000 - 0.1180556 x,	21.9999999 - 0.1055556 x,	37.1428560 - 0.0954545 x,	10.4999999 - 0.1222222 x,	23.5714270 - 0.1097643 x,	13.8928560 - 0.1356692 x,
3.0000000 - 0.1833333 x,	4.9999999 - 0.1547619 x,	6.9999999 - 0.1339286 x,	9.0000000 - 0.1180556 x,	4.0666666 - 0.1857143 x,	6.3249999 - 0.1582341 x,	8.5466666 - 0.1378968 x,	5.3375000 - 0.2025298 x,	7.9624996 - 0.1738591 x,	7.1441666 - 0.2329563 x,
4.9999999 - 0.1547619 x,	10.4999999 - 0.1339286 x,	16.2000000 - 0.1180556 x,	21.9999999 - 0.1055556 x,	6.3249999 - 0.1582341 x,	12.1899999 - 0.1378968 x,	18.2999999 - 0.1222222 x,	8.3674996 - 0.1738591 x,	14.9099970 - 0.1523819 x,	11.4999999 - 0.2012897 x,
6.9999999 - 0.1339286 x,	16.2000000 - 0.1180556 x,	26.3999999 - 0.1055556 x,	37.1428560 - 0.0954545 x,	8.5466666 - 0.1378968 x,	18.2999999 - 0.1222222 x,	29.1428560 - 0.1097643 x,	11.3699999 - 0.1523810 x,	22.2214270 - 0.1356692 x,	15.9028540 - 0.1773088 x,
2.9666666 - 0.1857143 x,	5.4249999 - 0.1582341 x,	7.9466666 - 0.1378968 x,	10.4999999 - 0.1222222 x,	5.3375000 - 0.2025298 x,	8.3674996 - 0.1738591 x,	11.3699999 - 0.1523810 x,	8.5383330 - 0.2329563 x,	12.2799999 - 0.2012897 x,	13.0599999 - 0.2785218 x,
4.9749999 - 0.1582341 x,	10.8399999 - 0.1378968 x,	17.0999999 - 0.1222222 x,	23.5714270 - 0.1097643 x,	7.9624996 - 0.1738591 x,	14.9099970 - 0.1523810 x,	22.2214270 - 0.1356692 x,	12.2799999 - 0.2012897 x,	20.6657100 - 0.1773088 x,	18.6514270 - 0.2420935 x,
3.4124999 - 0.2025298 x,	6.7474996 - 0.1738591 x,	10.2699999 - 0.1523810 x,	13.8928560 - 0.1356692 x,	7.1441666 - 0.2329563 x,	11.4999999 - 0.2012897 x,	15.9028540 - 0.1773088 x,	13.0599999 - 0.2785218 x,	18.6514270 - 0.2420935 x,	22.0642830 - 0.3426903 x,

= 0.

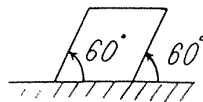
$$w(x, y) = a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5 + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}xy^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{32}x^3y^2$$

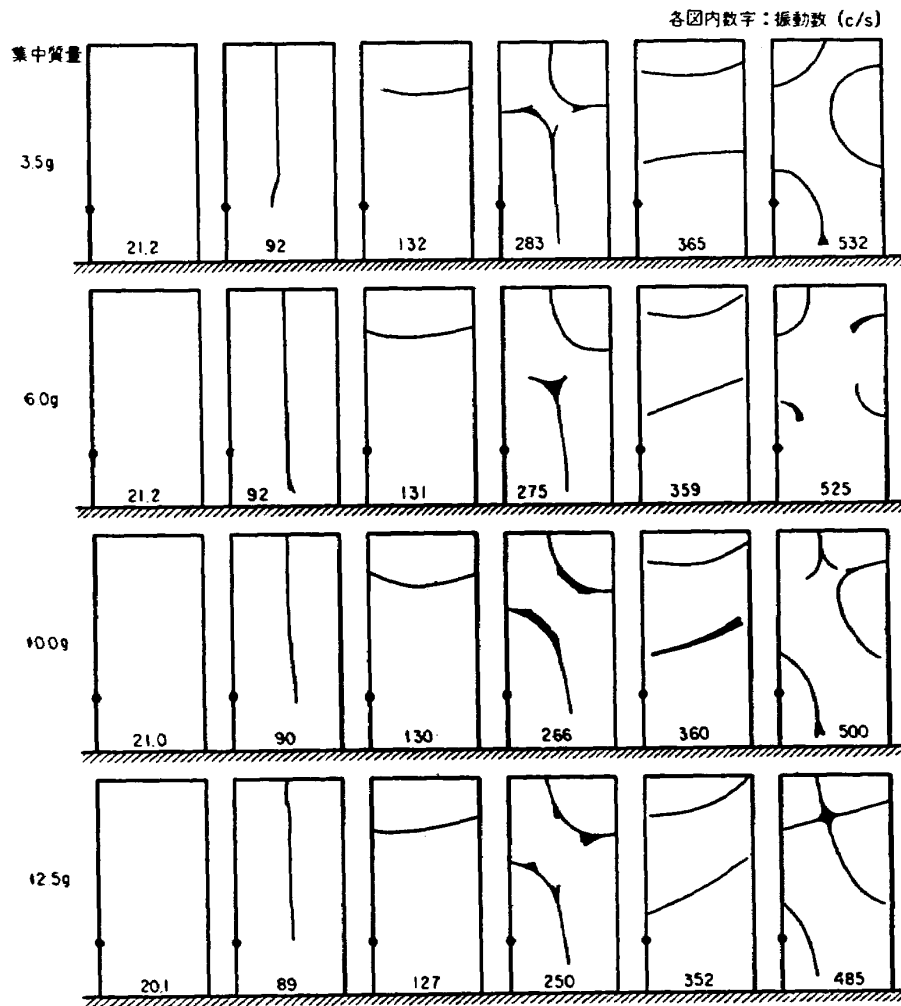
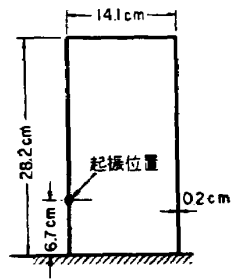
	1	2	3
a_{02}	-1.0000000	-1.0000000	-1.0000000
a_{03}	+16.198762	+1.0012026	+1.6358533
a_{04}	+0.94255660	-0.24098950	-1.4173167
a_{05}	-7.3206306	-0.24697586	+0.64892977
a_{12}	+54.168157	-0.44313880	+0.069707830
a_{13}	-71.685918	-0.91387284	+2.2229065
a_{14}	+32.821886	+1.1860505	-1.6325871
a_{22}	+5.3361713	+2.1010010	-1.0985237
a_{23}	-7.0418173	-1.2661271	+0.65596066
a_{32}	+0.68121860	-0.19669020	+0.065439870
$\lambda_n \alpha^2$	3.9901654	10.249039	27.982799

	4	5	6
a_{02}	-1.0000000	-1.0000000	-1.0000000
a_{03}	+0.87735364	+2.1827955	-3.8428211
a_{04}	+0.13194071	-1.0239116	+5.4640751
a_{05}	-0.19652092	-0.080296440	-1.3889794
a_{12}	+2.1837222	+1.1158095	+8.4929087
a_{13}	-2.3954567	-2.0902350	-3.0498279
a_{14}	+0.58839885	+1.3481690	-1.9757404
a_{22}	-0.62101727	-0.40420640	-8.5727011
a_{23}	+0.61444670	-0.54044603	+3.8707494
a_{32}	-0.15477184	+0.45193916	+1.9382362
$\lambda_n \alpha^2$	30.332198	47.556748	76.483025

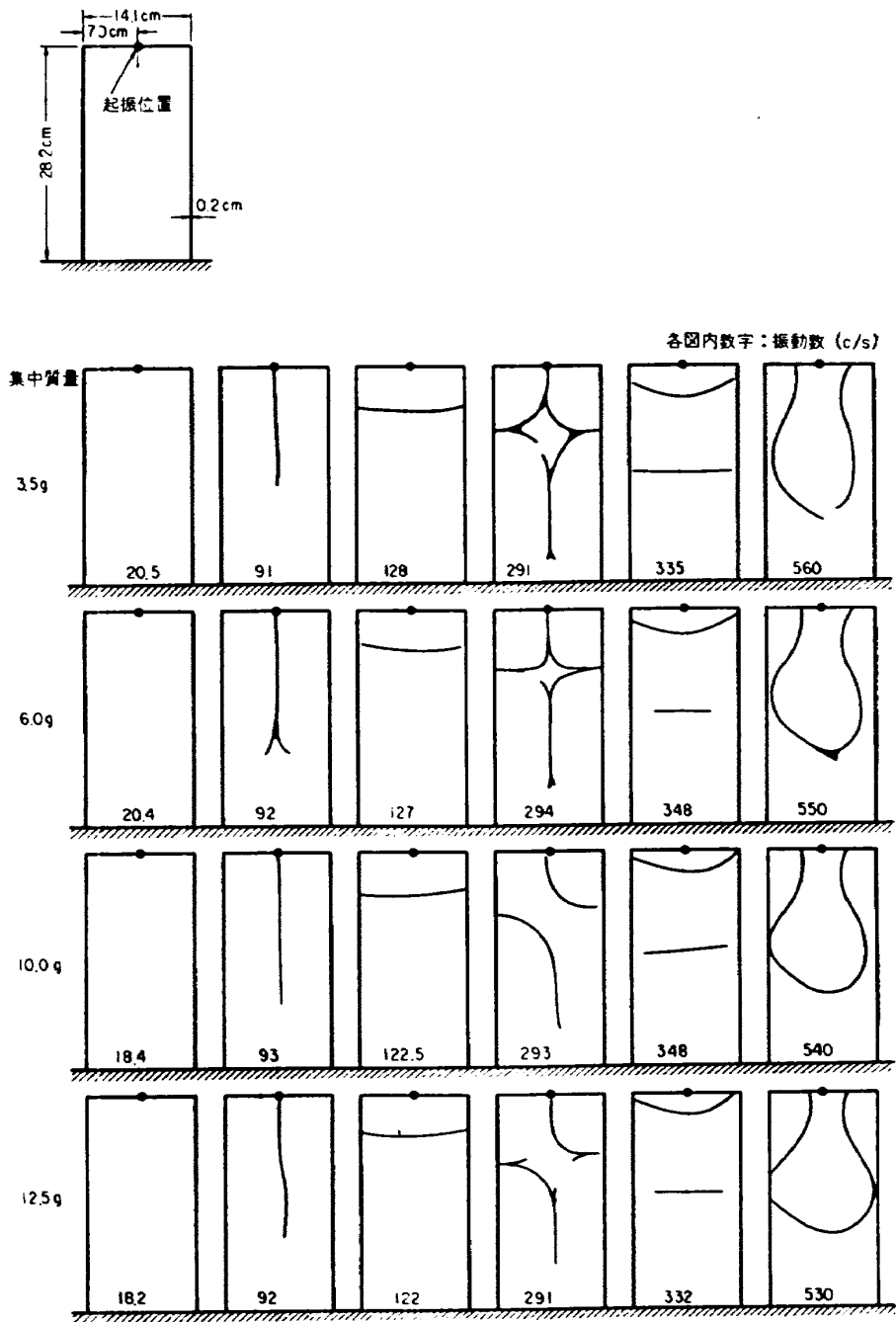
第5表(c) 固有函数の例(片持板)

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, a/L = 1$$

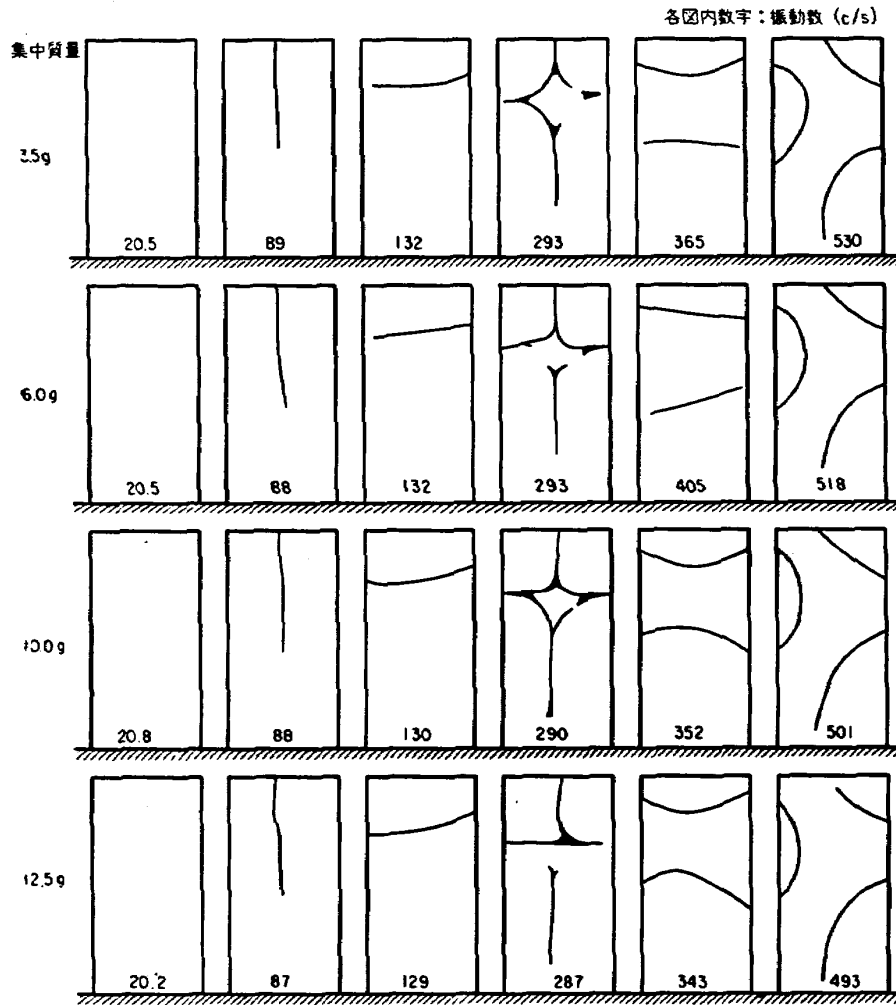
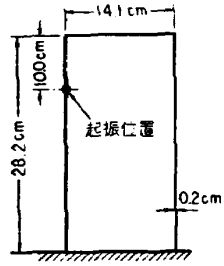




