

UDC 534.11

629.13.014.3

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-46

翼の固有振動数に関する一解析法

川井忠彦・泉 日出夫
戸川隼人・林 洋一

1963年6月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961 年 4 月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin-Walled Beams of Open Cross Section	1961 年 5 月	川井忠彦, 埴 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Interaction between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961 年 7 月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961 年 7 月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・校正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961 年 8 月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-16	放物型偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations	1961 年 11 月	樋口一雄, 三好 甫
TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge-Beam Method of Measuring Gas Density	1961 年 12 月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の 二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961 年 11 月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength of High-Speed Rotor	1961 年 12 月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠 境界値問題の数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962 年 1 月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962 年 1 月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962 年 2 月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962 年 2 月	樋口一雄, 高橋利之 島海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン 要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962 年 2 月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の 計画と構造 Desing and Construction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m Transonic Wind Tunnel	1962 年 3 月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962 年 3 月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962 年 7 月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962 年 8 月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962 年 10 月	空気力学第二部

翼の固有振動数に関する一解析法*

川井 忠彦**・泉 日出夫**
戸川 隼人***・林 洋一**

On the Vibration Analysis of Aircraft Wings

By Tadahiko KAWAI, Hideo IZUMI
Hayato TOGAWA, Yoichi HAYASHI

Based on the variational principle, the fundamental equation of lateral torsional vibration of a beam with variable cross section is derived and the general method of solution of such a beam is proposed in this paper. In those equations of motion, the effect of shear deformation as well as that of rotatory inertia on the vibration characteristics of the beam are considered so that the realistic vibration analysis of a wing structure may be possible. Taking a typical jet transport plane as an example, a vibration analysis is extensively made and results obtained are compared with that of previous investigators.

1. 緒 言

高速飛行体の振動を解析する基礎として、さきに筆者の一人は断面が一樣で真直な薄肉開断面梁の振動を論じたが^{1),7)}, この理論を変断面梁の場合にまで拡張し、さらに、梁の剪断変形ならびに回転慣性の影響をも考慮して、航空機翼の振動解析に応用できるような理論を構成した。そして Bispplinghoff⁴⁾ がその著書において取り扱っている代表的なジェット輸送機の固有振動数を求め、その結果を彼の与えた結果と比較検討してみたので報告する次第である。

2. 基礎方程式

任意の断面形を有する変断面梁を考える。梁の断面の弾性軸（剪断中心軸）は直線であるとし、第1図の如く剪断中心 s を通り断面の主軸方向に x, y 軸をとる。 z 軸は、この x, y 軸と右手系を構成するようにとる。また、梁の断面は初期捩りを有しないものとする。

u, v = 剪断中心 s の x および y 方向の撓み

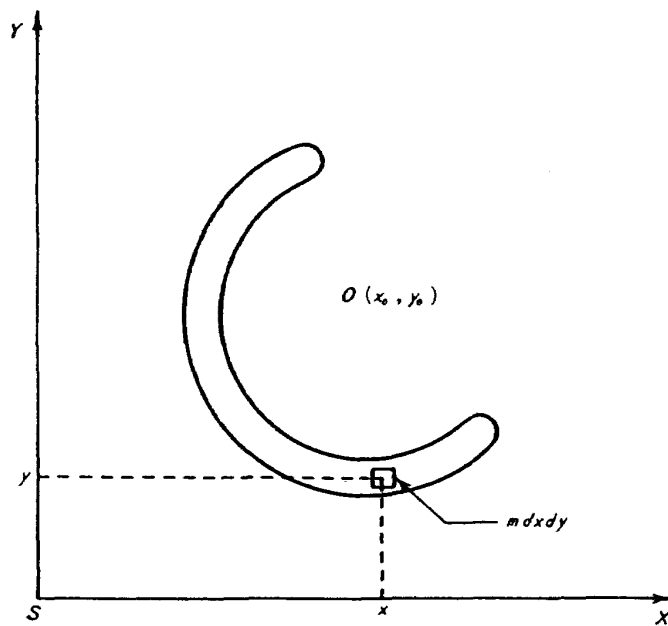
$$u = u_B + u_s$$

* 昭和 38 年 5 月 7 日受付

** 機体部

*** 計測工務部

(注) 括弧内の数字は末尾の文献番号を示す。



第 1 図 使用する記号および座標系

$$v = v_B + v_s$$

u_B, v_B = 剪断中心 s の x および y 方向の曲げ変形による撓み

u_s, v_s = 剪断中心 s の x および y 方向の剪断変形による撓み

φ = 断面の回転角

EI_{xx}, EI_{yy} = 梁の y および x 軸まわりの曲げ剛性

EI_w = 梁の曲げ捩れ剛性

GK = St. Venant の捩れ剛性

k' = 断面形について定められる係数で、次の関係式が成立する。

$$Q = k'GA\beta$$

ここに Q を梁のある断面の剪断力, β をその断面における剪断歪 (ひずみ) とする。

m = 梁の質量分布

A = 梁の断面積

I_0 = 梁の剪断中心 s に関する極慣性能率

L = 梁の全長

x_0, y_0 = 断面の図心 O の座標

いま, 任意の時刻 t において, 梁のある断面上の微小要素 $m dx dy$ の座標は運動学の理論により次のように与えられる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{O} \times \mathbf{r}') \cdots \cdots (1)$$

ここに

$\mathbf{r}=(U, V, W)$; 絶対静止座標に関する考えている点の変位ベクトル

$\mathbf{r}_0=(u, v, o)$; 剪断中心の変形前の断面上にとった x, y 軸に関する変位ベクトル

$\mathbf{o}=\left(-\frac{\partial v_B}{\partial z}, \frac{\partial u_B}{\partial z}, \varphi\right)$; 断面の回転ベクトル

$\mathbf{r}'=(x, y, o)$; 考えている点の変形前の断面上にとった x, y 軸に関する座標

$$\mathbf{o} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{\partial v_B}{\partial z} & \frac{\partial u_B}{\partial z} & \varphi \\ x & y & o \end{vmatrix}$$

$$= \left[-y\varphi, x\varphi, -\left(x\frac{\partial u_B}{\partial z} + y\frac{\partial v_B}{\partial z}\right) \right]$$

ここに $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は絶対静止座標系の単位ベクトルである。

従って

$$\left. \begin{aligned} U &= u - y\varphi \\ V &= v + x\varphi \\ W &= -\left(x\frac{\partial u_B}{\partial z} + y\frac{\partial v_B}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

よって、梁の有する運動エネルギー T は次のようになる。

$$\begin{aligned} T &= \int_0^L \left[\iint \frac{1}{2} m (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dx dy \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\iint m \left\{ (\dot{u} - y\dot{\varphi})^2 + (\dot{v} + x\dot{\varphi})^2 + \left(x\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} + y\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[m A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + m I_0 \dot{\varphi}^2 + m I_{xx} \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right)^2 + m I_{yy} \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 m A y_0 \dot{u} \dot{\varphi} + 2 m A x_0 \dot{v} \dot{\varphi} + 2 m J \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) \right] dz \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに $\dot{}$ は時間 t に関する微分を表わす。

$$J = \iint xy \, dx \, dy \quad (\text{断面の慣性相乗モーメント})$$

(3) 式において第三項および第四項は断面の回転慣性による運動エネルギーと呼ばれているものである。

また、梁の有する歪エネルギー V は弾性学の理論により次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_{xx} \left(\frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right)^2 + EI_{yy} \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right)^2 + k' GA \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \right)^2 + k' GA \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + EI_w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)^2 + GK \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dz \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

いま, $\delta u_B(z, t)$, $\delta u_s(z, t)$, $\delta v_B(z, t)$, $\delta v_s(z, t)$ および $\delta \varphi(z, t)$ を時刻 t_1 および t_2 において 0 となる変位の変分とすると, この梁の自由振動における ハミルトンの 原理は次のように表わされる^{5), 6)}。

即ち $L = T - V$ とすれば

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

あるいは

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt \\ = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left\{ m A \dot{u} \delta \dot{u} + m A \dot{v} \delta \dot{v} + m I_0 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + m I_{xx} \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \right. \right. \\ & + m I_{yy} \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) - m A y_0 \dot{\varphi} \delta \dot{u} - m A y_0 \dot{u} \delta \dot{\varphi} + m A x_0 \dot{\varphi} \delta \dot{v} + m A x_0 \dot{v} \delta \dot{\varphi} \\ & + m J \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) + m J \left(\frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) - E I_{xx} \left(\frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \\ & - E I_{yy} \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) - k' G A \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \\ & \left. \left. - k' G A \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} \right) - E I_w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - G K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} dz \right] dt \cdots (5) \end{aligned}$$

上式を z について部分積分を行なうと, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(m I_{xx} \frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} + m J \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) \delta \dot{u}_B \right]_0^L + \left(m I_{yy} \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} + m J \frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \delta \dot{v}_B \Big|_0^L \\ & - E I_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial u_B}{\partial z} \right) \Big|_0^L + \frac{\partial}{\partial z} \left(E I_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \delta u_B \Big|_0^L - E I_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_B}{\partial z} \right) \Big|_0^L \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(E I_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) \delta v_B \Big|_0^L - k' G A \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s \Big|_0^L - k' G A \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s \Big|_0^L \\ & - E I_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_0^L + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(E I_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - G K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \delta \varphi \Big|_0^L \\ & + \int_0^L \left\{ (m A \dot{u} - m A y_0 \dot{\varphi}) \delta \dot{u} + (m A \dot{v} + m A x_0 \dot{\varphi}) \delta \dot{v} + (m I_0 \dot{\varphi} - m A y_0 \dot{u} + m A x_0 \dot{v}) \delta \dot{\varphi} \right. \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(m I_{xx} \frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(m J \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) \right) \delta \dot{u}_B - \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(m I_{xx} \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(m J \frac{\partial \dot{u}_B}{\partial z} \right) \right) \delta \dot{v}_B \\ & - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E I_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \delta u_B - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E I_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) \delta v_B + \frac{\partial}{\partial z} \left(k' G A \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \delta u_s \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(k' G A \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) \delta v_s - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E I_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(G K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \delta \varphi \right\} dz \Big] dt \end{aligned}$$

上式を更に t で部分積分し, 時刻 t_1 および t_2 で δu_B , δu_s , δv_B , δv_s および $\delta \varphi$ が 0 なること

を考慮して次のような式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{z_1}^{z_2} \left[\left\{ -mI_{xx} \frac{\partial \ddot{u}_B}{\partial z} - mJ \frac{\partial \ddot{v}_B}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \right\} \delta u_B \right. \\
& + \left\{ -mI_{yy} \frac{\partial \ddot{v}_B}{\partial z} - mJ \frac{\partial \ddot{u}_B}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) \right\} \delta v_B \Big|_0^L \\
& - EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial u_B}{\partial z} \right) \Big|_0^L - EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_B}{\partial z} \right) \Big|_0^L - k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s \Big|_0^L \\
& - k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s \Big|_0^L - EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_0^L + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \delta \varphi \Big|_0^L \\
& + \int_0^L \left\{ (-mA\ddot{u} + mA y_0 \ddot{\varphi}) \delta u - (mA\ddot{v} + mA x_0 \ddot{\varphi}) \delta v \right. \\
& - \left(mI_0 \ddot{\varphi} - mA y_0 \ddot{u} + mA x_0 \ddot{v} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \delta \varphi \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{xx} \frac{\partial \ddot{u}_B}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(mJ \frac{\partial \ddot{v}_B}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) \right) \delta u_B \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{yy} \frac{\partial \ddot{v}_B}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(mJ \frac{\partial \ddot{u}_B}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) \right) \delta v_B \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \delta u_s + \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) \delta v_s \right\} dz \Big] dt
\end{aligned}$$

上式において $0 < z < L$ で δu_B , δu_s , δv_B , δv_s および $\delta \varphi$ の値を任意にとり得ることにより、次のような運動方程式と境界条件式が求まる。

運動方程式

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mA y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(mJ \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{xx} \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} \right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mA y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(mJ \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{yy} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) - mJ \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} - mI_{xx} \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta u_B = 0 \\
 & EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial u_B}{\partial z} \right) = 0, \quad k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s = 0 \\
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) - mJ \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} - mI_{yy} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta v_B = 0 \\
 & EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_B}{\partial z} \right) = 0, \quad k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s = 0 \\
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \delta \varphi = 0, \quad EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

特に、梁の断面が x 軸に関して対称である場合には、 $y_0=0$, $J=0$ となって、 x 軸方向の撓み振動は独立となり、 y 軸方向の撓み振動と捩り振動が連成し、運動方程式および境界条件式は次の二つのグループに分れる。

(A) x 軸方向の撓み振動

運動方程式

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{xx} \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right) - mI_{xx} \frac{\partial^3 u_B}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta u_B = 0 \\
 & EI_{xx} \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial u_B}{\partial z} \right) = 0, \quad k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

(B) y 軸方向の撓みと捩りの連成振動

運動方程式

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{xx} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) - m I_{yy} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta v_B = 0 \\ & EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_B}{\partial z} \right) = 0, \quad k' GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s = 0 \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \delta \varphi = 0, \quad EI_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

このようにして、断面に一つの対称軸がある場合に、その軸方向の撓み振動が独立となり、他の軸方向の撓み振動が捩れ振動と連成することは、すでに著者の一人が TR-12 で一樣断面梁の場合について論じたが、変断面梁でも弾性軸が真直である場合には同じことが成立することがわかる。

3. 運動方程式の解法

さて、航空機翼の動的諸問題を論ずる場合の基礎方程式は、(B) グループの (10) 式および (11) 式であるから、これらの式を対象にして議論を進めることにする。境界条件としては、片持梁（固定一自由梁）と両端自由梁の二種類を考えればよい。

一般に航空機翼の振動および空力弾性の問題では、縦横比 (Aspect Ratio) が大きいとして翼の曲げ捩り剛性 EI_w を無視し解析を進めるのが普通であるから、われわれもこれにならって議論を進めることにする（もちろんこれを入れて解析を行なうことは可能であるが）。したがって、(10) 式および (11) 式で与えられる基礎方程式および境界条件式は次のように簡単化される。

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(m I_{yy} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(k' GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right) - m I_{yy} \frac{\partial^3 v_B}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta v_B = 0 \\ & EI_{yy} \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_B}{\partial z} \right) = 0, \quad k' GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s = 0 \\ & GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

次に運動方程式 (12) を解くために

$$\left. \begin{aligned} v_B(z, t) &= v_0(z) e^{i p t} \\ v_s(z, t) &= v_1(z) e^{i p t} \\ \varphi(z, t) &= \varphi_0(z) e^{i p t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

