

UDC 534.11.

629.13.014.3

航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-31

熱応力を受ける薄翼の安定とその
微小振り振動について

川井忠彦・林 洋一・戸川隼人

1962年11月

航空技術研究所
NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|---|----------|---------------------------|
| TR- 1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験
Preliminary Investigation of N. A. L.
Transonic Wind-Tunnel Test-Section | 1960年2月 | 平木 一, 石井孝雄
大島信彦 |
| TR- 2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機
I. 模型送風機による性能試験
22.5 MW Main Blower for N. A. L.
Transonic Wind Tunnel
I. Performance Test of the Model
Blower | 1960年5月 | 山内正男, 松本正勝
塩入淳平, 富永守之 |
| TR- 3 | 風洞用角度計の試作実験
An Experiment on Angle Measuring
Instruments of Airplane Models in
Wind Tunnel Test | 1960年8月 | 小橋安次郎, 長洲秀夫
高島一明, 波木井潔 |
| TR- 4 | 回転円板の強度
Strength of Rotating Discs | 1960年9月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR- 5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音
速フラッタ試験設備の計画と整備試験
Design and Development of N. A. L.
60 cm×60 cm Transonic Blowdown
Wind Tunnel for Flutter Testing | 1960年12月 | 中井暎一, 橋爪 宏
中村泰治 |
| TR- 6 | 高温歪ゲージの温度特性
Temperature Characteristics of High
Temperature Strain Gage | 1960年12月 | 竹中幸彦 |
| TR- 7 | 遷音速風洞の測定部
On the Transonic Test Section | 1961年1月 | 村崎寿満 |
| TR- 8 | 繰返し荷重装置試験の予備試験
Preliminary Study for Development
of Repeated Load Testing Rigs
for Full-Scale Aircraft Structures | 1961年3月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR- 9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance
Theory of Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory | 1961年3月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger
Compressor Blades | 1961年3月 | 松本正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild
Steel | 1961年4月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-12 | 薄肉開断面梁の自由振動について
On the Natural Vibration of Thin-
Walled Beams of Open Cross
Section | 1961年5月 | 川井忠彦, 埴 武敏 |
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての
実験的研究
Experimental Results of the Inter-
action between Shock Wave and
Turbulent Boundary Layer | 1961年7月 | 須郷道也, 伝田幸雄 |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層
On Compressible Boundary Layer
in Magnetodynamics | 1961年7月 | 須郷道也, 小沢五郎 |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・較正
Miniature Pressure Pickups for Measuring
the Pressure on Oscillating Airfoils in
Supersonic Flow | 1961年8月 | 石井孝雄, 柳沢三憲 |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題
の差分法による数値解法
On the Difference Method Solutions of the
Mixed Boundary Value Problems of Parabolic
Partial Differential Equations | 1961年11月 | 樋口一雄, 三好 甫 |
| TR-17 | 荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察
A Theoretical Comment on the Charge-
Beam Method of Measuring Gas Density | 1961年12月 | 和田 勇, 細川 巖
三好 甫 |
| TR-18 | 前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の
二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較
Comparison of Inlet Guide Vane and High
Stagger Compressor Blade Performance
in a Rotor and in Cascade | 1961年11月 | 松本正勝 |
| TR-19 | 高速翼車の回転強度
Strength of High-Speed Rotor | 1961年12月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |

熱応力を受ける薄翼の安定とその 微小振り振動について*

川井忠彦**・林 洋一**・戸川隼人***

On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress

By Tadahiko KAWAI, Yoichi HAYASHI & Hayato TOGAWA

Based on the finite deformation theory, the combined effect of thermal stresses and initial twist on the torsional stiffness of a long thin wing is studied in this paper. The stability as well as the small torsional vibration around the stable equilibrium position are discussed in detail with several numerical examples.

I. 結 論

高速で濃密な大気中を飛行する航空機は空気の摩擦抵抗に基づく空力加熱により温度が上昇し、ために機体の構造強度上いろいろの好ましからぬ影響を受ける。その主要な影響をあげると、

- (1) 高温における材料の機械的性質の劣化
- (2) 不均一温度分布によって発生する熱応力に起因する機体剛性の低下

の二つに大きく分けられる。

ここに取り上げた問題は第二の問題の代表的なもので薄翼の翼弦方向に生ずる熱応力が翼の振り剛性を低下させ、ついには熱的に不安定となる現象である。この問題は約10年前から、アメリカ、イギリス等の多くの航空機構造の専門家の間で活発に研究が行なわれ^{(1)~(5)}、わが国でもすでに二三の研究^{(6)~(7)}がなされているが、その大部分のものが板の有限変形理論を基にしているので理論解析が相当に複雑である。筆者らはこの問題を板の曲げ理論より簡単な梁の有限変形理論の立場から考察してその安定を支配する基礎方程式を導き、安定条件と初期振りとの関係、さらに安定平衡点の周りの微小振り振動について研究して従来の研究結果と同じような議論が成立することを確認したので報告する次第である。

II. 理論的解析法

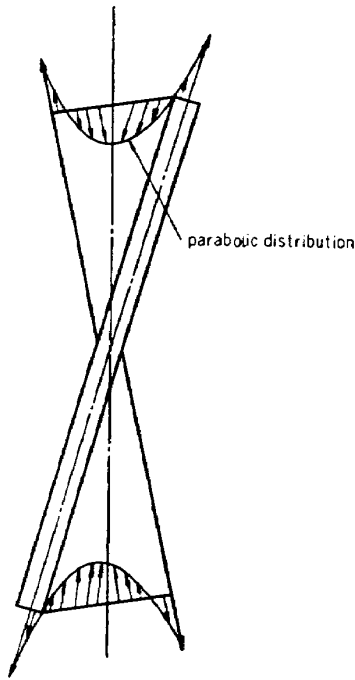
簡単のため薄翼の縦横比は十分大きく（実用上は $L/b > 3$ であればよい）、翼の付け根と先端

* 昭和 37 年 10 月 24 日受付

** 機体部

*** 計測工務部

付近の境界の影響は小さくて良く知られた St. Venant の棒の捩り理論が適用できるものとする。St. Venant の棒の捩り理論は捩り角が微小な間は任意の二断面間の距離は変わらないという仮定の上



第1図 薄い矩形断面棒を大きく捩った場合に生ずる軸応力の分布

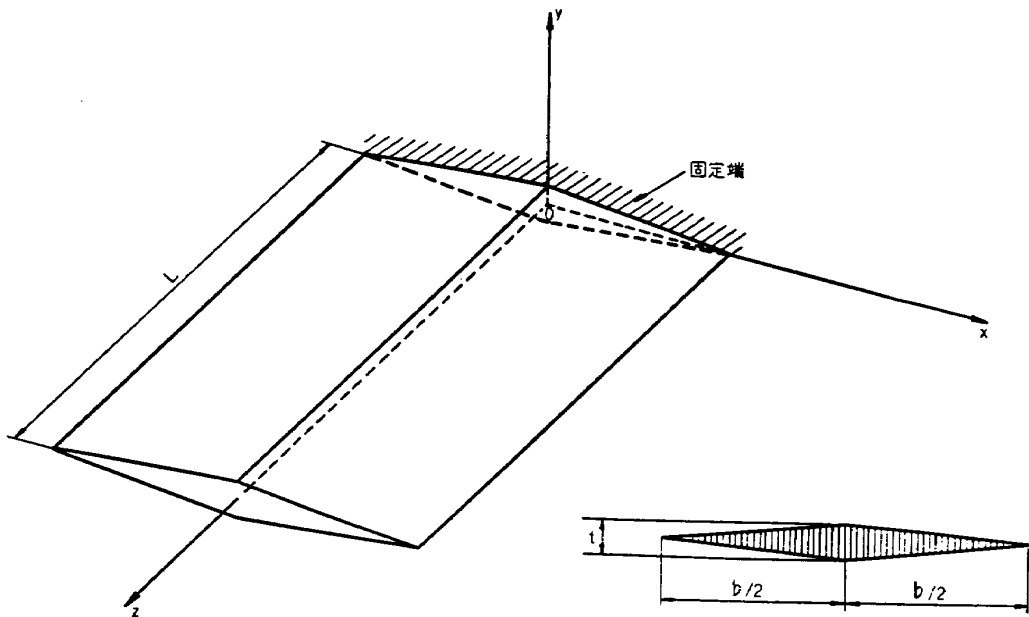
上に立っているが捩りが大きくなると断面内に生ずる最大剪断応力が相当大きなものとなり、したがって断面間の距離の変化が無視できなくなる(第1図)。この問題に関しては Timoshenko, Goodier を始めとして多くの研究者が研究を行っており、理論と実験の良好な一致も確認されている^{(8)~(10)}。

そこでわれわれも有限変形理論に立脚して St. Venant の捩り理論の修正を試みる。

薄翼の断面は二軸対称であるとし、その図心軸に沿って第2図のごとく z 軸をとる。 x, y 軸は z 軸と右手系を形成するようにとるものとする。また、断面の回転角 φ および初期捩り角 φ_i は右ネジの規則に従った符号をとるものとする。St. Venant の棒の捩り理論に従って $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, $\theta_i = \frac{d\varphi_i}{dz}$ は一定と考えて議論を進めることにする。

いま、任意の断面上における或る点 (x, y) の初期変位を u_i, v_i とし、外部から力を受けて回転した場合の同じ点の変位を u, v とすれば、次のような幾何学的関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} u &= x \cos(\varphi + \varphi_i) - y \sin(\varphi + \varphi_i) - x \\ v &= x \sin(\varphi + \varphi_i) + y \cos(\varphi + \varphi_i) - y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$