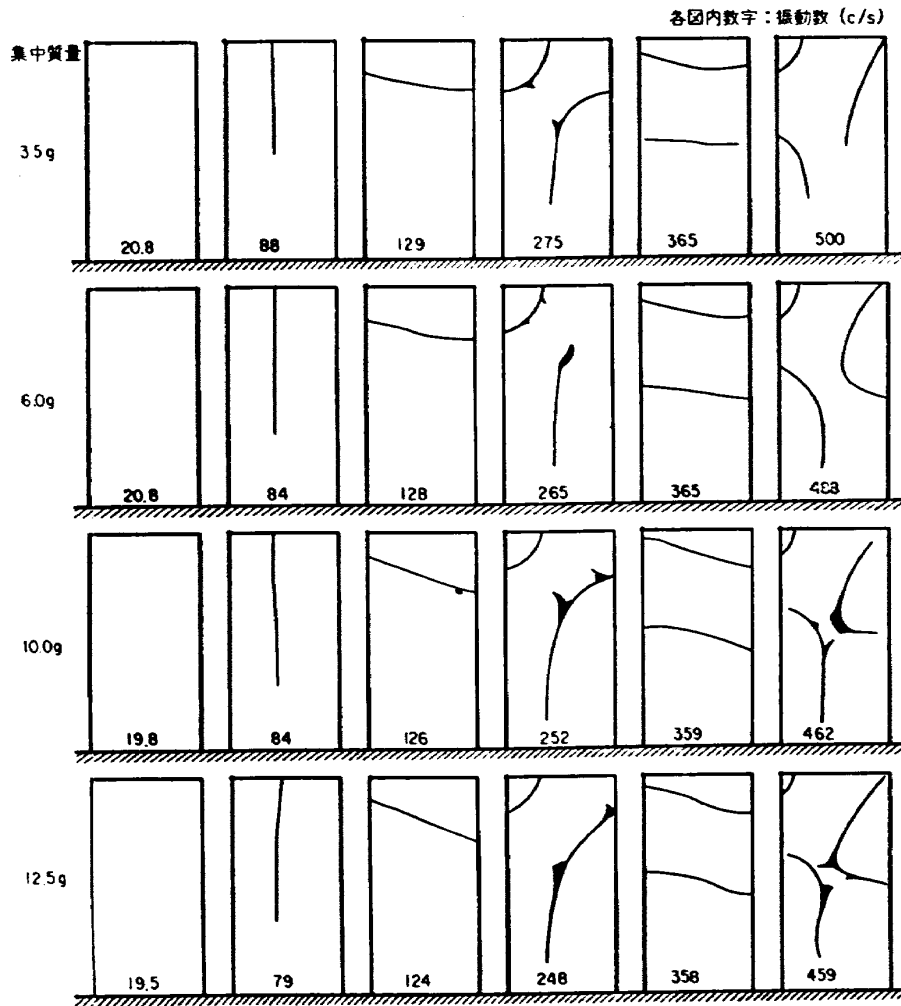
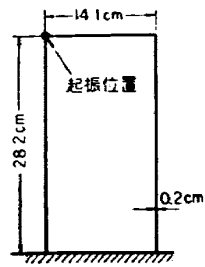
第3図 (a) 集中質量と Nodal-line の関係



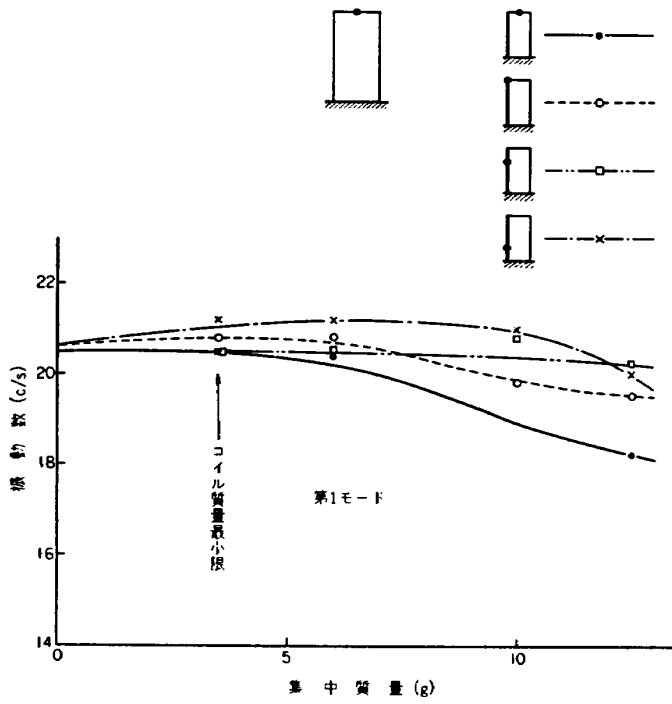
第3図 (b) 集中質量と Nodal-line の関係



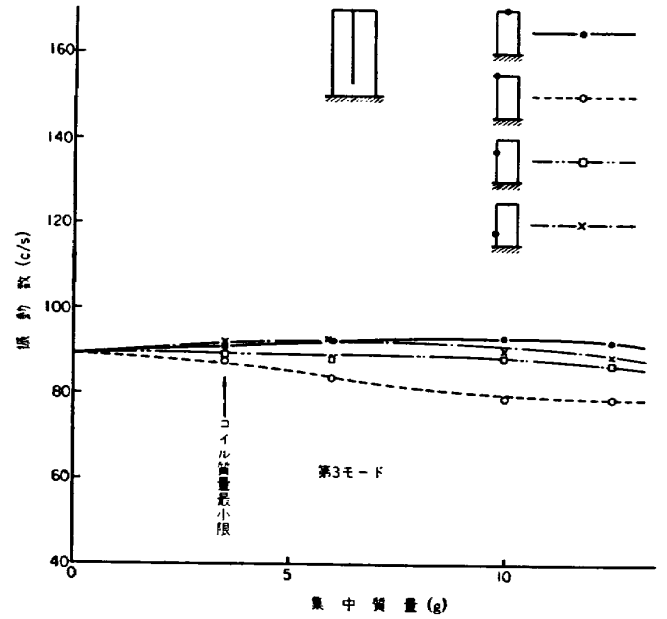
第3図(c) 集中質量と Nodal-line の関係



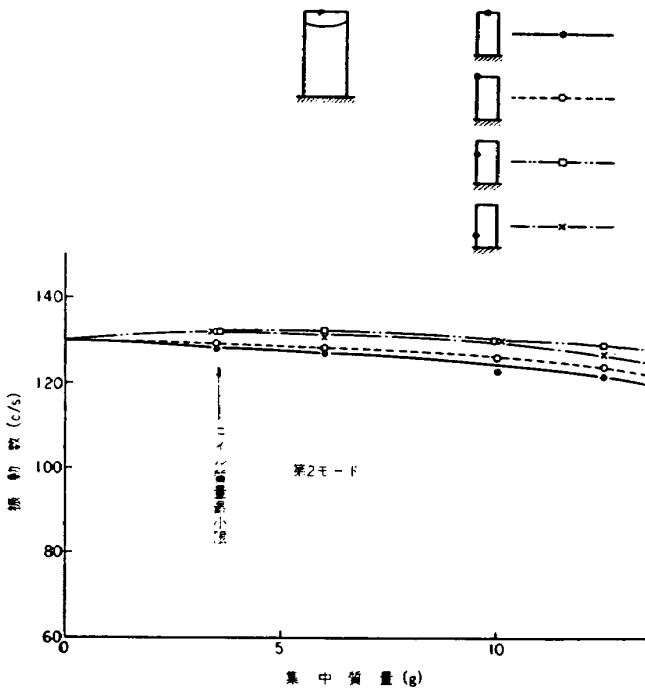
第3図 (d) 集中質量と Nodal-line の関係



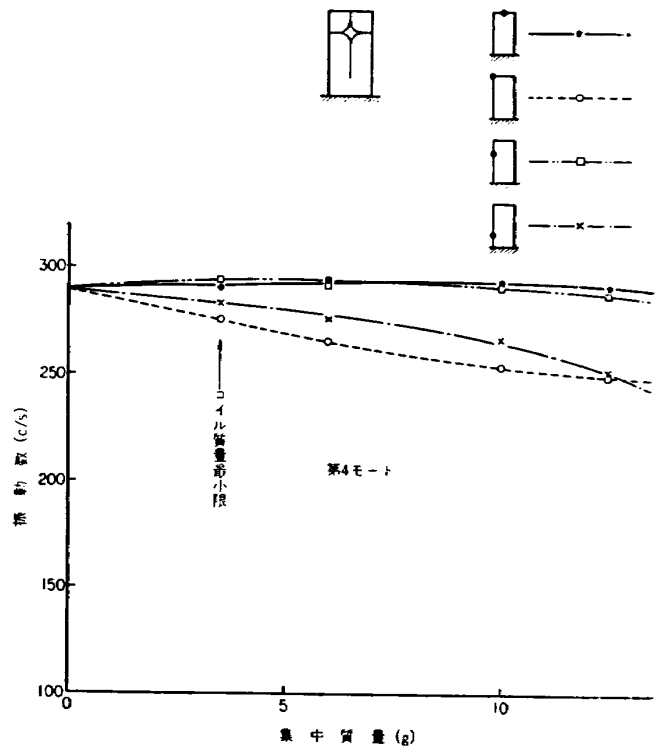
第3図 (e) 集中質量と振動数の関係



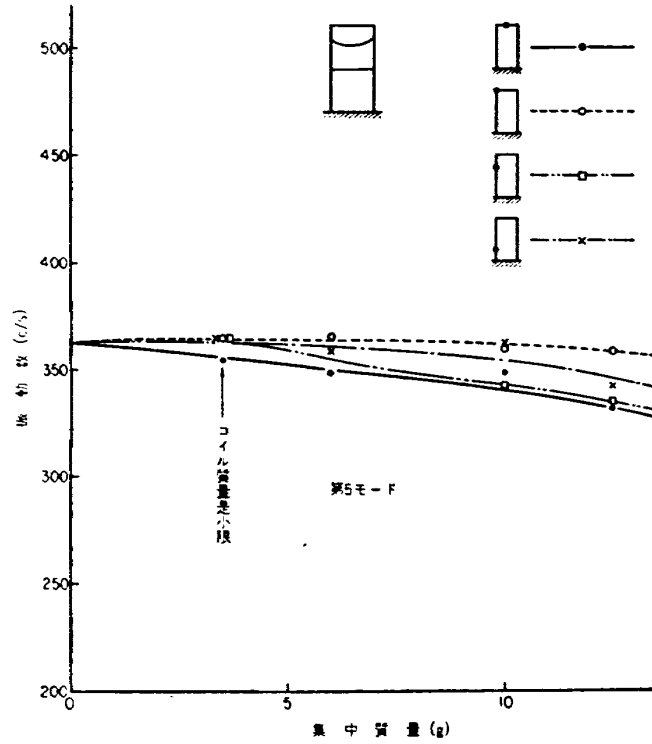
第3図 (f) 集中質量と振動数の関係



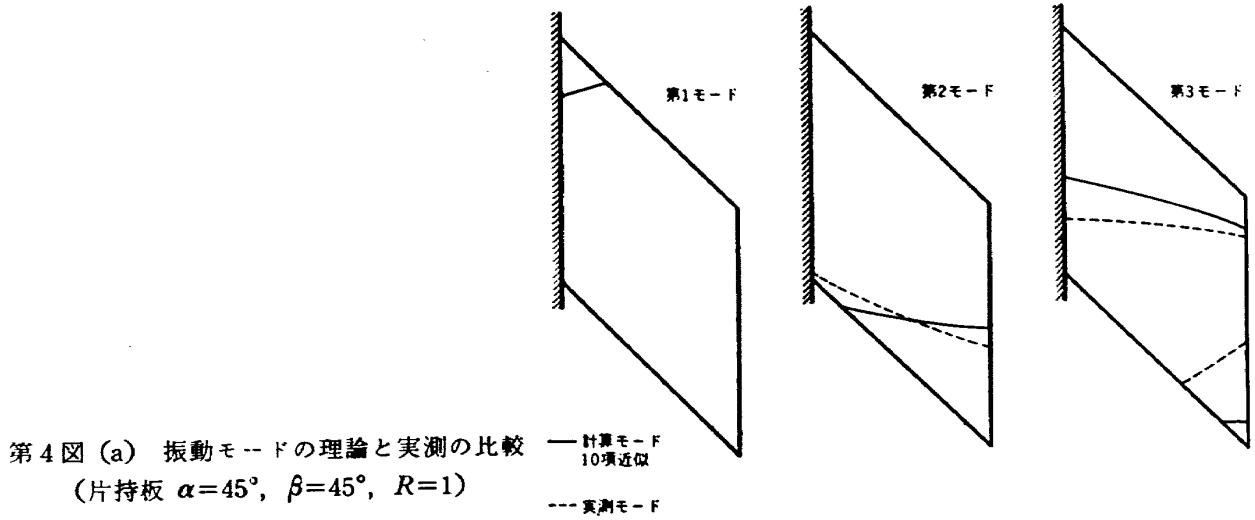
第3図 (g) 集中質量と振動数の関係



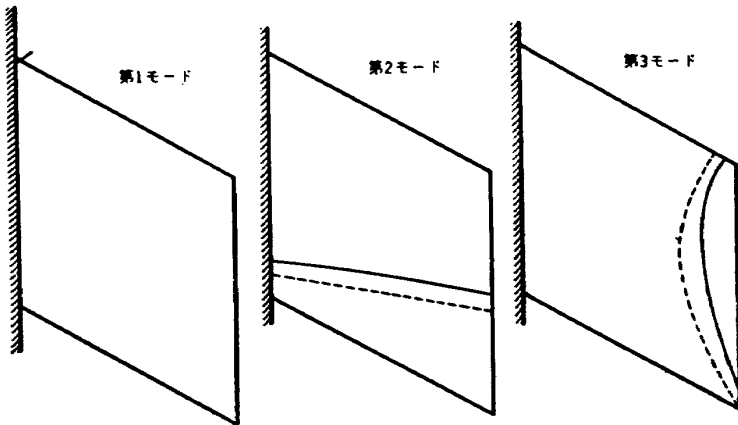
第3図 (h) 集中質量と振動数の関係



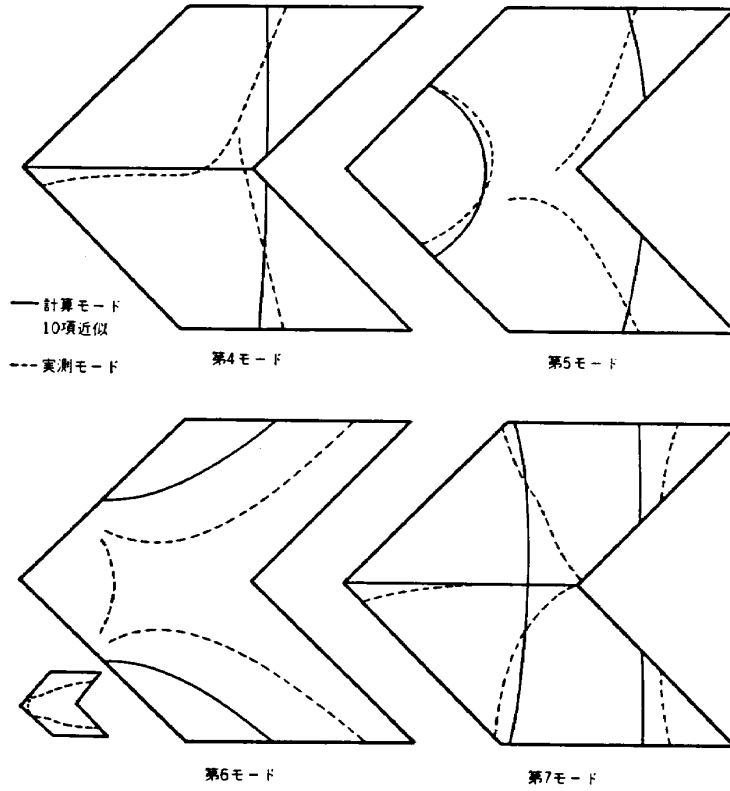
第3図 (i) 集中質量と振動数の関係



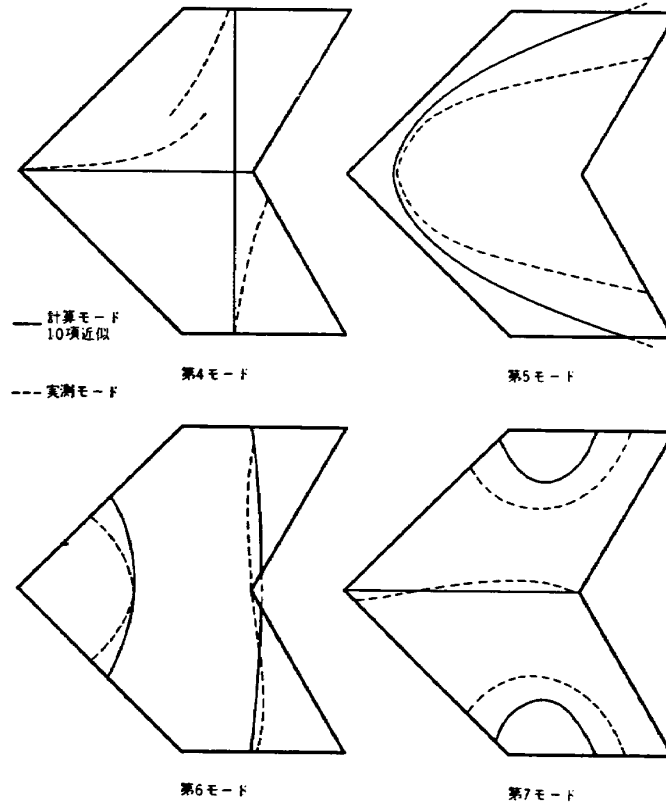
第4図 (a) 振動モードの理論と実測の比較
(片持板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$, $R=1$)