とおき, (12) 式および (13) 式に代入すると次のようになる。

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - p^2 m A (v_0 + v_1) - p^2 m A x_0 \varphi_0 + p^2 \frac{d}{dz} \left(m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(k' G A \frac{dv_1}{dz} \right) + p^2 m A (v_0 + v_1) + p^2 m A x_0 \varphi_0 &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(G K \frac{d\varphi_0}{dz} \right) + p^2 m A x_0 (v_0 + v_1) + p^2 m I_0 \varphi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

境界条件式

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dz} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right\} \delta v_0 &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \delta \left(\frac{dv_0}{dz} \right) = 0, \quad k' G A \frac{dv_1}{dz} \delta v_1 &= 0 \\ G K \frac{d\varphi_0}{dz} \delta \varphi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

この場合に v_0 , v_1 および φ_0 に課せられる境界条件は次の如く与えられる。

(i) 固定端

$$v_0 = \frac{dv_0}{dz} = 0, \quad v_1 = 0, \quad \varphi_0 = 0$$

(ii) 自由端

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dz^2} &= 0, \quad \frac{d}{dz} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} = 0 \\ \frac{dv_1}{dz} &= 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dz} = 0 \end{aligned}$$

運動方程式 (15) を解くために, 次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} v_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z) \\ v_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(z) \\ \varphi_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに, $u_n(z)$ および $\varphi_n(z)$ は微分方程式

$$\frac{d^4 u_n}{dz^4} = \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 u_n(z), \quad \frac{d^2 \varphi_n}{dz^2} + \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^2 \varphi_n(z) = 0$$

を次の境界条件の下で解いて得られた正規固有函数である。

(i) 固定端

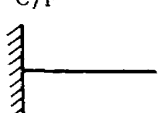

$$u_n = \frac{du_n}{dz} = 0, \quad \varphi_n = 0$$

(ii) 自由端

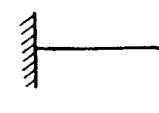
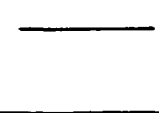
$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} = \frac{d^3 u_n}{dz^3} = 0, \quad \frac{d\varphi_n}{dz} = 0$$

正規固有函数 $u_n(z)$ および $\varphi_n(z)$ は第1表および第2表の如くである^{2),3)}。

第1表 正規固有函数系 (1) $u_n'''' = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^4 u_n$

境界条件	正規固有函数 $u_n(z)$	固有値 γ_n
C/F 	$\frac{1}{\sqrt{L}} \{ (\cosh \gamma_n \frac{z}{L} - \cos \gamma_n \frac{z}{L}) - \alpha_n (\sinh \gamma_n \frac{z}{L} - \sin \gamma_n \frac{z}{L}) \}$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n + \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n + \sin \gamma_n)$	$\cosh \gamma_n \cos \gamma_n + 1 = 0$ (1) 1.87510 (4) 10.99554 (2) 4.69409 (5) 14.13717 (3) 7.85476
F/F 	$\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{3}{L}} (\frac{2z}{L} - 1)$ $\frac{1}{\sqrt{L}} \{ (\cosh \gamma_n \frac{z}{L} + \cos \gamma_n \frac{z}{L}) - \alpha_n (\sinh \gamma_n \frac{z}{L} + \sin \gamma_n \frac{z}{L}) \}$ $\alpha_n = (\cosh \gamma_n - \cos \gamma_n) / (\sinh \gamma_n - \sin \gamma_n) \quad (n \geq 3)$	$\cosh \gamma_n \cos \gamma_n - 1 = 0$ (1) 0 (5) 10.99560 (2) 0 (6) 14.13717 (3) 4.73004 (7) 17.27286 (4) 7.85320

第2表 正規固有函数系 (2) $\varphi_n'' + \left(\frac{\beta_n}{L}\right)^2 \varphi_n = 0$

境界条件	正規固有函数 $\varphi_n(z)$	固有値 β_n
C/F 	$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \beta_n \frac{z}{L}$	$\cos \beta_n = 0 \quad \beta_n = (2n-1)\pi/2$ (1) 1.57080 (4) 10.99557 (2) 4.71239 (5) 14.13717 (3) 7.85398
F/F 	$\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \beta_n \frac{z}{L}$ ($n \geq 2$)	$\sin \beta_n = 0 \quad \beta_n = (n-1)\pi$ (1) 0 (4) 9.42478 (2) 3.14159 (5) 12.56637 (3) 6.28319 (6) 19.63495

さて、梁の撓み v_0 を (17) 式の如く展開した場合には

$$\frac{d}{dz} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + p^2 m l_{yy} \frac{dv_0}{dz} = 0$$

なる梁の自由端境界条件は満足されないことになる。

そこで、自由端に $p^2 m l_{yy} \frac{dv_0}{dz}$ なる見掛けの外力を加えて境界条件を満足するように運動方程式 (15) の第一式を次のように修正する。

(i) 片持梁 ($z=0$: 固定, $z=L$: 自由)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - p^2 m A (v_0 + v_1) - p^2 m A x_0 \varphi_0 + p^2 \frac{d}{dz} \left(m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right) \\ - p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-L) = 0 \end{aligned}$$

(ii) 両端自由梁

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - p^2 m A (v_0 + v_1) - p^2 m A x_0 \varphi_0 + p^2 \frac{d}{dz} \left(m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right) \\ + p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-0) - p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-L) = 0 \end{aligned}$$

したがって、求める運動方程式は次のようになる。

(i) 片持梁

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - p^2 m A (v_0 + v_1) - p^2 m A x_0 \varphi_0 + p^2 \frac{d}{dz} \left(m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right) \\ - p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-L) = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(k' G A \frac{dv_1}{dz} \right) + p^2 m A (v_0 + v_1) + p^2 m A x_0 \varphi_0 = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(G K \frac{d\varphi_0}{dz} \right) + p^2 m A x_0 (v_0 + v_1) + p^2 m I_0 \varphi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (18-1)$$

(ii) 両端自由梁

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - p^2 m A (v_0 + v_1) - p^2 m A x_0 \varphi_0 + p^2 \frac{d}{dz} \left(m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \right) \\ + p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-0) - p^2 m I_{yy} \frac{dv_0}{dz} \delta(z-L) = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(k' G A \frac{dv_1}{dz} \right) + p^2 m A (v_0 + v_1) + p^2 m A x_0 \varphi_0 = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(G K \frac{d\varphi_0}{dz} \right) + p^2 m A x_0 (v_0 + v_1) + p^2 m I_0 \varphi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (18-2)$$

ここで、(18-1) 式あるいは (18-2) 式の第一式に $u_n(z)$ 、第二式および第三式に $\varphi_n(z)$ を乗じて $z=0$ から $z=L$ まで梁の全長にわたって積分すると、次のような a_m 、 b_m および c_m に関する無限連立一次方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \{ p^2 (A_{mn} + B_{mn}) - C_{mn} \} + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_{mn} + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m E_{mn} &= 0 \\ p^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m D_{nm} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (p^2 F_{mn} - G_{mn}) + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m H_{mn} &= 0 \\ p^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m E_{nm} + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m H_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^2 I_{mn} - J_{mn}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

ここに

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \int_0^L m A u_m u_n dz & B_{mn} &= \int_0^L m I_{yy} \frac{du_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz \\
 C_{mn} &= \int_0^L EI_{yy} \frac{d^2 u_m}{dz^2} \frac{d^2 u_n}{dz^2} dz & D_{mn} &= \int_0^L m A \varphi_m u_n dz \\
 E_{mn} &= \int_0^L m A x_0 \varphi_m u_n dz & F_{mn} &= \int_0^L m A \varphi_m \varphi_n dz \\
 G_{mn} &= \int_0^L k' GA \frac{d\varphi_m}{dz} \frac{d\varphi_n}{dz} dz & H_{mn} &= \int_0^L m A x_0 \varphi_m \varphi_n dz \\
 I_{mn} &= \int_0^L m I_0 \varphi_m \varphi_n dz & J_{mn} &= \int_0^L GK \frac{d\varphi_m}{dz} \frac{d\varphi_n}{dz} dz
 \end{aligned}$$

(19) 式は片持梁，両端自由梁いずれの場合にも成立する式である。

ここに，上に与えた諸係数は D_{mn} ， E_{mn} を除いて全て対称である。即ち $A_{ij}=A_{ji}$ ， $B_{ij}=B_{ji}$ ， $C_{ij}=C_{ji}$ 等である。

(19) 式から a_m ， b_m および c_m を消去すれば， p^2 に関する無限次元行列式が得られる。したがって，これを解けば梁の固有振動数が求まるわけである。

特に，Static Unbalance（静的モーメント） $mAx_0=0$ なる場合には，(19) 式は次のような二組の方程式にわかれる。

(i) 純曲げ振動

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \{ p^2 (A_{mn} + B_{mn}) - C_{mn} \} + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_{mn} &= 0 \\
 p^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m D_{nm} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (p^2 F_{mn} - G_{mn}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(ii) 純振り振動

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^2 I_{mn} - J_{mn}) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

すなわち，翼断面が二軸対称の場合には，撓み振動と振り振動の連成は起こらず，固有振動数は (20) 式あるいは (21) 式より決定することができるわけである。

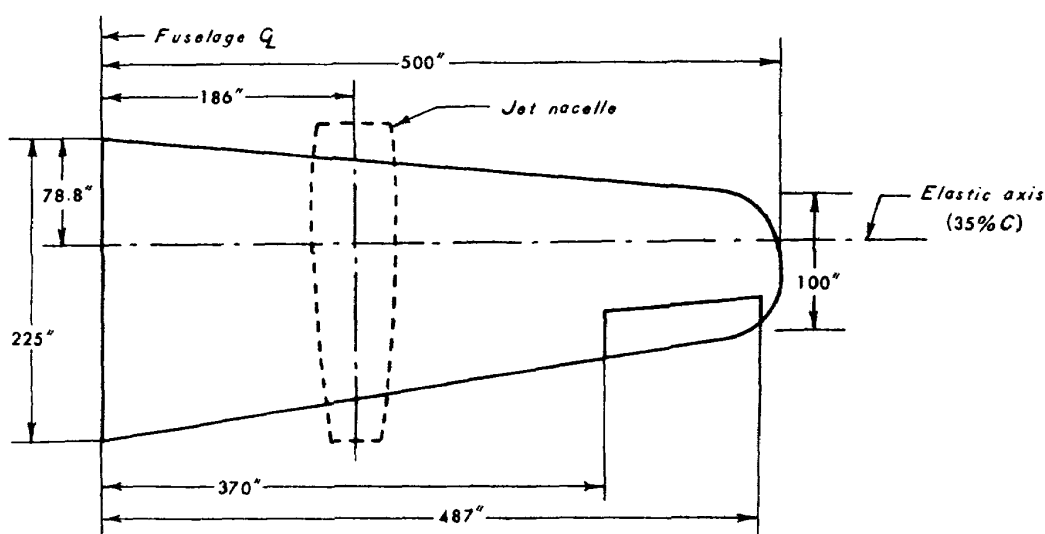
4. 代表的なジェット輸送機翼の振動解析例

前節において展開した理論を Bisplinghoff の著書 “Aeroelasticity” において取り扱われているジェット輸送機翼の振動解析に応用してみよう。

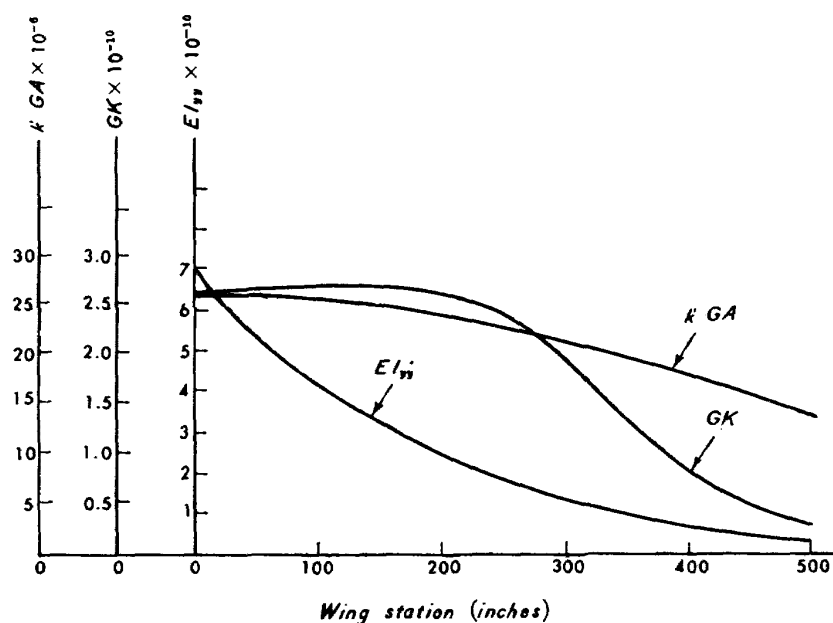
第2図はこの航空機翼の平面図である。その弾性軸は直線で翼弦長の 35% の所に位置し，付け根に垂直である。そして構造解析によって曲げ剛性 EI_{yy} ，振り剛性 GK および剪断剛性 $k'GA$ の曲線が第3図の如く与えられている。翼の質量分布は第3図の如くには与えられていないので，Bisplinghoff の著書に出ている資料を転用することにする。質量分布は本来剛性曲線と同様，連続

曲線として与えられるべきものであるが、Bisplinghoff は影響係数マトリックスを使用する振動解析法を説明するために等価な集中質量系に置き換えている(第4図)。このような質量分布を用いた振動解析では、当然置き換えによる誤差が入ってくるが、これについては、始めの質量分布曲線が与えられていない以上議論することはできない。しかし、われわれの解析法は質量分布も剛性分布も連続曲線として与えられる場合を目標にしているので、かかる資料が与えられれば精度の良い振動解析が可能である。

