NAL TR-45

UDC 512.8
518.6

航空宇宙技術研究所報告

'ECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-45

固有値問題 $(\sum \lambda^k A_k)\, x=0$ の数値解法

戸 川 隼 人

1963年4月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松木正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin-Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 塙 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての実験的研究 Experimental Results of the Interaction between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法 On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961年11月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge-Beam Method of Measuring Gas Density	1961年12月	和田 勇, 細川 巌 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究（I） An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン要素試験設備 Test Facilites of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風胴の計画と構造 Desing and Construction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風胴のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巌, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦

固有値問題 $(\sum\lambda^k A_k)x=0$ の数値解法*

戸　川　隼　人**

A Nnmerical Method for the Eigenvalue Problem $(\sum\lambda^k A_k)x=0$

By Hayato TOGAWA

An iteration formula

$$x_{k+1}=A_0^{-1}A_1x_k+A_0^{-1}A_2x_{k-1}+\cdots\cdots+A_0^{-1}A_mx_{k-m+1}$$

is presented for the eigenvalue problem stated above. Under certain condition similar as in the theorem of Mises, the iterated vector x_k converges to its principal eigenvector. This method is advantageous to a problem where m is large and only one or two eigenvalues are wanted.

1. 緒　論

行列の固有値問題として普通知られているのは与えられた行列 $A=(a_{ij})$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\cdots\cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix}=0 \tag{1}$$

を満足する固有値 λ および固有ベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$ を求めることを意味するのであるが，航空機の振動の問題を扱う場合には

$$\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}\lambda & a_{12}-b_{12}\lambda\cdots\cdots a_{1n}-b_{1n}\lambda \\ a_{21}-b_{21}\lambda & a_{22}-b_{22}\lambda\cdots\cdots a_{2n}-b_{2n}\lambda \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}-b_{n1}\lambda & a_{n2}-b_{n2}\lambda\cdots\cdots a_{nn}-b_{nn}\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix}=0 \tag{2}$$

あるいは

---

* 昭和38年3月4日受付

** 計測工務部

$$
(3)\quad
\begin{pmatrix}
a_{11}-b_{11}\lambda-c_{11}\lambda^2 & a_{12}-b_{12}\lambda-c_{12}\lambda^2\cdots\cdots a_{1n}-b_{1n}\lambda-c_{1n}\lambda^2 \\
a_{21}-b_{21}\lambda-c_{21}\lambda^2 & a_{22}-b_{22}\lambda-c_{22}\lambda^2\cdots\cdots a_{2n}-b_{2n}\lambda-c_{2n}\lambda^2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}-b_{n1}\lambda-c_{n1}\lambda^2 & a_{n2}-b_{n2}\lambda-cn_2\lambda^2\cdots\cdots a_{nn}-b_{nn}\lambda-c_{nn}\lambda^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

さらに一般的に書けば，λ の多項式 $P_{ij}(\lambda)$ が与えられたとき

$$
(4)\quad
\begin{pmatrix}
P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda)\cdots\cdots P_{1n}(\lambda) \\
P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda)\cdots\cdots P_{2n}(\lambda) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{n1}(\lambda) & P_{n2}(\lambda)\cdots\cdots P_{nn}(\lambda)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0
$$

を満足する λ および x を求めることが，しばしば必要となる。(文献 1～8)

振動の問題におけるこれらの式は，いずれも偏微分方程式の固有値問題を Rayleigh-Ritz の方法で近似的に解析する場合に振動数方程式として得られるもので，したがって，行列の次数 n は要求される近似の度あいによって決まり，たとえば，基本振動数の粗い近似値を求めるだけならば $n=1$ とか 2 として簡単に計算できるが，高次の振動数や振動型を精密に求める場合には相当大きな行列を用いて計算しなければならない。逆にいえば，方程式を解く計算能力の限界によって問題の規模が制限されるわけで，手計算だけに頼っていた時代には高次の振動数や複雑な境界条件をもつ問題を扱うことができなかったのに対し，最近は電子計算機の発達によって計算能力が著しく増大したために，だんだんと複雑な問題が取り上げられるようになり，行列の次数の大きい場合にこのような固有値問題を解くことが必要になってきた。