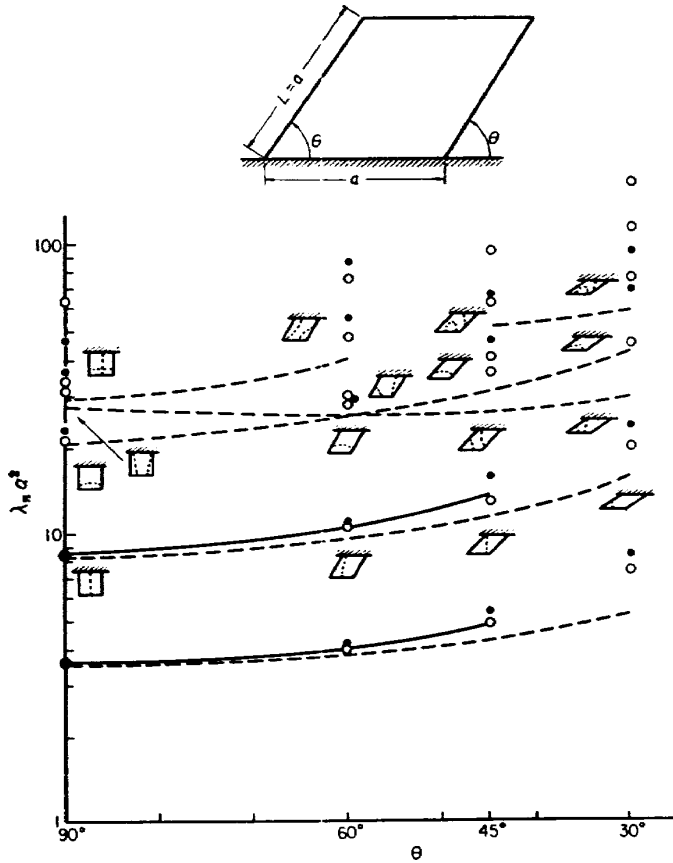
第4図 (b) 振動モードの理論と実測の比較
(片持板 $\alpha=60^\circ$, $\beta=60^\circ$, $R=1$)



第4図(c) 振動モードの理論と実測の比較
 (周辺自由板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$, $R=45^\circ$, $R=1$. 第6モードの様に支持条件によるモードの多少の変化がある場合あり。)

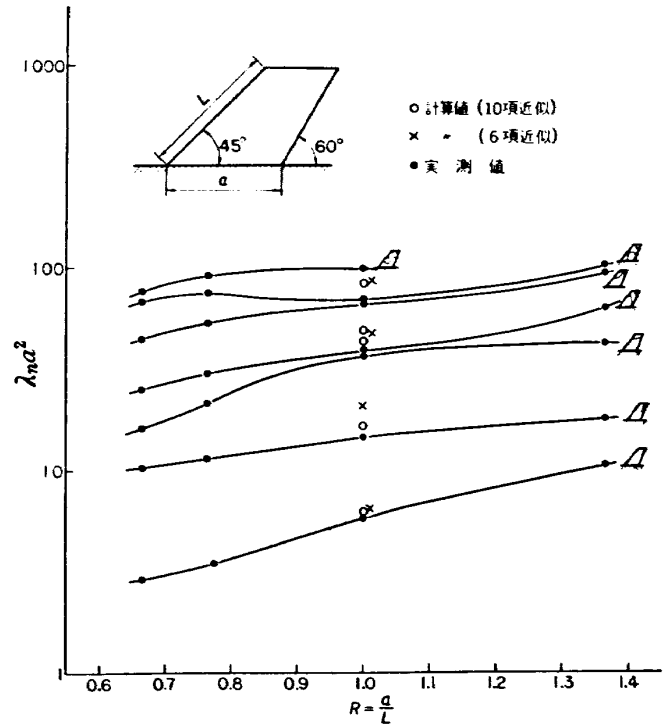


第4図(d) 振動モードの理論と実測の比較
 (周辺自由板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $R=1$, 第1, 第2, 第3モードは剛体変位であるのが除外した。)

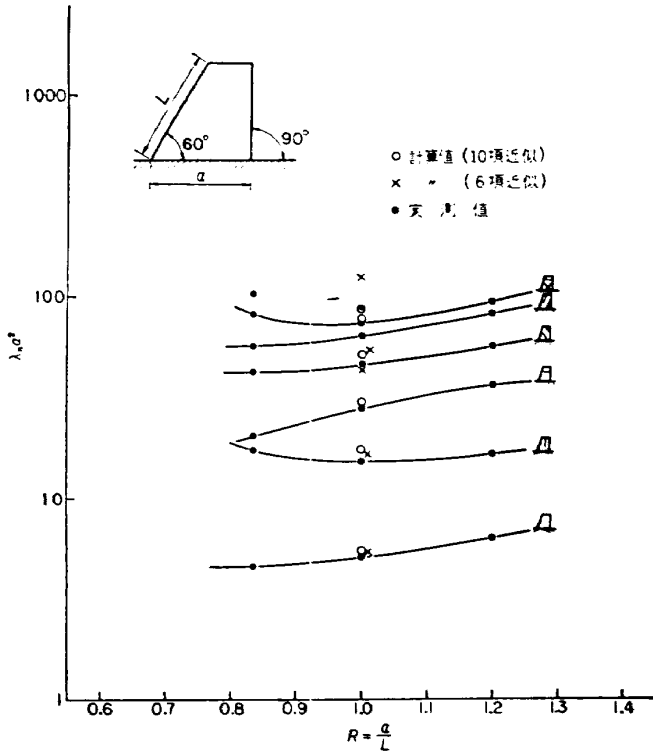


第 5 図

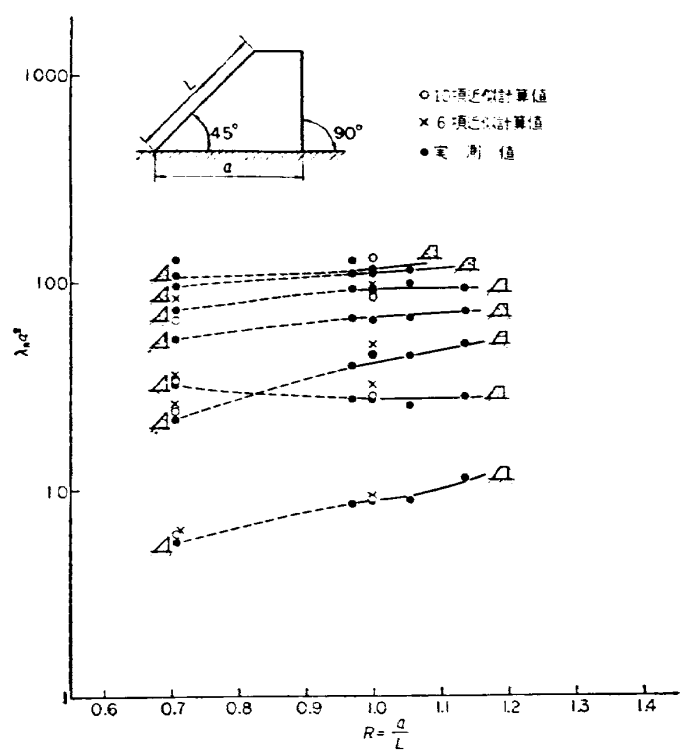
平行四辺形板の $\lambda_n a^2$ の値の比較, $a/L=1$, 実線は Barton の計算値, 破線は Barton の実測値。○記号は本計算, 10 項近似, ●は 6 項近似の場合。振動モードは Barton の実測モード。



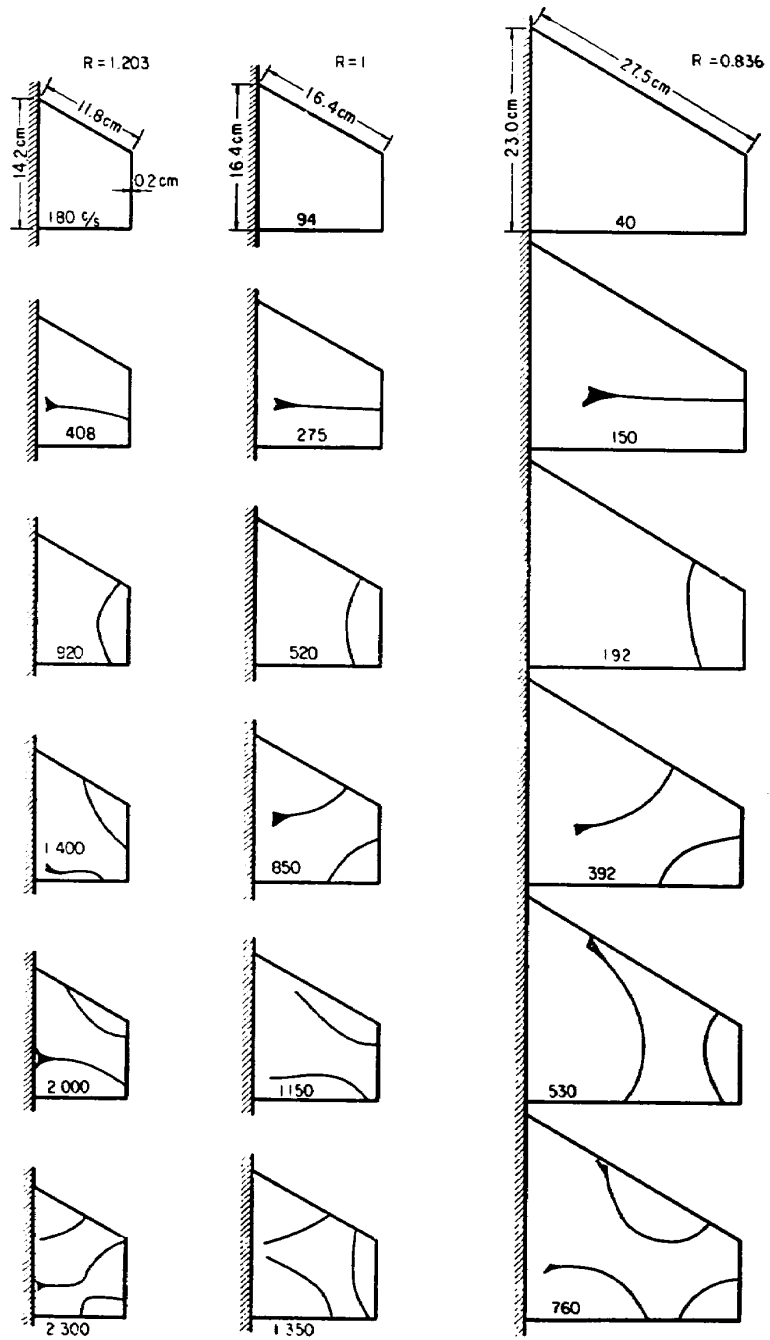
第 6 図 (a) $\lambda_n a^2$ の実験値と計算値 ($R=1$), $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$



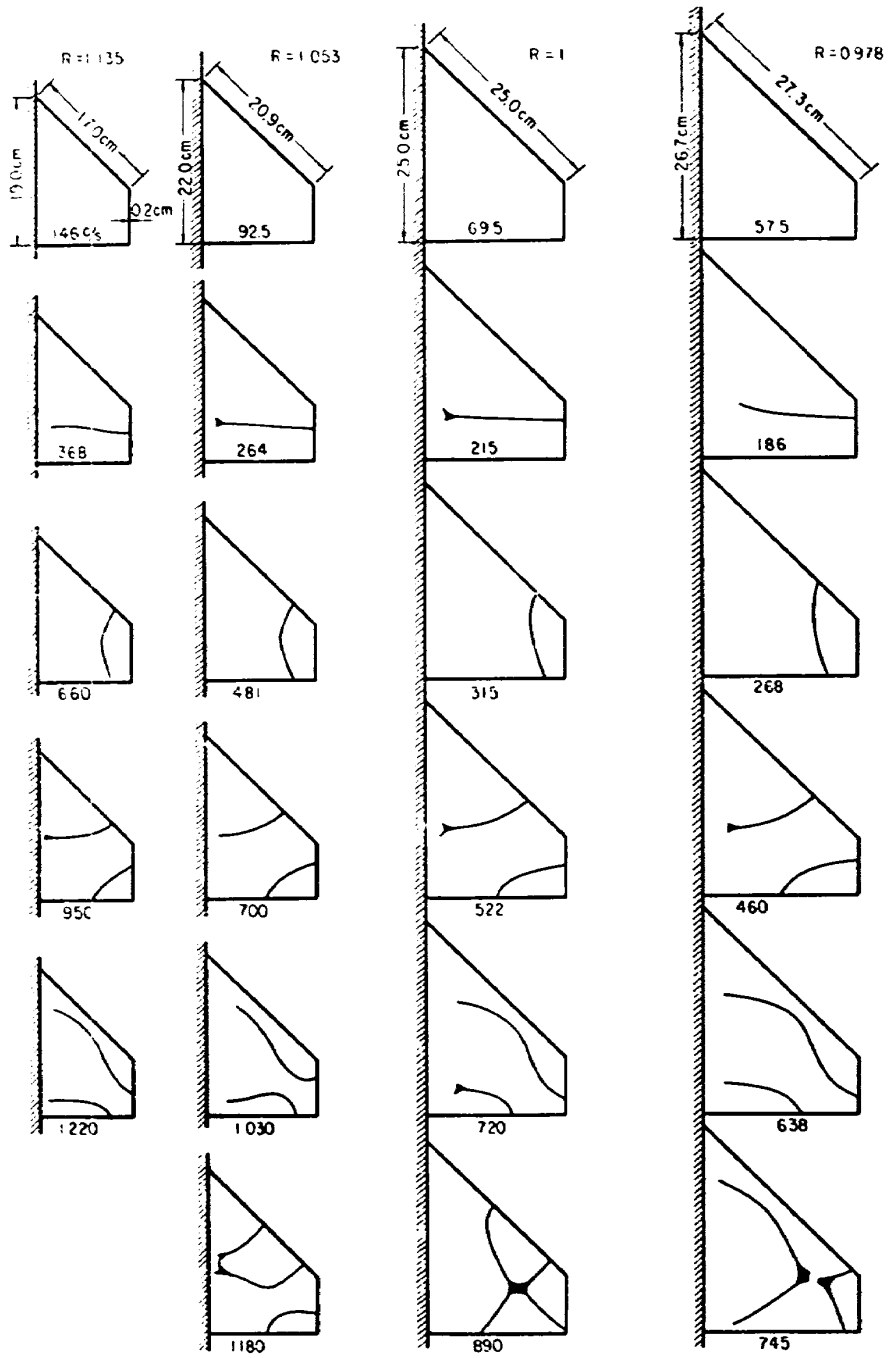
第 6 図 (b) $\lambda_n a^2$ の実験値と計算値 ($R=1$), $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$