第2図 薄翼の捩りの解析に使用する座標軸と断面寸法

$$\left. \begin{aligned} u_i &= x \cos \varphi_i - y \sin \varphi_i - x \\ v_i &= x \sin \varphi_i + y \cos \varphi_i - y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また、薄翼が振られることによって発生する断面の縦方向の歪 ε_z を次のようにとる。

$$\varepsilon_z = \varepsilon + \frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (3)$$

ここに ε は断面力の平衡条件から要求される平均の圧縮歪で、第二項は振りが大きくなったために考慮すべき断面の二次歪である。

(1), (2) 式を (3) に代入してその右辺を計算してみると、

$$\varepsilon_z = \varepsilon + r^2 \left(\frac{1}{2} \theta^2 + \theta_i \theta \right) \dots\dots\dots (4)$$

ここに

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{d\varphi}{dz}, & \theta_i &= \frac{d\varphi_i}{dz}, \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

したがって、縦方向の直応力 σ_z は

$$\sigma_z = \varepsilon_z E = E \left[\varepsilon + r^2 \left(\frac{1}{2} \theta^2 + \theta_i \theta \right) \right] \dots\dots\dots (5)$$

となる。

ところが、いまわれわれは棒の純振り状態を考えているから、どの断面をとってもその上に軸力が発生してはならない。すなわち

$$\int \sigma_z dA = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(また $\int \sigma_z x dA = 0$, $\int \sigma_z y dA = 0$, すなわち断面に曲げモーメントが生じないという条件は断面および σ_z の二軸対称性から必然的に満足されている。)

(5), (6) 式より

$$\begin{aligned} \varepsilon A + I_p \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta_i \theta \right) &= 0 \\ \varepsilon &= -r_0^2 \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta_i \theta \right) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} A &= \int dA && \text{(薄翼の断面積)} \\ I_p &= \int r^2 dA && \text{(薄翼の極慣性能率)} \\ r_0^2 &= \frac{I_p}{A} && \text{(薄翼の極慣性半径)} \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{図心 } 0 \text{ より面積要素 } dA \text{ までの距離の自乗})$$

(7) 式を (5) 式に代入すれば

$$\sigma_z = E(r^2 - r_0^2) \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta_i \theta \right) \dots \dots \dots (8)$$

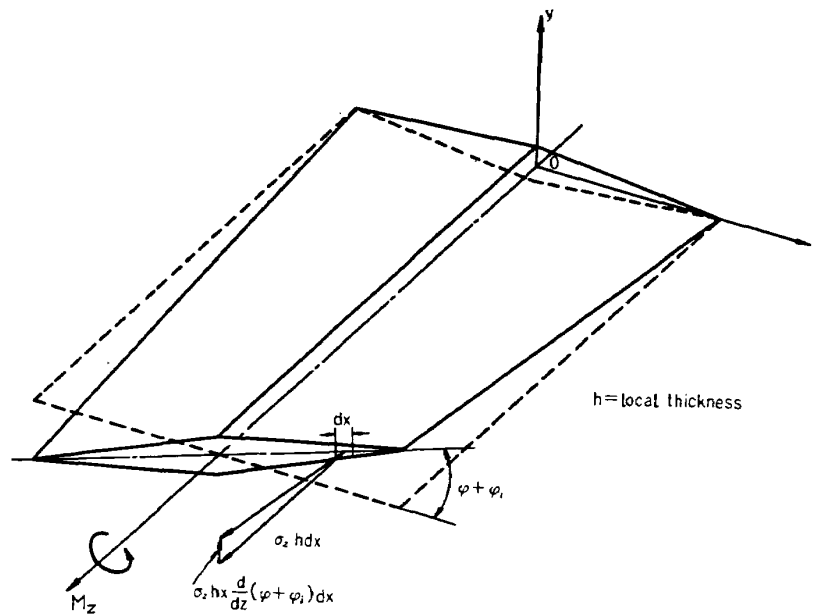
(8) 式は薄翼が大きく振られた場合に任意の断面上に発生する直応力の分布を示し、図心 0 の付近では圧縮、前後縁の近くで引張となる放物線状分布を表わしている (第 1 図参照)。

いま、(8) 式で与えられる直応力の外に空力加熱によって x 軸に関して対称な熱応力 σ_t^* が生じているものとすれば (8) 式の代わりに

$$\sigma_z = \sigma_t + E(r^2 - r_0^2) \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta_i \theta \right) \dots \dots \dots (9)$$

を用いることになる。

この応力の方向は xz 平面と $(\theta + \theta_i)r$ だけ傾いているから、 z 軸に垂直な成分 $\sigma_z(\theta + \theta_i)r dA$ の力を生ずる (第 3 図)。



第 3 図 薄翼の振りにおいて軸応力 σ_z の作る付加振りモーメント ΔM_z

したがって、この直応力の作る付加振りモーメント ΔM_z は次のごとく与えられる。

$$\Delta M_z = \int \sigma_z r^2 (\theta + \theta_i) dA$$

(9) 式を上式に代入して計算を遂行すれば

* 二次元対称断面翼が空力加熱を受ける場合、その翼弦方向に生ずる温度分布はほぼ中心に対して対称な放物線に近い曲線となることが実験的にも理論的にもわかっている。すなわち、前後縁で温度が最も高く、中心で最も低い。したがって、このような不均一温度分布によって翼の弦長方向に両縁で圧縮、中央で引張りとなる軸方向の熱応力が発生することになる。この熱応力と温度分布、したがって、空力加熱との量的関係についてはここでは触れない。

$$\Delta M_z = I(\theta + \theta_i) + EA(R^4 - r_0^4)(\theta + \theta_i) \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta_i \theta \right) \dots \dots \dots (10)$$

ここに

$$I = \int \sigma_i r^2 dA, \quad AR^4 = \int r^4 dA$$

(10) 式を加えた薄翼のトルクと振れ率の関係は次のごとくなる。

$$M_z = M_z^{(0)} + \Delta M_z$$

$$M_z = GK\theta + I(\theta + \theta_i) + EA(R^4 - r_0^4) \left(\theta_i^2 \theta + \frac{3}{2} \theta_i \theta^2 + \frac{\theta^3}{2} \right)$$

あるいは

$$M_z = (GK + I + EJ\theta_i^2)\theta + \frac{3}{2} EJ\theta_i \theta^2 + \frac{1}{2} EJ\theta^3 + I\theta_i \dots \dots \dots (11)$$

ここに

$$M_z^{(0)} = GK\theta$$

$$J = \int r^2 (r^2 - r_0^2) dA$$

また、単位長さ当りの薄翼が有するポテンシャルエネルギーを $U(\theta)$ とすれば

$$U(\theta) = \int M_z d\theta = \frac{1}{2} (GK + I + EJ\theta_i^2) \theta^2 + \frac{1}{2} EJ\theta_i \theta^3 + \frac{1}{8} EJ\theta^4 + I\theta_i \theta \dots \dots \dots (12)$$

上に導いた (11) 式および (12) 式が初期振りを有する薄翼が熱応力の作用を受けて振れる場合の挙動を支配する基礎式であり、多くの研究者によって導出された式と本質的には同じである。

(11) 式は外部トルク M_z と振り角 θ との相関々係を示す式で θ に関し一般に三次方程式である。

この式の特性を調べるために次のごとく変形する。

$$\frac{M_z}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = -\lambda \theta_i + \left(1 - \lambda + \frac{1}{k} \theta_i^2 \right) \theta + \frac{3}{2k} \theta_i \theta^2 + \frac{1}{2k} \theta^3 \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{U(\theta)}{GK} = -\lambda \theta_i \theta + \frac{1}{2} \left(1 - \lambda + \frac{1}{k} \theta_i^2 \right) \theta^2 + \frac{1}{2k} \theta_i \theta^3 + \frac{1}{8k} \theta^4 \dots \dots \dots (14)$$

ここに

$$\lambda = -\frac{I}{GK}, \quad k = \frac{GK}{EJ}$$

さて、空力加熱によって薄翼内に生ずる熱応力の分布は一般に図心の近傍において引張り、前後縁の近くで圧縮となり、かつ x 軸に関し対称な応力分布となるから一般に次の量

$$I = \int \sigma_i r^2 dA$$

は負となり、 λ は正の量となる。したがって、(13) 式の係数の符号は

$$\theta^3 \text{ の係数: } \frac{1}{2k} > 0$$

$$\theta^2 \text{ の係数: } \frac{3}{2k} \theta_i \geq 0$$

$$\theta \text{ の係数: } \left(1 - \lambda + \frac{1}{k} \theta_i^2\right) \quad \lambda, k, \theta_i \text{ の関係で正にも負にもなる。}$$

$$\text{常数項: } -\lambda \theta_i \leq 0$$

となる。

このような係数をもつ三次式は一般に次の性質をもつ (第 4 図)。

- (a) この三次式を $=0$ と置いた方程式 (すなわち $U'(\theta)=0$) は常に唯一箇の正根 (ノンネガティブな根) θ_0 をもつ
- (b) この点 $\theta=\theta_0$ において微分は正, したがって $U''(\theta_0)>0$ となる
- (c) 負根を有する条件は

$$D \equiv -4[2k(1-\lambda) - \theta_i^2]^2 + 27k^2 \theta_i^2 \geq 0$$

- (d) 曲線のグラフは $M_z/GK = -\theta_i$, $\theta = -\theta_i$ なる点に関して対称である
- (e) $2k(1-\lambda) - \theta_i^2 \leq 0$ ならば単調増加, $2k(1-\lambda) - \theta_i^2 > 0$ ならば極小点をもつ