ところが，電子計算機による固有値問題の解法として研究されているのは主として (1) の形の問題に関するもので，これについては多くの優れた解法が考案されているが，(3)，(4) の解法については研究された例が少なく，満足な結果は得られていない。後に述べるように (3)，(4) はある条件のもとでは (1) の形に帰着できるので理論的には一応解決されたということもできるが，実際の計算ではこのようにして計算することは必ずしも有利とはいえない。そこで著者は (1) の解法としてよく用いられている power method を拡張して，(4) にも適用できる一般的な反復法公式を作った。この方法は $P_{ij}(\lambda)$ の λ に関する次数が小さい場合は従来の方法と大差ないが，この次数が大きい場合にはかなり有利になるので，ここに報告する次第である。

なお，(2) の形の問題の解法はすでに確立されており，たとえば，文献 9, 10 などに紹介されているが一般の数値計算法の書物にはほとんど取り上げられていないためか案外知られていない。原理は非常に簡単で，ちょっと考えれば誰でも思いつくような方法であるが，当所機体部の川井技官

らと連名で振動の問題を解いて発表した時にも (2) の解法に関する問い合わせをいくつか受けたので，一部の人には蛇足とも思われるが，(2) の解法をついでに説明しておくことにする。

2. $(A-\lambda B)x=0$ の解法

(2) は $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ と置けば

$$(A-\lambda B)x=0 \tag{5}$$

と書ける。この解法を

$$|A|\neq 0$$

$$|A|=0, \qquad |B|\neq 0$$

$$|A|=|B|=0$$

(ただし，| | は行列式の値を表わす) の三つの場合に分けて考える。

まず，$|A|\neq 0$ の場合は A の逆行列が存在するからこれを (5) の両辺の左から掛けると

$$(I-\lambda A^{-1}B)x=0$$

となる。ここで，λ は 0 でない。($\lambda=0$ ならば $Ix=0$ より $x=0$ となるので固有値にならない。) そこで $\mu=1/\lambda$ と置いて書きかえると，普通の固有値問題と同じ (1) の形

$$(A^{-1}B-\mu I)x=0 \tag{6}$$

となる。したがって，この場合の解法は

i) 与えられた行列 A, B から $A^{-1}B$ を計算する。

ii) $A^{-1}B$ の固有値 μ と，それに対応する固有ベクトルを求める。

iii) 求むる固有値は $\lambda=1/\mu$, 固有ベクトルは x。

この内，$A^{-1}B$ の計算は A^{-1} を求めて B に掛けるよりも，最初から行列方程式

$$AX=B$$

を消去法で解く方が簡単で計算時間は短い。 また，固有値の計算法はいろいろあるが，A, B が対称行列であっても $A^{-1}B$ は必ずしも対称行列にはならない， という点に注意する必要がある。(工学上の多くの問題においては，もとの式の物理的意味から固有値が実数だから $A^{-1}B$ が対称行列であるということはできない。これは $A^{-1}B$ が一般に正規行列にならないからである。) 固有値の計算に power method を用いれば，μ の絶対値の大きい方から，すなわち，λ の絶対値の小さい方から答が出てくるので，精度の上からも，また途中で計算を打切る場合のためにも都合がよい。

つぎに $|A|=0$, $|B|\neq 0$ の場合は B の逆行列を (5) の左から掛けると

$$(B^{-1}A-\lambda I)x=0 \tag{7}$$

となるので前の場合と同様にして解くことができる。ただし，今度の場合は (7) の固有値を求める

のに power method を用いると λ の大きい方から答が出て，工学上重要な絶対値の小さい固有値は精度が落ちるので，他の方法を用いる方が望ましい。

最後に $|A|=0$, $|B|=0$ の場合であるが，これはかなり特殊な形であって，行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n}b_{11}b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n}b_{21}b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}b_{n1}b_{n2}\cdots\cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

の階数を p とするとき，$p<n$ ならば任意の λ が (5) を満足し，そうでない場合でも少くとも $\lambda=0$ と $\lambda=\infty$ は固有値となる。実際 (5) が $x=0$ 以外の解をもつ条件は