第 6 図 (c) $\lambda_n a^2$ の実験値と計算値 ($R=1$), $\alpha=45^\circ$, $\beta=90^\circ$

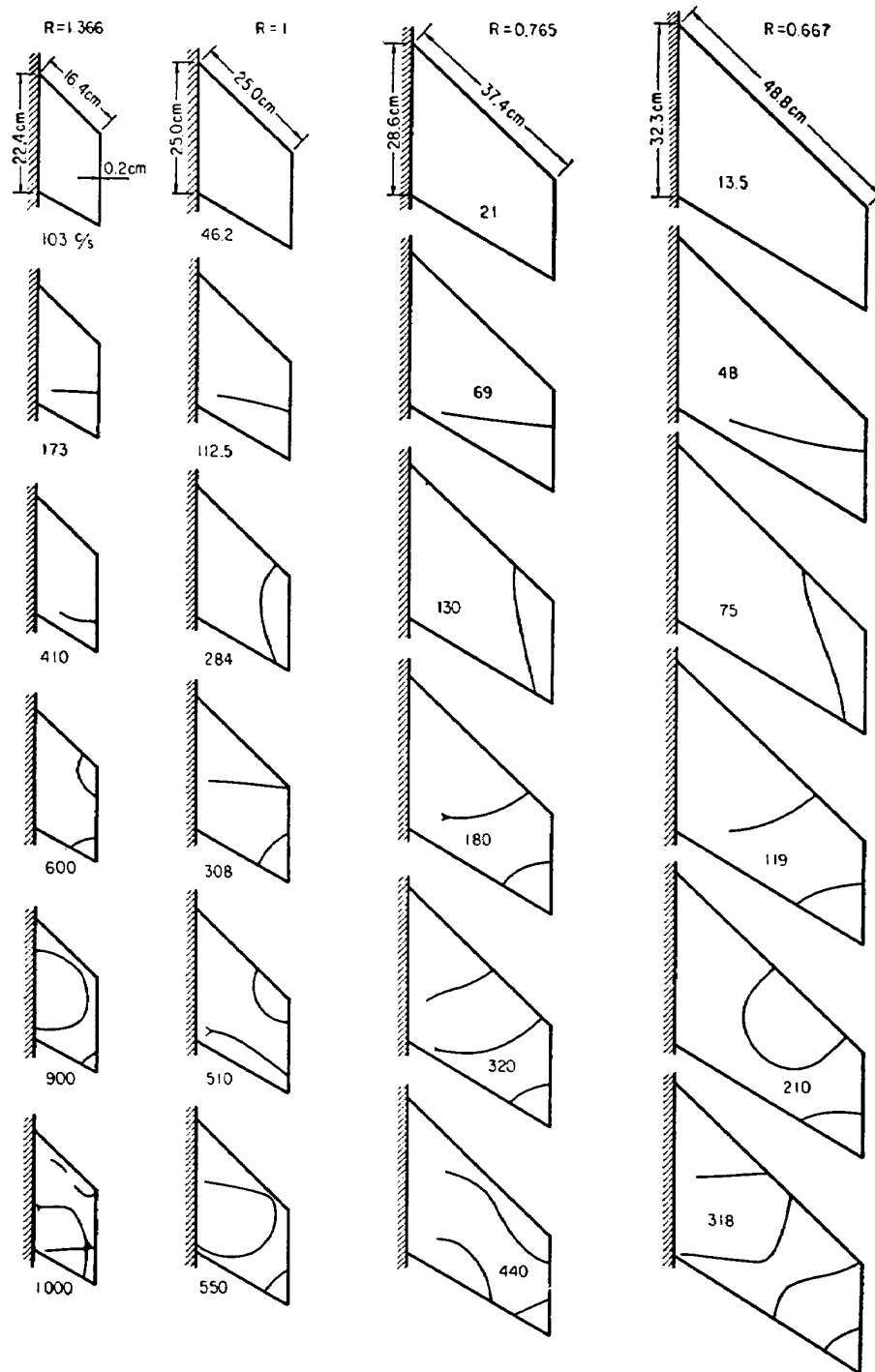


第7図 (a) 実測振動数および振動モード
 (片持板 $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$, R 変化)



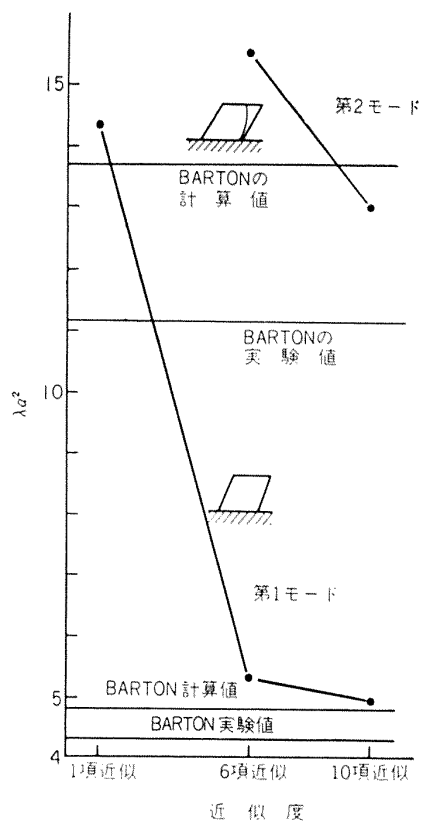
第7図 (b) 実測振動数および振動モード

(片持板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=90^\circ$, R 変化)

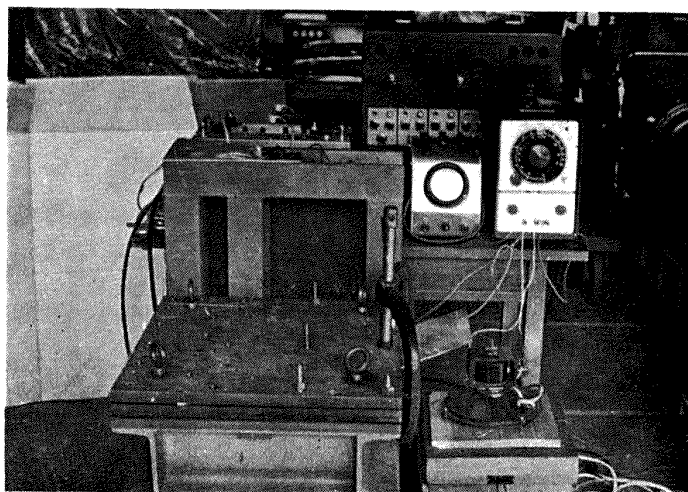


第7図 (b) 実測振動数および振動モード

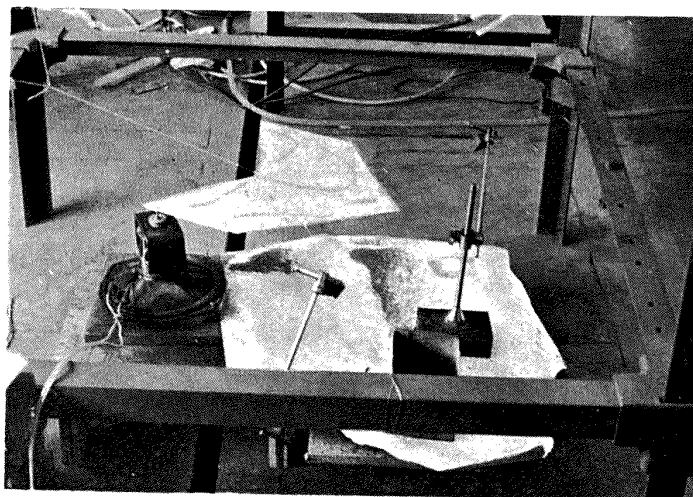
(片持板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, R 変化)



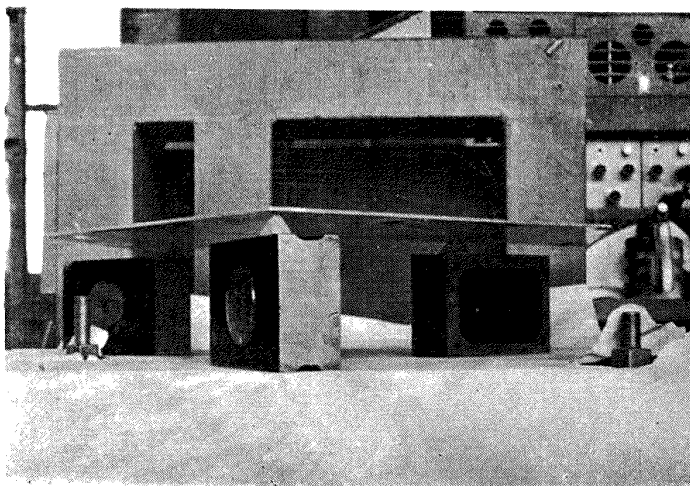
第8図 収束の速さ



(a) 片持板および測定装置

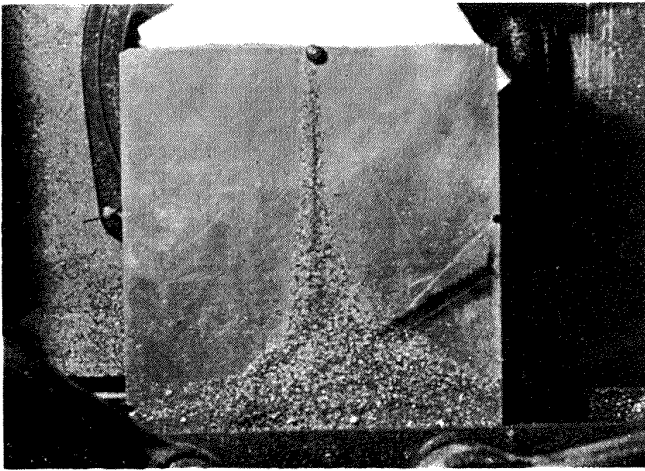
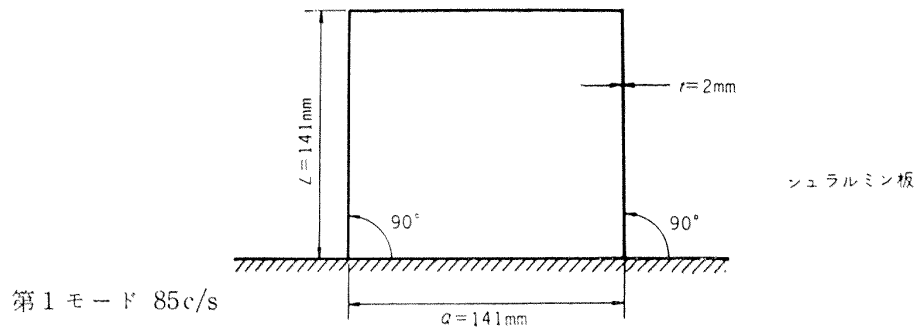


(b) 周辺自由板 (ワイヤ宙吊り)

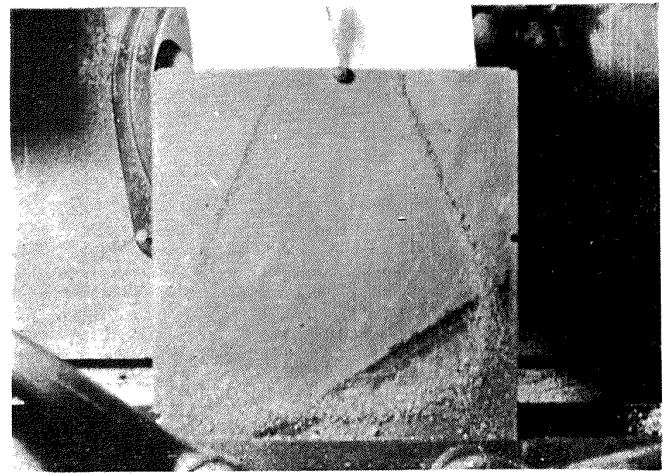


(c) 周辺自由板 (ゴム支持)

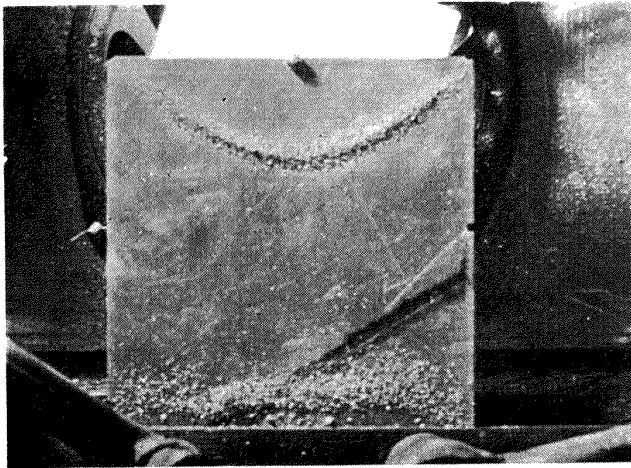
第9図 実験装置



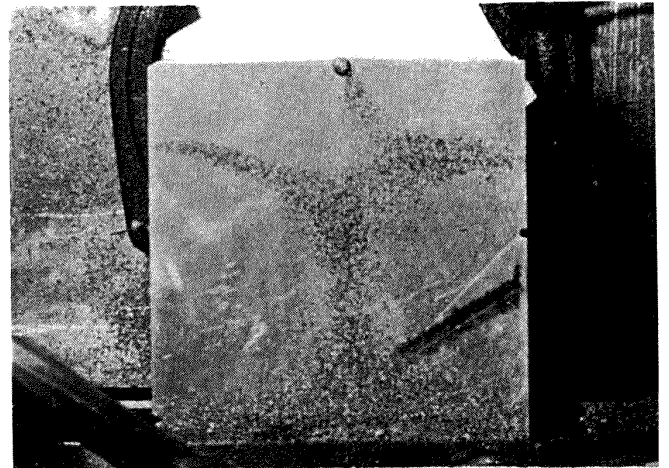
第2モード 208c/s



第4モード 660c/s

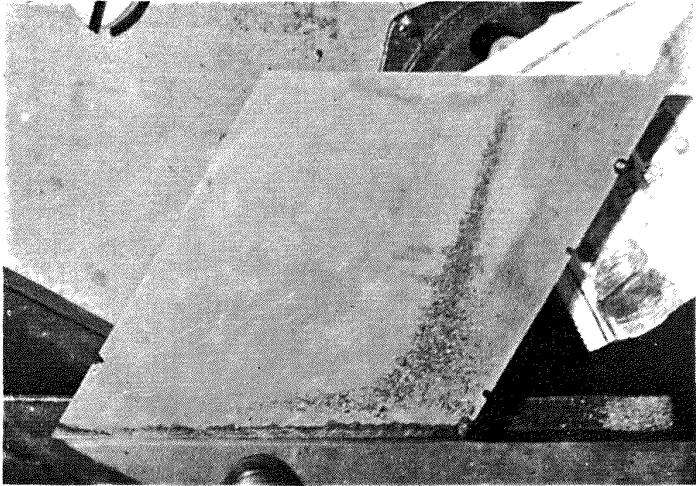
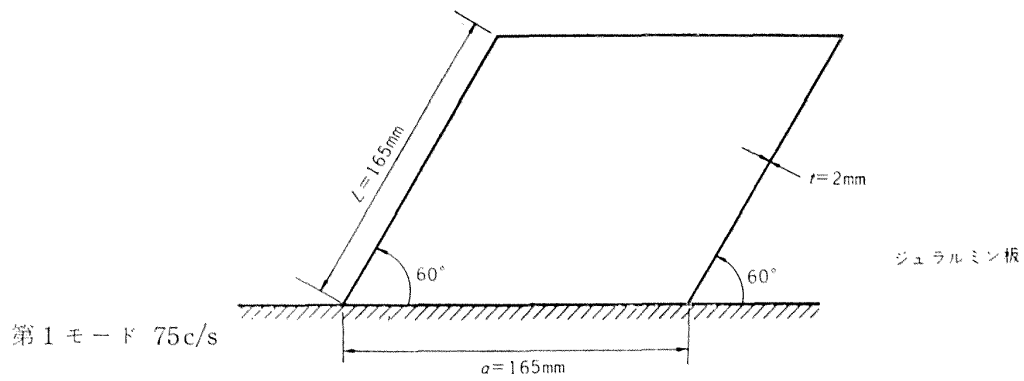