(a) はデカルトの符号法則による (第 1 表)。(b) は正根が唯一箇で最高次の係数が正であるから当然である。(c) は三次方程式の判別式により明らかで、(d) は (13) 式を

$$\frac{M_z}{GK} - \theta_i = \left(\frac{M_z}{GK}\right)^*$$

$$\theta - \theta_i = \theta^*$$

なる一次変換で平行移動させると

$$\left(\frac{M_z}{GK}\right)^* = \left(1 - \lambda - \frac{1}{2k} \theta_i^2\right) \theta^* + \frac{1}{2k} \theta^{*3} \dots\dots\dots (15)$$

となり θ^* の奇函数になるからである。(e) はこの式から簡単に得られる (第 4 図)。

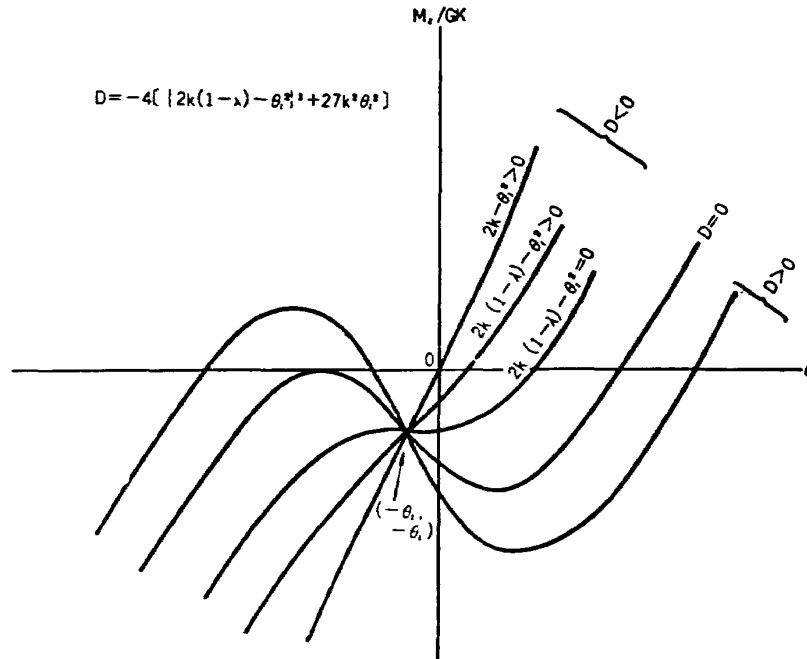
第 1 表 M_z/GK の θ の係数の符号変化数

(a) $\frac{M_z(\theta)}{GK}$ の係数の符号変化数 ($\theta_i > 0$ とする)

(b) $\frac{M_z(-\theta)}{GK}$ の係数の符号変化数

常数項	θ	θ^2	θ^3	符号変化数 N ₊
-	+	+	+	1
-	-	+	+	1

常数項	θ	θ^2	θ^3	符号変化数 N ₋
-	-	+	-	2
-	+	+	-	2

第4図 薄翼のトルク-振り曲線 ($M_s/GK-\theta$ curve) の特性

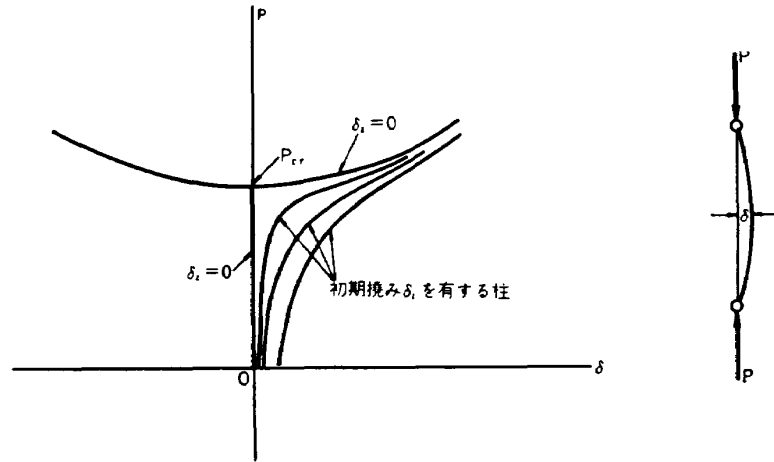
力学の教えるところによればポテンシャルエネルギー $U(\theta)$ が極値をとる点、すなわち、 $U'(\theta)=0$ となる点が平衡点であり、上述の議論により $U''(\theta_0)>0$ であることから、 $\theta=\theta_0$ の点で薄翼の有するポテンシャルエネルギー $U(\theta)$ は極小になり安定平衡状態が実現する。すなわち、初期振り θ_i を有する薄翼が空力加熱による熱応力の作用を受ける場合には加熱を受けると同時に翼は初期振りの方向にさらに振れて $\theta=\theta_0$ で安定した平衡状態に達する。

すなわち、この場合には薄翼には熱応力による振り座屈の現象はみられない。これに反して初期振り $\theta_i=0$ の場合には (13) 式よりわかるごとく

- (1) $\lambda < 1$ なる限り原点 $\theta=0$ は安定平衡点であり
- (2) $\lambda=0$ では $\theta=0$ は中立の平衡状態となり
- (3) $\lambda > 1$ になると $U''(0)=1-\lambda < 0$ となるから原点 $\theta=0$ では不安定となり $\theta = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$ の点まで振れて安定平衡状態になる。

すなわち、 $\theta_i=0$ の場合には $\lambda=1$ が熱座屈の限界点である。この状態は丁度軸圧縮力を受ける柱の曲げ座屈の現象と全く同じである。柱が初期撓みを有する場合には荷重がかかり始めると同時に撓み変形が進行し、常に安定した曲げ変形状態が実現する (Elastica の問題)。これに反し初期撓みがない場合には柱は Euler 座屈荷重に達するまでは単純圧縮の状態が安定で、Euler 座屈荷重に達すると、突然曲げ変形を生じ、安定した Elastica の変形状態に移るのである (第5図)。

ここでさらに注目すべき現象は、 $U'(\theta)$ が極大および極小値をもつ場合、すなわち、 $2k(1-\lambda)-\theta_i^2 < 0$ の場合で (13) の $M_s/GK-\theta$ 曲線上にいわゆる“飛移り”現象の起こる不安

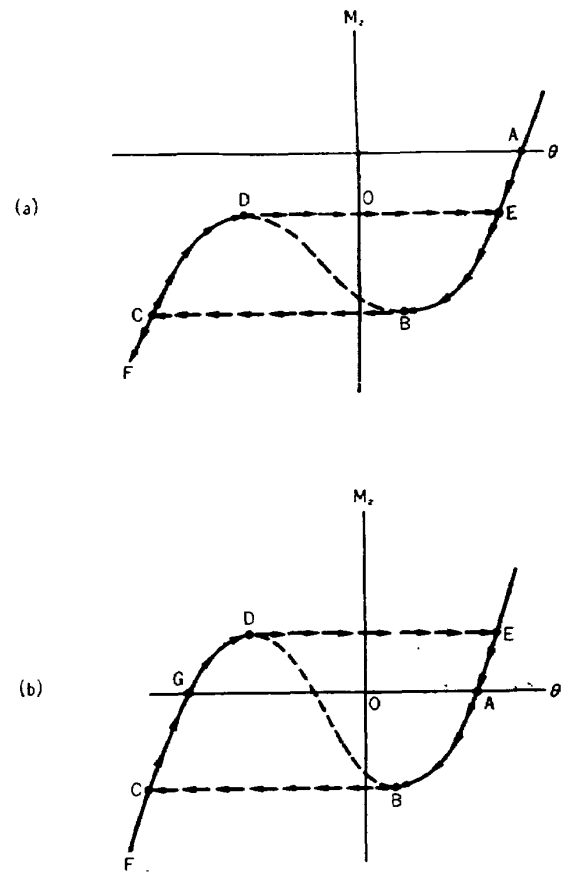


第5図 軸圧縮力を受ける柱の挙動

定領域が存在することである(第6図)。すなわち、第6図(a)の場合にはトルク $M_2=0$ から始めて逆向きのトルクを掛けて翼を振っていくと平衡点はA点($\theta=\theta_0$)よりスタートして矢印で示したごとく曲線に沿い遂次下っていき、B点に到達する。ここでさらにトルクを増大させると平衡点は突然C点に飛移り、以後はCFに沿って下っていく。また、C点においてそれまで加えてきた逆向きのトルクを減少させると平衡点はCDに沿って上昇し、Dに到る。ここでさらにトルクを減少させると、また平衡点は突然E点に飛移り、さらにトルクを減少させるとEAに沿って再び上昇し、トルクを完全に取り除くと再びA点に到達して安定な平衡状態になる。すなわち、点線で示されている曲線部分BDは不安定領域である。

第7図(b)の場合も大体同じような挙動を示すが、B点からC点に飛移ってから逆向きのトルクを次第に減らしていくと、トルク零の状態でG点に止ることになる。すなわち、A点よりG点で示される別の安定した平衡状態に移ったことになる。したがって、これをA点に戻すためには、今度は正の向きのトルクを加えてD点よりE点に飛移らせ、それからトルク零にしなければならないことになる。