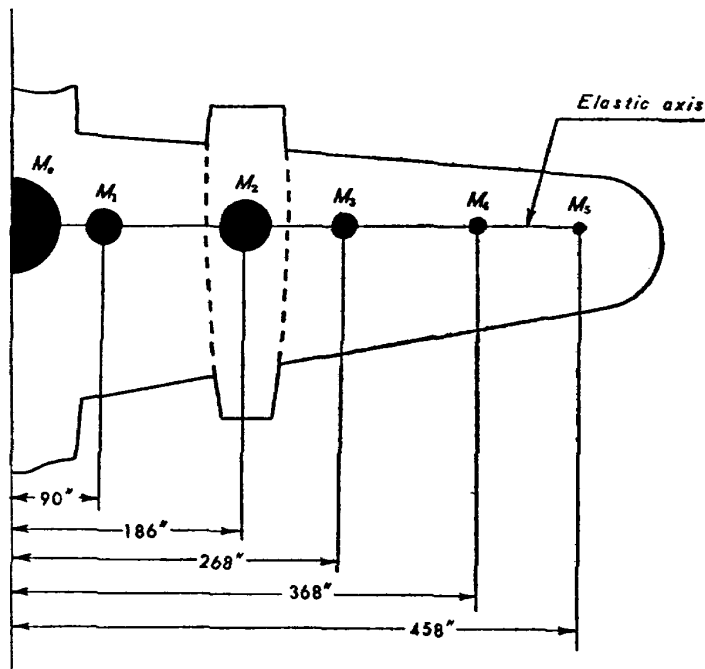
さて、これらの資料および Bishop & Johnson が与えている正規固有函数表³⁾を用いて (19) 式に与えられた A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} 等の諸係数を必要な m , n の次数まで、当所に設置されている DATATRON 205 電子計算機を用い、10 分割で Simpson の法則により数値積分した。



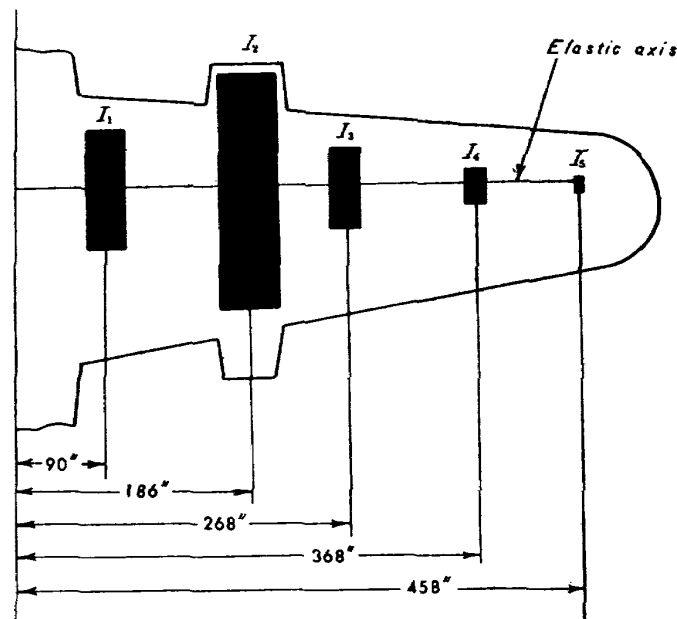
第2図 Wing planform of typical jet transport



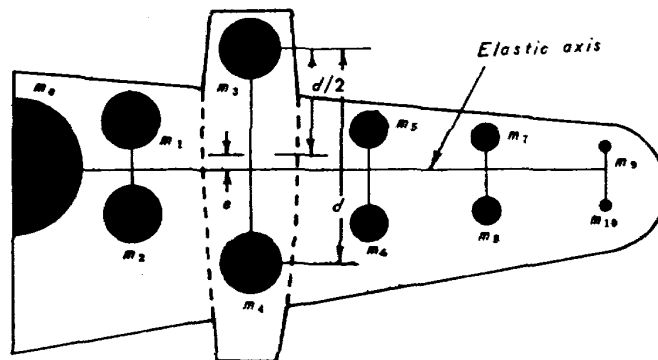
第3図 Bending, torsional, and shear stiffness curves



第4図 Concentrated mass system for computation of bending modes



第5図 Lumped mass system for computation of torsion modes



第6図 Dynamic model of jet transport wing

第 3 表 Properties of the “dumbbell” units

Station (in)	M ($\times 386$) (lb)	I_0 ($\times 10^6$) (lb-in)	S_0 (lb-in)	$e = \frac{S_0}{M}$ (in)	m (lb)	$d = 2\sqrt{\frac{I_0}{M} - e^2}$ (in)
0	17,400	∞	—	—	17,400	—
90	6,039	8.72	42,273	7	3,019.5	74.7
186	10,200	93.16	140,083	13.734	5,100	189.15
268	4,200	3.72	-8,400	-2.0	2,100	59.39
368	3,400	2.77	-6,800	-2.0	1,700	56.95
458	680	0.40	-2,720	-4.0	340	47.84

これらの係数値を用い、考えているジェット輸送機翼の振動解析を、以下いろいろの場合について行なってみる。

まず、(19), (20) および (21) 式より導かれる振動数方程式の一般形を示しておこう。

(I) 純曲げ振動の振動数方程式の一般形

純曲げ振動の解析は (20) 式で与えられる a_m および b_m に関する斉一次連立方程式より a_m および b_m を消去して得られる振動数方程式を、逐次近似的に解くことに帰着する。したがって $m=n=7$ まで取って作られる近似振動数方程式の一般形は (22-1) 式の如く与えられる。なお (22-1) 式以下の振動数方程式はすべて巻末に集録することにする。

(22-1) 式は片持梁、両端自由梁の両方の場合に適用できるが、両端自由梁の場合には、第一次固有函数が平行移動、第二次固有函数が回転の剛体変位に対応しているので、一般に

$$C_{1n} = C_{n1} = C_{2n} = C_{n2} = 0$$

である。そして、この場合両翼を考えに入れた振動を扱うことになるから、剛性分布や質量分布の対称性を考えれば振動数方程式 (22-1) 式は、二つの対称振動および非対称振動の方程式に分れることがわかる。

(i) 両端自由梁対称曲げ振動 (22-2) 式

(ii) 両端自由梁非対称曲げ振動 (22-3) 式

すなわち、(i) の場合には平行移動の剛体変位、(ii) の場合には胴体の中心線の周りの回転の剛体変位を第一次振動（当然の事であるが振動数は零である）として含んでいることがわかる。

(II) 純振り振動の振動数方程式の一般形

この場合の振動数方程式は (21) 式より c_m を消去して (23) 式の如く求められる。

この式も (22-1) 式と同様、片持梁、両端自由梁の両方の場合に適用できるが、一般に航空機の胴体の有するピッチングの慣性能率は翼の振り剛性に比較して非常に大きく、したがって、翼の付け根の回転角は零に等しいとみなし得る。故に、翼の振り振動に関しては、片翼を片持梁として考えた振動解析を行なえば十分である。

(III) 曲げ振り連成振動の振動数方程式の一般形

この場合の振動数方程式は、純曲げ振動および純捩り振動を特別な場合として含む (19) 式より (24-1) 式の如く導かれる。

そして、純曲げ振動および純捩り振動の場合と同様、両端自由梁の場合には、振動数方程式は対称振動と非対称振動の二つの方程式に分離する。

(i) 対称振動 (24-2) 式

(ii) 非対称振動 (24-3) 式

(IV) 純曲げ振動の解析例

翼の質量分布は Bisplinghoff にならって、第 4 図の如くとするものとする。(また、質量 M_i の数値は第 3 表を参照)

(a) 片持梁曲げ振動 (Cantilever bending modes)

この場合 (22-1) 式に含まれる諸係数 A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} , F_{mn} および G_{mn} の数値表は次の如く与えられる。(第 4-1 表～第 4-6 表参照)

第 4-1 表 A_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1.18637	1.02778	0.02139	0.03839	-0.38246
2	1.02778	2.81705	1.57258	-0.42897	-0.96032
3	0.02139	1.57258	2.89144	0.39720	-0.78684
4	0.03839	-0.42897	0.39720	2.44767	1.11686
5	-0.38246	-0.96032	-0.78684	1.11686	3.39848

第 4-2 表 B_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	0.00012	-0.00001	0.00000	-0.00012	-0.00001
2	-0.00001	0.00080	0.00015	0.00007	-0.00037
3	0.00000	0.00015	0.00206	0.00084	0.00039
4	-0.00012	0.00007	0.00084	0.00507	0.00254
5	-0.00001	-0.00037	0.00039	0.00254	0.00949

第 4-3 表 C_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{lb/sec}^2$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	170.551	338.053	305.164	222.471	184.115
2	338.053	4354.38	5637.38	4045.95	2794.83
3	305.164	5637.38	31122.6	29199.3	15699.6
4	222.471	4045.95	29199.3	112367.	87735.3
5	184.115	2794.83	15699.6	87735.3	286963.

第 4-4 表 D_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1.41599	0.54810	-0.34416	-0.06961	-0.45762
2	1.81528	2.68937	-0.05395	-1.18786	-0.76513
3	0.62259	2.47044	1.82123	-1.15750	-0.71274
4	0.06339	0.03026	1.56682	2.20764	-0.23082
5	-0.55702	-0.68728	0.49292	2.48259	2.85810

第 4-5 表 F_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1.88546	1.39725	-0.16407	-0.31986	-0.63568
2	1.39725	3.11864	0.91331	-1.11962	-0.60355
3	-0.16407	0.91331	2.16309	0.62962	-0.10550
4	-0.31986	-1.11962	0.62962	3.17722	1.15300
5	-0.63568	-0.60355	-0.10550	1.15300	3.13592

第 4-6 表 G_{mn} の数値表 (片持梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb/sec}^2$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	4660.20	1015.58	-347.805	186.794	-44.5006
2	1015.58	38269.0	6521.61	-2124.99	1165.50
3	-347.805	6521.61	105512.	15793.9	-5468.80
4	186.794	-2124.99	15793.9	205807.	30414.0
5	-44.5006	1165.50	-5468.80	30414.0	329191.

これらの表を用いて、振動数方程式が求められる。

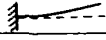
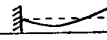
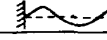
(i) 純曲げ変形による振動 (25-1) 式

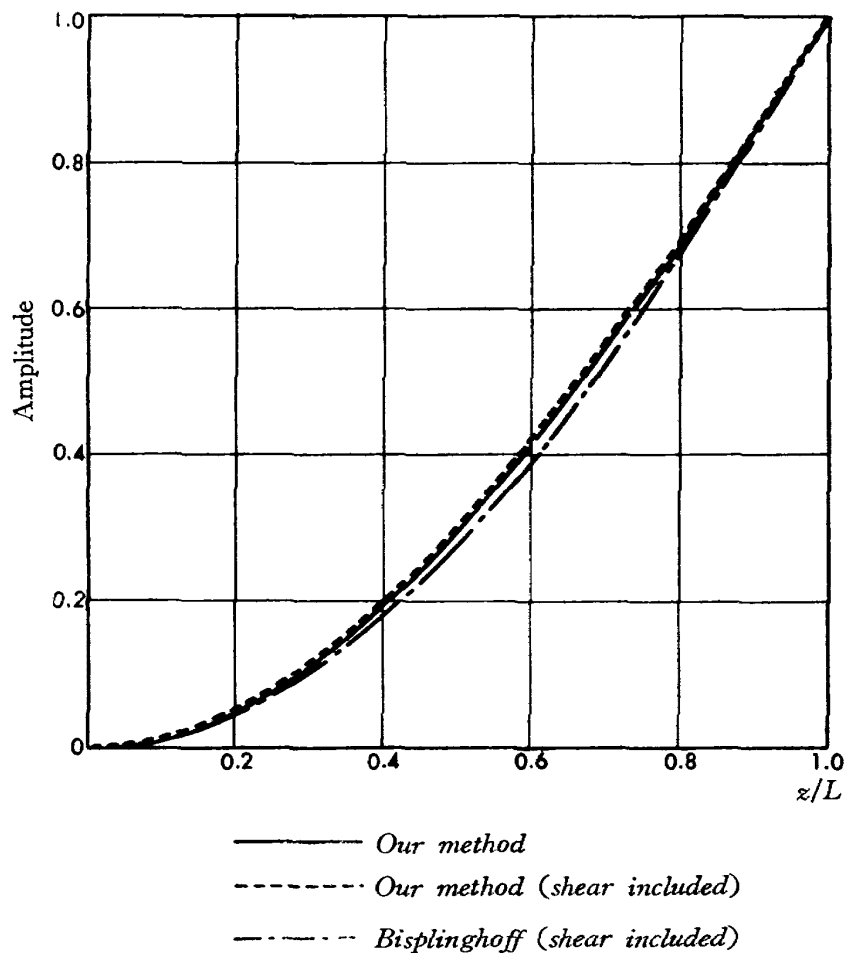
(ii) 剪断変形の影響を考慮した場合 (25-2) 式

(iii) 剪断変形および回転慣性の影響を考慮した場合 (25-3) 式

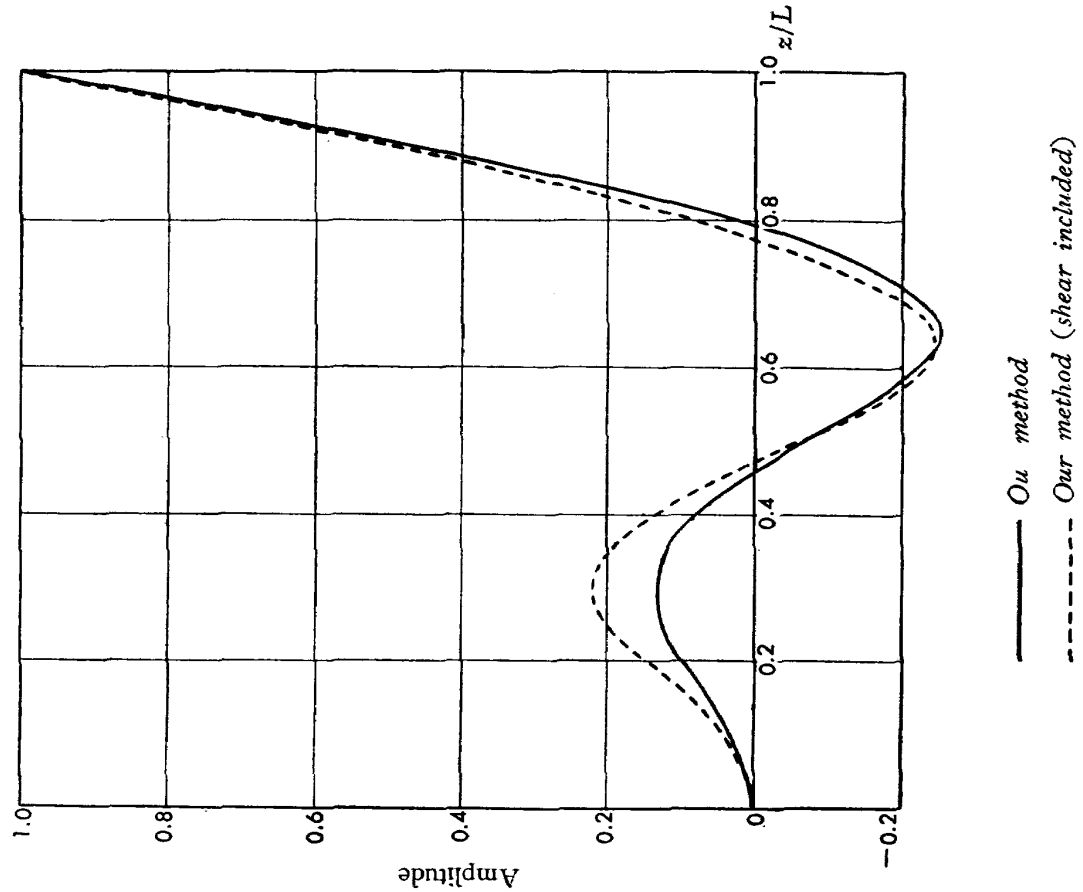
これら三つの振動数方程式を DATATRON 205 電子計算機により解いた結果を第 8 表および第 7 図に示す。(第 8 表および第 7-1 図～第 7-3 図参照)

