

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-42

非定常境界層の相似解とその安定

小橋安次郎・恩地 瑛

1963年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|--|----------|--------------------------|
| TR- 8 | 繰返し荷重装置試験の予備試験
Preliminary Study for Development
of Repeated Load Testing Rigs
for Full-Scale Aircraft Structures | 1961年3月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR- 9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance
Theory of Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory— | 1961年3月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger
Compressor Blades | 1961年3月 | 松木正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild
Steel | 1961年4月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-12 | 薄肉開断面梁の自由振動について
On the Natural Vibration of Thin-
Walled Beams of Open Cross
Section | 1961年5月 | 川井忠彦, 埴 武敏 |
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての
実験的研究
Experimental Results of the Inter-
action between Shock Wave and
Turbulent Boundary Layer | 1961年7月 | 須郷道也, 伝田幸雄 |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層
On Compressible Boundary Layer
in Magnetodynamics | 1961年7月 | 須郷道也, 小沢五郎 |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・較正
Miniature Pressure Pickups for
Measuring the Pressure on Oscillating
Airfoils in Supersonic Flow | 1961年8月 | 石井孝雄, 柳沢三憲 |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題
の差分法による数値解法
On the Difference Method Solutions of
the Mixed Boundary Value Problems of
Parabolic Partial Differential Equations | 1961年11月 | 樋口一雄, 三好 甫 |
| TR-17 | 荷電ビームによる気流密度測定
の理論的考察
A Theoretical Comment on the Charge-
Beam Method of Measuring Gas Density | 1961年12月 | 和田 勇, 細川 巖
三好 甫 |
| TR-18 | 前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列
の二次元低速翼列性能と回転翼列性能と
の比較
Comparison of Inlet Guide Vane and High
Stagger Compressor Blade Performance
in a Rotor and in Cascade | 1961年11月 | 松木正勝 |
| TR-19 | 高速翼車の回転強度
Strength of High-Speed Rotor | 1961年12月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-20 | Blasius 型微分方程式の両側無限遠
境界値問題の数値解法
A Numerical Method for Solving Blasius'
Type Differential Equation | 1962年1月 | 樋口一雄, 戸川隼人 |
| TR-21 | 遷音速における二次元操縦面の研究 (I)
An Investigation of Two-dimensional
Control Surface at Transonic Speed (I) | 1962年1月 | 神谷信彦 |
| TR-22 | 変断面梁の曲げ自由振動について
On the Free Lateral Vibration of a Beam
with Variable Cross Section | 1962年2月 | 川井忠彦, 戸川隼人
林 洋一 |
| TR-23 | いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の
モンテカルロ法による解法とその実験
Monte Carlo Solutions of the Boundary
Value Problems for Some Types of
Partial Differential Equations | 1962年2月 | 樋口一雄, 高橋利之
鳥海良三 |
| TR-24 | 航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン
要素試験設備
Test Facilities of Turbo-jet Engine
Components at N.A.L. | 1962年2月 | 航空技術研究所原動機部 |
| TR-25 | 航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の
計画と構造
Design and Construction of the National
Aeronautical Laboratory 2m×2m
Transonic Wind Tunnel | 1962年3月 | 航空技術研究所 |

非定常境界層の相似解とその安定*

小橋安次郎**・恩地 瑛***

A Similar Solution of Unsteady Laminar boundary Layer and Its Stability Characteristics

By Yasujirō KOBASHI & Akira ONJI

In the first part of the paper, the boundary layer equation of a time-dependent two-dimensional laminar flow along a flat plate is treated. Analysis shows that, when the basic flow changes with time as $U_0 = \bar{U} / \left(1 - \bar{U} \frac{kt}{L}\right)$, there exists a similar solution in the sense that it can be characterized by a single form parameter $Se = kx$. Here \bar{U} is a characteristic velocity independent of time, and t and L are characteristic time and length respectively. The form parameter Se defined in this paper has a meaning of the ratio of the accelerating force of the main flow to the shear force in the boundary layer.

In the second part of the paper, the stability equation of a time-dependent two-dimensional boundary layer along a flat plate is treated and the Orr-Sommerfeld's equation is deduced for a quasi-stationary case. The equation is solved for the boundary layer profile calculated in the above section, which shows that the boundary layer becomes more stable when the basic flow is accelerated and becomes less stable when it is decelerated.

序 論

外流が時間的に変動する場合の境界層の遷移の問題は、飛しょう体が加速または減速をうけながら飛行する場合の抗抵、あるいは流体機械の内部流動における抵抗に関連して実用上重要である。

一般に境界層の遷移現象は非常に複雑で、その機構についても十分明らかにされていない点もあるが、境界層内に発生した微小な振動の増幅、すなわち Tollmien-Schlichting wave の発達から始まると考えられている。これは流れのレイノルズ数がある値を越えると、特定の周波数をもった微小な振動が選択的に増幅される現象で、境界層の安定特性といわれる。増幅も減衰もしない周波数がいわゆる中立安定周波数と呼ばれるもので、また、増幅周波数の現われる限界のレイノルズ数が臨界レイノルズ数である。

* 昭和38年7月27日受付

** 空気力学第二部 *** 空気力学第一部

定常非圧縮性二次元流の場合の境界層の安定特性は、すでに多くの人によって研究されており、Orr-Sommerfeld の方程式と呼ばれる四階の常微分方程式の境界値問題の解として解かれている。この場合境界層の速度分布の形状が、安定特性に著しい影響をもつことが知られている。とくに、迎角のない平板の境界層、いわゆる Blasius 解に対しては Tollmien¹⁾, Schlichting²⁾, Lin³⁾, Shen⁴⁾ らの研究があり、中立安定周波数の曲線、等増幅度の曲線などが求められている。これらの理論の結果は Schubauer-Skramstad⁵⁾ が戦時中に行なった有名な実験によって確かめられている。また、圧力勾配のある流れについては Schlichting⁶⁾, Pretsh⁷⁾ らの理論計算がある。