このように薄翼が外荷重 M_2 を受けて振れる場合の問題にはこの点を十分考慮しなければならない



第6図 薄翼の振りにおける飛移り現象

いが、われわれの現在の問題では $M_x=0$ の場合を論じているからこれ以上“飛移り”の問題に深入りしないことにする。

以上において薄い二次元翼が（空力加熱によって生ずる）中心線に関し対称な熱応力の作用を受けると、初期振り φ_i が存在する場合にはその方向にさらに振れて常にある安定平衡点 $\theta=\theta_0$ に達して釣合うこと、また初期振りを有しない場合には $\lambda < 1$ である限り $\theta=0$ が安定平衡点であり、 $\lambda=1$ で $\theta=0$ は中立の平衡点となり、 $\lambda > 1$ になると熱座屈を起こして安定平衡点 $\theta = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$ に達して釣合うことがわかった。そこで次にこの安定平衡点 $\theta=\theta_0$ （初期振り φ_i を有する場合には θ_0 は (13) 式の有する正根で初期振りがない場合には $\theta_0 = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$ である。）におけるトルクー振りの関係およびその点の周りに生ずる自由振動の問題を考えてみることにする。(11) 式に戻って安定平衡点 $\theta=\theta_0$ のまわりに振り変形が生じたとすれば、

$$\begin{aligned} M_x &= (GK+I+EJ\theta_i^2)(\theta_0+\theta) + \frac{3}{2}EJ\theta_i(\theta_0+\theta)^2 + \frac{1}{2}EJ(\theta_0+\theta)^3 \\ &= \left\{ (GK+I+EJ\theta_i^2)\theta_0 + \frac{3}{2}EJ\theta_i\theta_0^2 + \frac{1}{2}EJ\theta_0^3 + I\theta_i \right\} \\ &\quad + \left\{ (GK+I+EJ\theta_i^2) + 3EJ\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right\} \theta + \frac{3}{2}EJ(\theta_i+\theta_0)\theta^2 + \frac{1}{2}EJ\theta^3 \end{aligned}$$

となる。しかるに、上式の第一項の { } 内は $\theta=\theta_0$ が平衡点であることから零である。

したがって、

$$M_x = (GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2)\theta + \frac{3}{2}EJ(\theta_i+\theta_0)\theta^2 + \frac{1}{2}EJ\theta^3 \dots\dots\dots(16)$$

なるトルクー振り曲線が得られる。(16) 式の右辺の第一項の () 内は (11) 式の微分、すなわち $U''(\theta_0)$ に等しく前に述べたようにこの値は常に正である。(16) 式は安定平衡点 $\theta=\theta_0$ を基準にしたトルクー振り曲線を与える。いま、 $\theta \ll \theta_0$ すなわち振り角が微小な場合には θ に関する高次の項が無視できるから、

$$M_x = \left(GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right) \theta \dots\dots\dots(17)$$

これはすなわち $\theta=\theta_0$ を基準とした St. Venant のトルクー振りの関係を表わしている。したがって、この点における有効振り剛性を $(GK)_{\text{eff}}$ とおけば

$$\frac{(GK)_{\text{eff}}}{GK} = 1 - \lambda + \frac{1}{k} \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^2 \right) \dots\dots\dots(18)$$

となる。また、安定平衡点 $\theta=\theta_0$ のまわりの薄翼の振り振動の運動方程式は (16) 式を z で微分

し、 dM_z/dz の代わりに慣性力によるトルクの項 $mI_0(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ を入れ、 θ を $\partial\varphi/\partial z$ と書いて次のようになる。

$$\left(GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{3}{2}EJ(\theta_i+\theta_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3 = mI_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \dots\dots\dots(19)$$

(19) 式は振り振幅が大きい場合の非線型振動方程式であるが、振幅が小さい場合には前と同様に非線型項を無視して次のような簡単な方程式となる。

$$\left(GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = mI_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \dots\dots\dots(20)$$

いま、 $\varphi(z,t)=\varphi_0(z)e^{i\mu t}$ 、 $\mu^2=mI_0p^2$ とおくと

$$\left(GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right) \frac{d^2\varphi_0}{dz^2} + \mu^2\varphi_0=0 \dots\dots\dots(21)$$

となる。

薄翼は片持梁の状態、すなわち

$$\left. \begin{array}{l} z=0: \varphi=0 \\ z=L: \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \end{array} \right\}$$

にあるから $\varphi_0(z)$ をこのような境界条件を満足する次のごとき固有函数系で展開できる。

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$$

ここに

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi z}{2L}$$

この式を (21) に代入すれば

$$\mu^2 = \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \left(GK+I+EJ\theta_i^2+3EJ\theta_i\theta_0+\frac{3}{2}EJ\theta_0^2 \right) \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(22)$$

いま、第 m 次振動の角速度を ω_n とし、また

$$\omega_n^* = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{GK}{mI_0L^2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{初期振りも熱応力の影響もない同一幾何学} \\ \text{的形狀の薄翼の第 } n \text{ 次自由振動の角速度} \end{array} \right)$$

として (22) 式を書き換えると、

$$\frac{\omega_n}{\omega_n^*} = \sqrt{(1-\lambda) + \frac{1}{k} \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^2 \right)} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots(23)$$

となる。

換言すれば、安定平衡点 $\theta = \theta_0$ のまわりの微小振り振動は常に存在し、その角速度 ω_n は (23) 式で与えられることになる。

特に初期振り θ_i がない場合を考えてみると、次のようになる。その平衡点は前にも述べたが (13) 式において $\theta_i = 0$ として

$$U'(\theta) = \theta^3 + 2k(1-\lambda)\theta = 0$$

より求められる。

すなわち、 $\theta_0 = 0$ または $\theta_0 = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$ ($\lambda > 1$) であり、

$$U''(\theta) = 3\theta^2 + 2k(1-\lambda)$$

であるから、この二つの平衡点の安定性を調べてみると

(a) 平衡点 $\theta_0 = 0$

$$U''(0) = 2k(1-\lambda)$$

したがって、

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda < 1 & \text{安 定} \\ \lambda = 1 & \text{中 立} \\ \lambda > 1 & \text{不 安 定} \end{array} \right\}$$

(b) 平衡点 $\theta_0 = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$ ($\lambda > 1$)

$$U''(\theta_0) = 4k(\lambda-1) > 0 \quad \therefore \text{安 定}$$

となる。

次に、安定平衡点における $(GK)_{\text{eff}}$ およびその点のまわりの微小振り振動の角速度 ω_n を求めてみると次のようになる。

(c) $\lambda < 1$ の場合、 $\theta_0 = 0$

$$\frac{(GK)_{\text{eff}}}{GK} = 1 - \lambda, \quad \frac{\omega_n}{\omega_n^*} = \sqrt{1 - \lambda} \quad \dots\dots\dots(24)$$

(d) $\lambda > 1$ の場合、 $\theta_0 = \pm\sqrt{2k(\lambda-1)}$

$$\frac{(GK)_{\text{eff}}}{GK} = 2(\lambda - 1), \quad \frac{\omega_n}{\omega_n^*} = \sqrt{2(\lambda - 1)} \quad \dots\dots\dots(25)$$

III. 数 値 計 算 例

さて以上において定性的に論じてきた事柄を、具体的な例題について論じてみよう。

代表的な翼形として中実の矩形断面翼とダイヤモンド形翼 (Double wedged wing) を選び、ま

ずその各種断面係数を計算してみると次のようになる（この理論はもちろん中空断面の翼の場合にも適用できるが、ここではそのような場合については論じないことにする）（第2表）。

一例として Bisplinghoff⁽¹¹⁾ が用いた翼断面を用い $b=3$ in, $\delta=0.04$ とすると k の値はそれぞれ $k = \frac{EJ}{GK} = \frac{J}{2(1+\nu)k}$ であるから、

(a) 矩形翼 $k=2.849 \times 10^{-5} \text{ in}^{-2}$

(b) ダイヤモンド形翼 $k=3.256 \times 10^{-5} \text{ in}^{-2}$

となる。初期振りを $\theta_i=1 \times 10^{-3} \text{ rad/in}$ にとり、これらの数値を (13) および (14) 式に代入すると θ を 10^{-3} rad/in を単位にして次のようなポテンシャルエネルギー曲線 $U(\theta)/GK$ とトルク振り曲線 $M_z(\theta)/GK$ が得られる。

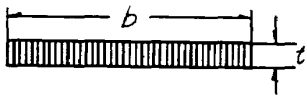
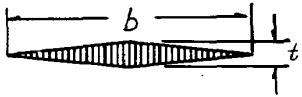
(A) 矩形翼

$$\begin{cases} \frac{U(\theta)}{GK} = -\lambda\theta + 0.5(1-\lambda+0.0351)\theta^2 + 0.01755\theta^3 + 0.004388\theta^4 & (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2) \\ \frac{M_z}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = -\lambda + (1-\lambda+0.0351)\theta + 0.05265\theta^2 + 0.01755\theta^3 & (\times 10^{-3} \text{ rad/in}) \end{cases} \quad \dots(26)$$

(B) ダイヤモンド形翼

$$\begin{cases} \frac{U(\theta)}{GK} = -\lambda\theta + 0.5(1-\lambda+0.03071)\theta^2 + 0.01536\theta^3 + 0.003839\theta^4 & (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2) \\ \frac{M_z}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = -\lambda + (1-\lambda+0.03071)\theta + 0.04607\theta^2 + 0.01536\theta^3 & (\times 10^{-3} \text{ rad/in}) \end{cases} \quad \dots(27)$$

第2表 矩形翼とダイヤモンド形翼の諸断面係数

翼型		
振り剛性	$\frac{1}{3} b t^3$	$\frac{1}{12} b t^3$
I_0	$\frac{1}{12} b^3 t$	$\frac{1}{48} b^3 t$
$AR^4 = \int r^4 dA$	$\frac{1}{80} b^5 t$	$\frac{1}{480} b^5 t$
$J = \int (r^2 - r_0^2) r^2 dA$	$\frac{1}{180} b^5 t$	$\frac{7}{5760} b^5 t$
$k = \frac{GK^*}{EJ}$	$\frac{300}{13} \frac{\delta^2}{b^2}$	$\frac{2400}{91} \frac{\delta^2}{b^2}$

* ポアソン比 $\nu=0.3$ とする。また $\delta = \frac{t}{b}$ である。これらの式の導出は付録を参照。

ここに $U(\theta)$ は長さ 1 in 当りの翼のポテンシャルエネルギーを示していることに注意すべきである。次に、初期振り $\theta_i=0$ の場合にはこれらの曲線は次のごとくなる。