第 8 表 片持梁曲げ振動 (rad/sec)

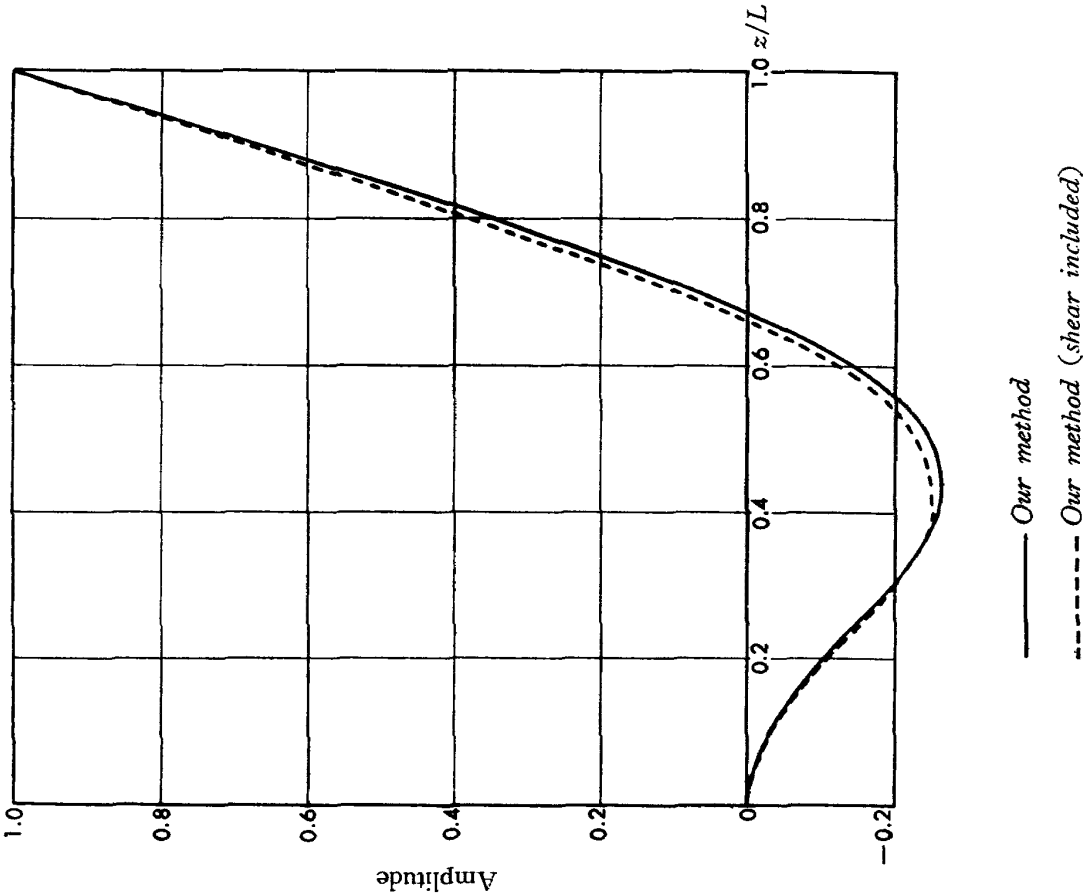
Method \ Vibrating mode	1st	2nd	3rd
			
Our method	11.631	43.361	115.38
Our method (shear)	11.310	40.433	101.62
Our method (shear+rotatory inertia)	11.309	40.426	101.58
Bisplinghoff (shear)	12.799		



第 7-1 図 1st cantilever bending mode



第 7-3 図 3rd cantilever bending mode



第 7-2 図 2nd cantilever bending mode

(b) 両端自由梁曲げ振動 (Unrestrained bending modes)

(22-2) 式および (22-3) 式に含まれる A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} , F_{mn} および G_{mn} の数値は次の表の如く与えられる。(第 5-1 表～第 5-6 表参照)

第 5-1 表 A_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	2.09595	0	-1.52678	0	0.81907	0	-0.69512
2	0	0.81012	0	0.65026	0	-0.00927	0
3	-1.52678	0	2.02798	0	-1.57108	0	0.91163
4	0	0.65026	0	1.67740	0	-0.61470	0
5	0.81907	0	-1.57108	0	2.59890	0	-2.06625
6	0	-0.00927	0	-0.61470	0	2.02496	0
7	-0.69512	0	0.91163	0	-2.06625	0	3.03128

第 5-2 表 B_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.00006	0	0.00005	0	-0.00006	0
3	0	0	0.00015	0	-0.00007	0	0.00010
4	0	0.00005	0	0.00045	0	-0.00026	0
5	0	0	-0.00007	0	0.00074	0	-0.00040
6	0	-0.00006	0	-0.00026	0	0.00128	0
7	0	0	0.00010	0	-0.00040	0	0.00179

第 5-3 表 C_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb/sec}^2$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	193.827	0	-365.370	0	345.113
4	0	0	0	883.632	0	-1213.10	0
5	0	0	-365.370	0	3635.58	0	-4199.70
6	0	0	0	-1213.10	0	9040.88	0
7	0	0	345.113	0	-4199.70	0	20872.8

第 5-4 表 D_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	1.42304	0	1.52682	0	0.34085	0	-0.14486
2	0	1.20957	0	0.77411	0	-0.13592	0
3	-0.20098	0	-1.31803	0	-0.79897	0	0.13049
4	0	1.13193	0	2.06756	0	0.36279	0
5	-0.74287	0	-0.57099	0	0.97253	0	0.89454
6	0	-0.08634	0	-1.17963	0	-1.47332	0
7	0.46250	0	1.52898	0	0.49097	0	-1.63956

第 5-5 表 F_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb}$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	1.88546	0	1.39725	0	-0.16407	0	-0.31986
2	0	1.88546	0	1.39725	0	-0.16407	0
3	1.39725	0	3.11864	0	0.91331	0	-1.11962
4	0	1.39725	0	3.11864	0	0.91331	0
5	-0.16407	0	0.91331	0	2.16309	0	0.62962
6	0	-0.16407	0	0.91331	0	2.16309	0
7	-0.31986	0	-1.11962	0	0.62962	0	3.17722

第 5-6 表 G_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振動) $\times 10^{-4} \text{ lb/sec}^2$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	4660.20	0	1015.58	0	-347.805	0	186.784
2	0	4660.20	0	1015.58	0	-347.805	0
3	1015.58	0	38269.0	0	6521.61	0	-2125.04
4	0	1015.58	0	38269.0	0	6521.61	0
5	-347.805	0	6521.61	0	105512.	0	15793.9
6	0	-347.805	0	6521.61	0	105512.	0
7	186.784	0	-2125.04	0	15793.9	0	205807.

これらの表を参照して、振動数方程式が作られる。

(i) 純曲げ変形による振動

対称振動 (26-1) 式

非対称振動 (26-2) 式

(ii) 剪断変形の影響を考慮した場合

対称振動 (26-3) 式

非対称振動 (26-4) 式

(iii) 剪断変形および回転慣性の影響を考慮した場合

対称振動 (26-5) 式




非対称振動 (26-6) 式

これらの振動数方程式の解析結果を第 9 表および第 8 図に示す。(第 9-1~表 9-2 第表および第 8-1 図~第 8-5 図参照)

第 9-1 表 両端自由梁曲げ振動

対称振動


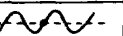
(rad/cse)

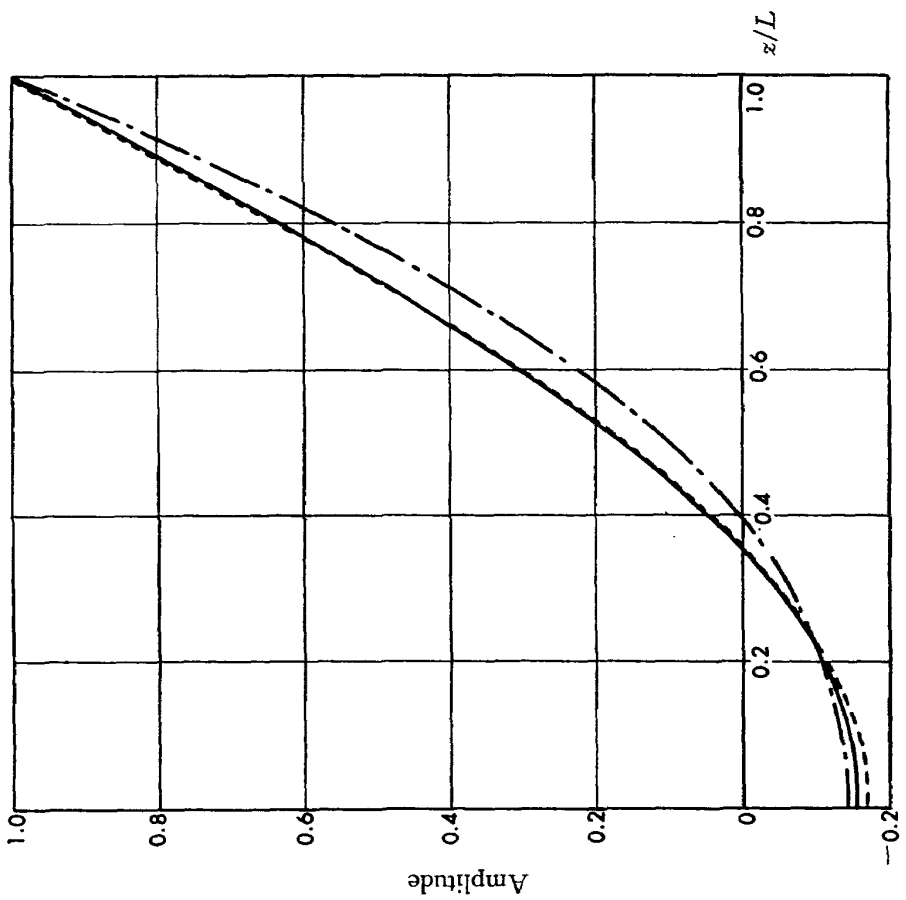
Vibrating mode Method	1st	2nd	3rd
			
Our method	14.198	49.783	119.51
Our method (shear)	12.437	40.760	96.118
Our method (shear+rotatory inertia)	12.436	40.752	96.086
Bisplinghoff (shear)	15.316	53.545	

第 9-2 表 両端自由梁曲げ振動

非対称振動

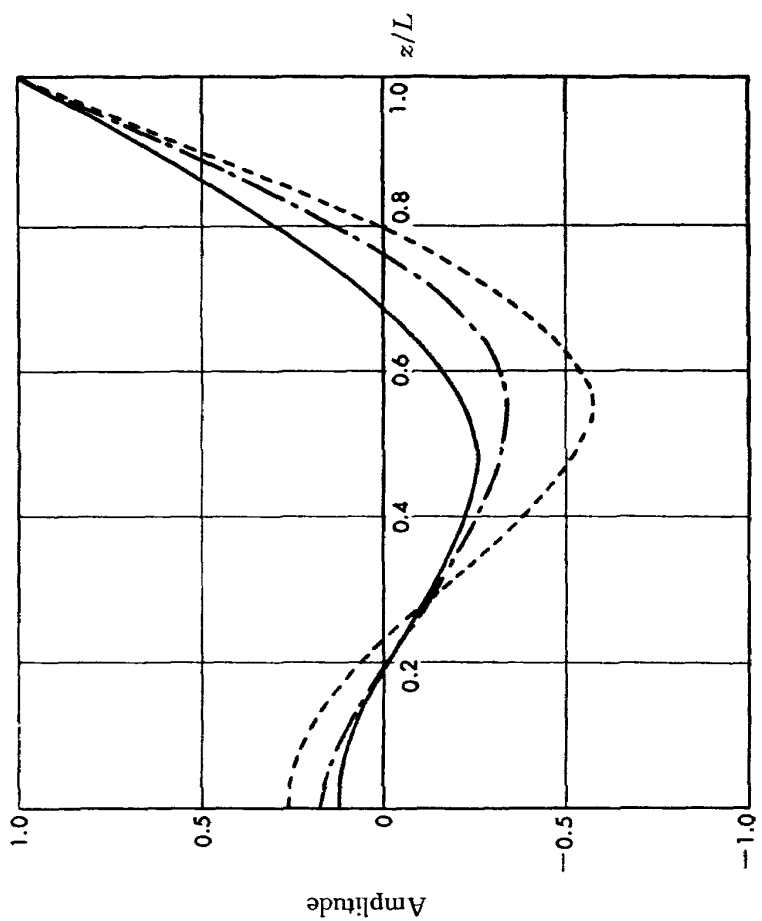
(rad/sec)

Vibrating mode Method	1st	2nd
		
Our method	26.339	69.043
Our method (shear)	25.748	64.840
Our method (shear+rotatory inertia)	25.744	64.823
Bisplinghoff (shear)	28.85	