第3モード 480c/s

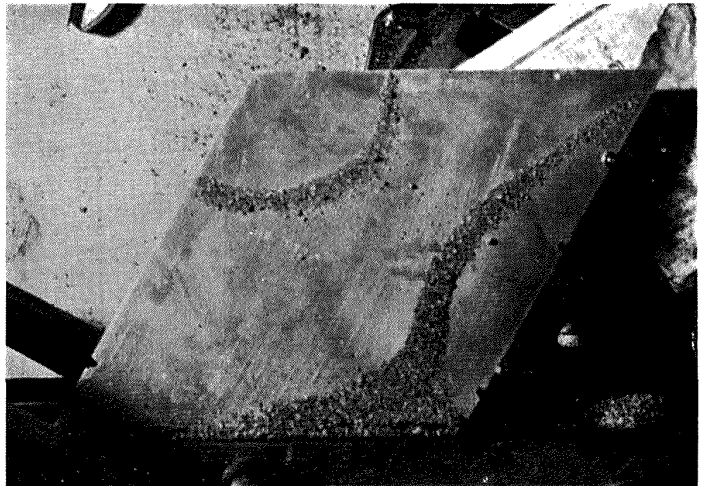


第5モード 730c/s

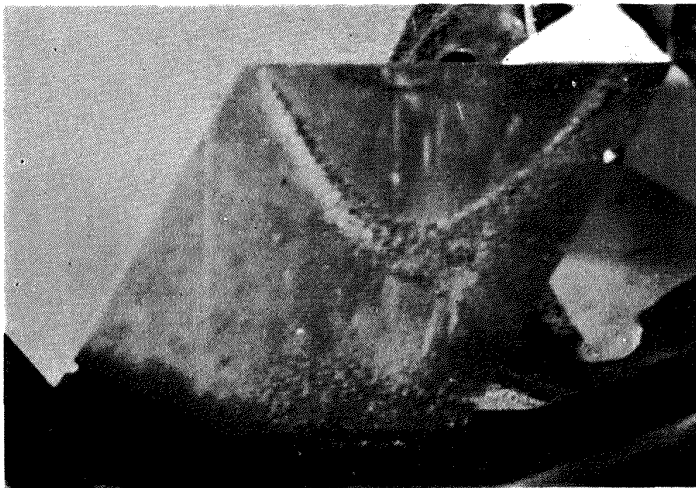
第10図(1) 正方形板 $\alpha=\beta=90^\circ$, $R=1$



第2モード 164c/s



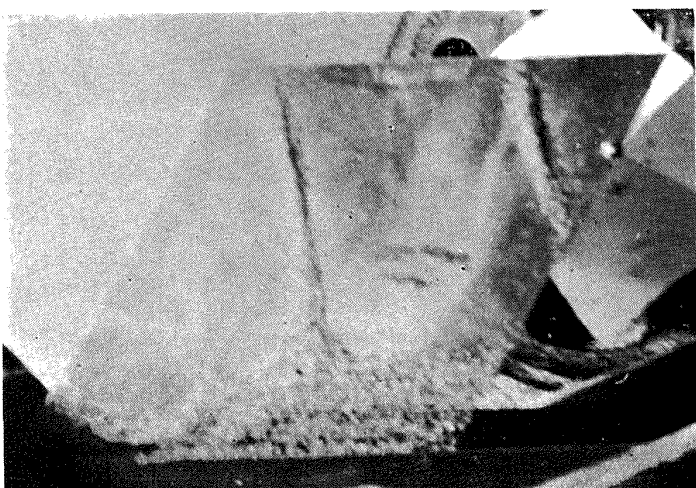
第5モード 720c/s



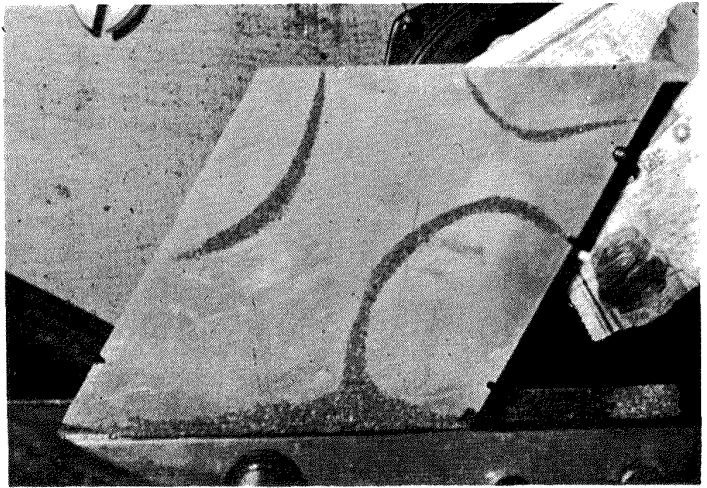
第3モード 460c/s



第6モード 900c/s



第4モード 480c/s

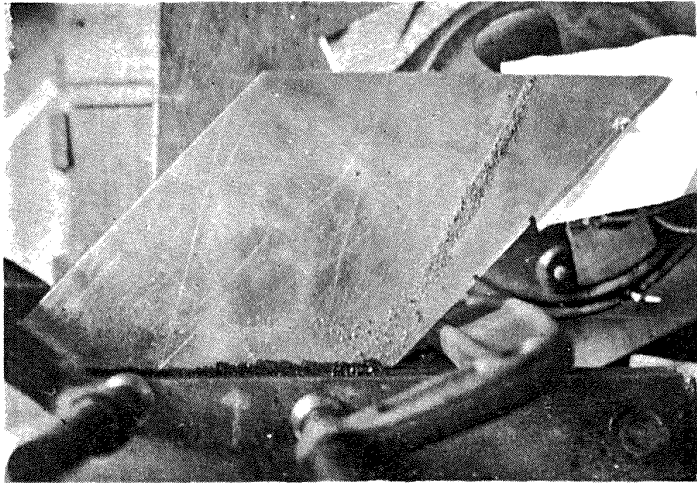
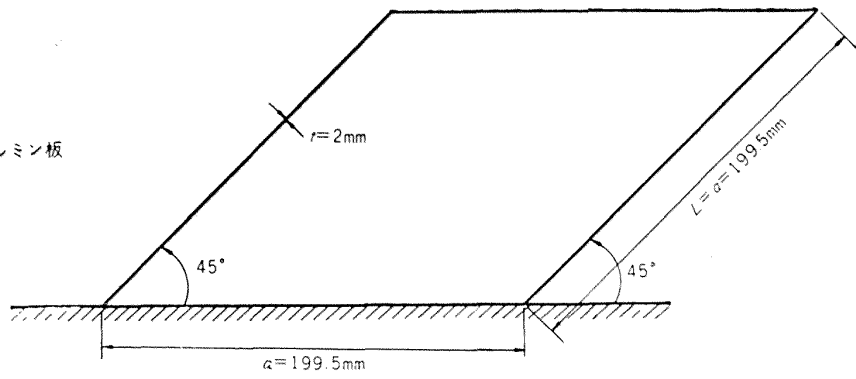


第7モード 1120c/s

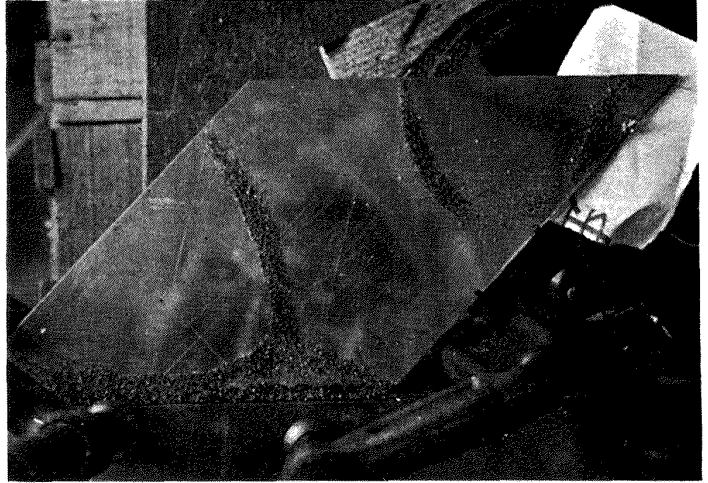
第10図(2) 平行四辺形板 $\alpha=\beta=60^\circ$, $R=1$

ジュラルミン板

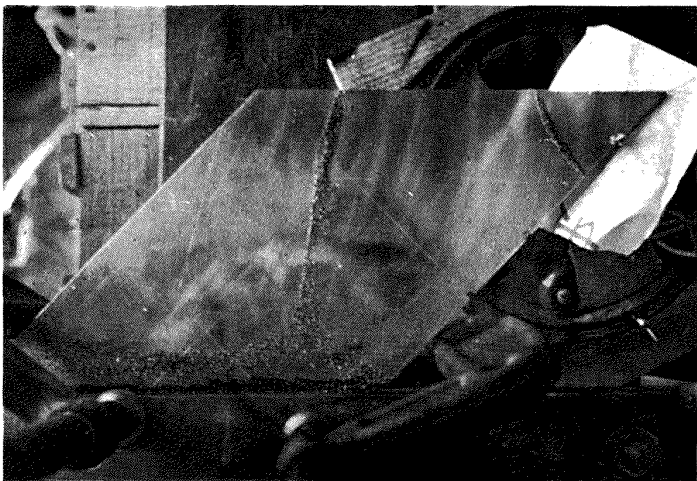
第1モード 51 c/s



第2モード 127.5 c/s



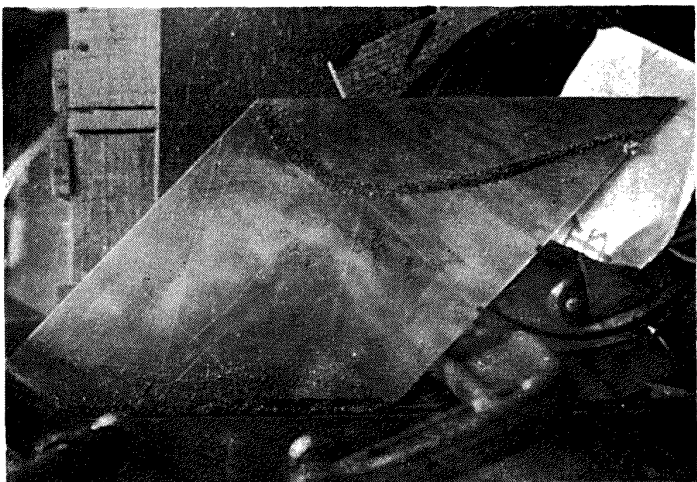
第5モード 580 c/s



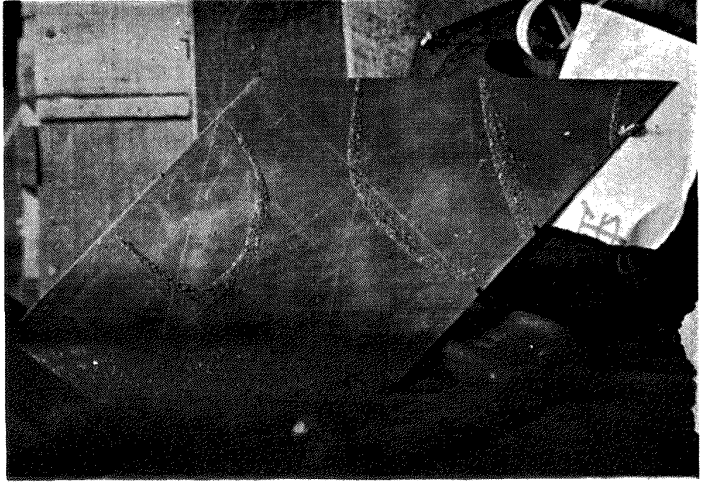
第3モード 305 c/s



第6モード 980 c/s

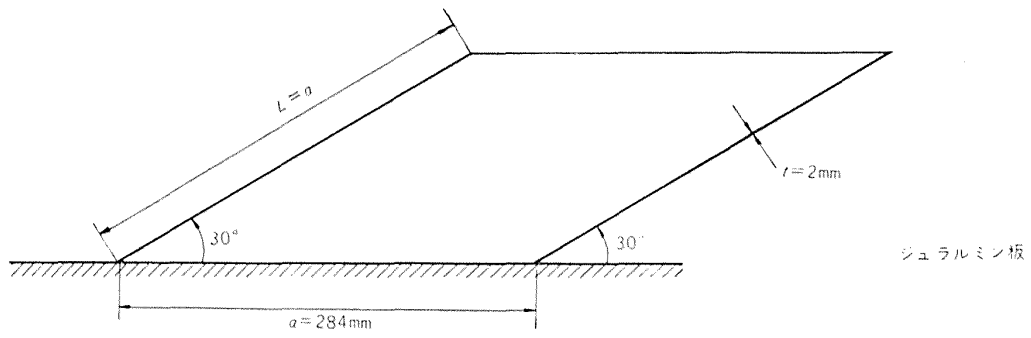


第4モード 370 c/s

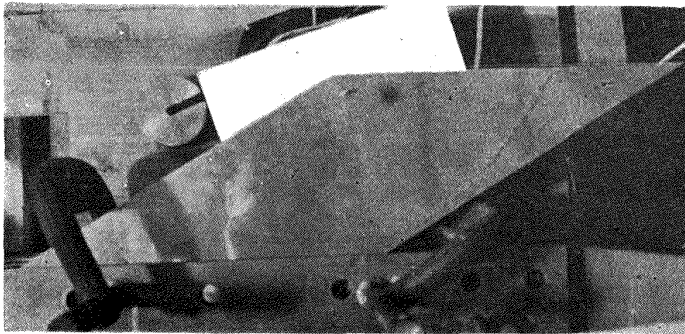


第7モード 1340 c/s

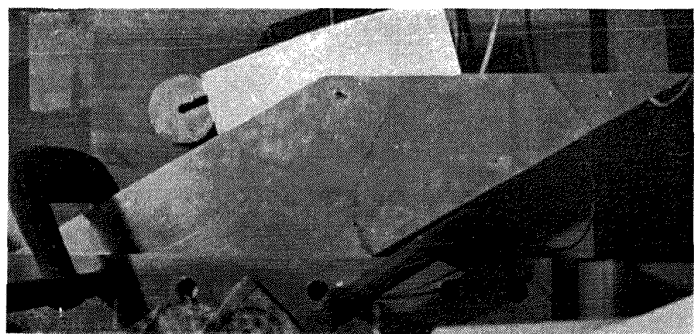
第10図(3) 平行四辺形板 $\alpha=\beta=45^\circ$, $R=1$