(C) 矩形翼

$$\begin{cases} \frac{U(\theta)}{GK} = 0.5(1-\lambda)\theta^2 + 0.004388\theta^4 & (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2) \\ \frac{U'(\theta)}{GK} = (1-\lambda)\theta + 0.001755\theta^3 & (\times 10^{-3} \text{ rad/in}) \end{cases} \dots\dots\dots (28)$$

(D) ダイヤモンド形翼

$$\begin{cases} \frac{U(\theta)}{GK} = 0.5(1-\lambda)\theta^2 + 0.003839\theta^4 & (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2) \\ \frac{U'(\theta)}{GK} = (1-\lambda)\theta + 0.01536\theta^3 & (\times 10^{-3} \text{ rad/in}) \end{cases} \dots\dots\dots (29)$$

さて初期振り $\theta_i=1 \times 10^{-3}$ rad/in のある場合、 $U'(\theta)$ が彎曲点を生ずる場合の λ の値は

$$2k(1-\lambda) - \theta_i^2 = 0 \dots\dots\dots (30)$$



より決定される。また、 $U'(\theta)=0$ が一負等根を有すべき条件は

$$2k(1-\lambda) - \theta_i^2 + 3k^2\theta_i^2 = 0 \dots\dots\dots (31)$$

である。

そこで矩形翼、ダイヤモンド形翼の両方についてこれらの条件を満足する λ の値を求めてみると次の第3表のごとくなる。

第3表 トルクー振り曲線 M_z/GK 曲線の挙動を支配する λ の値

翼	型	彎曲点	一負等根	翼	型	彎曲点	一負等根
		0.9825	1.4736			0.9846	1.4544

この資料に基づいて薄翼のポテンシャルエネルギー曲線 $U(\theta)/GK$ 、トルクー振り曲線 $U'(\theta)/GK$ を矩形翼とダイヤモンド形翼の両方の場合につき初期振り φ_i がない場合とある場合の計算を λ をパラメーターとして行ない画いたものが次の第7, 8, 9, 10 図である(初期振りを有する場合は $\varphi_i=1 \times 10^{-3}$ rad/in とする)。

また、薄翼の安定平衡点 $\theta=\theta_0$ ($\theta_0>0, U'(\theta_0)=0$)、その点における有効振り剛性 $(GK)_{\text{eff}}/GK$ および微小振り自由振動の角速度 ω_n/ω_n^* と λ の関係を初期振り φ_i をパラメーターとして矩形翼、ダイヤモンド形翼の両方について求め、グラフに画いたのが次の第11, 12, 13, 14, 15, 16 図である。

第9, 10 図のトルクー振り曲線 $M_z(\theta)/GK$ を見ればわかるごとく、 λ が零より増大して、矩形翼の場合には 0.9825、ダイヤモンド形翼の場合 0.9846 に達すると曲線に彎曲点を生じ、さらに

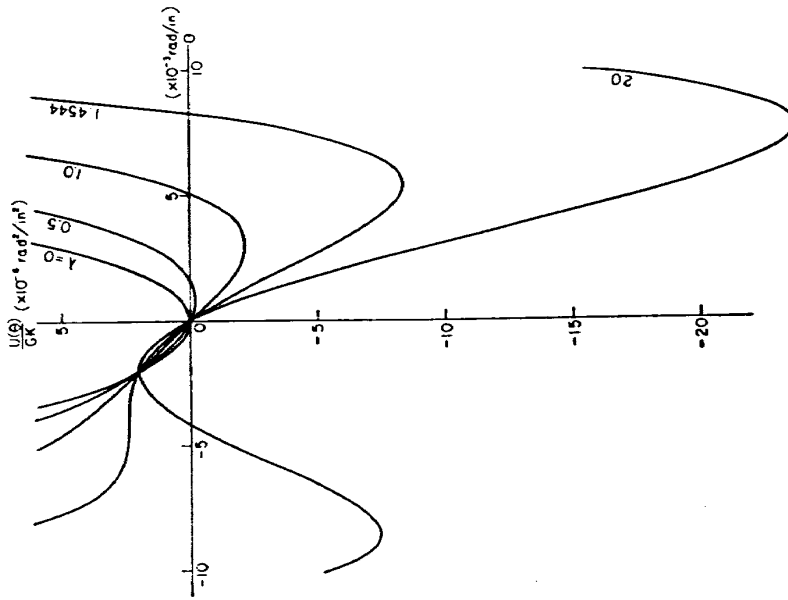
増大すると曲線に極大、極小点が生じ、次第に極大点が上昇して遂に矩形翼においては 1.4736, ダイヤモンド形翼の場合には 1.4544 になると極大点が θ 軸に下側から接するようになる。そして λ をさらに大きくすると、曲線は三点で θ 軸と交るようになる。すなわち、曲線の性状は第 2 節で述べた結論のとおりで、極大点と極小点の間の部分は“飛移り”の起こる領域であるから、この区間では不安定となる。このようなトルクー振り曲線の性状に対応してその積分であるポテンシャルエネルギー曲線は第 7, 8 図に示したような挙動をとることになる。矩形翼とダイヤモンド形翼の曲線の相違は翼形の諸断面係数の違いに基づいており、若干の数値的な違いを除いてその示す挙動は同じであることがわかるであろう。したがって、以下ダイヤモンド形翼についてのみ考察する。

第 11 図は安定平衡点 $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 > 0$) と λ の間の関係を示す曲線で、初期振り θ_i をパラメータとして画いてある。ただし、 $\theta_i = 0$ と 1×10^{-3} rad/in の場合に限りすべての平衡点と λ の関係が画いてある。すなわち、 $\theta_i = 0$ の場合には $\lambda \leq 1$ ならば $\theta_0 = 0$, すなわち λ 軸に一致し、 $\lambda > 1$ になると $\theta_0^2 = 2k(\lambda - 1)$ の放物線上に移ることになる。

これに対し初期振り θ_i が存在する場合には、 θ_0 は初期振りのある位置から λ とともに増大して第 11 図に示したような曲線を描く。そして λ がある値以上に達すると、 θ_0 が負の領域に他の一つの曲線が出現する。この曲線の性状は前にも述べたように全く軸圧縮力を受ける柱の示す荷重一撓み曲線の挙動と同じであるがグラフの縦軸は無荷重状態における初期振りの位置を原点として画いてある。第 13 図は $\theta = \theta_0$ における有効振り剛性 $(GK)_{\text{eff}}/GK$ と λ の関係を示すグラフである。前と同様に θ_i をパラメータにとって二、三の場合について行なった数値解析の結果が画かれているが、特に初期振りがない場合には $\lambda \leq 1$ の範囲では曲線は $(GK)_{\text{eff}}/GK = \lambda - 1$ の直線となり、 $\lambda > 1$ の領域では $(GK)_{\text{eff}}/GK = 2(\lambda - 1)$ の直線となる。 $\lambda = 1$ は熱座屈の起こる点を示し、ここでは有効振り剛性が零になる。これに反し初期振りが存在すると $(GK)_{\text{eff}}/GK - \lambda$ 曲線は一つの曲線となり λ のある値の時極小値をとることがわかる。すなわち、 θ_i が小さいうちは有効振り剛性が λ のある値のところで顕著な減少を示すが、 θ_i が大きくなるとその影響は次第に小さくなり、極小値をとる点も $\lambda = 1$ より次第に原点に近い方に移動していくことがわかる。第 15 図は $\theta = \theta_0$ における微小振り自由振動の角速度 ω_n/ω_n^* と λ の関係を描いたもので、 $\theta_i = 0$ の場合には $\lambda \leq 1$ の範囲では $\omega_n/\omega_n^* = \sqrt{1 - \lambda}$, $\lambda > 1$ の範囲では $\omega_n/\omega_n^* = \sqrt{2(\lambda - 1)}$ となる。熱座屈の起こる点 $\lambda = 1$ ではもちろん $\omega_n = 0$ である。

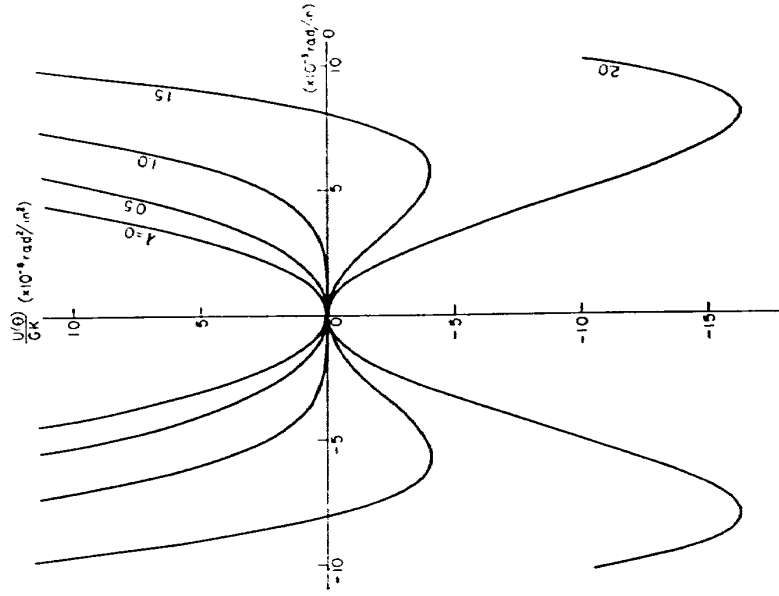
初期振りの存在する場合には θ_i が小さい場合には第 13 図と同様、角速度したがって振動数の低下が顕著に現われ、 θ_i が大きくなるに従ってその影響が少なくなる状況が良くわかるであろう。

$$\frac{U(\theta)}{GK} = -\lambda\theta + 0.5(1-\lambda+0.03071)\theta^2 + 0.01536\theta^3 + 0.003839\theta^4 \quad (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2)$$