(8) $$|A-\lambda B|=0$$

であるが，$p<n$ ならば任意の λ に対しこの行列式の値は 0 となり，$p=n$ の場合でも $\lambda=0$ とすれば

$$|A-\lambda B|=|A|=0$$

また，$\lambda\to\infty$ のとき

$$|A-\lambda B|=\lambda\left|\frac{1}{\lambda}A-B\right|\longrightarrow 0$$

でいずれも (8) を満足する。振動の問題では普通 $|B|\neq 0$ であるので，このようなことは起こらないが，他の問題などで $|A|=|B|=0$ で $p=n$ というケースが現れた時には，(6)，(7) のような形には変換できないので特性方程式 (8) を解いて直接に λ を計算しなければならない。

3. $(A-\lambda B-\lambda^2 C)x=0$ の解法

(3) 式で $(a_{ij})=A$, $(b_{ij})=B$, $(C_{ij})=C$ と置けば

(9) $$(A-\lambda B-\lambda^2 C)x=0$$

となる。これが $x=0$ 以外の解を有するための条件は

(10) $$|A-\lambda B-\lambda^2 C|=0$$

で，この行列式を展開すると λ に関する $2n$ 次の多項式となるから (10) は $2n$ 次の代数方程式となり，したがって (9) は一般に $2n$ 箇の固有値をもつ。

解法は

$$|A|\neq 0$$
$$|A|=0, \qquad |C|\neq 0$$
$$|A|=|C|=0$$

の三つの場合に分けて考える。まず，$|A|\neq 0$ の場合は A の逆行列を (9) の左から掛けると

$$(I-\lambda A^{-1}B-\lambda^2 A^{-1}C)x=0$$

ここで $\lambda\neq 0$ だから $\mu=1/\lambda$ と置いて書きかえると

(11) $$(\mu^2 I-\mu A^{-}C)x=0$$

となる。この形の問題については次の定理がある。

定理　$n\times n$ 行列の２次の固有値問題

(12) $$(\mu^2 I-\mu M_1-M_2)x=0$$

は，$2n\times 2n$ 行列

$$\begin{pmatrix} O & I \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}$$

の普通の意味の固有値問題と同等である。

証明

$$\begin{pmatrix} O & I \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}$$

の固有値を μ，それに対応する固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ただし x は，この固有ベクトルの上半分，y は下半分を表わすものとする。x，y ともに n 次元のベクトルである）とすれば

$$\begin{pmatrix} O & I \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるが，これは計算すると

$$\begin{pmatrix} y \\ M_2x+M_1y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases} y=\mu x \\ M_2x+M_1y=\mu y \end{cases}$$

より

$$M_2x+\mu M_1x=\mu^2 x$$

すなわち

$$(\mu^2 I-\mu M_1-M_2)x=0$$

逆に μ，x を (12) の固有値および固有ベクトルとすれば

$$M_2x+\mu M_1x=\mu^2x$$

であるから

$$\begin{pmatrix} O & I \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu x \\ M_2x+\mu M_1x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$$

となり，μ は

$$\begin{pmatrix} O & I \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}$$

の固有値で

$$\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$$

がその固有ベクトルであることがわかる。(証明終)

この定理から，(11) は

$$\begin{pmatrix} O & I \\ A^{-1}C & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

の普通の意味の固有値問題と同等である。この行列の下半分を求める計算は

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n}c_{11}c_{12}\cdots\cdots c_{1n}b_{11}b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n}c_{21}c_{22}\cdots\cdots c_{2n}b_{21}b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}c_{n1}c_{2}\cdots\cdots c_{nn}b_{n1}b_{n2}\cdots\cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

に消去法を適用して，A の部分を単位行列に変形すれば C と B の部分はそれぞれ $A^{-1}C$ と $A^{-1}B$ になるので比較的簡単である。また，固有値を求める計算は，この行列が非対称であること，多くの場合に複素固有値を持つこと，などに注意すれば普通の方法が適用できる。なお (11) を $2n\times 2n$ の行列の問題に変換しないで $n\times n$ の行列の計算だけで解く方法を次節に述べるが，計算機の記憶容量が十分あれば $2n\times 2n$ の形で普通のサブルーチンを用いる方が簡単であろう。