外流が時間的に変動する場合には、境界層の速度分布もそれに伴って変化する。したがって、非定常境界の安定特性を調べるためには、まず速度分布を明らかにすることが重要な課題で、とくに、外流が加速あるいは減速している場合の境界層速度分布を知ることは、非定常境界層の安定を議論するにあたって第一に必要な問題である。

この報告では第一節において外流の時間変動が

$$U_0 = \bar{U} \left(1 - \frac{kt}{L} \bar{U} \right)$$

の形で与えられる場合に、流れの中におかれた平板の境界層速度分布が時間的に相似を保つことを示し、その分布を数値計算によって求めた。ただし、 \bar{U} および L はそれぞれ速度および長さの次元をもつ定数である。また k は無次元定数で、その値の正負によって単調加速または単調減速の流れが得られる。計算結果は、加速流では Blasius 解よりも丸味をもった分布が、また、減速流では Blasius 解よりもやせた分布をもつことが示された。

第2節では、非定常境界層の速度分布が相似を保つ場合について安定を支配する方程式を導き、とくに非定常性の弱い場合には、定常の方程式、すなわち Orr-Sommerfeld の式に帰着することを示した。また第1節に求めた速度分布に対して安定計算を行ない、加速流が減速流に比較してより安定であることを明らかにした。

記 号

x, y	直角座標成分	δ^*	境界層の排除厚
u, v	x 方向および y 方向の境界層速度成分	R	レイノルズ数
U_0	境界層の外の流れの速度	ψ	流れ関数
p	圧力	c	微小振動の無次元位相速度
t	時間	α	微小振動の無次元波数
ν	動粘性係数	u', v', p'	速度および圧力の微小変動部分
\bar{U}	速度定数	S_e	(18) で定義される無次元量
δ	境界層の厚さ		

§ 1. 非定常境界層の一相似解

境界層の外の流れが時間 t のみの関数であるとき、二次元非圧縮性流体の境界層基礎方程式およびその境界条件はそれぞれ以下の式で与えられる⁸⁾。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$u = v = 0 \quad (y = 0) \quad (3)$$

$$u = U_0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (4)$$

ここに U_0 は境界層の外の流れの速度である。(1) は境界層の運動方程式、(2) は連続の式である。

\bar{U} を速度の次元をもつ定数とし

$$U_0 = \bar{U} \phi(t) \quad (5)$$

とおく。さらに、以下の式により上記諸量の無次元化を行なう。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & u^* &= \frac{u}{\bar{U}} \\ y^* &= \frac{y}{L} & v^* &= \frac{v}{\bar{U}} \\ t^* &= \frac{t}{L/\bar{U}} & \phi^*(t^*) &= \phi(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに L は代表的な長さをあらわすものとする。これらの無次元量を使って (1) および (2) を書きかえると

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{R_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (8)$$

となる。ここに R_L は

$$R_L = \frac{\bar{U} L}{\nu} \quad (9)$$

で定義されるレイノルズ数である。

また、無次元の流れ関数 ψ^* をつぎのようにおく。

$$\psi^* = \sqrt{\frac{\phi^*}{R}} x^* \{f_0^* + x^* f_1^* + x^{*2} f_2^* + \dots\} \quad (10)$$

ただし、 f_0^* f_1^* \dots 等はいずれも無次元長さ

$$\eta = \frac{y^*}{2} \sqrt{R \frac{\phi^*}{x^*}} \quad (11)$$

のみの関数であるとする。

(10) と (7) の関係から

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\phi^{*2}}{8x^*} \left[\begin{aligned} & -2(x^*f_1^{*'} + 2x^{*2}f_2^{*'} + \dots + nx^{*n}f_n^{*'} + \dots) \times \\ & (f_0^{*'} + x^*f_1^{*'} + x^{*2}f_2^{*'} + \dots + x^{*n}f_n^{*'} + \dots) \\ & + (f_0^{*''} + x^*f_1^{*''} + x^{*2}f_2^{*''} + \dots + x^{*n}f_n^{*''} + \dots) \times \\ & (f_0^{*'} + 3x^*f_1^{*'} + 5x^{*2}f_2^{*'} + \dots + (2n+1)x^{*n}f_n^{*'} + \dots) \\ & + (f_0^{*'''} + x^*f_1^{*'''} + x^{*2}f_2^{*'''} + \dots + x^{*n}f_n^{*'''}) \end{aligned} \right] \right\} \\ & = \\ & \frac{\dot{\phi}^*}{8x^*} \left[\begin{aligned} & 4(x^*f_0^{*'} + x^{*2}f_1^{*'} + \dots + x^{*n+1}f_n^{*'} + \dots) \\ & + 2\eta(x^*f_0^{*''} + x^{*2}f_1^{*''} + \dots + x^{*n+1}f_n^{*''}) \\ & + 8x^* \end{aligned} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