(a) $\theta_i = 1 \times 10^{-3} \text{ rad/in}$

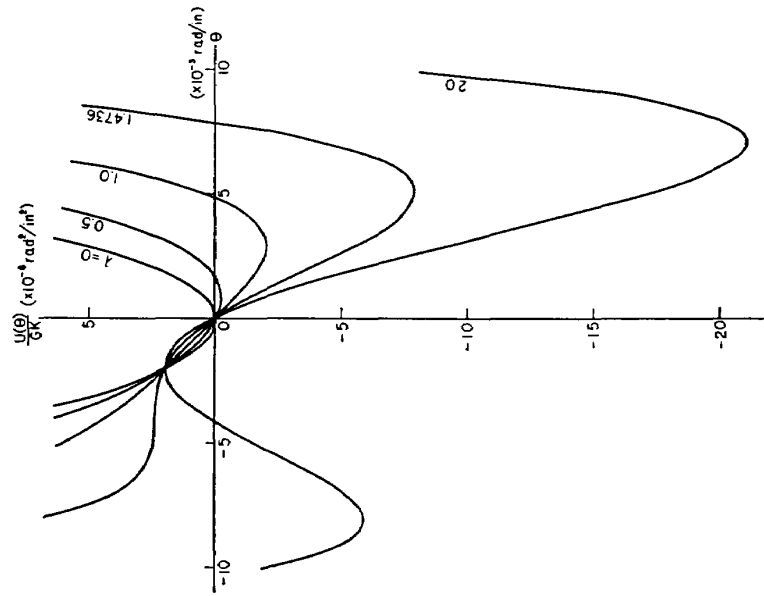
$$\frac{U(\theta)}{GK} = 0.5(1-\lambda)\theta^2 + 0.003839\theta^4 \quad (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2)$$



(b) $\theta_i = 0$

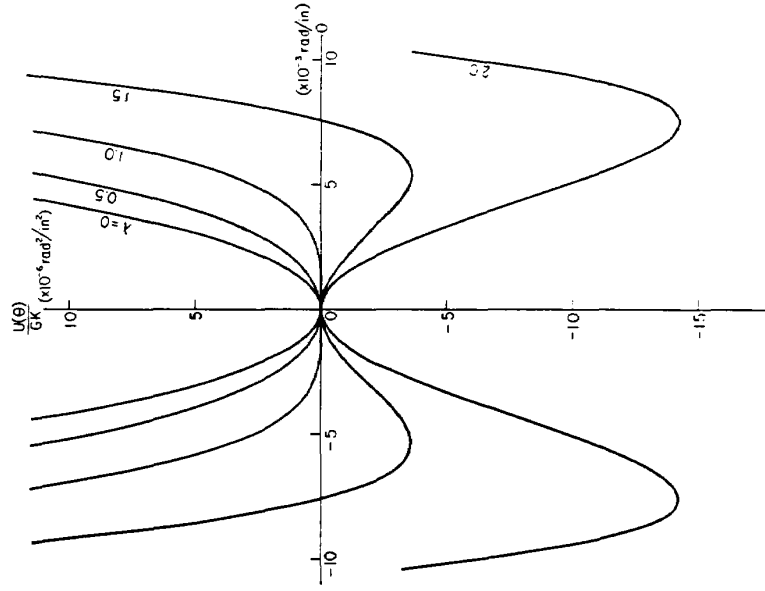
第7図 ダイヤモンド形翼のポテンシャルエネルギー曲線 ($U(\theta)/GK-\theta$ curve)

$$\frac{U(\theta)}{GK} = -\lambda\theta + 0.5(1-\lambda+0.0351)\theta^2 + 0.01755\theta^3 + 0.004388\theta^4 \quad (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2)$$



(a) $\theta_t = 1 \times 10^{-3} \text{ rad/in}$

$$\frac{U(\theta)}{GK} = 0.5(1-\lambda)\theta^2 + 0.004388\theta^4 \quad (\times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{in}^2)$$

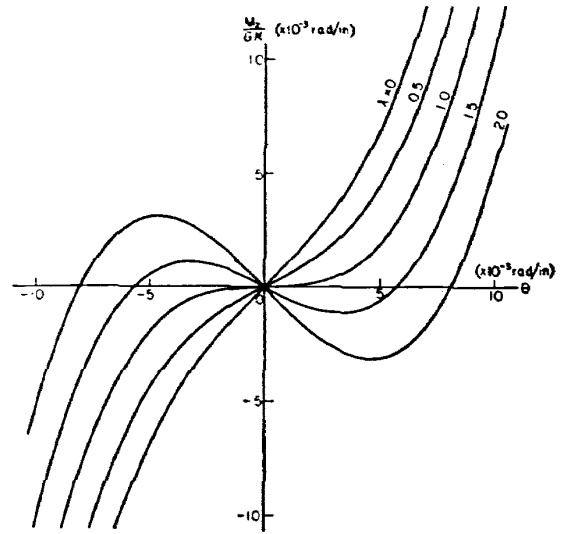
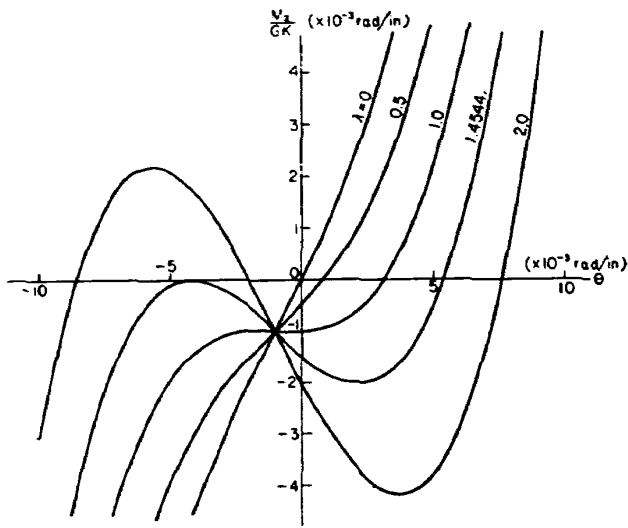


(b) $\theta_t = 0$

第8図 矩形断面翼のポテンシャルエネルギー曲線 ($U(\theta)/GK-\theta$ curve)

$$\frac{M_x}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = -\lambda + (1-\lambda+0.03071)\theta + 0.04607\theta^2 + 0.01536\theta^3 \quad (\times 10^{-3} \text{ rad/in})$$

$$\frac{M_x}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = (1-\lambda)\theta + 0.01536\theta^3 \quad (\times 10^{-3} \text{ rad/in})$$



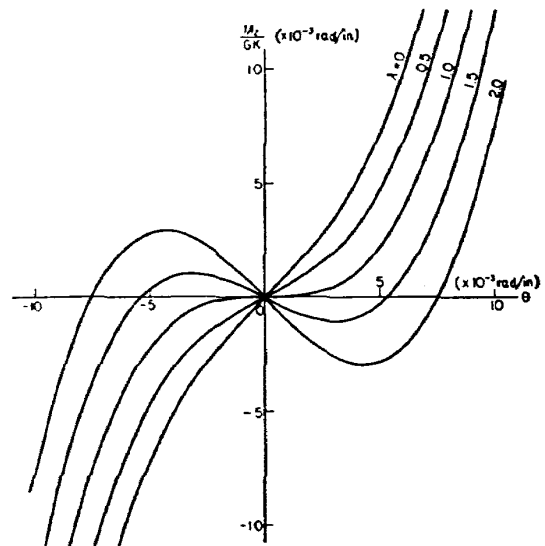
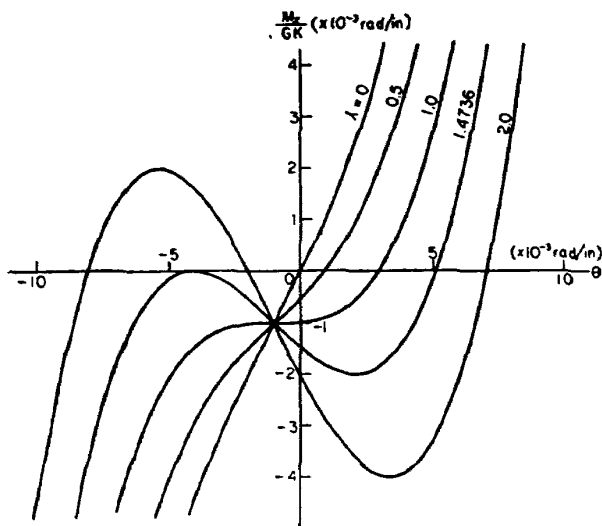
(a) $\theta_i = 1 \times 10^{-3} \text{ rad/in}$

(b) $\theta_i = 0$

第9図 ダイヤモンド形翼のトルク-振り曲線 ($M_x/GK-\theta$ curve)

$$\frac{M_x}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = -\lambda + (1-\lambda+0.0351)\theta + 0.5265\theta^2 + 0.01755\theta^3 \quad (\times 10^{-3} \text{ rad/in})$$