つぎに $|A|=0$, $|C|\neq 0$ の場合はCの逆行列を (9) の左から掛けると

$$(C^{-1}A-\lambda C^{-1}B-\lambda^2I)x=0$$

すなわち

$$(\lambda^2I-(-\lambda C^{-1}B)-C^{-1}A)x=0$$

となるから前の定理を適用すると，これは

$$\begin{pmatrix} O & I \\ C^{-1}A & -C^{-1}B \end{pmatrix}$$

の固有値問題と同等になり，前の場合と同様にして固有値を求めることができる。

最後に，$|A|=|C|=0$ の場合はこのような変換ができないので特性方程式 (10) を直接に解かなければならない。

4. 一般の場合

(4) 式で $P_{ij}(\lambda)$ の λ の次数の最大のものを mとして

$$P_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)}\lambda^k$$

と置き，

$$A_k=(a_{ij}^{(k)}) \qquad (k=0, 1, \cdots\cdots, m)$$

とすれば

$$(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\cdots\cdots+\lambda^m A_m)x=0 \tag{13}$$

となる。まず $|A_0|\neq 0$ の場合は A_0 の逆行列を (13) の左から掛けて

$$\mu=1/\lambda$$
$$S_k=A_0^{-1}A_k \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots, m)$$

と置いて書きかえれば

$$(\mu^m I+\mu^{m-1}S_1+\mu^{m-2}S_2+\cdots\cdots+S_m)x=0 \tag{14}$$

となる。これは $mn\times mn$ 行列

$$\begin{pmatrix} O & I & O & O \cdots\cdots O \\ O & O & I & O \cdots\cdots O \\ O & O & O & I \cdots\cdots O \\ O & O & O & O \cdots\cdots I \\ -S_m & -S_{m-1} & -S_{m-2} & -S_{m-3}\cdots\cdots -S_1 \end{pmatrix}$$

の普通の固有値問題と同等である。(証明は前節の定理の場合と全く同様)。したがって，この固有値問題を解けば，その固有値が (14) の固有値であり，固有ベクトルの上から n 箇までの部分が (14) の（すなわち (13) の）固有ベクトルである。

しかし，m が大きい場合に普通の方法で上記の mn 次の行列の固有値問題を解くことは得策でない。なぜならば，この行列にはOの要素が多く，1が規則的に並んでいるが，普通の方法で解くとこのような特殊性は生かされず，一般の mn 次行列の場合と同程度の計算量が必要とされる。（特に電子計算機で機械的に計算する場合にそうである。）こうしたむだを省くため，普通使われ

ている解法で，手順の一部を変更して今の問題に計算を簡単化できるものはないかと各種の解法を検討してみたところ，最も有望なのは power method であった。この方法の概要はつぎのように述べられる。

解かれるべき固有値問題を

$$(M-\lambda I)x=0$$

とする。主固有値（M の固有値のうち絶対値の最も大きいもの）に対応する固有ベクトル x の第一近似ベクトル $x^{(1)}$ を適当に選ぶ。

$$x^{(2)}=Mx^{(1)}$$

$$x^{(3)}=Mx^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般に

$$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}$$

の反復によって $x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots\cdots$ を求めると，次の条件

i)　M の固有ベクトルは一次独立

ii)　$x^{(1)}$ は主固有値 λ に対応する固有ベクトル x の成分をもつ。

iii)　λ は実数

の下で $x^{(k)}$ は x に収斂する。(Mises の定理)

また上の条件 i), ii) が満足されて λ が複素数の場合には $k\to\infty$ のとき$x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$, $x^{(k+2)}$ は一次従属となり，その関係を

$$x^{(k+2)}+\alpha x^{(k+1)}+\beta x^{(k)}=0 \tag{15}$$

とするとき

$$\begin{cases} \lambda=-\dfrac{\alpha}{2}\pm i\sqrt{\beta-\dfrac{\alpha^2}{4}} \\ x=x^{(k+1)}-\bar{\lambda}x^{(k)} \end{cases} \tag{16}$$

によって λ と x が求められる。

つぎに，今求めた主固有値を用いて M を

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & O \\ & M' & & \vdots \\ & & & O \\ \hline O & \cdots & O & \lambda \end{array}\right)$$