ただし・は ϕ^* の t に関する微分, ', '' ... は f_n^* の η に関する微分をあらわすものとする。

(12) から明かなように k を定数として ϕ^* が

$$\dot{\phi}^* = k\phi^{*2} \quad (13)$$

の関係をみたすときに相似解が存在することが解る。すなわち (10) の形の関数が存在し、速度成分が η の関数としてあらわすことができる。(13) は容易に積分できて

$$\phi^* = \frac{1}{1 - kt^*}$$

となる。これを次元を有する量にもどせば

$$\bar{U}\phi(t) = \frac{\bar{U}}{1 - \bar{U}k \frac{t}{L}} \quad (14)$$

となる。(14) は $k > 0$ のときに加速流を, $k < 0$ のときに減速流を与える。

(13) の関係が成立つ場合, f_n^* のみたすべき関係は

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f_0^* \\ kf_1 &= f_1^* \\ k^2f_2 &= f_2^* \\ &\vdots \\ k^n f_n &= f_n^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

とにおいて (12) を x^* の冪について整理することによって次の各式で与えられる。すなわち

$$f_0''' + f_0''f_0 = 0 \quad (16-1)$$

$$f_1''' + f_0f_1'' + 3f_1'f_0' - 2f_1'f_0' = 4f_0' + 2\eta f_0 - 8 \quad (16-2)$$

$$f_2''' + (f_0 f_2'' + 3f_1' f_1'' + 5f_0' f_2') - 2(f_1'^2 + 2f_0' f_2') = 4f_1' + 2\eta f_1 \quad (16 \cdot 3)$$

.....
.....

一般に $i \geq 2$ に対して

$$f_n''' + \sum_{i=0}^n (2i+1) f_i f''_{n-i} - 2 \sum_{i=0}^n i f_i' f_{n-i} = 4f'_{i-1} + 2\eta f_{i-1} \quad (16)$$

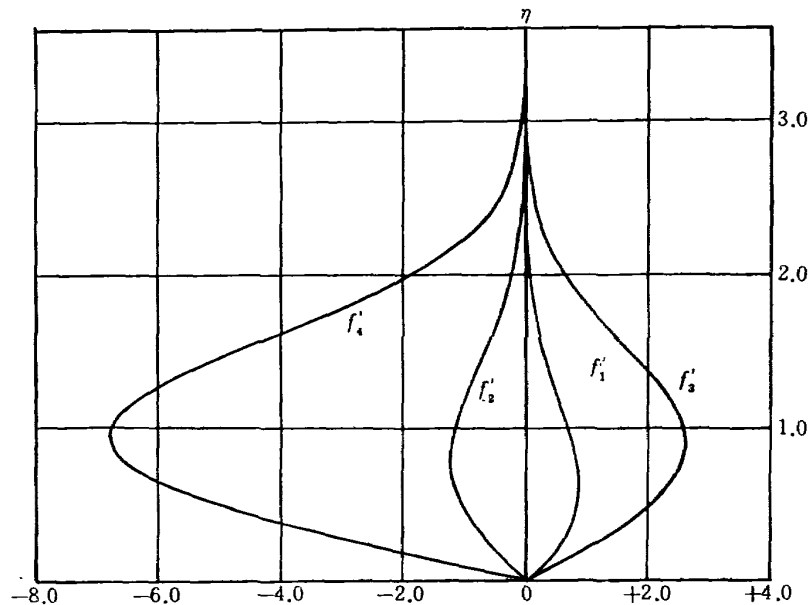
なる関係がある。一方境界条件 (3) および (4) は

$$\left. \begin{aligned} f_0 = f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0 & \quad \eta = 0 \\ f_0' = f_1' = f_2' = \dots = f_n' = 0 & \quad \eta = 0 \\ f_0' = 2 \quad f_1' = f_2' = \dots = f_n' = \dots = 0 & \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。

(16-1) において f_0 はよく知られた Blasius の式の解である。したがって (16-2) は f_1 に関して線型の常微分方程式と考えることができる。同様にして一般式 (16) の f_n は f_{n-1} 以下を既知関数とする線型の常微分方程式の解として求めることができる。

電子計算機 DATATRON 205 を使用して行なった数値計算の結果を第 1 図および第 1 表に示す。



第 1 図 f_r'

つぎに

$$S_e \equiv \frac{k}{L} x \quad (18)$$

で定義される S_e を導入すれば、流れ関数 ψ は

$$\psi = \sqrt{\nu x \bar{U}} \phi (f_0 + S_e f_1 + S_e^2 f_2 + \dots + S_e^n f_n + \dots) \quad (19)$$

となり、したがって境界層速度分布 u は

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\bar{U}}{2} \phi (f_0' + S_e f_1' + S_e^2 f_2' + \dots + S_e^n f_n' + \dots) \quad (20)$$