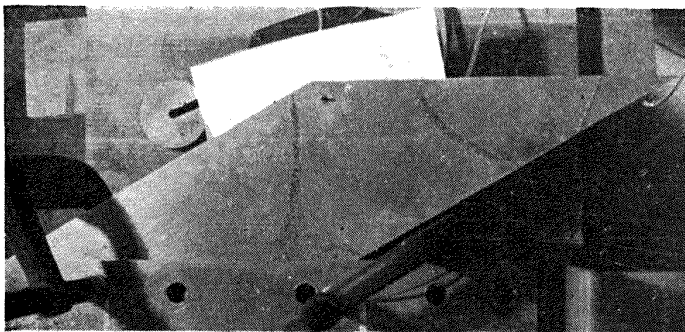
第1モード 31.8 c/s



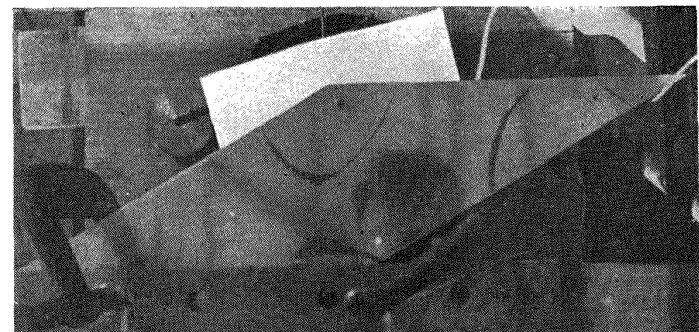
第2モード 270 c/s



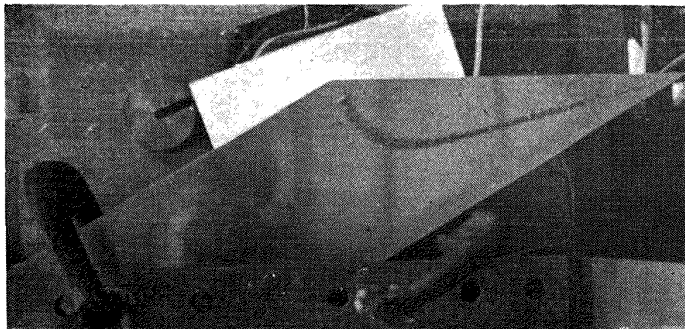
第5モード 352 c/s



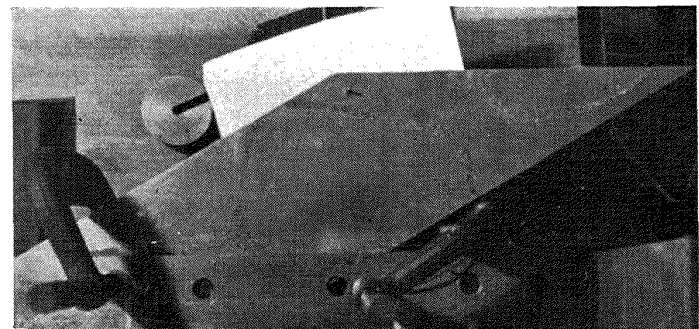
第3モード 179 c/s



第6モード 470 c/s

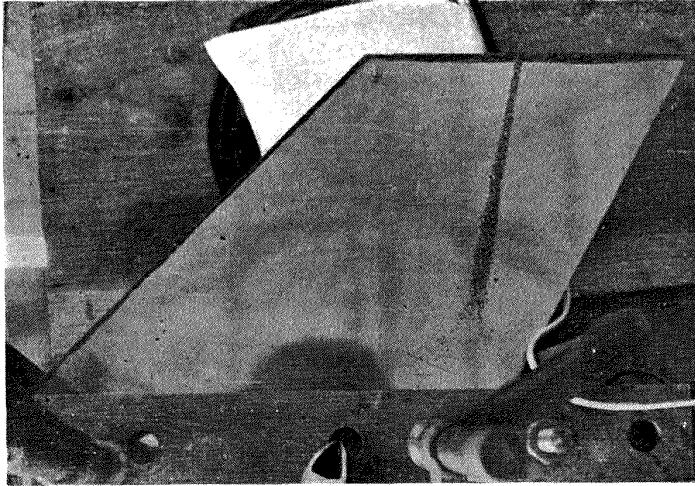
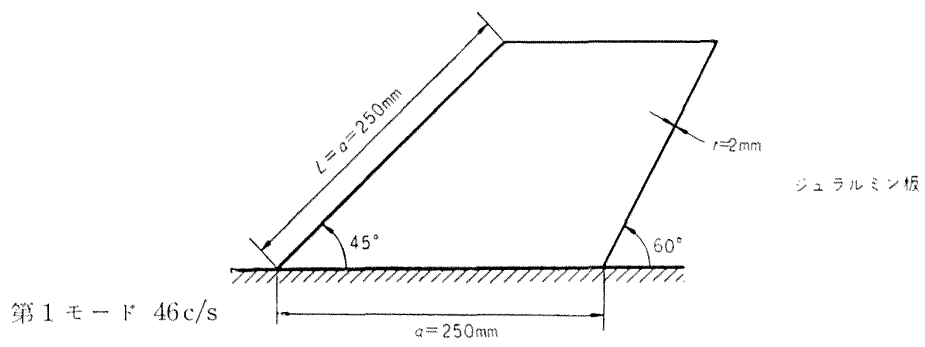


第4モード 270 c/s

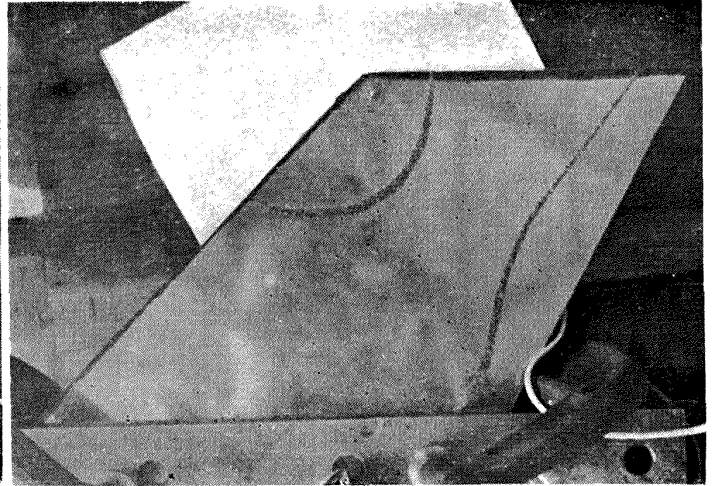


第7モード 610 c/s

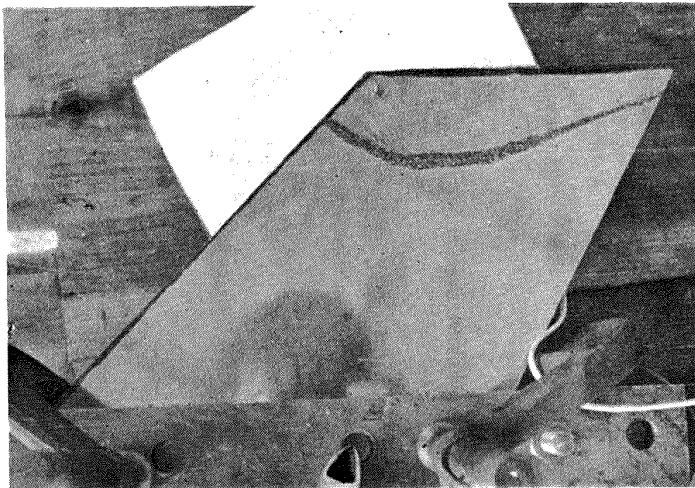
第10図(4) 平行四辺形板 $\alpha=30^\circ$, $\beta=30^\circ$, $R=1$



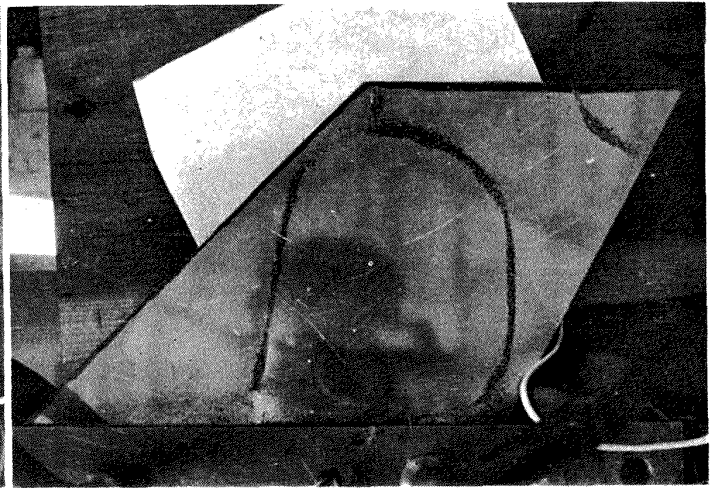
第2モード 112.5 c/s



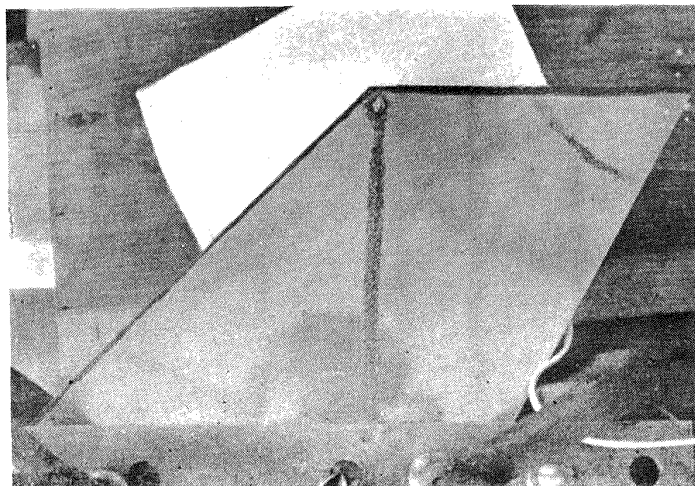
第5モード 510 c/s



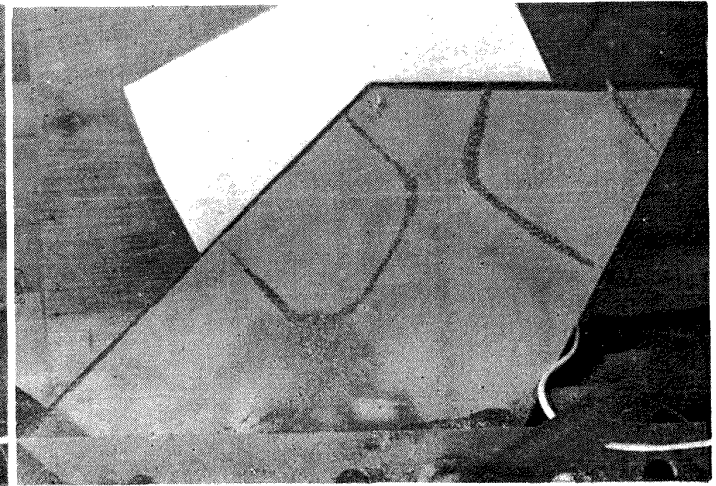
第3モード 284 c/s



第6モード 550 c/s

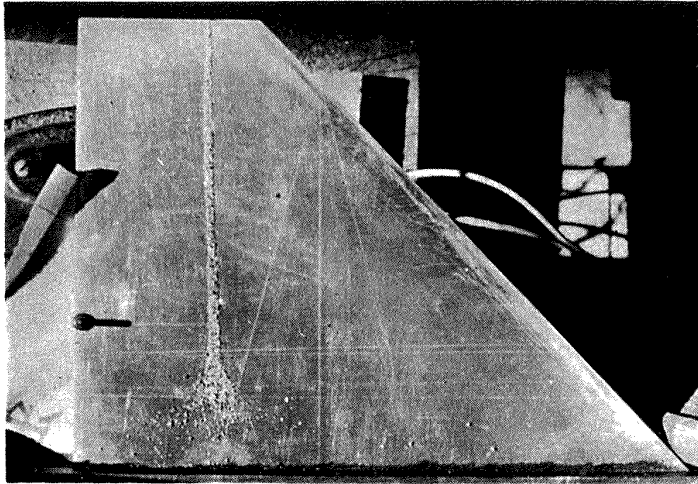
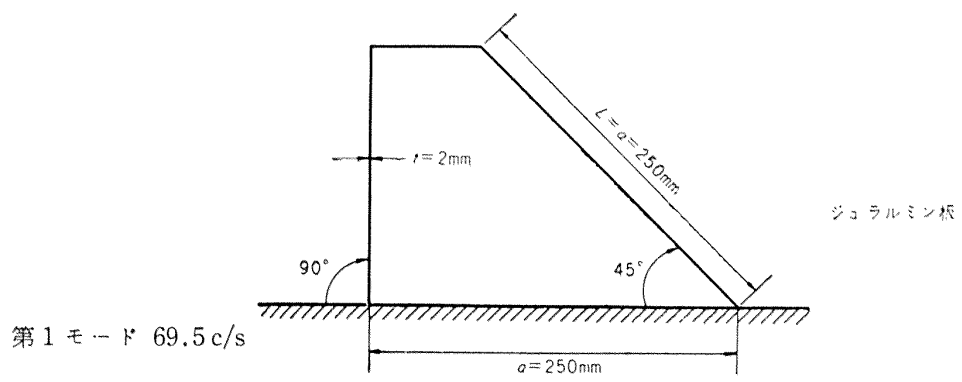


第4モード 308 c/s

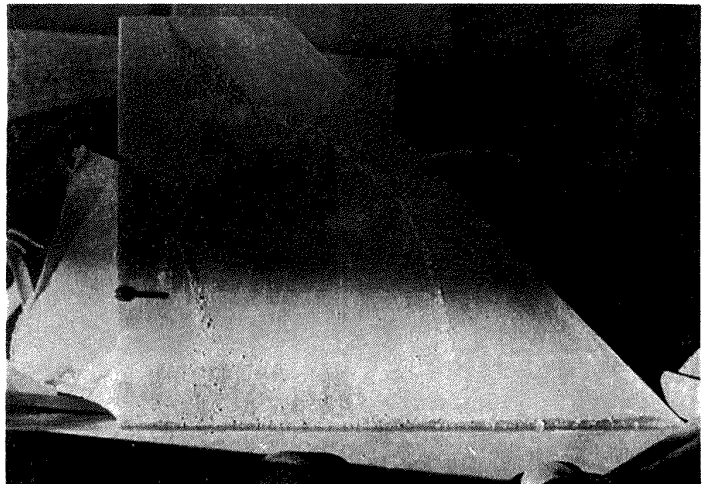


第7モード 780 c/s

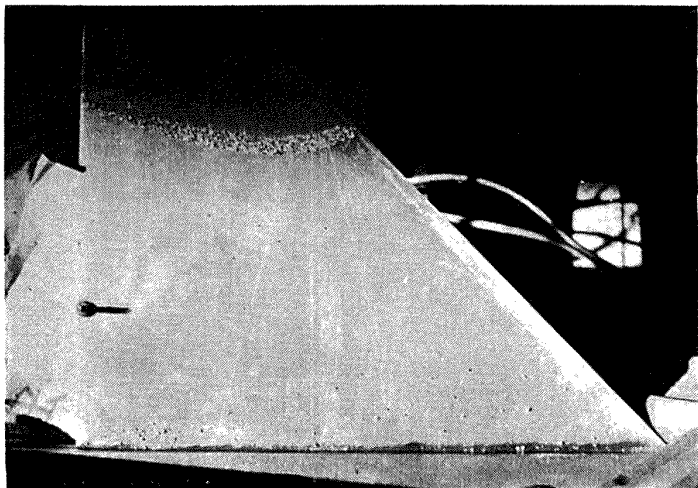
第10図(5) 梯形板 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $R = 1$



第2モード 215 c/s



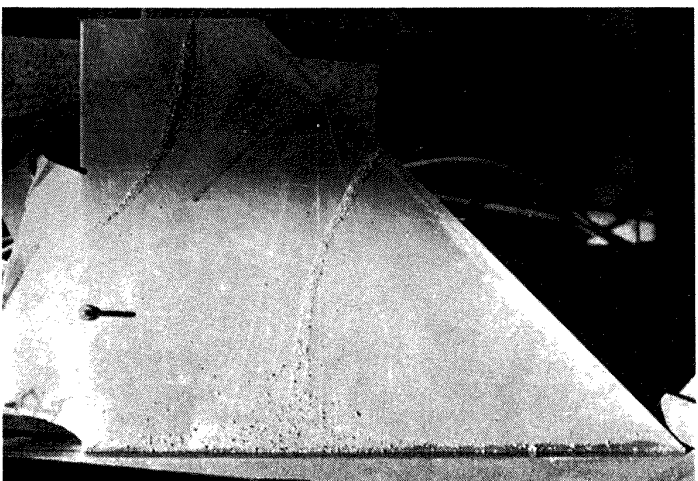
第5モード 720 c/s



第3モード 315 c/s

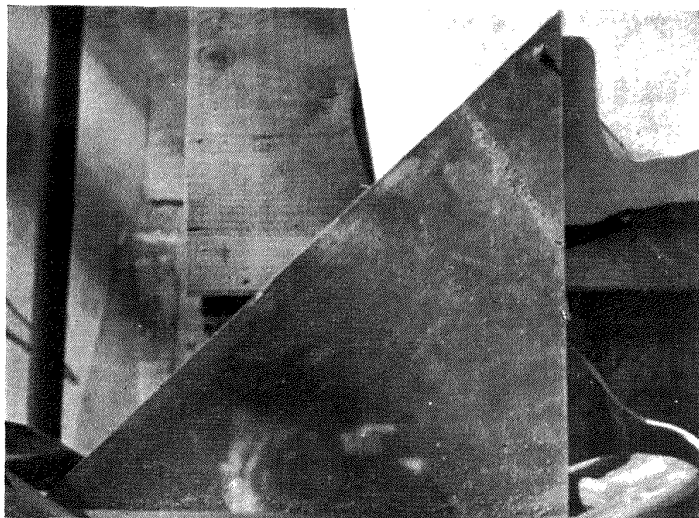
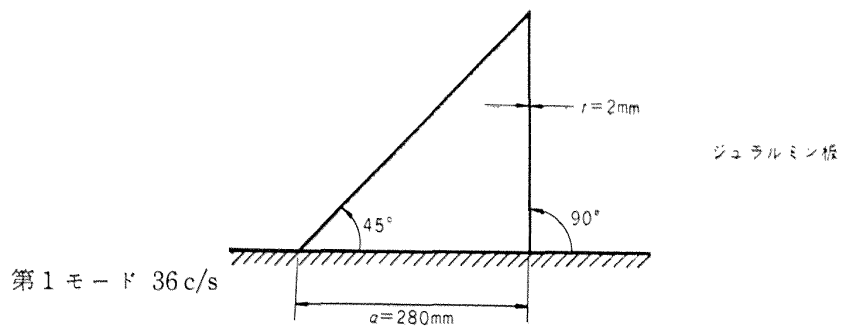