の形に変換し，M' の主固有値（すなわち M の二番目の固有値）を求め，この操作をくりかえして，M のすべての固有値を計算する。

この方法をわれわれの問題に式の上で適用してみよう。第一近似ベクトルを

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

とし，これに行列を k 回作用させて得られるベクトルを

$$x^{(k)}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix}$$

とする。ただし，$x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$,…… はそれぞれ $x^{(k)}$ の上から n 箇の要素，次の n 箇の要素，……から作られる n 次元のベクトルを表わす。いま，$x^{(k)}$ から $x^{(k+1)}$ を求める計算に注目すると

$$x^{(k+1)}=\begin{pmatrix} O & I & O \cdots\cdots & O \\ O & O & I \cdots\cdots & O \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ O & O & O \cdots\cdots & I \\ -S_m & -S_{m-1} & -S_{m-2}\cdots\cdots & -S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ x_{m-1}^{(k)} \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x_m^{(k)} \\ -S_m x_1^{(k)}-S_{m-1}x_2^{(k)}-\cdots\cdots-S_1 x_m^{(k)} \end{pmatrix}$$

したがって

$$x_1^{(k+1)}=x_2^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)}=x_3^{(k)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{m-1}^{(k+1)}=x_m^{(k)}$$
$$x_m^{(k+1)}=-S_m x_1^{(k)}-S_{m-1}x_2^{(k)}-\cdots\cdots-S_1 x_m^{(k)}$$

これから，$k>m$ ならば

$$x_1^{(k)}=x_2^{(k-1)}=x_3^{(k-2)}=\cdots\cdots=x_m^{(k-m+1)}$$
$$x_2^{(k)}=x_3^{(k-1)}=\cdots\cdots=x_m^{(k-m+2)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{m-1}^{(k)}=x_m^{(k-1)}$$

となるから $x_m^{(k+1)}$ は $x_m^{(l)}$ だけの項で書き表わすことができて

$$x_m^{(k+1)} = -S_1 x_m^{(k)} - S_2 x_m^{(k-1)} - \cdots\cdots - S_m x_m^{(k-m+1)} \tag{17}$$

となる。これは n 次元ベクトルと n 次の行列だけの計算である。

さて，主固有値が実数の場合には Mises の定理から $x^{(k)}$ は収斂するのでそのベクトルの一成分である $x_m^{(k)}$ も収斂する。したがって，(17) の反復式で作られる $x_m^{(k+1)}$ は収斂するが，その極限

$$\lim_{k\to\infty} x_m^{(k)}$$

は (14) の固有ベクトルとなる。これは $k\to\infty$ の時

$$x_m^{(k+1)} = x_m^{(k)} = \cdots\cdots x_m^{(k-m-1)}$$

と置いて (17) から容易に検証することができる。

主固有値が複素数の場合には (15)，(16) より固有値が求められるが上と同様の理由から，式の中の $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$, $x^{(k+2)}$ は $x_m^{(k)}$, $x_m^{(k+1)}$, $x_m^{(k+2)}$ で置き換えることができる。

こうして主固有値とその固有ベクトルが求まったならば，二番目の固有値の計算にうつるわけであるが，このために mn 次の行列から新しく $(mn-1)$ 次または $(mn-2)$ 次の行列 (power method の説明の終りで述べた M') を作ると，これは最初のような簡単な形にはならない。そうなっては (17) の形の反復法は使えないので，(17) をそのまま利用するために，出発ベクトル $x^{(1)}$ からそれまでに求めた固有ベクトルの成分を除いてから計算を始めることにする。

以上をまとめると，$|A_0| \neq 0$ の場合の計算法は

i) $S_k = A_0^{-1} A_k \quad (k=1, 2, \cdots, m)$

を計算する。

ii) n 次元ベクトルを m 箇適当にとり

$$\xi^{(1)},\quad \xi^{(2)},\quad \cdots\cdots,\quad \xi^{(m)}$$

とする。

iii) 反復式

$$\xi^{(k+1)} = -S_1 \xi^{(k)} - S_2 \xi^{(k-2)} - \cdots\cdots - S_m \xi^{(k-m+1)}$$

により遂次 $\xi^{(k)}$ を計算する。

iv) 何回かの反復ののちの，$\xi^{(4)}$, $\xi^{(k+1)}$, $\xi^{(k-1)}$ の一次従属性をチェックする。一次従属ならば

$$\xi^{(k+2)} + \alpha\xi^{(k+1)} + \beta\xi^{(k)} = 0$$

を満足する α, β を求め，

$$\mu = -\frac{\alpha}{2} \pm i\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$$

$$x = \xi^{(k+1)} - \bar{\mu}\xi^{(k)}$$

により，μ と x を計算する。一次独立ならばさらに反復をおこなう。

v) μ と x が求められたならば，新しく m 箇のベクトル

$$\xi^{(1)},\ \xi^{(2)},\ \cdots\cdots,\ \xi^{(m)}$$

をとり，

$$C=(\xi^{(1)}\cdot x)+(\xi^{(2)}\cdot \mu x)+\cdots\cdots+(\xi^{(m)}\cdot \mu^{m-1}x)$$