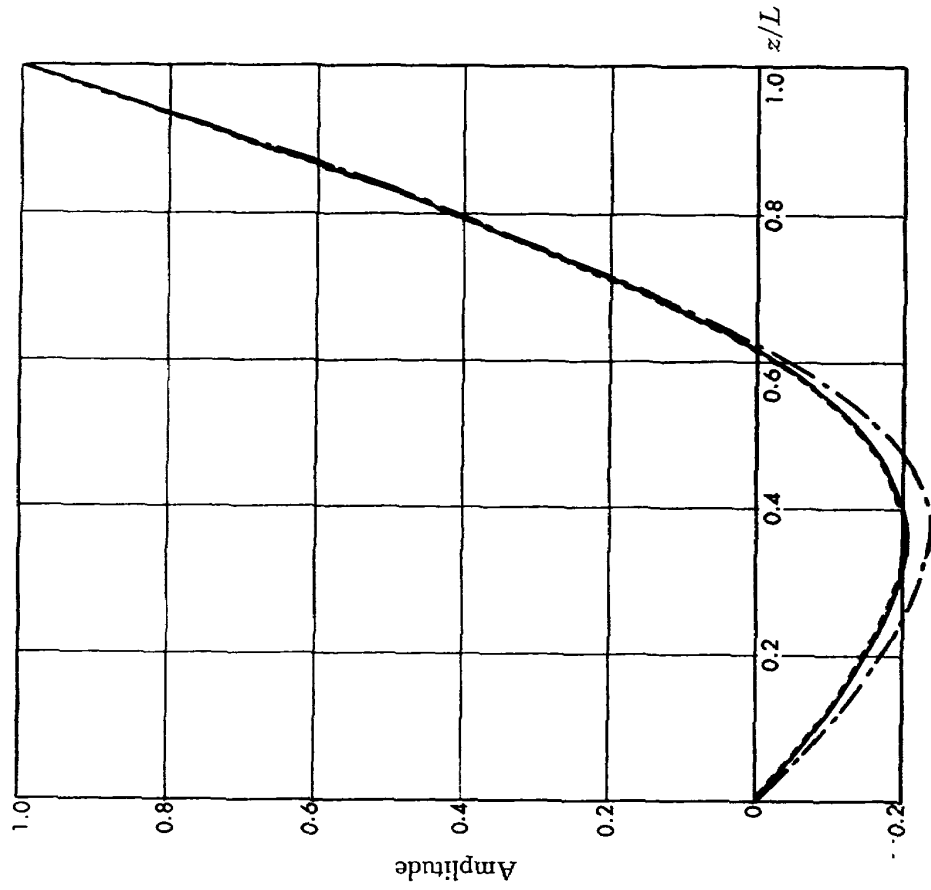
— Our method
--- Our method (shear included)
-.- Bisplinghoff (shear included)

第 8-1 図 1st unrestrained symmetrical bending mode

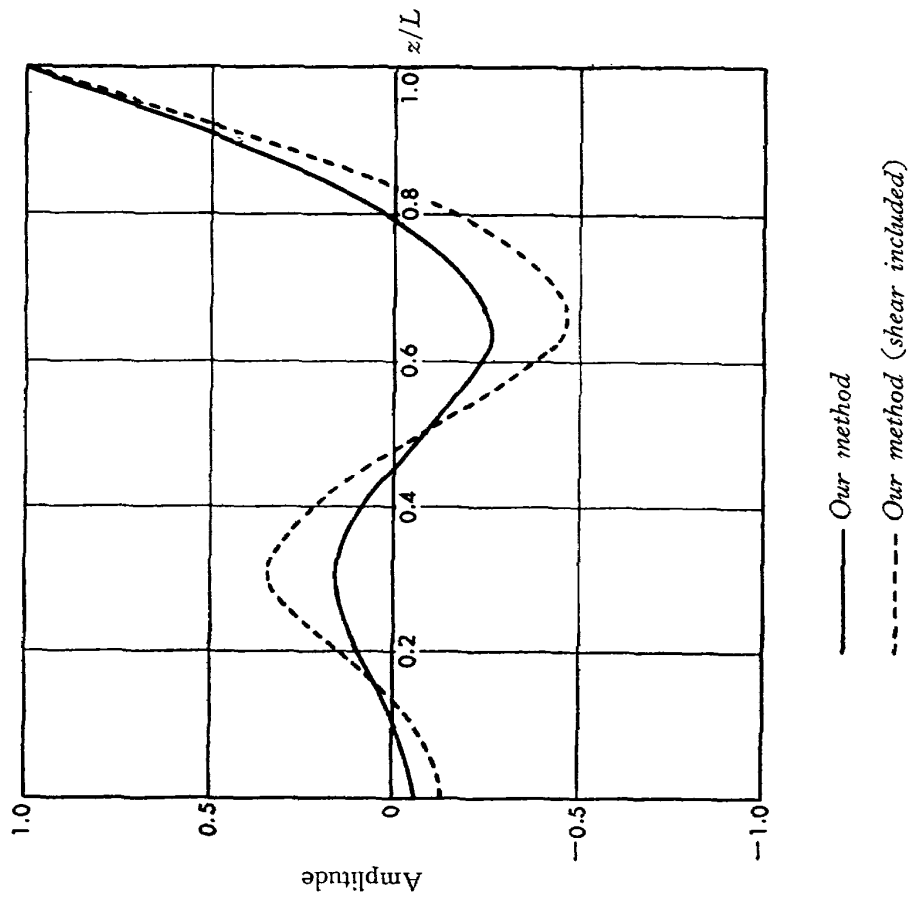


— Our method
--- Our method (shear included)
-.- Bisplinghoff (shear included)

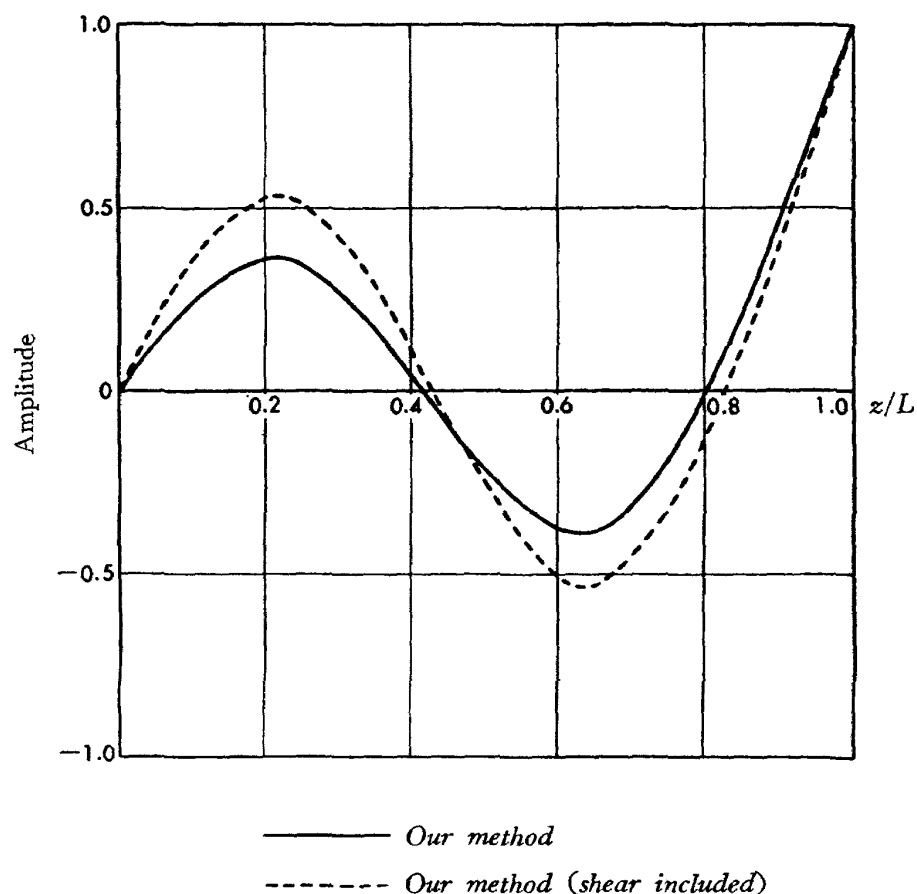
第 8-2 図 2nd unrestrained symmetrical bending mode



第 8-4 図 1st unrestrained antisymmetrical bending mode



第 8-3 図 3rd unrestrained symmetrical bending mode



第 8-5 図 2nd unrestrained antisymmetrical bending mode

(V) 純振り振動の解析例

翼の慣性能率分布は Bisplinghoff にならって、第5図の如くとするものとする。(また、慣性能率 I_i の数値は第3表参照)

(23) 式に現われる諸係数 I_{mn} および J_{mn} の数値表は次の如くである。

第 6-1 表 I_{mn} の数値表 (片持梁振り振動) $\times 10^{-4}$ lb

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	6763.81	10557.9	2053.83	-7661.70	-8364.53
2	10557.9	19375.6	4940.11	-13982.4	-14383.5
3	2053.83	4940.11	3339.38	-1771.71	-2885.96
4	-7671.70	-13982.4	-1771.71	14435.8	13097.3
5	-8364.53	-14383.5	-2885.96	13097.3	15232.2

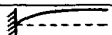


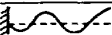
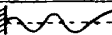
第 6-2 表 J_{mn} の数値表 (片持梁振り振動) $\times 10^{-4} \text{ lb/sec}^2$

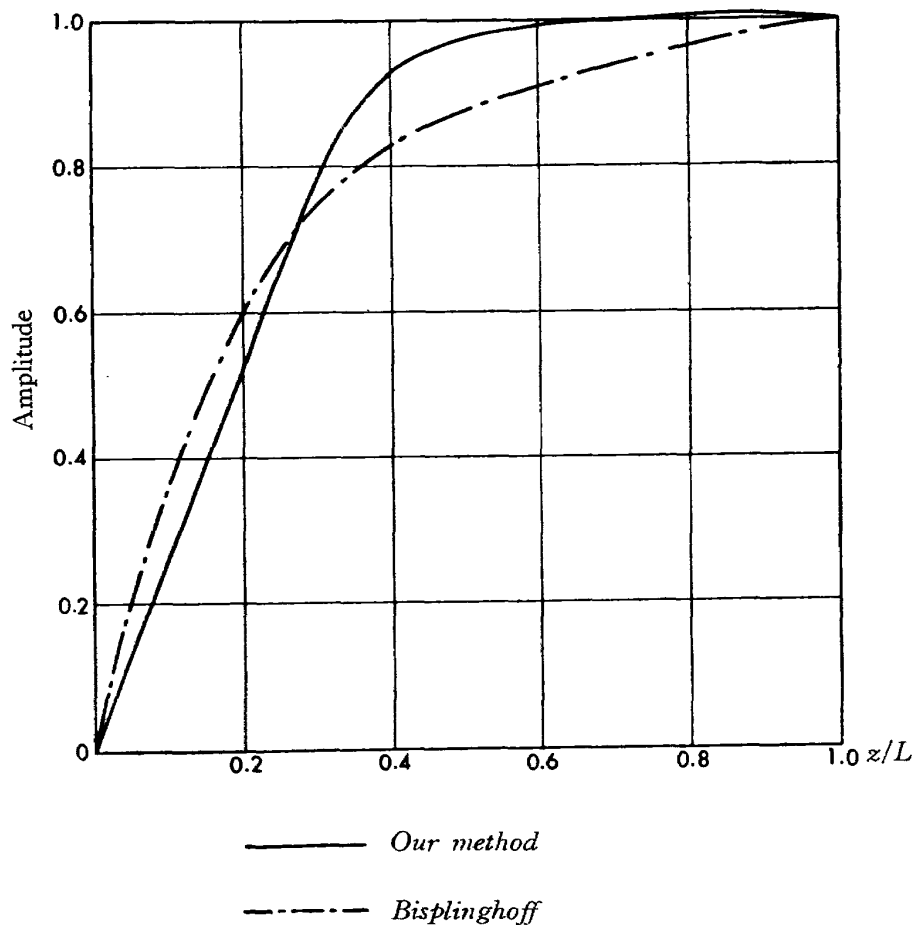
$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	4764430	1991740	-2058960	219633	286415
2	1991740	33198500	16606200	-8638260	-457488
3	-2058960	16606200	92229400	37056600	-17951600
4	219633	-8638260	37056600	181378300	75533500
5	286415	-457488	-17951600	75533500	270359000

これらの表を参照して、振動数方程式 (27) 式が求められる。

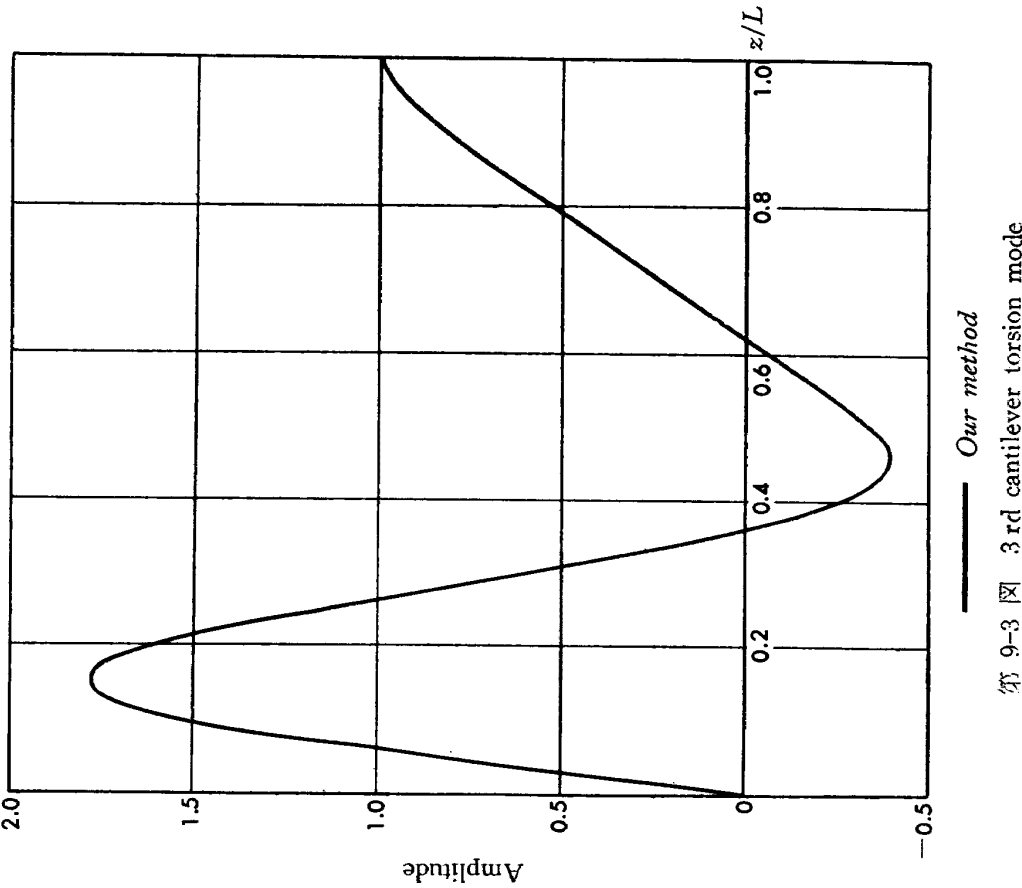
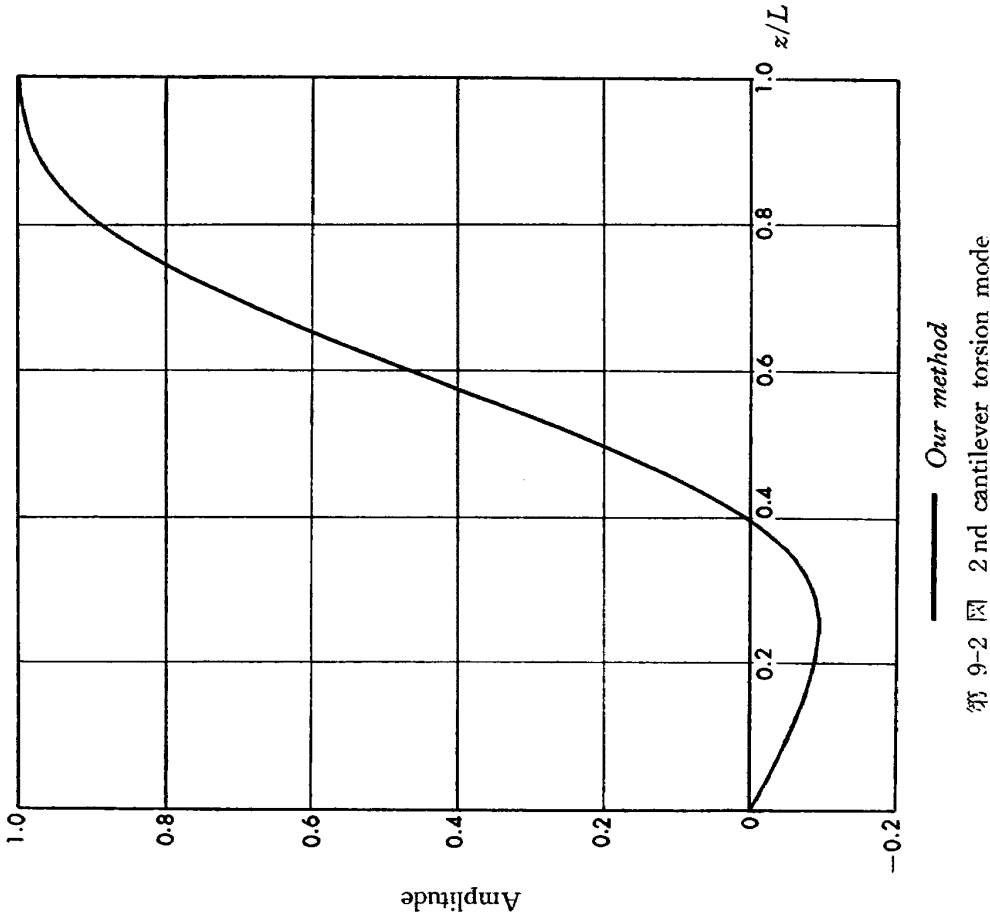
上記 (27) 式の解析結果を第 10 表および第 9 図に示す。(第 10 表および第 9-1 図～第 9-5 図参照)