第6モード 890 c/s

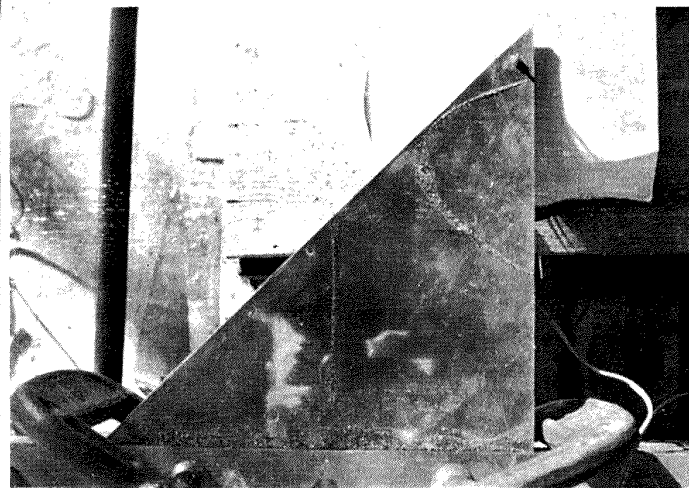


第4モード 522 c/s

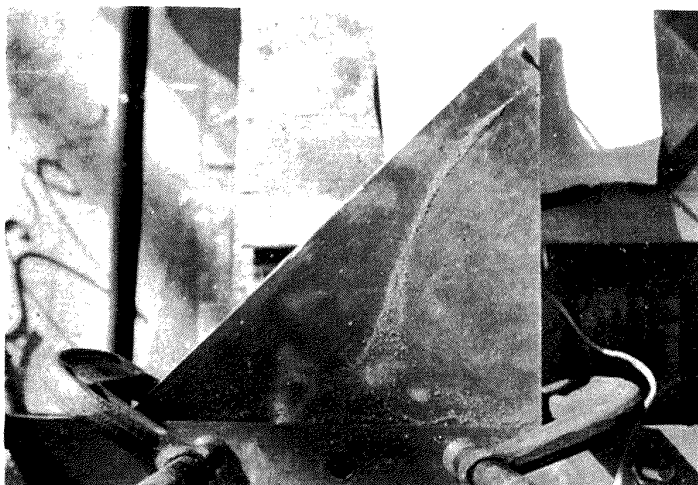
第10図(6) 梯形板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=90^\circ$, $R=1$



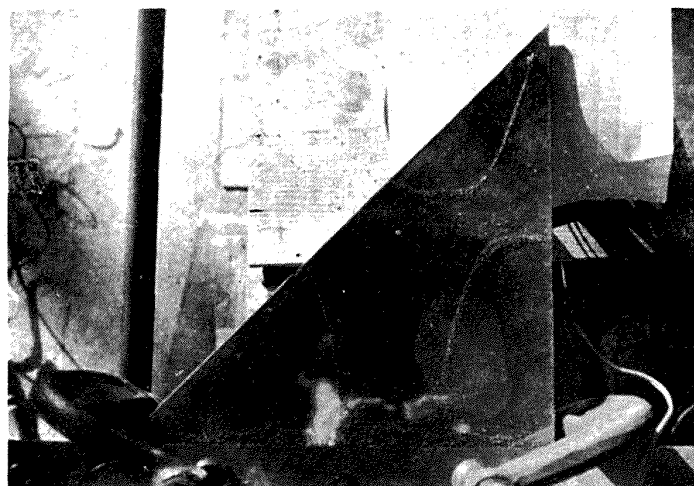
第2モード 138 c/s



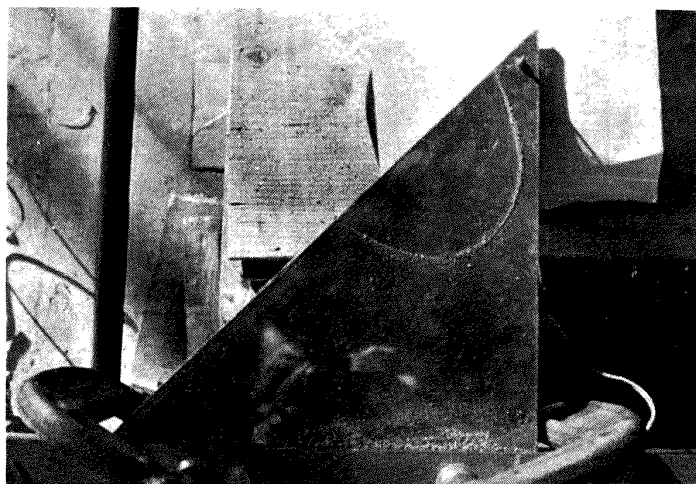
第5モード 460 c/s



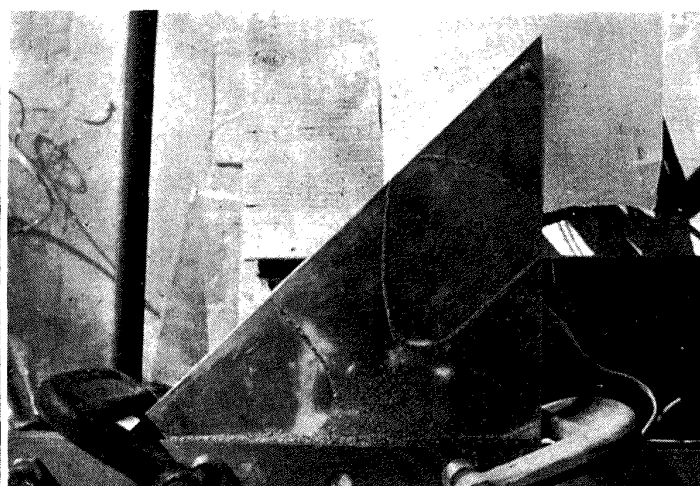
第3モード 198 c/s



第6モード 615 c/s

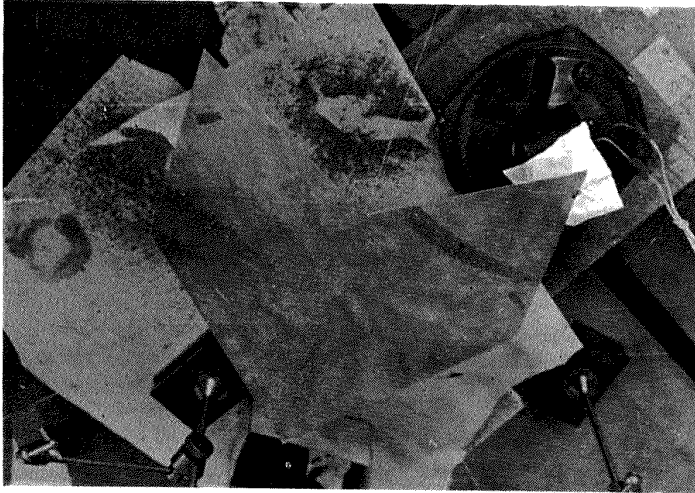
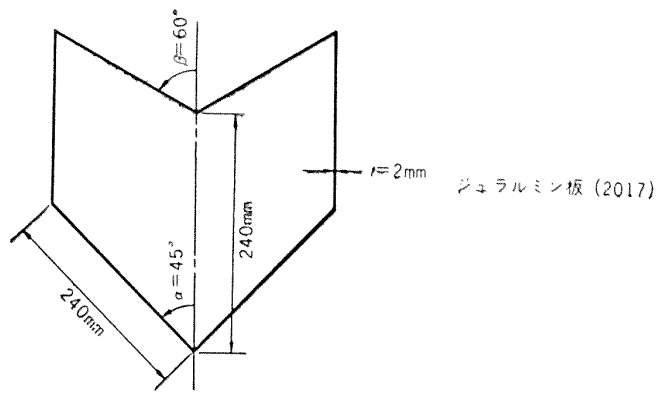


第4モード 340 c/s

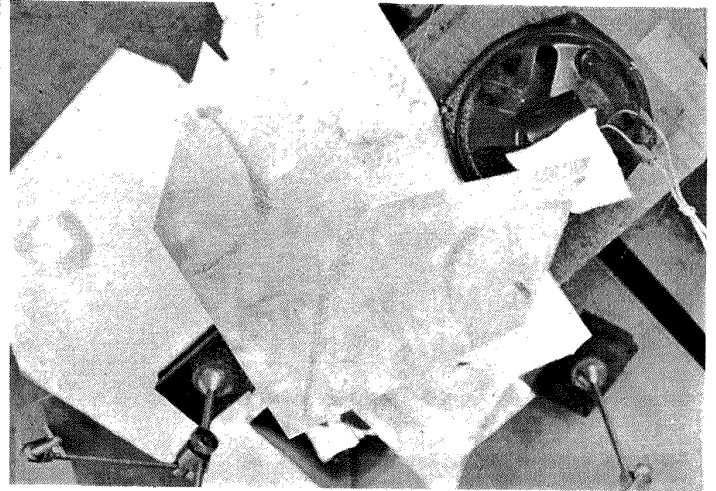


第7モード 825 c/s

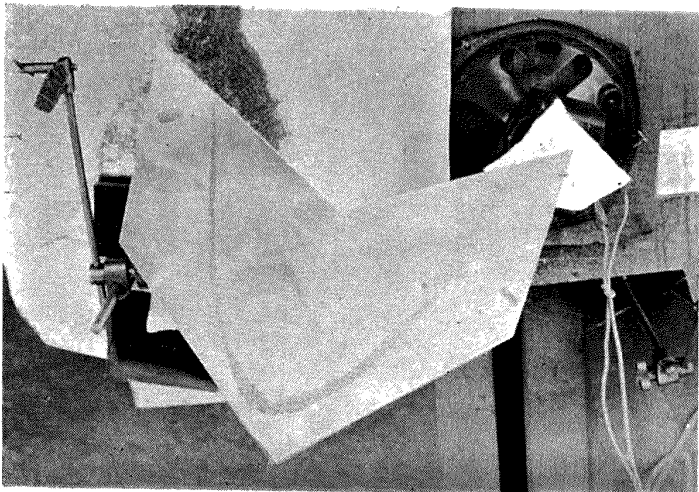
第10図(7) 三角形板 $\alpha=45^\circ$, $\beta=90^\circ$, $R=1/\sqrt{2}$



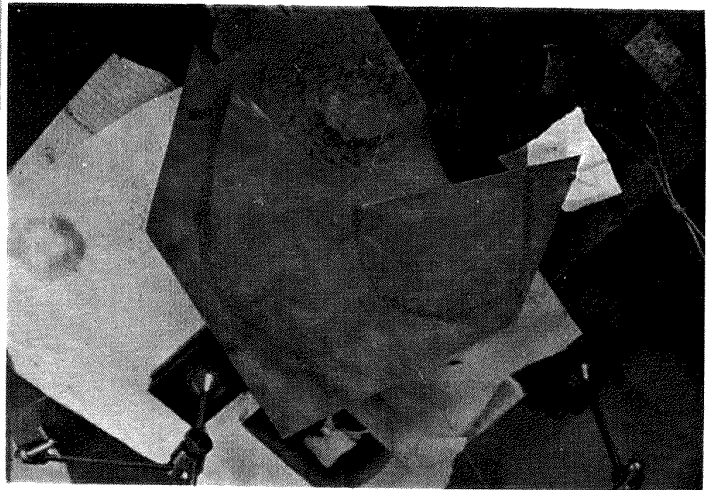
第4モード 84 c/s



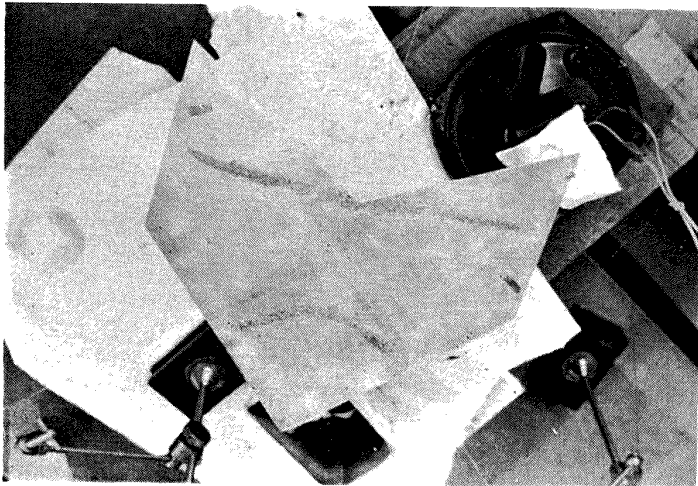
第7モード 240 c/s



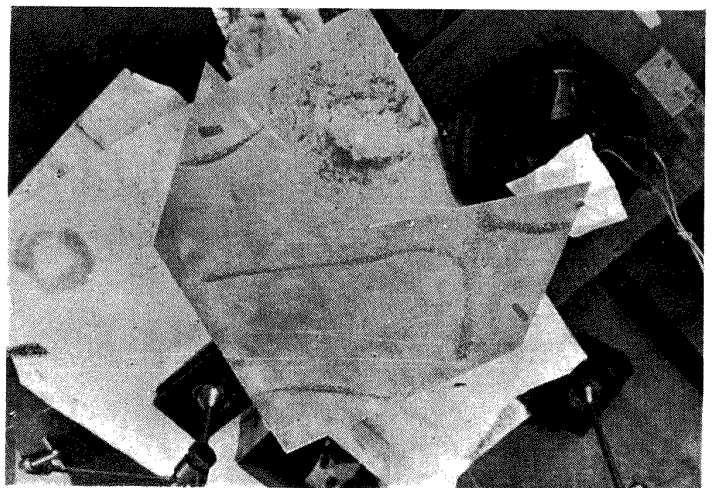
第5モード 108 c/s



第8モード 255 c/s

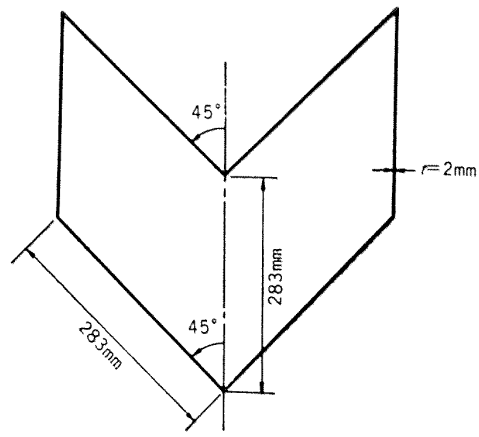


第6モード 128 c/s

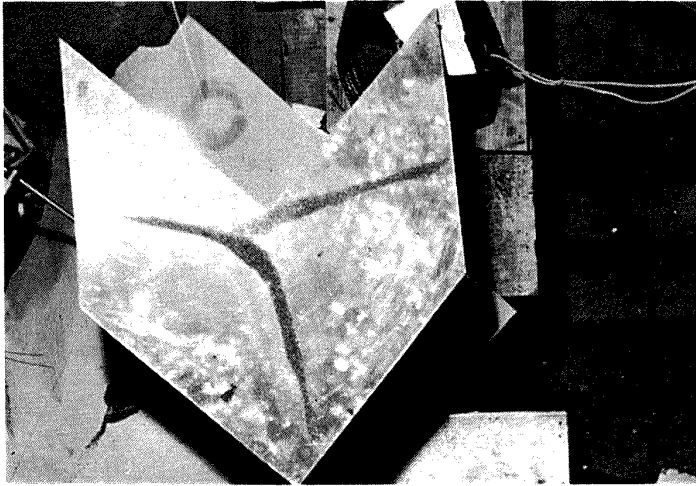


第9モード 285 c/s

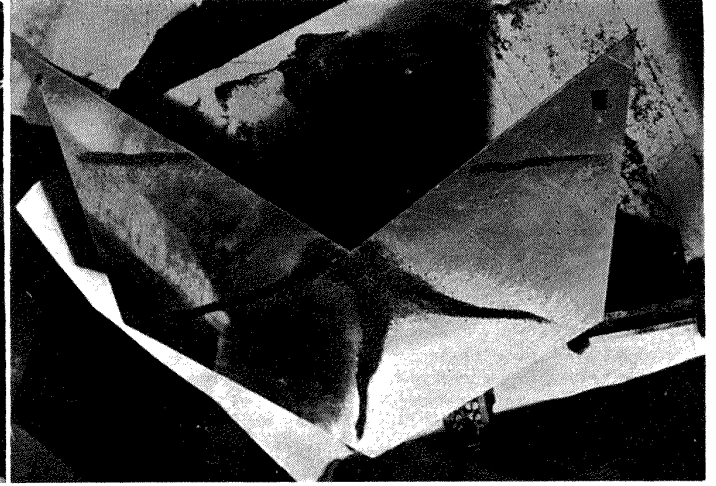
第10図(8) 周辺自由板 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $R = 1$