を作る。ただし，(　) はスカラー積を示す。

vi)

$$\xi^{(1)}=\xi^{(1)}-cx$$

$$\xi^{(2)}=\xi^{(2)}-c\mu x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi^{(m)}=\xi^{(m)}-c\mu^{m-1}x$$

を作り，iii), iv) vii) をおこなう。

vii) さらに次の固有値を求める場合には vi) で作った $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ……, $\xi^{(m)}$ から，新しく求めた μ, x により v) で作られる C を引いて出発ベクトルを作り，iii) vi) をおこなう。

viii) 求むる固有値は $1/\mu$, 固有ベクトルは iv) で作った x である。

つぎに $|A_0|=0$, $|A_m|\neq 0$ の場合であるが今と同様に

$$S_k=A_m^{-1}A_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots\cdots,m)$$

と置いて解くことができるが，$|\lambda|$ の大きい方から計算されるので，普通の振動問題にはあまり適当とはいえない。$|A_0|=|A_m|=0$ の場合は特性方程式を作って解くより他に手がなさそうである。

5. 他の解法との比較

ここでは主として (4) 式の形の問題について，他の解法との比較を考えてみる。

固有値問題の解法は直接法と間接法に大別される。直接法とは特性多項式の形にして解いていく方法であり，間接法とは行列の演算をくりかえしておこなうことにより解いていく方法である。

(4) すなわち (13) を直接法で解く場合の特性方程式は

(18)
$$|A_0+\lambda A_1+\cdots\cdots+\lambda^m A_m|=0$$

である。この解法はいくつか考えられるが，最も単純な方法は左辺の行列式を展開して λ に関する代数方程式にして解くことであろう。行列の次数が小さい場合 ($n=3$ ぐらいまで) には最も便利な方法で，手計算の時代に解かれたものの大部分はこの方法によっている。しかし，n が大きくなると行列式の展開の計算が急激に増加して実用性がなくなる。代数方程式を解くことは高次であってもそれほど困難はないが，係数の計算に誤差があると，その根に非常に大きく影響し，特に隣接根があるときに著しい。

そこで，普通の固有値問題の場合には，行列式の展開によらずに λ の係数を精度よく計算する方

法が使われている（Lanczos の方法，Leverrier の方法など）。このような方法を (4) の形の問題に適用することは，かなり困難であるが，一つの興味ある方法が文献 11 に示されている。これは多項式の互除法に似た操作によって (4) を対角化する方法で理論的には明快であるが，電子計算機で計算するのにはプログラムがやや複雑で記憶容量も大きいものが必要である。

直接法のもう一つの行き方としては，(18) の左辺の行列式の値を λ の関係と考えて

$$f(\lambda)=|A_0+\lambda A_1+\cdots\cdots+\lambda^m A_m|$$

と置き，非線型方程式

$$f(\lambda)=0 \tag{19}$$

を逐次近似法で解いていく方法がある。固有値が実数ならばこの方法も使用できるが，複素数の場合には複素数を要素とする行列式の計算を何回もおこなわなければならないし，(19) 式も実際には

$$\begin{cases} R_e(f(\lambda))=0 \\ I_m(f(\lambda))=0 \end{cases}$$

という非線型連立方程式と同じであるから収斂は遅く，あまり便利な方法とはいえない。

Bodwing は，(19) の $f(\lambda)$ が λ の mn 次の多項式であることに注目して，適当に $mn+1$ 箇の λ の値をとって行列式の値を求めて連立方程式

$$\begin{cases} c_0+\lambda_1 c_1+\lambda_1{}^2 c_2+\cdots\cdots+\lambda_1{}^m c_m=f(\lambda_1) \\ c_0+\lambda_2 c_1+\lambda_2{}^2 c_2+\cdots\cdots+\lambda_2{}^m c_m=f(\lambda_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+\lambda_{mn+}c_1+\cdots\cdots+\lambda_m{}^{mn+1} c_m=f(\lambda_m) \end{cases} \tag{20}$$