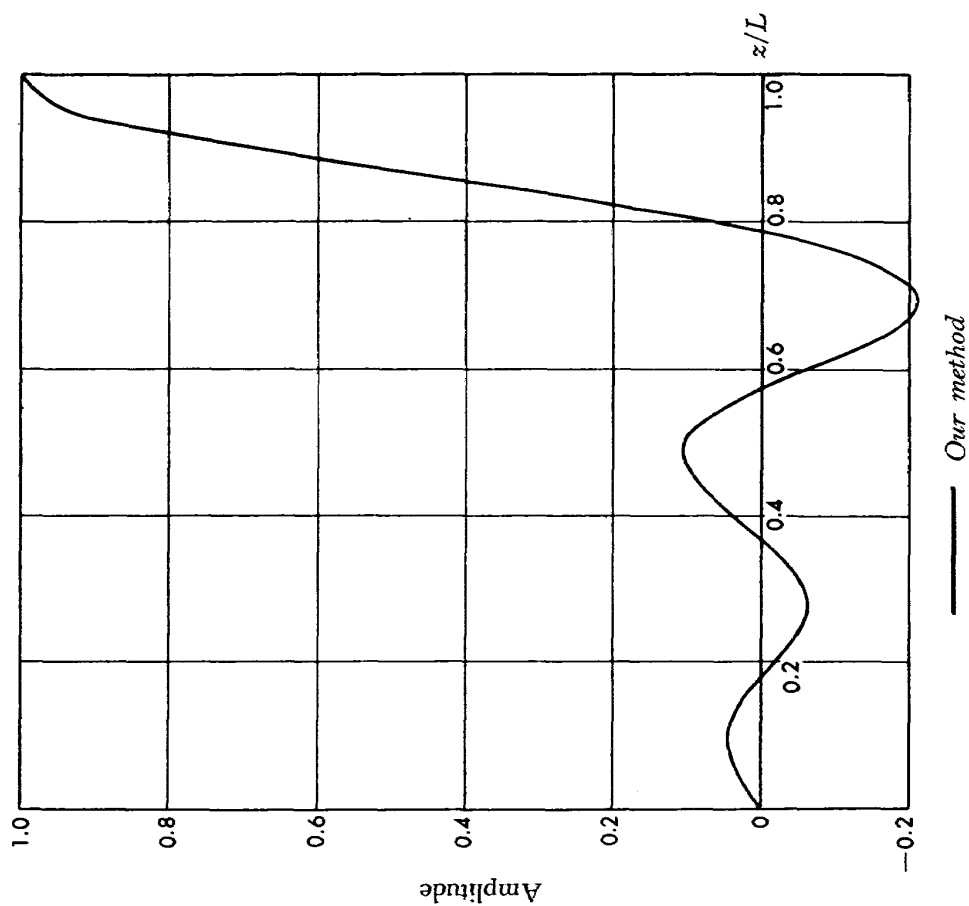
第 10 表 片持梁振り振動 (rad/sec)

$\begin{matrix} \text{Vibrating} \\ \text{mode} \end{matrix} \backslash \text{Method}$	1st	2nd	3rd	4th	5th
					
Our method	23.792	114.08	186.59	278.27	352.08
Bisplinghoff	22.357				

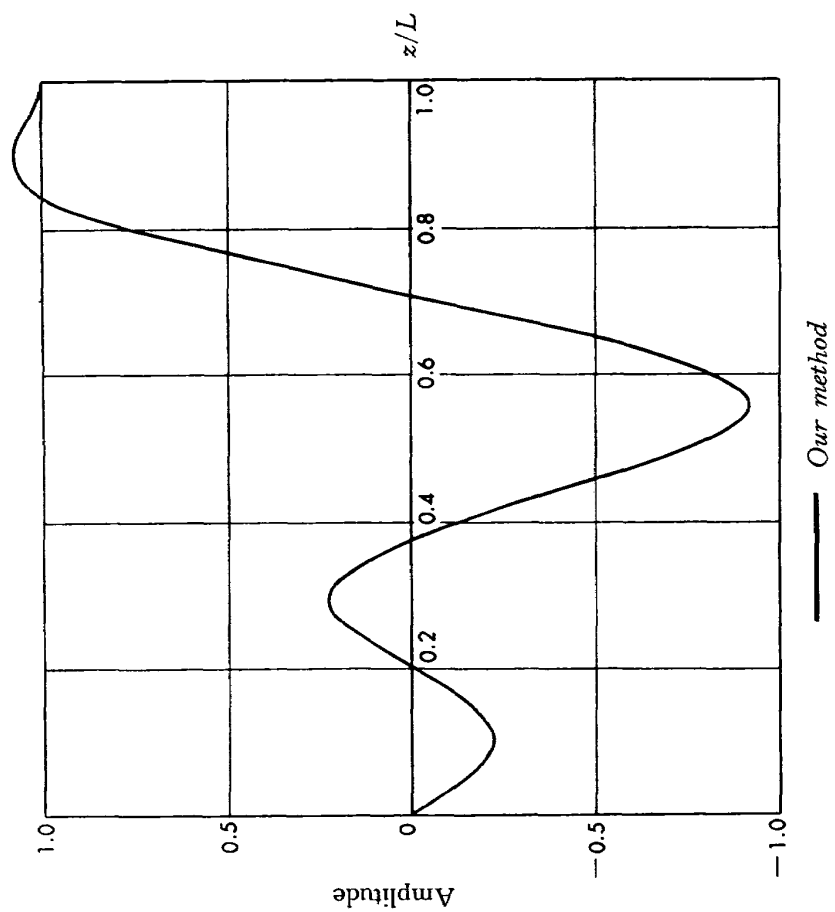


第 9-1 図 1st cantilever torsion mode





第 9-5 図 5 th cantilever torsion mode



第 9-4 図 4 th cantilever torsion mode

(VI) 両端自由梁曲げ振り連成振動の解析例

(24-1), (24-2) および (24-3) 式に現われる諸係数 A_{mn} , B_{mn} , ……., J_{mn} の数値は, すでに与えられた第 5 表, 第 6 表および次に示す第 7 表の E_{mn} , および H_{mn} を用いて, 次のような振動数方程式が求まる。

第 7-1 表 E_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振り連成振動) $\times 10^{-4}$ lb

n \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	7.38840	0	16.9313	0	8.07983	0	-7.68253
2	0	3.54388	0	10.0910	0	4.03065	0
3	-7.01109	0	-11.4628	0	-6.53130	0	2.73224
4	0	10.9632	0	20.1714	0	8.80041	0
5	-2.87246	0	-5.15494	0	0.01323	0	10.1700
6	0	-7.94153	0	-14.2495	0	-6.61231	0
7	11.3375	0	18.9831	0	3.73611	0	-15.0045

第 7-2 表 H_{mn} の数値表 (両端自由梁曲げ振り連成振動) $\times 10^{-4}$ lb

n \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	6.57528	0	17.1419	0	6.97288	0	-10.8039
2	0	6.57528	0	17.1419	0	6.97288	0
3	17.1419	0	30.6901	0	13.3108	0	-16.0817
4	0	17.1419	0	30.6901	0	13.3108	0
5	6.97288	0	13.3108	0	7.63553	0	3.03348
6	0	6.97288	0	13.3108	0	7.63553	0
7	-10.8039	0	-16.0817	0	3.03348	0	23.9012

(i) 曲げおよび振り変形のみによる振動

対称振動 (28-1) 式

非対称振動 (28-2) 式

(ii) 剪断変形の影響を考慮した場合

対称振動 (28-3) 式

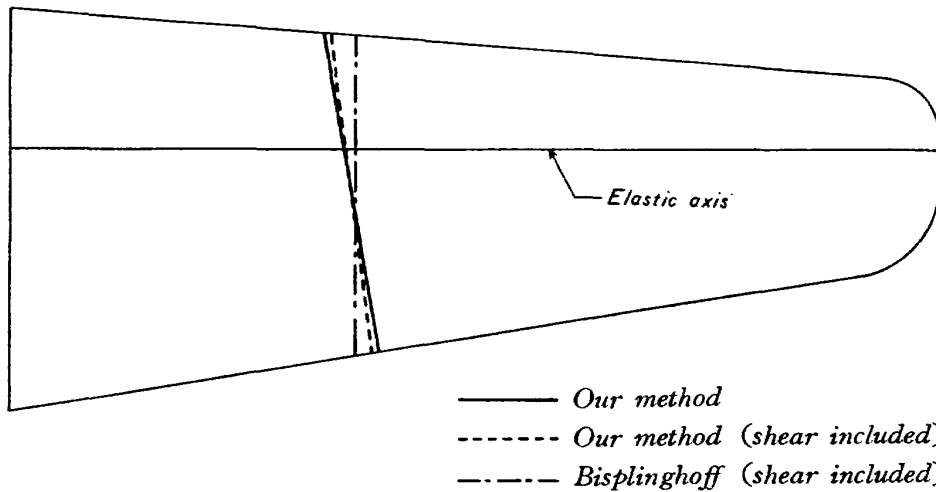
以上 3 個の振動数方程式を解いた結果を第 11 表および第 10 図に示す。(第 11-1 表~第 11-2 表および第 10-1 図~第 10-4 図参照)

第 11-1 表 両端自由梁曲げ捩り連成振動
対称振動 (rad/sec)

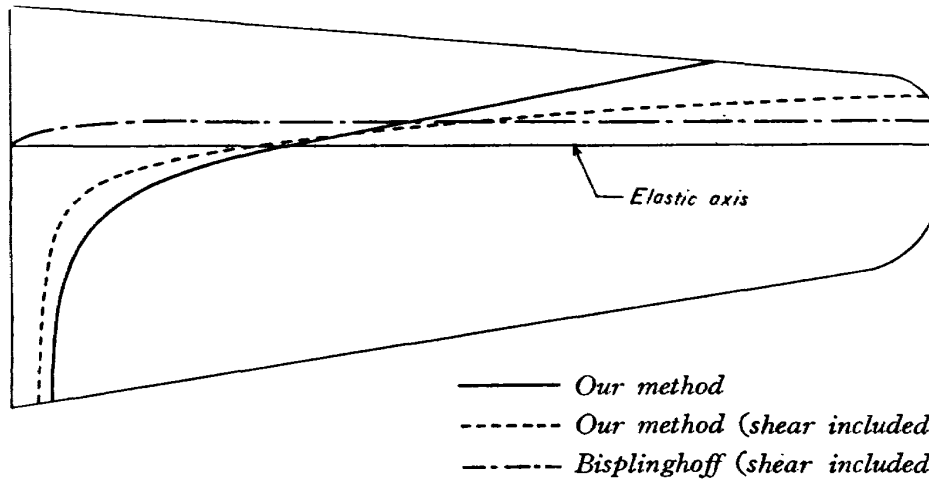
Vibrating mode Method	1st	2nd
Our method	13.937	24.425
Our method (shear)	12.354	24.210
Bisplinghoff (shear)	15.310	22.410

第 11-2 表 両端自由梁曲げ捩り連成振動
非対称振動 (rad/sec)

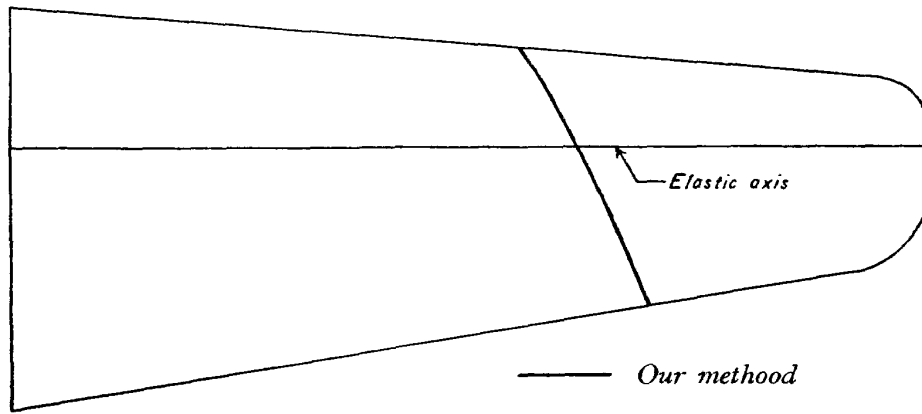
Vibrating mode Method	1st	2nd
Our method	23.588	27.058
Our method (shear)		
Bisplinghoff (shear)		