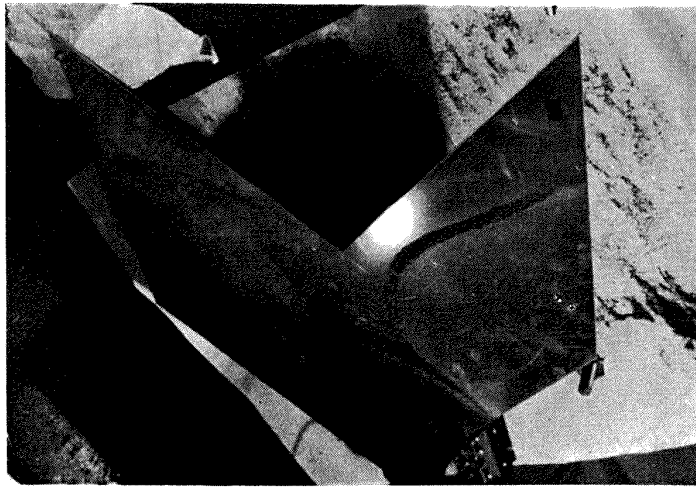
ジュラルミン板(2017)



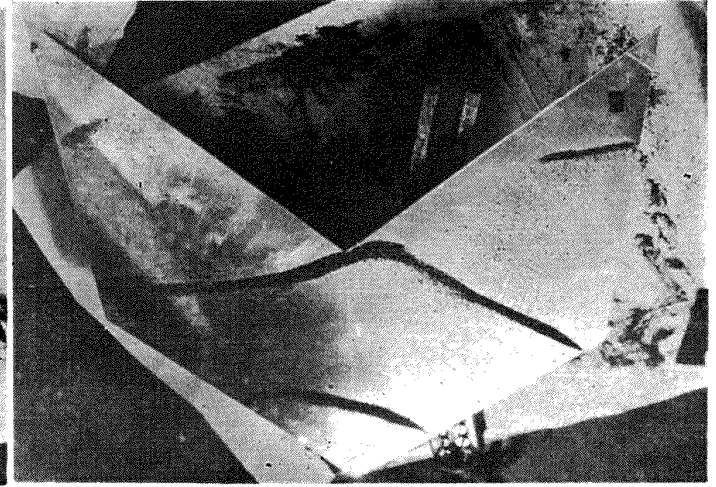
第4モード 44 c/s (宙吊り)



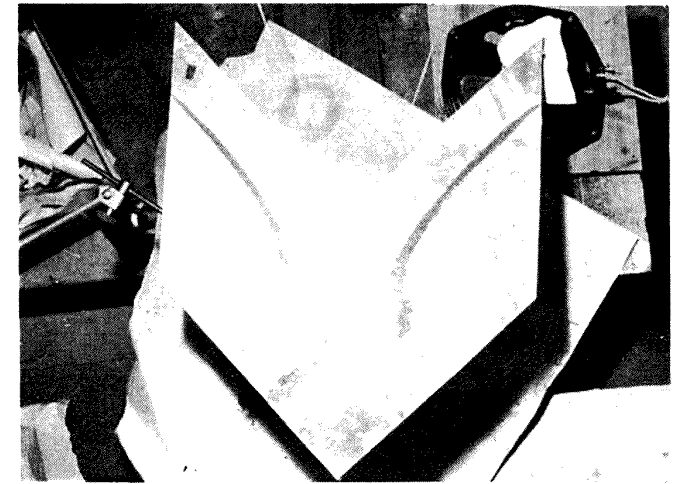
第7モード 125 c/s (ゴム支持)



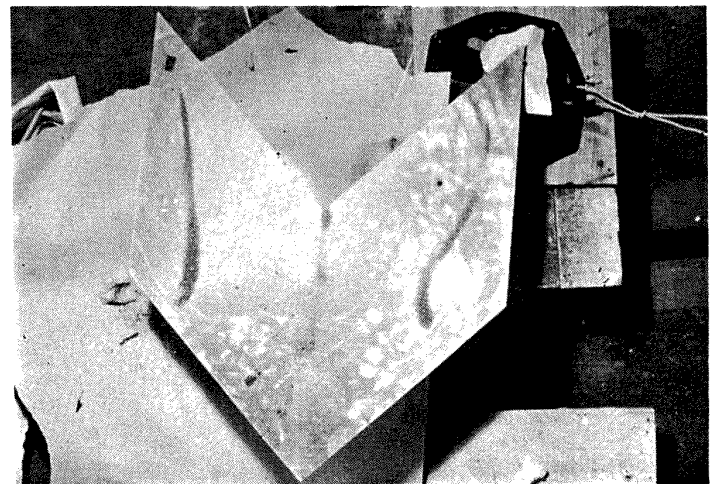
第5モード 68 c/s (宙吊り)



第8モード 150 c/s (ゴム支持)

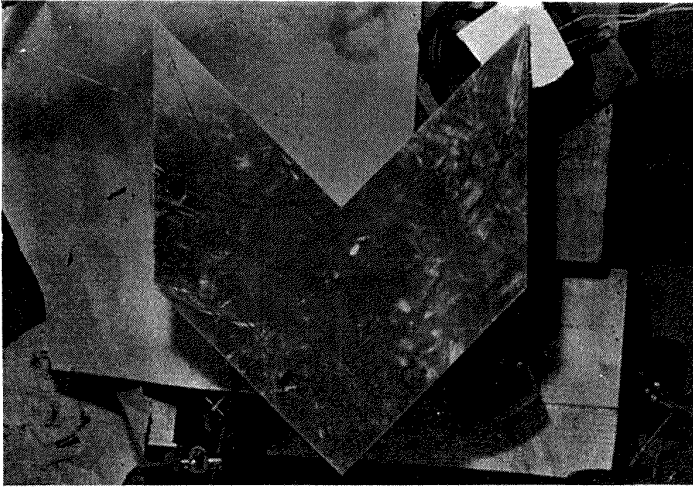


第6モード 72 c/s (宙吊り)

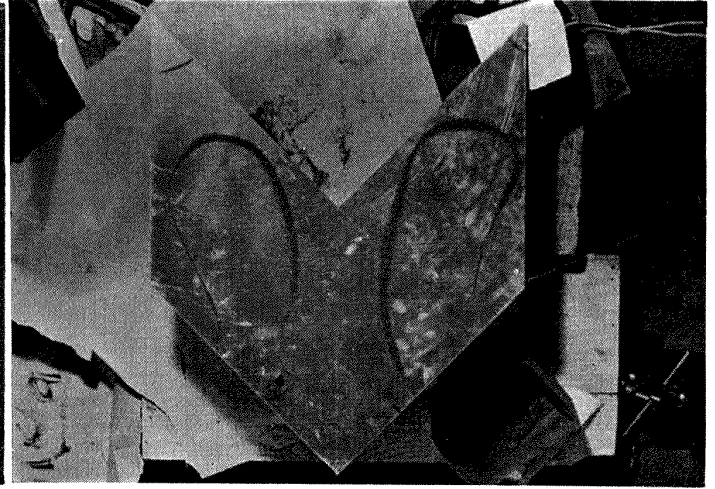


第9モード 160 c/s (宙吊り)

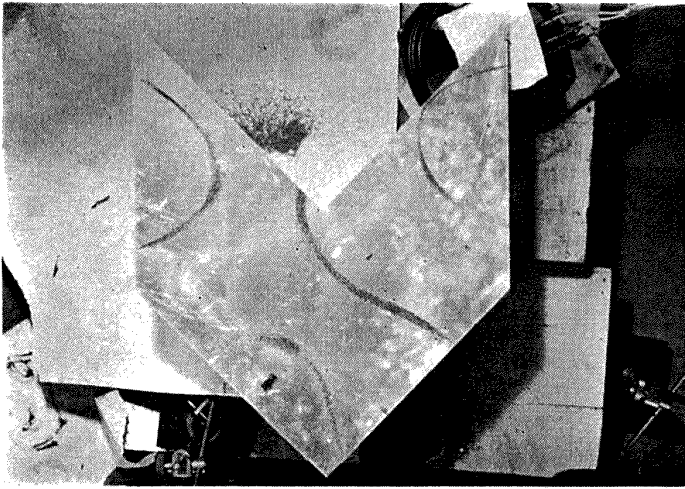
第10図 9-(1) 周辺自由板 $\alpha=\beta=45^\circ$, $R=1$



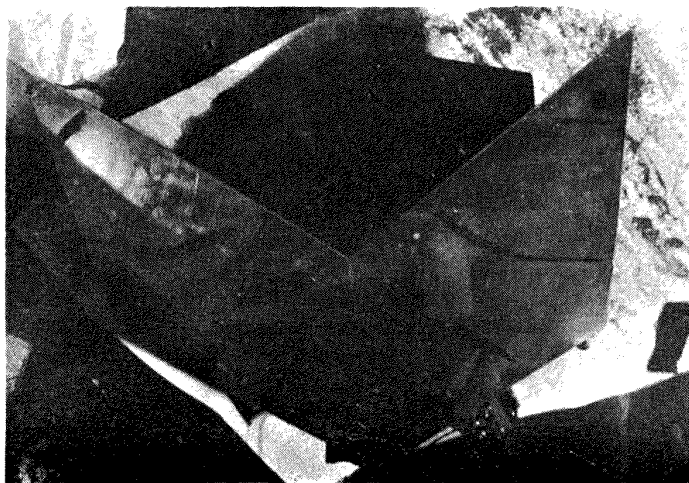
第10モード 230 c/s (宙吊り)



第13モード 450 c/s (宙吊り)



第11モード 240 c/s (宙吊り)



第12モード 260 c/s (ゴム支持)

第10図 9-(2) 周辺自由板 $\alpha=\beta=45^\circ$, $R=1$

NAL TR-30

航空技術研究所

平板翼の振動について

1962年10月 39頁

平行四辺形, 梯形および三角形など各種形状の平板翼の実用的な振動解析法を良く知られた "Rayleigh-Ritz" の方法を用いて展開した。すなわち, 与えられた平板の振動モード $W_0(x, y)$ を幾何学的境界条件 (片持板の場合の固定端, 周辺自由平板の場合には存在しない) だけでは完全に満足している x, y の一般的な冪級数で表示し, 自由辺の境界条件は変分学における, いわゆる "自然境界条件" になり, エネルギー最小の条件によって逐次近似的に満足されるということを意識的に利用して解析を行なった。

そして各種形状および大きさの平板翼についての解析結果を, 従来的の研究結果および簡単な振動試験結果と比較検討し十分実用性のあることを確認した。

I. 川井忠彦

堀武敏

戸川隼人

高橋利之

越出慎一

II. NAL TR-30

III. 534.12

629.13.014.3

NAL TR-30

航空技術研究所

平板翼の振動について

1962年10月 39頁

平行四辺形, 梯形および三角形など各種形状の平板翼の実用的な振動解析法を良く知られた "Rayleigh-Ritz" の方法を用いて展開した。すなわち, 与えられた平板の振動モード $W_0(x, y)$ を幾何学的境界条件 (片持板の場合の固定端, 周辺自由平板の場合には存在しない) だけでは完全に満足している x, y の一般的な冪級数で表示し, 自由辺の境界条件は変分学における, いわゆる "自然境界条件" になり, エネルギー最小の条件によって逐次近似的に満足されるということを意識的に利用して解析を行なった。

そして各種形状および大きさの平板翼についての解析結果を, 従来的の研究結果および簡単な振動試験結果と比較検討し十分実用性のあることを確認した。

NAL TR-30

航空技術研究所

平板翼の振動について

1962年10月 39頁

平行四辺形, 梯形および三角形など各種形状の平板翼の実用的な振動解析法を良く知られた "Rayleigh-Ritz" の方法を用いて展開した。すなわち, 与えられた平板の振動モード $W_0(x, y)$ を幾何学的境界条件 (片持板の場合の固定端, 周辺自由平板の場合には存在しない) だけでは完全に満足している x, y の一般的な冪級数で表示し, 自由辺の境界条件は変分学における, いわゆる "自然境界条件" になり, エネルギー最小の条件によって逐次近似的に満足されるということを意識的に利用して解析を行なった。

そして各種形状および大きさの平板翼についての解析結果を, 従来的の研究結果および簡単な振動試験結果と比較検討し十分実用性のあることを確認した。

I. 川井忠彦

堀武敏

戸川隼人

高橋利之

越出慎一

II. NAL TR-30

III. 534.12

629.13.014.3

NAL TR-30

航空技術研究所

平板翼の振動について

1962年10月 39頁

平行四辺形, 梯形および三角形など各種形状の平板翼の実用的な振動解析法を良く知られた "Rayleigh-Ritz" の方法を用いて展開した。すなわち, 与えられた平板の振動モード $W_0(x, y)$ を幾何学的境界条件 (片持板の場合の固定端, 周辺自由平板の場合には存在しない) だけでは完全に満足している x, y の一般的な冪級数で表示し, 自由辺の境界条件は変分学における, いわゆる "自然境界条件" になり, エネルギー最小の条件によって逐次近似的に満足されるということを意識的に利用して解析を行なった。

そして各種形状および大きさの平板翼についての解析結果を, 従来的の研究結果および簡単な振動試験結果と比較検討し十分実用性のあることを確認した。

I. 川井忠彦

堀武敏

戸川隼人

高橋利之

越出慎一

II. NAL TR-30

III. 534.12

629.13.014.3

I. 川井忠彦

堀武敏

戸川隼人

高橋利之

越出慎一

II. NAL TR-30

III. 534.12

629.13.014.3

TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠 境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン 要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の 計画と構造 Desing and Constraction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部

航空技術研究所報告 30 号

昭和 37 年 10 月 発行

発行所 航空技術研究所
東京都三鷹市新川 700
電話武蔵野 (0422) (3)5171 (代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53