第 1 表

η	f_1	f_1'	f_1''	η	f_2	f_2'	f_2''
0.0	0.00000	0.00000	3.39408	0.0	0.00000	0.00000	-2.67392
0.1	0.01567	0.30074	2.63393	0.1	-0.01329	-0.26424	-2.58169
0.2	0.05775	0.52944	1.95340	0.2	-0.05227	-0.51139	-2.34078
0.3	0.11942	0.69406	0.82950	0.3	-0.11458	-0.72904	-1.99897
0.4	0.19469	0.80249	0.38406	0.4	-0.19683	-0.90917	-1.59660
0.5	0.27831	0.86253	0.38406	0.5	-0.25902	-1.04746	-1.16700
0.6	0.36583	0.88181	0.01386	0.6	-0.80488	-1.12457	-0.73720
0.7	0.53840	0.86772	-0.28387	0.7	-0.52213	-1.19561	-0.32854
0.8	0.57910	0.82734	-0.51273	0.8	-0.64269	-1.20953	-0.04264
0.9	0.61837	0.76732	-0.67728	0.9	-0.76287	-1.18873	0.36446
1.0	0.69152	0.69384	-0.78305	1.0	-0.87946	-1.13855	0.62909
1.1	0.75688	0.61246	-0.83652	1.1	-0.98980	-1.06496	0.83235
1.2	0.81391	0.52804	-0.84506	1.2	-1.09188	-0.97416	0.97353
1.3	0.86252	0.44467	-0.81671	1.3	-1.18426	-0.87225	1.05505
1.4	0.90299	0.36564	-0.75994	1.4	-1.26615	-0.76496	1.08214
1.5	0.93587	0.29335	-0.68321	1.5	-1.33725	-0.65739	1.06230
1.6	0.96194	0.22939	-0.59460	1.6	-1.39776	-0.55377	1.00467
1.7	0.98206	0.17458	-0.50193	1.7	-1.44824	-0.45738	0.91925
1.8	0.99716	0.12906	-0.40968	1.8	-1.48955	-0.37051	0.81605
1.9	1.00817	0.09244	-0.32421	1.9	-1.52270	-0.29445	0.70434
2.0	1.01592	0.06390	-0.24821	2.0	-1.54882	-0.22966	0.59207
2.1	1.02118	0.04242	-0.18351	2.1	-1.56900	-0.17585	0.48539
2.2	1.02460	0.02681	-0.13066	2.2	-1.58432	-0.13225	0.38862
2.3	1.02670	0.01590	-0.08920	2.3	-1.59575	-0.09771	0.30426
2.4	1.02790	0.00862	-0.05801	2.4	-1.60413	-0.07095	0.23324
2.5	1.02851	0.00401	-0.03554	2.5	-1.60739	-0.05063	0.17531
2.6	0.02876	0.00128	-0.02010	2.6	-1.61442	-0.03549	0.12940
2.7	1.02881	-0.00019	-0.01004	2.7	-1.61739	-0.02440	0.09396
2.8	0.02875	-0.00086	-0.00389	2.8	-1.61940	-0.01640	0.06725
2.9	0.02865	-0.00106	-0.00045	2.9	-1.62074	-0.01071	0.04758
3.0	1.02855	-0.00101	0.00123	3.0	-1.62190	-0.00670	0.03340
3.1	1.02841	-0.00085	0.00184	3.1	-1.62212	-0.00390	0.02146
3.2	1.02838	-0.00066	0.00187	3.2	-1.62241	-0.00193	0.00944
3.3	1.02833	-0.00048	0.00162	3.3	-1.62248	-0.00053	0.00374
3.4	1.02829	-0.00034	0.00128	3.4	-1.62249	0.00000	0.00000
3.5	1.02826	-0.00023	0.00095				
3.6	1.02824	-0.00015	0.00067				
3.7	1.02823	-0.00009	0.00045				
3.8	1.02822	-0.00005	0.00024				
3.9	1.02822	-0.00003	0.00008				
4.0	1.02822	-0.00000	0.00000				