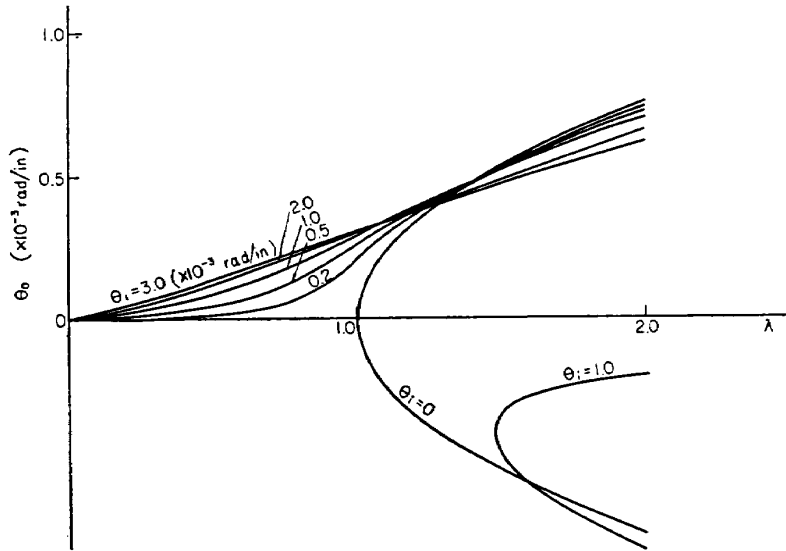
$$\frac{M_x}{GK} = \frac{U'(\theta)}{GK} = (1-\lambda)\theta + 0.001755\theta^3 \quad (\times 10^{-3} \text{ rad/in})$$



(a) $\theta_i = 1 \times 10^{-3} \text{ rad/in}$

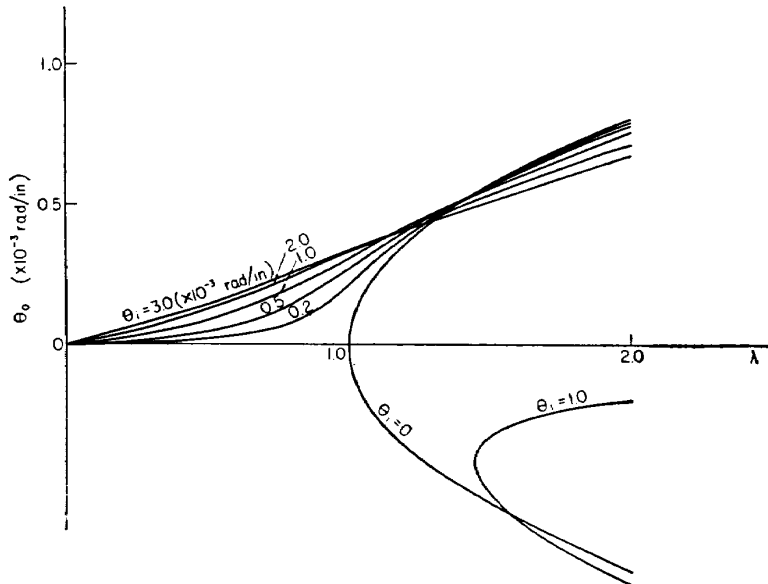
(b) $\theta_i = 0$

第10図 矩形断面翼のトルク-振り曲線 ($M_x/GK-\theta$ curve)



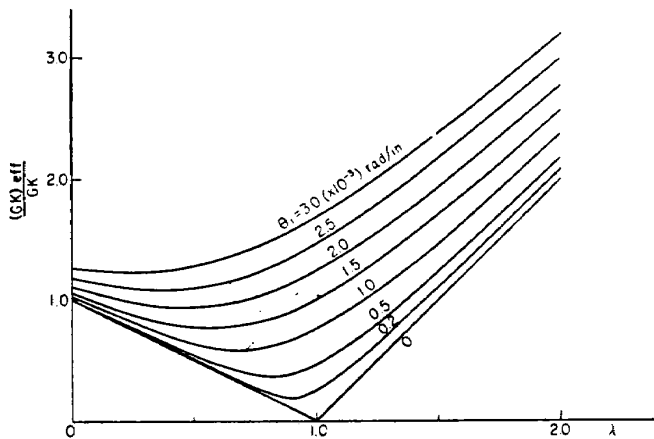
$$\theta_0^3 + 3\theta_i\theta_0^2 + 2\{32.59(1-\lambda) + \theta_i^2\}\theta_0 - 65.12\lambda\theta_i = 0$$

第 11 図 薄翼の振りに対する安定
平衡点 θ_0 と λ の関係
(ダイヤモンド形翼)



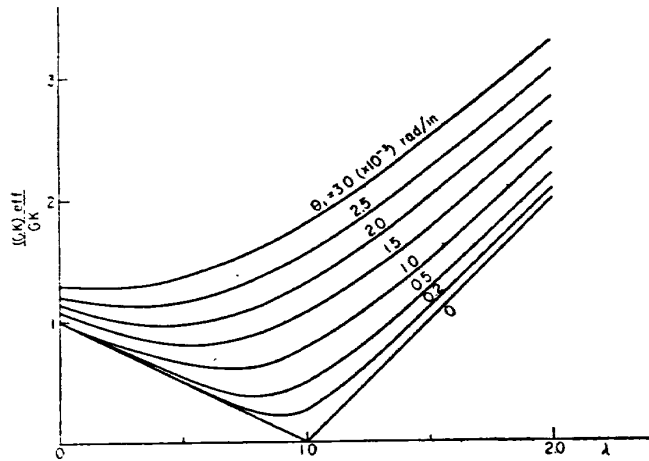
$$\theta_0^3 + 3\theta_i\theta_0^2 + 2\{28.49(1-\lambda) + \theta_i^2\}\theta_0 - 56.98\lambda\theta_i = 0$$

第 12 図 薄翼の振りに対する安定
平衡点 θ_0 と λ の関係
(矩形断面翼)



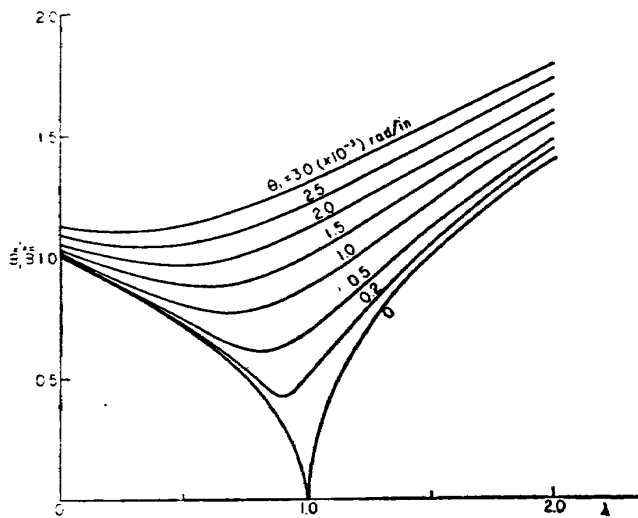
$$\frac{(GK)_{eff}}{GK} = 1 - \lambda + 30712.5 \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2} \right)$$

第 13 図 薄翼の有効振り剛性と λ の関係
(ダイヤモンド形翼)



$$\frac{(GK)_{\text{eff}}}{GK} = 1 - \lambda + 35.100 \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^2 \right)$$

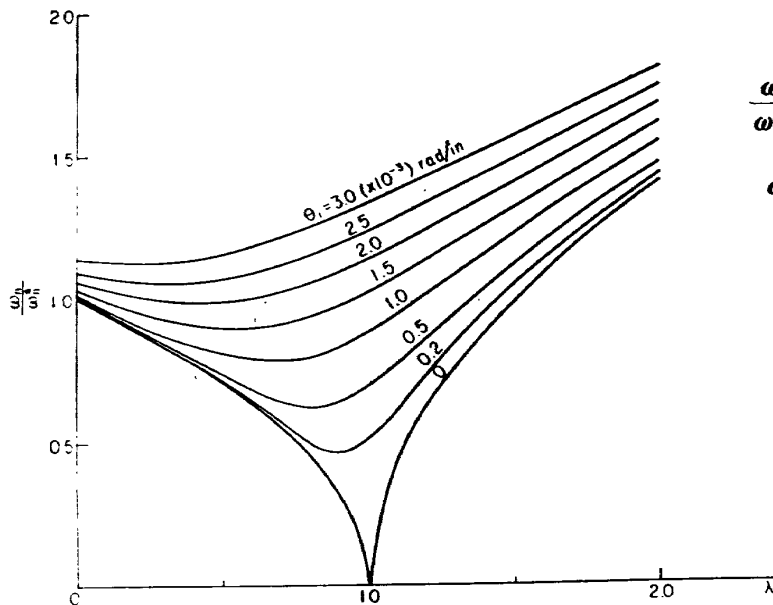
第 14 図 薄翼の有効振り剛性と λ との関係 (矩形断面翼)



$$\frac{\omega_n}{\omega_n^*} = \sqrt{(1-\lambda) + 30712.5 \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^2 \right)}$$

$$\omega_n^* = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{GK}{m I_0 L^2}} \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

第 15 図 薄翼の安定平衡点 $\theta = \theta_0$ のまわりの微小振り自由振動角速度 ω_n と λ との関係 (ダイヤモンド形翼)



$$\frac{\omega_n}{\omega_n^*} = \sqrt{(1-\lambda) + 35100 \left(\theta_i^2 + 3\theta_i\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^2 \right)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{GK}{m I_0 L^2}} \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

第 16 図 薄翼の安定平衡点 $\theta = \theta_0$ のまわりの微小振り自由振動の角速度 ω_n と λ の関係 (矩形断面翼)

IV. 結 論

以上において縦横比の大きい二次元翼が空力加熱による熱応力と同じ状態の熱応力を受けた場合の捩り変形状態を初期捩みの影響を考慮し、有限変形理論の立場から St. Venant の捩り理論に修正をほどこして解析し、その安定性、有効捩り剛性、安定平衡点のまわりの微小捩り振動などを具体的な二つの翼につき詳細に検討し、従来多くの人々が板の有限変形理論によって行なった研究結果と一致する結論を得た。しかしながら、ここに取り上げた問題は実際の現象を非常に理想化して取り扱っており、超音速機翼に起こるいわゆる熱空力弾性問題 (Aero-thermoelastic problem) の一つの基礎資料とはなりうるが、設計資料としてはそのまま使用できない。その理由をあげるならば、