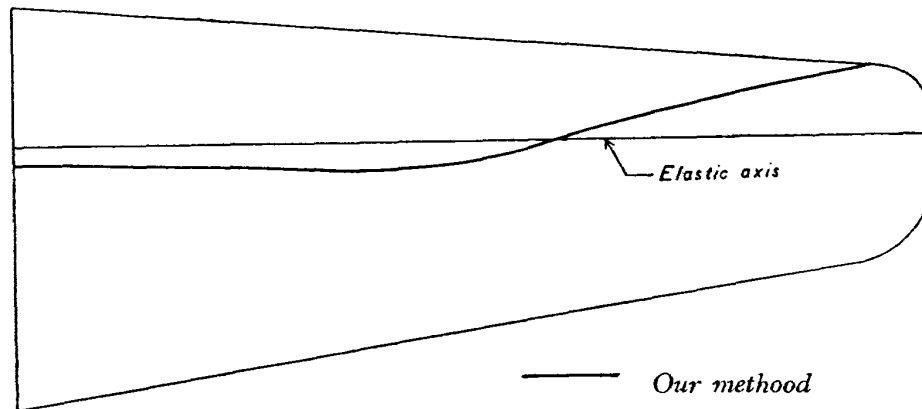
第 10-1 図 Nodal line of 1st unrestrained symmetrical coupled bending-torsion mode



第 10-2 図 Nodal line of 2nd unrestrained symmetrical coupled bending-torsion mode



第 10-3 図 Nodal line of 1st unrestrained antisymmetrical coupled bending-torsion mode



第 10-4 図 Nodal line of 2nd unrestrained antisymmetrical coupled bending-torsion mode

5. 結 言

以上において、著者らはさきに展開した薄肉開断面梁の振動理論⁷⁾を変断面梁の場合にまで拡張し、その曲げ振り振動に関する一解析理論を構成した。この理論においては、実際の航空機翼の振動解析に応用できるように、梁の剪断変形ならびに回転慣性の影響をも考慮してある。この場合、弾性軸は直線で梁の固定端の平面に垂直になっていると仮定して議論が進められているが、重心軸は必ずしも直線である必要はない。

この方法を用いて代表的なジェット輸送機翼の振動解析を広範囲にわたって行ない、Bisplinghoffの解析結果と比較検討してみたが結論を要約すると次のとおりである。

(1) Bisplinghoff の与えた解析結果と大体良く一致しているが、純振り振動の場合を含む二三の場合を除いて一般に 10~20% 低い値が出ている。

この解析法は一つの逐次解析法で常に高目の近似値を与えるものであり、近似を高めていくと解析値は単調に収斂する。実際の計算においてはこの点を十分考慮し、始めの第一、第二、第三モード位までは誤差が約 5% 以下に収まるように必要な項数だけをとって振動数方程式が作られてい

る。又 §4 の始めに述べた如く振動解析に必要な翼の曲げ剛性、捩り剛性は始めに与えられた連続分布曲線をそのまま用いており、マトリックス法による場合に比べ、振動数方程式に現われる諸係数が遙かに精度良く計算されている。ただし、質量分布曲線は Bisplinghoff の教科書に与えられていないので集中質量への置換えによる誤差が当然出てきていると思われるが、これも連続曲線として与えられるならば更に求める振動数の精度は向上するであろう。いづれにしても、求められた解析値は始めの数モードの振動に関しては相当な精度になっていると考えられるから、Bisplinghoff の数値解析の結果よりも大分精度が良いものと思われる。

(2) 計算の難易、所要時間、その他解析法の実用性という点は解析値の精度を同一にしておいて論ずべき問題であると思われるから、決定的な結論は容易に下せないが Bisplinghoff の行なったマトリックス解法よりも単純で機械的に行なえる点で優っているのではないかと思われる。筆者等は実際の航空機翼のみならず、ロケットや船舶等の初期設計における固有振動数の計算法として十分実用性があるものと確信している。

(3) 本報告の解析結果から 剪断変形による固有振動数の低下は、低次の場合でも約 10~15% 位あることが認められたが、回転慣性の影響は実用上低次の場合には無視できる程度のものであることがわかった。したがって、実際の航空機の振動解析においては剪断変形の影響だけは是非とも考慮する必要があると云えよう。

このようにして、著者等は航空機翼の振動解析法として十分この方法が実用に耐えることを認めたので、近い将来実際の航空機の振動解析に応用して実験結果と比較してみたいと考えている。

この研究は、約三年前著者の一人川井がその基礎理論を展開し、林が手計算で粗い解析を行なったのであるが、剪断変形の影響を考慮していなかったので、Bisplinghoff の解析結果と精度の比較検討が行なえなかった。その後、泉の協力を得て剪断変形ならびに回転慣性の影響をも考慮した理論を作り、戸川が Datatron 205 による実際の振動解析を遂行した。その間機体部、計測工務部の多くの研究員諸氏の直接間接の協力をいただいた。ここに、それらの方がたに深く感謝の意を表するとともに、絶えず御激励を賜った上山機体部長に心から御礼申し上げる次第である。

文 献

- 1) J.M. Gere and Y.K. Lin: "Coupled Vibration of Thin Walled Beam of Open Cross Section". Journal of Applied Mechanics, Vol. 80, 1958
- 2) Dana Young and Robert P. Felgar, JR.: "Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam". The University of Texas Publication, No. 4913, July 1. 1949
- 3) R.E.D. Bishop and D.C. Johnson: "Vibration Analysis Tables". Cambridge University Press, 1956
- 4) Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley and Robert L. Halfman: "Aeroelasticity". Adison-Wesley Publishing Company, 1955
- 5) 山本善之: 振動学 応用力学講座 (共立出版)
- 6) 倉西正嗣: 弾性学 日本機械学会
- 7) 川井, 埴: 薄肉開断面梁の自由振動について 航空技術研究所報告 TR-12
- 8) 林 桂一: 高等函数表 岩波

(i) 両端自由梁対称曲げ振動 ($m=n=1, 3, 5, 7$)

$$\begin{array}{cccccccc}
p^2(A_{11}+B_{11})-C_{11} & p^2D_{11} & p^2(A_{18}+B_{18})-C_{18} & p^2D_{18} & p^2(A_{15}+B_{15})-C_{15} & p^2D_{15} & p^2(A_{17}+B_{17})-C_{17} & p^2D_{17} \\
p^2D_{11} & p^2F_{14}-G_{11} & p^2D_{81} & p^2F_{18}-G_{18} & p^2D_{51} & p^2F_{15}-G_{15} & p^2D_{71} & p^2F_{17}-G_{17} \\
p^2(A_{81}+B_{81})-C_{81} & p^2D_{81} & p^2(A_{88}+B_{88})-C_{88} & p^2D_{88} & p^2(A_{85}+B_{85})-C_{85} & p^2D_{85} & p^2(A_{87}+B_{87})-C_{87} & p^2D_{87} \\
p^2D_{18} & p^2F_{81}-G_{81} & p^2D_{88} & p^2F_{88}-G_{88} & p^2D_{58} & p^2F_{85}-G_{85} & p^2D_{78} & p^2F_{87}-G_{87} \\
p^2(A_{51}+B_{51})-C_{51} & p^2D_{51} & p^2(A_{58}+B_{58})-C_{58} & p^2D_{58} & p^2(A_{55}+B_{55})-C_{55} & p^2D_{55} & p^2(A_{57}+B_{57})-C_{57} & p^2D_{57} \\
p^2D_{15} & p^2F_{51}-G_{51} & p^2D_{85} & p^2F_{58}-G_{58} & p^2D_{55} & p^2F_{55}-G_{55} & p^2D_{75} & p^2F_{57}-G_{57} \\
p^2(A_{71}+B_{71})-C_{71} & p^2D_{71} & p^2(A_{78}+B_{78})-C_{78} & p^2D_{78} & p^2(A_{75}+B_{75})-C_{75} & p^2D_{75} & p^2(A_{77}+B_{77})-C_{77} & p^2D_{77} \\
p^2D_{17} & p^2F_{71}-G_{71} & p^2D_{87} & p^2F_{78}-G_{78} & p^2D_{57} & p^2F_{75}-G_{75} & p^2D_{77} & p^2F_{77}-G_{77}
\end{array}$$

(22-2)

=0

(ii) 両端自由梁非対称曲げ振動 ($m=n=2, 4, 6$)

$$\begin{array}{cccccc}
 p^2(A_{22}+B_{22})-C_{22} & p^2D_{22} & p^2(A_{24}+B_{24})-C_{24} & p^2D_{24} & p^2(A_{26}+B_{26})-C_{26} & p^2D_{26} \\
 p^2D_{22} & p^2F_{22}-G_{22} & p^2D_{42} & p^2F_{24}-G_{24} & p^2D_{62} & p^2F_{26}-G_{26} \\
 p^2(A_{42}+B_{42})-C_{42} & p^2D_{42} & p^2(A_{44}+B_{44})-C_{44} & p^2D_{44} & p^2(A_{46}+B_{46})-C_{46} & p^2D_{46} \\
 p^2D_{24} & p^2F_{42}-G_{42} & p^2D_{44} & p^2F_{44}-G_{44} & p^2D_{64} & p^2F_{46}-G_{46} \\
 p^2(A_{62}+B_{62})-C_{62} & p^2D_{62} & p^2(A_{64}+B_{64})-C_{64} & p^2D_{64} & p^2(A_{66}+B_{66})-C_{66} & p^2D_{66} \\
 p^2D_{26} & p^2F_{62}-G_{62} & p^2D_{46} & p^2F_{64}-G_{64} & p^2D_{66} & p^2F_{66}-G_{66}
 \end{array} \dots\dots\dots (22-3)$$

(II) 純振り振動の振動数方程式の一般形 ($m=n=1, 2, 3, 4, 5$)

$$\begin{array}{ccccc}
 p^2I_{11}-J_{11} & p^2I_{12}-J_{12} & p^2I_{13}-J_{13} & p^2I_{14}-J_{14} & p^2I_{15}-J_{15} \\
 p^2I_{21}-J_{21} & p^2I_{22}-J_{22} & p^2I_{23}-J_{23} & p^2I_{24}-J_{24} & p^2I_{25}-J_{25} \\
 p^2I_{31}-J_{31} & p^2I_{32}-J_{32} & p^2I_{33}-J_{33} & p^2I_{34}-J_{34} & p^2I_{35}-J_{35} \\
 p^2I_{41}-J_{41} & p^2I_{42}-J_{42} & p^2I_{43}-J_{43} & p^2I_{44}-J_{44} & p^2I_{45}-J_{45} \\
 p^2I_{51}-J_{51} & p^2I_{52}-J_{52} & p^2I_{53}-J_{53} & p^2I_{54}-J_{54} & p^2I_{55}-J_{55}
 \end{array} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

(ii) 両端自由梁曲げ振り連成振動

非対称振動 ($m=n=2, 4, 6$)

$p^2(A_{22}+B_{22})-C_{22}$	p^2D_{22}	p^2E_{22}	$p^2(A_{24}+B_{24})-C_{24}$	p^2D_{24}	p^2E_{24}	$p^2(A_{26}+B_{26})-C_{26}$	p^2D_{26}	p^2E_{26}
p^2D_{22}	$p^2F_{22}-G_{22}$	p^2H_{22}	p^2D_{42}	$p^2F_{24}-G_{24}$	p^2H_{24}	p^2D_{62}	$p^2F_{26}-G_{26}$	p^2H_{26}
p^2E_{22}	p^2H_{22}	$p^2I_{22}-J_{22}$	p^2E_{42}	p^2H_{24}	$p^2I_{24}-J_{24}$	p^2E_{62}	p^2H_{26}	$p^2I_{26}-J_{26}$
$p^2(A_{42}+B_{42})-C_{42}$	p^2D_{42}	p^2E_{42}	$p^2(A_{44}+B_{44})-C_{44}$	p^2D_{44}	p^2E_{44}	$p^2(A_{46}+B_{46})-C_{46}$	p^2D_{46}	p^2E_{46}
p^2D_{24}	$p^2F_{42}-G_{42}$	p^2H_{42}	p^2D_{44}	$p^2F_{44}-G_{44}$	p^2H_{44}	p^2D_{64}	$p^2F_{46}-G_{46}$	p^2H_{46}
p^2E_{24}	p^2H_{42}	$p^2I_{42}-J_{42}$	p^2E_{44}	p^2H_{44}	$p^2I_{44}-J_{44}$	p^2E_{64}	p^2H_{46}	$p^2I_{46}-J_{46}$
$p^2(A_{62}+B_{62})-C_{62}$	p^2D_{62}	p^2E_{62}	$p^2(A_{64}+B_{64})-C_{64}$	p^2D_{64}	p^2E_{64}	$p^2(A_{66}+B_{66})-C_{66}$	p^2D_{66}	p^2E_{66}
p^2D_{26}	$p^2F_{62}-G_{62}$	p^2H_{62}	p^2D_{46}	$p^2F_{64}-G_{64}$	p^2H_{64}	p^2D_{66}	$p^2F_{66}-G_{66}$	p^2H_{66}
p^2E_{26}	p^2H_{62}	$p^2I_{62}-J_{62}$	p^2E_{46}	p^2H_{64}	$p^2I_{64}-J_{64}$	p^2E_{66}	p^2H_{66}	$p^2I_{66}-J_{66}$

=0

(24-3)

(IV) 純曲げ振動の解析例

(a) 片持梁曲げ振動

(i) 純曲げ変形による振動

$1.18637 p^2$ -170.551	$1.02778 p^2$ -338.053	$0.02139 p^2$ -305.164	$0.03839 p^2$ -222.471	$-0.38246 p^2$ -184.115	=0 \cdots (25-1)
$1.02778 p^2$ -338.053	$2.81705 p^2$ -4354.38	$1.57258 p^2$ -5637.38	$-0.42897 p^2$ -4045.95	$-0.96032 p^2$ -2794.83	
$0.02139 p^2$ -305.164	$1.57258 p^2$ -5637.38	$2.89144 p^2$ -31122.6	$0.39720 p^2$ -29199.3	$-0.78684 p^2$ -15699.6	
$0.03839 p^2$ -222.471	$-0.42897 p^2$ -4045.95	$0.39720 p^2$ -29199.3	$2.44767 p^2$ -112367.	$1.11686 p^2$ -87735.3	
$-0.38246 p^2$ -184.115	$-0.96032 p^2$ -2794.83	$-0.78684 p^2$ -15699.6	$1.11686 p^2$ -87735.3	$3.39848 p^2$ -286963.	