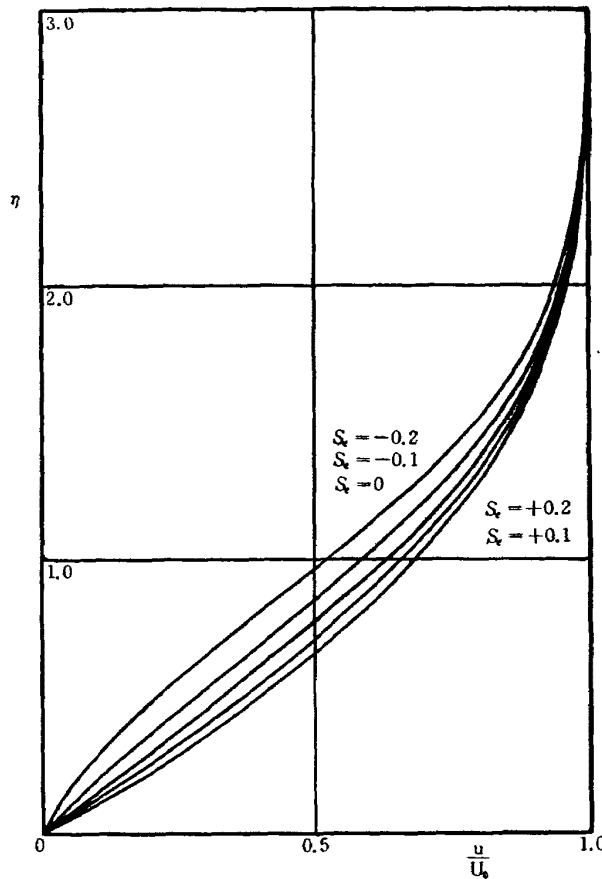
η	f_3	f_3'	f_3''	η	f_4	f_4''	f_4'
0.0	0.00000	0.00000	4.72307	0.0	0.00000	0.00000	-11.29267
0.1	0.02355	0.46960	4.64178	0.1	-0.05634	-1.12444	-11.14706
0.2	0.09338	0.92296	4.39913	0.2	-0.22391	-2.21935	-10.70014
0.3	0.20708	1.34443	4.00692	0.3	-0.49821	-3.25433	-9.94962
0.4	0.36073	1.72007	3.48660	0.4	-0.87178	-4.19962	-8.91016
0.5	0.54917	2.03839	2.86565	0.5	-1.33423	-5.02774	-7.61242
0.6	0.76621	2.29087	2.17498	0.6	-1.87262	-5.71499	-6.10160
0.7	1.00497	2.47215	1.44707	0.7	-2.47191	-6.24287	-4.43547
0.8	1.25820	2.58013	0.71449	0.8	-3.11547	-6.59917	-2.68184
0.9	1.51859	2.61594	0.00873	0.9	-3.78584	-6.77880	-0.91538
1.0	1.77911	2.58374	-0.64110	1.0	-4.46542	-6.78439	0.78634
1.1	2.03330	2.49044	-1.20956	1.1	-5.13725	-6.62622	2.34772
1.2	2.27547	2.34523	-1.67638	1.2	-5.78578	-6.32181	3.70059
1.3	2.50097	2.15902	-2.02774	1.3	-6.39752	-5.89491	4.78989
1.4	2.70630	1.94375	-2.25738	1.4	-6.96162	-5.37388	5.57871
1.5	2.88916	1.71156	-2.36698	1.5	-7.47018	-4.78971	6.05187
1.6	3.04844	1.47405	-2.36588	1.6	-7.91850	-4.17379	6.21714
1.7	3.18413	1.24155	-2.26991	1.7	-8.30488	-3.55559	6.10380
1.8	3.29720	1.02255	-2.09947	1.8	-8.63041	-2.96078	5.75849
1.9	3.38931	0.82338	-1.87728	1.9	-8.89850	-2.40970	5.23920
2.0	3.46266	0.64806	-1.62606	2.0	-9.11429	-1.91666	4.60821
2.1	3.51978	0.49846	-1.36618	2.1	-9.28403	-1.48978	3.92535
2.2	3.56322	0.37455	-1.11463	2.2	-9.41454	-1.13157	3.24257
2.3	3.59549	0.27484	-0.88375	2.3	-9.51257	-0.83990	2.60032
2.4	3.61891	0.19684	-0.68134	2.4	-9.58455	-0.60922	2.02616
2.5	3.63548	0.13750	-0.51098	2.5	-9.63620	-0.43188	1.53517
2.6	3.64692	0.09357	-0.37288	2.6	-9.67242	-0.29926	1.13179
2.7	3.65461	0.06192	-0.26480	2.7	-9.69724	-0.20272	0.81244
2.8	3.65962	0.03973	-0.18301	2.8	-9.71389	-0.13427	0.56821
2.9	3.66279	0.02459	-0.12308	2.9	-9.72481	-0.08696	0.38750
3.0	3.66471	0.01454	-0.08051	3.0	-9.73180	-0.05506	0.25796
3.1	3.66581	0.00805	-0.05121	3.1	-9.73618	-0.03405	0.16791
3.2	3.66640	0.00397	-0.03165	3.2	-9.73886	-0.02050	0.10722
3.3	3.66666	0.00149	-0.01897	3.3	-9.74044	-0.01191	0.06758
3.4	3.66673	0.00083	-0.01352	3.4	-9.74134	-0.00650	0.04256
3.5	3.66668	0.00043	-0.00682	3.5	-9.74181	-0.00307	0.02745
3.6	3.66668	0.00028	-0.00324	3.6	-9.74199	-0.00139	0.00885
3.7	3.66668	0.00002	-0.00113	3.7	-9.74199	-0.00053	0.00643
3.8	3.66668	0.00000	-0.00037	3.8	-9.74199	-0.00018	0.00187
3.9	3.66668	0.00000	-0.00000	3.9	-9.74199	-0.00000	0.00037
4.0	3.66668	0.00000	-0.00000	4.0	-9.74199	-0.00000	0.00000

の形で S_e をパラメータとして表わすことができる。(18), (13) より

$$S_e = \frac{k}{L} x = \frac{\phi^* x}{\phi^{*2} L} = \frac{x}{\bar{U}\phi} \frac{\bar{U}\dot{\phi}}{\bar{U}\phi} = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\bar{U}\dot{\phi}}{\bar{U}\phi} = \frac{\rho\bar{U}\dot{\phi}}{\mu\left(\frac{\phi\bar{U}}{\delta}\right)} \left(\delta = \sqrt{\frac{x\nu}{\bar{U}\phi}}\right)$$

となる。最後の式の分子は外流の加速力を表わし、分母は境界層を通して作用する接線応力を表わしてあり、したがって S_e は加速力と接線力の釣合を表わす特性量であることが理解される。流れは S_e の値が正のときは加速流に、また負のときは減速流に対応している。 $S_e=0$ は定常一様流である。

第2図は S_e のいくつかの値に対する境界層速度分布を示したものであるが、一般に $S_e > 0$ すなわち加速流のときは Blasius 分布よりも丸味をもった形状を有し、 $S_e < 0$ すなわち減速流のときにはそれよりもやせた形状を有する。



第2図 種々の S_e に対する速度分布

また (19) を y について微分すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \bar{U}\phi \sqrt{\frac{\bar{U}\phi}{\nu x}} (f_0'' + S_e f_1'' + S_e^2 f_2'' + \dots + S_e^n f_n'' + \dots) \quad (21)$$

となるから $y=0$ における $\frac{\partial u}{\partial y}$ の値 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ も容易に求めることができる。とくに、剝離点を与