(1) 実際の超音速機の翼は縦横比が小さく、また非常に薄い複雑な多桁構造である。

したがって、空気力自身三次元の状態で考察せねばならず、空力加熱によって生ずる翼内部の温度分布が中実断面翼の場合でも三次元的な複雑な分布をとることとこの温度分布を基にして生ずる熱応力の分布が、また極めて複雑な様相を呈することになる。

(2) 一般に超音速機翼は、形状も梯形、三角形をとるものが多く、その構造力学的挙動や振動特性が極めて複雑であり、その熱的安定性の厳密な議論は非常に困難である。

(3) 実際の翼の空力加熱下の挙動を論ずるには空気力の存在を考慮しなければならず、その上で安定性 (すなわち Divergence) および振動特性 (Flutter) の研究が問題の核心であり、またその最終目標である。

このように考えてくると、本報告を含めて従来の諸外国および国内の二、三の研究者によって行なわれている研究はすべて trend research の段階に過ぎず、わずかに M. I. T. の Bisplinghoff 教授の率いる研究グループの活動⁽¹⁾ が一歩前進していると考えられる程度である。そこでわれわれは、この研究を足場としてより実地的な熱空力弾性問題の研究を一歩前進させるため、後退角を有する梯形板翼の振動解析、熱伝導解析および熱応力解析を並行して進めており、振動解析の研究結果は近く別の航空技術研究所報告として発表する予定である。

最後に有益な御討論をいただいた樋口計測工務部長、竹中熱弾性研究室長、面倒な計算および図表の作成に協力していただいた熱弾性研究室小川鉦一技官、構造研究室築地恒夫、河野哲夫両技官に厚くお礼を申し上げます。

文 献

- (1) B. Budiansky and J. Mayers, "Influence of Aerodynamic Heating on the Effective Torsional Stiffness of Thin Wings", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, 1956, pp. 1081-1093.
- (2) N. J. Hoff, "Approximate Analysis of the Reduction in Torsional Rigidity and of the Torsional Buckling of Solid Wings Under Thermal Stresses".
Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, 1956, pp. 603-604.
- (3) J. Singer, "Thermal Buckling of Solid Wings of Arbitrary Aspect Ratio", *Journal of Aero/Space Sciences*, Vol. 25, 1958, pp. 567-572.
- (4) R. R. Heldenfels and L. F. Vosteen, "Approximate Analysis of Effects of Large Deflections and Initial Twist on Torsional Stiffness of a Cantilever Plate Subjected to thermal Stresses". NACA TN 4067, 1957.
- (5) L. S. Han, "An Approximate Analysis of the Influence of Aerodynamic Heating and Initial Twist on the Torsional Stiffness of Thin Wings". *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 27, Trans. ASME, series E. No. 2, 1960, pp. 332-334.
- (6) 三浦公亮, "初期捩れを有する翼が空力加熱を受ける場合の捩り剛性および捩り振動について", 東京大学航空研究所ロケット研究会ノート No. 8, 1959年6月。
- (7) S. Kobayashi, "Torsional Vibration of a Cantilever Plate Subjected to Thermal Stresses" Trans. Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 5, No. 7, 1962, pp. 41~56.
- (8) S. Timoshenko, "Strength of Materials" Part II, Advanced Theory and Problems, D. Van Nostrand Co. Inc. 3rd Ed., 1956, pp. 286-291.
- (9) 倉西正嗣, "弾性学", 日本機械学会出版 1948, pp. 310-313
- (10) Chen Chu, "The Effect of Initial Twist on the Torsional Rigidity of Thin Prismatical Bar and Tubular Members", *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME, June, 1951, pp. 265-269.
- (11) N. J. Hoff, "High Temperature Effect in Aircraft Structures" § 14 Influence of Aerodynamic Heating on Aeroelastic Phenomena by R. L. Bisplinghoff and J. Dugundji AGAR Dograph No. 28, Pergamon Press, 1958, pp. 288-312.
- (12) R. J. Roark, "Formulas for Stress and Strain", McGraw-Hill Book Co., 1954, p. 177.

付 録

翼弦長 (chord length) を b , $x=0$ における翼の厚さを t とすれば次のように二つの翼の各種断面係数が求められる。

(i) St. Venant の捩り剛性 K

(a) 矩形翼

この場合は良く知られているように

$$K = \frac{1}{3} b t^3$$

で与えられる。

(b) ダイヤモンド翼

Roark⁽¹²⁾ によれば細長い形状断面の場合の捩り剛性は次の式で与えられる。

$$K = \frac{4I_x}{\left(1 + 16 \frac{I_x}{AU^2}\right)}$$

ここに A は翼の断面積, U 翼弦長すなわち b , I_x は x 軸まわりの断面の慣性能率である。
ダイヤモンド形翼の場合は

$$A = 2 \int_0^{b/2} t \left(1 - \frac{2x}{b}\right) dx = \frac{1}{2} b t$$

$$I_x = 2 \int_0^{b/2} \frac{t^3}{12} \left(1 - \frac{2x}{b}\right)^3 dx = \frac{1}{48} b t^3$$

$$\therefore K = \frac{\frac{1}{12} b t^3}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{t}{b}\right)^2} \sim \frac{1}{12} b t^3 \quad (\text{薄翼の場合 } t/b \div 0)$$

(ii) 断面の極慣性能率

(a) 矩形翼

$$I_0 = 2 \int_0^{b/2} y^2 t dy = \frac{1}{12} b^3 t$$

(b) ダイヤモンド形翼

$$I_0 = 2 \int_0^{b/2} t \left(1 - \frac{2x}{b}\right) x^2 dx = \frac{1}{48} b^3 t$$

(iii) $AR^4 = \int r^4 dA$

(a) 矩形翼

$$AR^4 = 2 \int_0^{b/2} y^4 t dy = \frac{1}{80} b^5 t$$

(b) ダイヤモンド形翼

$$AR^4 = 2 \int_0^{b/2} t \left(1 - \frac{2x}{b}\right) x^2 dx = \frac{1}{480} b^5 t$$

(iv) $J = \int (r^2 - r_0^2) r^2 dA$, $r_0^2 \int r^2 dA = \frac{I_0^2}{A}$ であるから

(a) 矩形翼

$$J = \frac{1}{180} b^5 t$$

(b) ダイヤモンド形翼

$$J = \frac{7}{5760} b^5 t$$

(v) $k = \frac{GK}{EJ} = \frac{K}{2(1-\nu)J}$

<p>NAL TR-31 航空技術研究所 熱応力をうける薄翼の安定とその微小振り振動について</p> <p>1962年11月 22頁</p>	<p>I. 川井忠彦 林 洋一 戸川隼人</p> <p>II. NAL TR-31</p> <p>III. 534.11 629.13.014.3</p>	<p>NAL TR-31 航空技術研究所 熱応力をうける薄翼の安定とその微小振り振動について</p> <p>1962年11月 22頁</p>	<p>I. 川井忠彦 林 洋一 戸川隼人</p> <p>II. NAL TR-31</p> <p>III. 534.11 629.13.014.3</p>
<p>薄い二次元翼の振り剛性に対する熱応力と初期振りの影響について、有限変形を考慮して修整した St. Vennant の棒の振り理論を用いて研究し、従来の板の曲げに関する有限変形理論を基にした解析結果と同じ結論が得られることを示した。 また、薄翼の熱的安定性および安定平衡点のまわりの微小振り自由振動について二つの数値例をあげて詳しく論じた。</p>		<p>薄い二次元翼の振り剛性に対する熱応力と初期振りの影響について、有限変形を考慮して修整した St. Vennant の棒の振り理論を用いて研究し、従来の板の曲げに関する有限変形理論を基にした解析結果と同じ結論が得られることを示した。 また、薄翼の熱的安定性および安定平衡点のまわりの微小振り自由振動について二つの数値例をあげて詳しく論じた。</p>	
<p>NAL TR-31 航空技術研究所 熱応力をうける薄翼の安定とその微小振り振動について</p> <p>1962年11月 22頁</p>	<p>I. 川井忠彦 林 洋一 戸川隼人</p> <p>II. NAL TR-31</p> <p>III. 534.11 629.13.014.3</p>	<p>NAL TR-31 航空技術研究所 熱応力をうける薄翼の安定とその微小振り振動について</p> <p>1962年11月 22頁</p>	<p>I. 川井忠彦 林 洋一 戸川隼人</p> <p>II. NAL TR-31</p> <p>III. 534.11 629.13.014.3</p>
<p>薄い二次元翼の振り剛性に対する熱応力と初期振りの影響について、有限変形を考慮して修整した St. Vennant の棒の振り理論を用いて研究し、従来の板の曲げに関する有限変形理論を基にした解析結果と同じ結論が得られることを示した。 また、薄翼の熱的安定性および安定平衡点のまわりの微小振り自由振動について二つの数値例をあげて詳しく論じた。</p>		<p>薄い二次元翼の振り剛性に対する熱応力と初期振りの影響について、有限変形を考慮して修整した St. Vennant の棒の振り理論を用いて研究し、従来の板の曲げに関する有限変形理論を基にした解析結果と同じ結論が得られることを示した。 また、薄翼の熱的安定性および安定平衡点のまわりの微小振り自由振動について二つの数値例をあげて詳しく論じた。</p>	

TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の計画と構造 Design and Construction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962年10月	川井忠彦, 埴 武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一

航空技術研究所報告 31 号

昭和 37 年 11 月 発行

発行所 航空技術研究所
東京都三鷹市新川 700
電話武蔵野 (0422) (3)5171 (代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53