から (18) 式を展開した λ の係数を決められるのではないか，と述べているが実際にはいろいろ困難な点が多い。すなわち，$f(\lambda)$ を非常に高精度で計算しなければならないし，λ の広い範囲にわたって点をとれば，(20) は相当に ill condition に近い方程式となる。複素固有値で，その虚数部が小さい場合に実軸上の点における $f(\lambda)$ の値だけから複素固有値を求められる，という程度ではなかろうか。

なお，直接法の一種であるが，(3) の形の問題で (b_{ij}) の影響が非常に小さいということがいえる場合の近似解法が文献 8 に述べられている。そのような特殊な問題に関しては有効であろう。計算も非常に簡単で興味ある方法である。

つぎに間接法であるが，先に述べたように，普通の固有値問題に関する性質の多くが (4) の形では失われているため，適用できる方法はほとんど見あたらない。純粋な意味の間接法としては前節で述べた著者の方法が唯一のものではないかと思う。

このほかに，3 節であげた定理を用いて，mn 次行列の固有値問題に帰着させて解くという方法がかなり多く用いられている（たとえば文献 7）。記憶容量の大きい高速電子計算機が使用できる

場合には，この方法が最も簡単で，普通の固有値計算のサブルーチンを使用できるので便利である。これに対し前節の方法を用いるためには新しくプログラムを書かなければならないという繁雑さがあり，また反復の途中で何度も直交性をたてなおしてやらなければならないという不利な点はあるが，記憶容量が $1/m$ ですむという特長があり，はじめの数個の固有値を求めるだけならばこの方法の方が計算時間が短い。

したがって結論としては，(4) の形の問題で n が小さい場合は行列式をそのまま展開し，m, n がかなり大きく，かつ同種の問題をたくさん扱う場合には前節の方法を用い，その他の場合には mn 次の行列になおして普通の解法を適用するのがよいということになる。

6. 付　　記

最後に，反復式 (17) の一般性について少しふれておきたい。(17) の各項には添字 m が付いているが，これは反復式と関係ないので除き，上の添字を下におろして

(21) $$x_{k+1}=-S_1x_k-S_2x_{k-1}\cdots\cdots-S_mx_{k-m+1}$$

と書いてみる。いま $m=1$ とすると，

$$x_{k+1}=-S_1x_k$$

であるがこれは普通の power method で

$$(S_1+\lambda I)x=0$$

を解く場合の反復式と同一である。

また (21) で特に n が 1 の場合には，x_k, S_k などは全部スカラーになるので，S と書いては行列とまぎらわしいので S_k のかわりに a_k と書くと

$$x_{k+1}=-a_1x_k-a_2x_{k-1}-\cdots\cdots-a_mx_{k-m+1}$$

となるが，これは代数方程式

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m=0$$

の解法の一つであるところの Bernoulli の解法の反復式そのものである。したがって (21) は，普通の power methed と Bernoulli の方法をその特殊な場合を含む一般的な公式であるということができる。

逆に，(21) で定義されるベクトル列 $\{x_k\}$ の性質を，4 節の mn 行列の性質から研究することが偏微分方程式の一部の研究者によってなされている。(21) は，このように多くの問題と関係のある基本的な式であって，これが (4) の問題と密接な関係があることを指摘しておく。

文　　献

1. 川井，塙： 薄肉開断面梁の自由振動について，航空技術研究所報告 TR-12 (1961)
2. 川井，戸川，林： 変断面梁の曲げ自由振動について，航空技術研究所報告 TR-22 (1962)
3. 川井，塙，越出，戸川，高橋： 平板翼の振動について，航空技術研究所報告 TR-30 (1963)
4. 川井，小川： 一定の角速度で回転する梁の振動について，機械学会前刷集 No. 56 (1961)
5. 川井，塙，越出，戸川： 変厚板の振動について，宇宙科学技術シンポジウム前刷 (1963)
6. 泉，戸川： 加振機の有する電気的減衰力が構造物の振動試験結果に及ぼす影響について (1962)
7. Frazer, Duncan and Collar: Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge (1955)
8. Bishop and Johnson: The Mechanics of Vibration. Cambridge (1960)
9. Bodewig: Matrix Calculus. North Holland (1959)
10. 森口，高田： 数値計算法，岩波現代応用数学講座 (1958)
11. ア・イ・マリツェフ： 線型代数学，(柴岡泰光訳，商工出版 1960)