える $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$ に対応する S_e の値を f_4 までの数値から求めれば

$$S_{e \text{ sep}} = -0.2789$$

となる。すなわち、外流が (14) の形で与えられるときの剝離点の位置 x_{sep} が求められる。

§ 2. 非定常境界層の安定

境界層外の流れが時間的に変動している場合の境界層の安定を議論するにあたって、まず、定常流の場合の取り扱いと同様にレイノルズ数は十分に大きく、したがって流れは二次元平行流とみなし得るものとする。さらに、基本流の速度分布が § 1 で得られたような相似解をもつものとし、

$$u_1 = U_0 g(y/\delta) = \bar{U} \phi(t) g(y/\delta) \quad (22)$$

で表わされるものとする。ここに $\bar{U} \phi(t)$, y および g は § 1 と同様にそれぞれ代表速度、外流変動率および境界層速度分布関数である。

いま (22) で与えられる流れに微小な速度および圧力の変動が加わって

$$u = u_1 + u'$$

$$v = v'$$

$$p = p_1 + p'$$

の形になったとする。

これを粘性流体の基礎方程式、すなわち Navies-Stokes の方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

および連続の式 (2) に代入、微小変動の二次以上の項を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} x &= \delta \xi, & \frac{1}{R_\delta} &= \frac{\nu}{\delta U \phi} \\ y &= \delta \eta, \\ \tau &= \bar{U} \int \frac{\phi}{\delta} dt, & g(y/\delta) &= g(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とおくと、時間に関する微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{U\phi}{\delta} - \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\delta}{\delta} \quad (27)$$

となり $\frac{\partial}{\partial \tau}$, $\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\eta \frac{\partial}{\partial \eta}$ を同じ程度の大きさと考えると

$$\frac{\delta}{\delta} \frac{\bar{U}\phi}{\delta} = \frac{\delta \dot{\phi}}{U\phi^2} = \frac{\delta k}{L} = 0(\delta) \quad \left(\delta = \sqrt{\frac{\bar{U}\phi}{\nu x}} \right) \quad (28)$$

となるから (27) の右辺第一項が卓越することがわかる。

これは境界層厚さの時間変化が小さい事を意味するしたがって

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U\phi}{\delta} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (29)$$

として (25) を変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{U\phi}{\delta} \left(\frac{\partial u'}{\partial \tau} + g \frac{\partial u'}{\partial \xi} + v' \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) &= -\frac{1}{\rho \bar{U}\phi} \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \frac{1}{R_\delta} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial \tau} + g \frac{\partial v'}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\rho \bar{U}\phi} \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \frac{1}{R_\delta} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。ここで微小変動を

$$\left. \begin{aligned} u' &= \tilde{u}(\eta, \tau) e^{\alpha(\xi - c\tau)} \\ v' &= \tilde{v}(\eta, \tau) e^{i\alpha(\xi - c\tau)} \\ p' &= \rho \bar{U}\phi \tilde{p}(\eta, \tau) e^{i\alpha(\xi - c\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とおく。 $\tilde{u}\tilde{v}$ および \tilde{p} はいづれも η および τ の関係である。また α および c は (26) で定義される基準量であらわした波数および位相速度である。(28) を (27) に代入して整理すれば

$$\frac{1}{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \tilde{v} - \alpha^2 \tilde{v}) + (g - c)(D^2 \tilde{v} - \alpha^2 \tilde{v}) - g' \tilde{v} = \frac{1}{i\alpha R_\delta} (D^4 \tilde{v} - 2\alpha^2 D^2 \tilde{v} + \alpha^4 \tilde{v}) \quad (29)$$

が得られる。ただし $D^n = \frac{d^n}{d\eta^n}$ をあらわすものとし、' は g の η に関する微分をあらわすものとする。

(29) は定常流の場合における Orr-Sommerfeld の方程式に相当するものであるが、ただ左辺の第一項の非定常項が存在していることが異なっている。一般に微小変動の時間変化が、外流の時間変化に比較して十分早い場合は準定常の仮定が成り立つと考えられるが、これは (29) の非定常項が他の項に比較して無視できる場合に相当する。このことは、左辺の第一項が critical layer, すなわち、位相速度が基本流の速度に等しくなる位置においても、他の項に比較して十分小さくなければならないことを意味している⁹⁾。いま、この位置を η_c とすればこの近傍では (29) は近似的に

$$\frac{1}{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \tilde{v} - \alpha^2 \tilde{v}) + (g-c)(D^2 \tilde{v} - \alpha^2 \tilde{v}) \approx \frac{1}{i\alpha R_\delta} D^4 \tilde{v} \quad (30)$$

となるが⁸⁾, ここで

$$\zeta = (\eta - \eta_c)(\alpha R_\delta g')^{1/2} \quad (30)$$

とおけば (29) は

$$\frac{1}{i\alpha} (\alpha R_\delta g')^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{d^2 \tilde{v}}{d\zeta^2} \right) + g' (\alpha R_\delta g')^{1/2} \zeta \frac{d^2 \tilde{v}}{d\zeta^2} \approx g' (\alpha R_\delta g')^{1/2} \frac{d^4 \tilde{v}}{d\zeta^4} \quad (31)$$

のようにあらわされる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \zeta \frac{\partial \log \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \log \zeta &= \frac{\partial \log \zeta}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \cdot \frac{\delta_0}{\bar{U}\phi} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\phi}\delta_0}{\bar{U}\phi^2} \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\phi}\delta_0}{\bar{U}\phi^2} \zeta \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

であることを考慮すれば (31) の左辺第一項は

$$\frac{1}{3} \frac{\dot{\phi}\delta_0}{\bar{U}\phi^2} \cdot \frac{1}{\alpha} (\alpha R_\delta g')^{1/2} \ll g' (\alpha R_\delta g')^{1/2} \quad (32)$$

のときに省略できる。これは基本流の速度分布が (22) の形で与えられるときに、準定常問題として取り扱いうるための条件を与えるものである。(32) の関係を次元を有する量にもどして $\frac{du_1}{dy} \approx \frac{\bar{U}\phi}{\delta}$ とおけば

$$\frac{\dot{\phi}x}{\bar{U}\phi^2} \ll \frac{1}{3} (R_x)^{1/2} (R_\delta)^{-1/2} (\alpha x)^{1/2} \quad (33)$$

となる。この左辺は § 1 にのべた S_e であるから

$$S_e \ll \frac{1}{3} (R_x)^{1/2} (R_\delta)^{-1/2} (\alpha x)^{1/2} \quad (34)$$

がこの場合の準定常の仮定が成立するための条件である。この場合安定方程式 (29) は Orr-Sommerfeld の式に帰着し,

$$(g-c)(D^2 \tilde{v} - \alpha^2 \tilde{v}) - g'' \tilde{v} = \frac{1}{i\alpha R_\delta} (D^4 \tilde{v} - 2\alpha^2 D^2 \tilde{v} + \alpha^4 \tilde{v}) \quad (35)$$

となる。

(35) は $g(\eta)$ が解析的である場合には, η の解析関数である四組の基本解をもつはづで, その一次結合の解を

$$\tilde{v} = A_1 \tilde{v}_1 + A_2 \tilde{v}_2 + A_3 \tilde{v}_3 + A_4 \tilde{v}_4 \quad (36)$$

とおけば境界条件

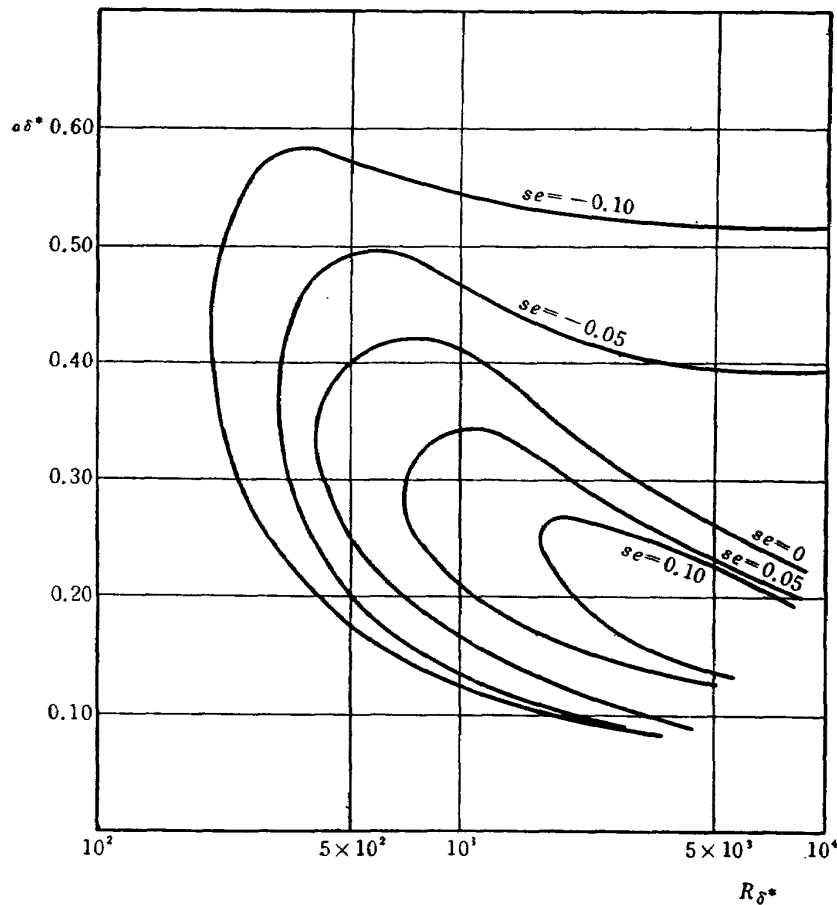
$$\left. \begin{array}{lll} \tilde{v}=0 & D\tilde{v}=0 & \eta=0 \\ \tilde{v}=0 & D\tilde{v}=0 & \eta=1 \end{array} \right\} \quad (37)$$

から

$$F(\alpha, c, R_{\delta_0})=0$$

の形の判別方程式の固有値として α , c , および R_{δ_0} を決定することができる。とくに, 中立安定の条件は c の虚数部分が 0 であるときの R_{δ_0} と α の関係として求めることができる。