NAL TR-45
航空宇宙技術研究所
固有値問題 $(\Sigma\lambda^k A_k)\ x=0$ の数値解法

1963 年 4 月　　14 ページ

与えられた $m+1$ 箇の $n\times n$ 行列 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_m$ に対し $(\Sigma\lambda^k A_k)x=0$ を満足する固有値 λ, 固有ベクトル x を求める問題は航空機翼の振動問題をエネルギー法で解析する場合に重要であるが，その一解法として普通の power method を拡張した反復式

$$x_{k+1} = A_0^{-1}A_1x_k + A_0^{-1}A_2x_{k-1} + \cdots + A_0^{-1}A_mx_{k-m+1}$$

による方法を示し，他の解法と比較した。

I. 戸川隼人
II. NAL TR-45
III. 512.8
518.6

NAL TR-45
航空宇宙技術研究所
固有値問題 $(\Sigma\lambda^k A_k)\ x=0$ の数値解法

1963 年 4 月　　14 ページ

与えられた $m+1$ 箇の $n\times n$ 行列 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_m$ に対し $(\Sigma\lambda^k A_k)x=0$ を満足する固有値 λ, 固有ベクトル x を求める問題は航空機翼の振動問題をエネルギー法で解析する場合に重要であるが，その一解法として普通の power method を拡張した反復式

$$x_{k+1} = A_0^{-1}A_1x_k + A_0^{-1}A_2x_{k-1} + \cdots + A_0^{-1}A_mx_{k-m+1}$$

による方法を示し，他の解法と比較した。

I. 戸川隼人
II. NAL TR-45
III. 512.8
518.6

NAL TR-45
航空宇宙技術研究所
固有値問題 $(\Sigma\lambda^k A_k)\ x=0$ の数値解法

1963 年 4 月　　14 ページ

与えられた $m+1$ 箇の $n\times n$ 行列 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_m$ に対し $(\Sigma\lambda^k A_k)x=0$ を満足する固有値 λ, 固有ベクトル x を求める問題は航空機翼の振動問題をエネルギー法で解析する場合に重要であるが，その一解法として普通の power method を拡張した反復式

$$x_{k+1} = A_0^{-1}A_1x_k + A_0^{-1}A_2x_{k-1} + \cdots + A_0^{-1}A_mx_{k-m+1}$$

による方法を示し，他の解法と比較した。

I. 戸川隼人
II. NAL TR-45
III. 512.8
518.6

NAL TR-45
航空宇宙技術研究所
固有値問題 $(\Sigma\lambda^k A_k)\ x=0$ の数値解法

1963 年 4 月　　14 ページ

与えられた $m+1$ 箇の $n\times n$ 行列 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_m$ に対し $(\Sigma\lambda^k A_k)x=0$ を満足する固有値 λ, 固有ベクトル x を求める問題は航空機翼の振動問題をエネルギー法で解析する場合に重要であるが，その一解法として普通の power method を拡張した反復式

$$x_{k+1} = A_0^{-1}A_1x_k + A_0^{-1}A_2x_k{}^{-}{}_1 + \cdots + A_0^{-1}A_my_{k-m+1}$$

による方法を示し，他の解法と比較した。

I. 戸川隼人
II. NAL TR-45
III. 512.8
518.6

TR-29	1 m×1 m 吹出式超音速風胴の計画と構造 On the Design and Construction of the 1 m×1 m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962年10月	川井忠彦, 塙　武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定とその微小振り振動について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962年11月	川井忠彦, 林　洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962年11月	川井忠彦, 江川幸一
TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Reported Load Testing Rigs for Full Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田宗四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究（I） —翼型と翼列の検討— An Intestigation of High Speed Axial Flow Compressor（I） —The Selection of Compressor Cascade-	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究（II） —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor（II） —Design and Dver-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田　晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風胴による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田　勇, 松崎利一
TR-37	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu Wada
TR-38	鋳鉄のような脆性材料からなる円板の回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究（第1報） —その性能におよぼす各種因子の影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor（I） —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full-Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉱一
TR-42	未刊行		
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について （流入角の大きい減速翼列の予備実験） Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤　博, 褒田光弘 坂口　一, 山崎紀雄

航空宇宙技術研究所報告45号

昭和38年4月　発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都三鷹市新川700
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所　笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53