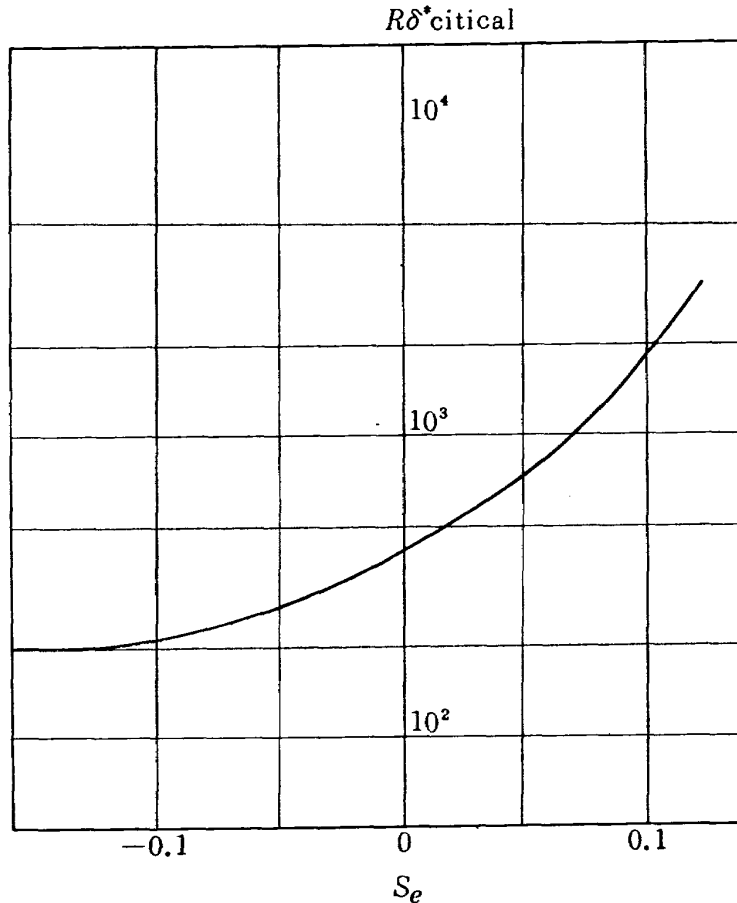
第3図は § 1 に得られた速度分布の解を用いてそれぞれの S_e に対応する中立安定曲線を計算した結果を示したものである。図において横座標は境界の排除厚を長さの基準にしたレイノルズ数, 縦座標は同じ排除厚を基準にした波数である。中立安定曲線の外側は安定領域, 内側は不安定領域を示す。例を $S_e = -0.05$ の場合にとれば, $R_{\delta_0} < 318$ に対しては不安定領域は存在しない, すなわち完全に安定である。この限界のレイノルズ数が臨界レイノルズ数である。 S_e が増大すれば不安定領域が減少し, 逆に S_e が減少すれば不安定領域が増大する。また, 流れの x 軸上の一点に着目してその点の時間による変化を考えると, 外流が (14) にしたがって変動するときレイノルズ数は時間と共に変化するが S_e の値は変わらない。加速流ではレイノルズ数は時間と共に増加し, 減速流では減少する。したがって, 加速流では時間と共に遷移点が前進し, 減速流では逆に遷移点が後



第3図 種々の S_e に対する中立安定曲線

退することが考えられる。

先にのべたように S_e と臨界レイノルズ数の間には一対一の関係がある。この関係を図に示したものが第4図である。 $S_e=0$ は平板定常流の臨界レイノルズ数 420 に対応する。図から明らかなように S_e が増加すれば臨界レイノルズ数が増加し、したがって完全安定の領域が増加する。 S_e が減少すれば、全くこれと逆になる。



第4図 臨界レイノルズ数— S_e 曲線

第3図および第4図の結果から明らかなように S_e が正、すなわち加速流は S_e が負、すなわち減速流に比較してより安定であることがわかる。

む す び

本報告では、境界層外の速度が(14)に従って時間的に変化している場合には、境界層速度分布が相似を保つことを明らかにし、その関数形を数値計算によって求めた。この場合の速度分布は、外流の加速力と境界層を通して作用する接線力の釣合を、あらゆる無次元量 S_e によって特徴づけられる。

ついで、速度分布が時間的に相似を保つ場合の非定常境界層に微小振動の考えを適用し、 S_e が小さい範囲では安定方程式が定常の場合の Orr-Sommerfeld の式に帰着することを示し、安定特

性が、境界層速度分布の形状、したがって S_0 によって影響されることを導いた。

得られた結果を要約すればつぎのとおりである。外流が加速されているときは、速度分布が定常の場合の分布よりも丸味をもった形状を有し、安定度はそれよりも増大するが外流が減速しているときは、逆に定常の速度分布よりもやせた形状を有し安定度が減少する。

終りにこの研究にあたり、御教示いただいた東京大学谷一郎教授に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) W. Tollmien: Über die Entstehung der Turbulenz. N.A.C.A. Tech. Memo. No. 609 (1931)
- 2) H. Schlichting: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse 182-208 (1933)
- 3) C.C. Lin: On the stability of two-dimensional parallel flows. Quat. Appl. Math. 3. 117-142 (July 1945); 3. 218-234 (Oct. 1945); 3. 277-301 (Jan. 1946)
- 4) S.F. Shen: Calculated amplified oscillations in plane Poiseuille and Blasius flows J.A.S. 21. 62-64 1954
- 5) G.B. Schubauer and H.K. Skramstad: Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow J.A.S. 14. (1947)
- 6) H. Schlichting: Über die theoretische Berechnung der kritischen Reynoldsschen Zahl einer Reibungsschicht in beschleunigter und verzögerter Strömung. Jb. d. dt. Luftfahrtforschung. 97 (1940)
- 7) J. Pretsch: Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. d. dt. Luftfahrtforschung 58 (1941)
- 8) H. Schlichting: Boundary layer theory, McGraw-Hill (1960)
- 9) S.F. Shen: Some considerations of the laminar stability of incompressible, parallel time-dependent flow. J.A.S. 28 (1961)

TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦
TR-29	1 m×1 m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1 m×1 m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962年11月	川井忠彦, 堀 武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定とその 微小振り振動について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962年11月	川井忠彦, 林 洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962年11月	川井忠彦, 江川幸
TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Reported Load Testing Rigs for Full Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田完四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	松田 勇, 松崎利一
TR-37	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu Wada
TR-38	鋳鉄のような脆性材料からなる円板の 回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究 (第1報) —その性能におよぼす各種因子の 影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full- Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉦一

航空宇宙技術研究所報告42号

昭和38年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷株式会社
東京都港区芝南佐久間町1の53