(ii) 剪断変形の影響を考慮した場合

1.18637 p^2 -170.551	1.41599 p^2 -4660.20	1.02778 p^2 -338.053	1.81528 p^2	0.02139 p^2 -305.164	0.62259 p^2	0.03839 p^2 -222.471	0.06339 p^2	-0.38246 p^2 -184.115	-0.55702 p^2
1.41599 p^2	1.88546 p^2 -4660.20	0.54810 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	-0.34416 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-0.06961 p^2	-0.31986 p^2 -186.794	-0.45762 p^2	-0.63568 p^2 +44.5006
1.02778 p^2 -338.053	0.54810 p^2	2.81705 p^2 -4354.38	2.68937 p^2	1.57258 p^2 -5637.38	2.47044 p^2	-0.42897 p^2 -4045.95	0.03026 p^2	-0.96032 p^2 -2794.83	-0.68728 p^2
1.81528 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	2.68937 p^2	3.11864 p^2 -38269.0	-0.05395 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	-1.18786 p^2	-1.11962 p^2 +2124.99	-0.76513 p^2	-0.60355 p^2 -1165.50
0.02139 p^2 -305.164	-0.34416 p^2	1.57258 p^2 -5637.38	-0.05395 p^2	2.89144 p^2 -31122.6	1.82123 p^2	0.39720 p^2 -29199.3	1.56682 p^2	-0.78684 p^2 -15699.6	0.49292 p^2
0.62259 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	2.47044 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	1.82123 p^2	2.16309 p^2 -105512.	-1.15750 p^2	0.62962 p^2 -15793.9	-0.71274 p^2	-0.10550 p^2 +5468.80
0.03839 p^2 -222.471	-0.06961 p^2	-0.42897 p^2 -4045.95	-1.18786 p^2	0.39720 p^2 -29199.3	-1.15750 p^2	2.44767 p^2 -112367.	2.20764 p^2	1.11686 p^2 -87735.3	2.48259 p^2
0.06339 p^2	-0.31986 p^2 -186.794	0.03026 p^2	-1.11962 p^2 +2124.99	1.56682 p^2	0.62962 p^2 -15793.9	2.20764 p^2	3.17722 p^2 -205807.	-0.23082 p^2	1.15300 p^2 -30414.0
-0.38246 p^2 -184.115	-0.45762 p^2	-0.96032 p^2 -2794.83	-0.76513 p^2	-0.78684 p^2 -15699.6	-0.71274 p^2	1.11686 p^2 -87735.3	-0.23082 p^2	3.39848 p^2 -286963.	2.85810 p^2
-0.55702 p^2	-0.63568 p^2 +44.5006	-0.68728 p^2	-0.60355 p^2 -1165.50	0.49292 p^2	-0.10550 p^2 +5468.80	2.48259 p^2	1.15300 p^2 -30414.0	2.85810 p^2	3.13592 p^2 -329191.

(25-2)

=0

(iii) 剪断変形および回転慣性の影響を考慮した場合

1.18650 p^2 -170.551	1.41599 p^2 -338.053	1.02777 p^2 -338.053	1.81528 p^2 -305.164	0.02139 p^2 -305.164	0.62259 p^2 -222.471	0.03826 p^2 -222.471	0.06339 p^2 -184.115	-0.38247 p^2 -184.115	-0.55702 p^2
1.41599 p^2 -4660.20	1.88546 p^2 -4660.20	0.54810 p^2 -4660.20	1.39725 p^2 -1015.58	-0.34416 p^2 -1015.58	-0.16407 p^2 +347.805	-0.06961 p^2 -4045.95	-0.31986 p^2 -186.794	-0.45762 p^2 -2794.83	-0.63568 p^2 +44.5006
1.02777 p^2 -338.053	0.54810 p^2 -4354.38	2.81785 p^2 -4354.38	2.68937 p^2 -38269.0	1.57274 p^2 -5637.38	2.47044 p^2 -6521.61	-0.42889 p^2 -4045.95	0.03026 p^2 +2124.99	-0.96069 p^2 -2794.83	-0.68728 p^2
1.81528 p^2 -338.053	1.39725 p^2 -1015.58	2.68937 p^2 -5637.38	3.11864 p^2 -38269.0	-0.05395 p^2 -31122.6	0.91331 p^2 -6521.61	-1.18786 p^2 -29199.3	-1.11962 p^2 +2124.99	-0.76513 p^2 -15699.6	-0.60355 p^2 -1165.50
0.02139 p^2 -305.164	-0.34416 p^2 -1015.58	1.57274 p^2 -5637.38	-0.05395 p^2 -31122.6	2.89350 p^2 -31122.6	1.82123 p^2 -105512.	0.39804 p^2 -29199.3	1.56682 p^2 -15793.9	-0.78645 p^2 -15699.6	0.49292 p^2
0.62259 p^2 -222.471	-0.16407 p^2 +347.805	2.47044 p^2 -6521.61	0.91331 p^2 -6521.61	1.82123 p^2 -105512.	2.16309 p^2 -105512.	-1.15750 p^2 -112367.	0.62962 p^2 -15793.9	-0.71274 p^2 -87735.3	-0.10550 p^2 +5468.80
0.03826 p^2 -222.471	-0.06961 p^2 -4045.95	-0.42889 p^2 -4045.95	-1.18786 p^2 -29199.3	0.39804 p^2 -29199.3	-1.15750 p^2 -112367.	2.45275 p^2 -112367.	2.20764 p^2 -205807.	1.11940 p^2 -87735.3	2.48259 p^2
0.06339 p^2 -184.115	-0.31986 p^2 -186.794	0.03026 p^2 +2124.99	-1.11962 p^2 +2124.99	1.56682 p^2 -15793.9	0.62962 p^2 -15793.9	2.20764 p^2 -205807.	3.17722 p^2 -205807.	-0.23082 p^2 -286963.	1.15300 p^2 -30414.0
-0.38247 p^2 -184.115	-0.45762 p^2 -2794.83	-0.96069 p^2 -2794.83	-0.76513 p^2 -1165.50	-0.78645 p^2 -15699.6	-0.71274 p^2 -87735.3	1.11940 p^2 -87735.3	-0.23082 p^2 -205807.	3.40797 p^2 -286963.	2.85810 p^2
-0.55702 p^2 +44.5006	-0.63568 p^2 +44.5006	-0.68728 p^2 -329191.	-0.60355 p^2 -1165.50	0.49292 p^2 -329191.	-0.10550 p^2 +5468.80	2.48259 p^2 -30414.0	1.15300 p^2 -30414.0	2.85810 p^2 -329191.	3.13592 p^2 -329191.

(25-3)

(b) 両端自由梁曲げ振動

(i) 純曲げ変形による振動

対称振動

$2.09595 p^2$	$-1.52678 p^2$	$0.81907 p^2$	$-0.69512 p^2$	$=0$	(26-1)
$-1.52678 p^2$	$2.02789 p^2$	$-1.57108 p^2$	$0.91163 p^2$		
	-193.827	$+365.370$	-345.113		
$0.81907 p^2$	$-1.57108 p^2$	$2.59890 p^2$	$-2.06625 p^2$		
	$+365.370$	-3635.58	$+4199.70$	$=0$	(26-1)
$-0.69512 p^2$	$0.91163 p^2$	$-2.06625 p^2$	$3.03128 p^2$		
	-345.113	$+4199.70$	-20872.8		

非対称振動

$0.81012 p^2$	$0.65026 p^2$	$-0.00927 p^2$	$=0$	(26-2)
$0.65026 p^2$	$1.67740 p^2$	$-0.61470 p^2$		
	-883.632	$+1213.10$		
$-0.00927 p^2$	$-0.61470 p^2$	$2.02496 p^2$	$=0$	(26-2)
	$+1213.10$	-9040.88		

(ii) 剪断変形の影響を考慮した場合

対称振動

2.09595 p^2	1.42304 p^2	-1.52678 p^2	-0.20098 p^2	0.81907 p^2	-0.74287 p^2	-0.69512 p^2	0.46250 p^2
1.42304 p^2	1.88546 p^2 -4660.20	1.52682 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	0.34085 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-0.14486 p^2	-0.31986 p^2 -186.784
-1.52678 p^2	1.52682 p^2	2.02798 p^2 -193.827	-1.31803 p^2	-1.57108 p^2 +365.370	-0.57099 p^2	0.91163 p^2 -345.113	1.52898 p^2
-0.20098 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	-1.31803 p^2	3.11864 p^2 -38269.0	-0.79897 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	0.13049 p^2	-1.11962 p^2 +2125.04
0.81907 p^2	0.34085 p^2	-1.57108 p^2 +365.370	-0.79897 p^2	2.59890 p^2 -3635.58	0.97253 p^2	-2.06625 p^2 +4199.70	0.49097 p^2
-0.74287 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-0.57099 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	0.97253 p^2	2.16309 p^2 -105512.	0.89454 p^2	0.62962 p^2 -15793.9
-0.69512 p^2	-0.14486 p^2	0.91163 p^2 -345.113	0.13049 p^2	-2.06625 p^2 +4199.70	0.89454 p^2	3.03128 p^2 -20872.8	-1.63956 p^2
0.46250 p^2	-0.31986 p^2 -186.784	1.52898 p^2	-1.11962 p^2 +2125.04	0.49097 p^2	0.62962 p^2 -15793.9	-1.63956 p^2	3.17722 p^2 -205807.
							=0 (26-3)

非対称振動

0.81012 p^2	1.20957 p^2	0.65026 p^2	1.13193 p^2	-0.00927 p^2	-0.08634 p^2
1.20957 p^2	1.88546 p^2 -4669.20	0.77411 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	-0.13592 p^2	-0.16407 p^2 +437.805
0.65026 p^2	0.77411 p^2	1.67740 p^2 -883.632	2.06756 p^2	-0.61470 p^2 +1213.10	-1.17963 p^2
1.13193 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	2.06756 p^2	3.11864 p^2 -38269.0	0.36279 p^2	0.91331 p^2 -6521.61
-0.00927 p^2	-0.13592 p^2	-0.61470 p^2 +1213.10	0.36279 p^2	2.02496 p^2 -9040.88	-1.47332 p^2
-0.08634 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-1.17963 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	-1.47332 p^2	2.16309 p^2 -105512.
					=0 (26-4)

(iii) 剪断変形および回転慣性の影響を考慮した場合

対称振動

2.09595 p^2	1.42304 p^2	-1.52678 p^2	-0.20098 p^2	0.81907 p^2	-0.74287 p^2	-0.69512 p^2	0.46250 p^2
1.42304 p^2	1.88546 p^2 -4660.20	1.52682 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	0.34085 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-0.14486 p^2	-0.31986 p^2 -186.784
-1.52678 p^2	1.52682 p^2	2.02814 p^2 -193.827	-1.31803 p^2	-1.57116 p^2 +365.370	-0.57099 p^2	0.91173 p^2 -345.113	1.52898 p^2
-0.20098 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	-1.31803 p^2	3.11864 p^2 -38269.0	-0.79897 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	0.13049 p^2	-1.11962 p^2 +2125.04
0.81907 p^2	0.34085 p^2	-1.57116 p^2 +365.370	-0.79897 p^2	2.59964 p^2 -3635.58	0.97253 p^2	-2.06665 p^2 +4199.70	0.49097 p^2
-0.74287 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-0.57099 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	0.97253 p^2	2.16309 p^2 -105512.	0.89454 p^2	0.62962 p^2 -15793.9
-0.69512 p^2	-0.14486 p^2	0.91173 p^2 -345.113	0.13049 p^2	-2.06665 p^2 +4199.70	0.89454 p^2	3.03308 p^2 -20872.8	-1.63956 p^2
0.46250 p^2	-0.31986 p^2 -186.784	1.52898 p^2	-1.11962 p^2 +2125.04	0.49097 p^2	0.62962 p^2 -15793.9	-1.63956 p^2	3.17722 p^2 -205807.

=0 (26-5)

非対称振動

0.81018 p^2	1.20957 p^2	0.65031 p^2	1.13193 p^2	-0.00933 p^2	-0.08634 p^2
1.20957 p^2	1.88546 p^2 -4660.20	0.77411 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	-0.13592 p^2	-0.16407 p^2 +347.805
0.65031 p^2	0.77411 p^2	1.67785 p^2 -883.632	2.06756 p^2	-0.61497 p^2 +1213.10	-1.17963 p^2
1.13193 p^2	1.39725 p^2 -1015.58	2.06756 p^2	3.11864 p^2 -38269.0	0.36279 p^2	0.91331 p^2 -6521.61
-0.00933 p^2	-0.13592 p^2	-0.61497 p^2 +1213.10	0.36279 p^2	2.02625 p^2 -9040.88	-1.47332 p^2
-0.08634 p^2	-0.16407 p^2 +347.805	-1.17963 p^2	0.91331 p^2 -6521.61	-1.47332 p^2	2.16309 p^2 -105512.

(26-6)

=0

(V) 純振り振動の解析例

$6763.81 p^2$ -4764430	$10557.9 p^2$ -1991740	$2053.83 p^2$ $+2058960$	$-7671.70 p^2$ $-219633.$	$-8364.53 p^2$ $-286415.$
$10557.9 p^2$ -1991740	$19375.6 p^2$ -33198500	$4940.11 p^2$ -16606200	$-13982.4 p^2$ $+8638260$	$-14383.5 p^2$ $+457488.$
$2053.83 p^2$ $+2058960$	$4940.11 p^2$ -16606200	$3339.38 p^2$ -92229400	$-1771.71 p^2$ -37056600	$-2885.96 p^2$ $+17951600$
$-7671.70 p^2$ $-219633.$	$-13982.4 p^2$ $+8638260$	$-1771.71 p^2$ -37056600	$14435.8 p^2$ -181378000	$13097.3 p^2$ -75533500
$-8364.53 p^2$ $-286415.$	$-14383.5 p^2$ $+457488.$	$-2885.96 p^2$ $+17951600$	$13097.3 p^2$ -75533500	$15232.2 p^2$ -270359700
				$=0$

(27)

(VI) 両端自由梁曲げ振り連成振動の解析例

(i) 曲げおよび振り変形のみによる振動

対称振動

$2.09595 p^2$	$7.38840 p^2$	$-1.52678 p^2$	$-7.01109 p^2$	$0.81907 p^2$	$-2.87246 p^2$	$-0.69512 p^2$	$11.3375 p^2$
$7.38840 p^2$	$6763.81 p^2$ -4764430	$16.9313 p^2$	$10557.9 p^2$ -1991740	$8.07983 p^2$	$2053.83 p^2$ $+2058960$	$-7.68253 p^2$	$-7671.70 p^2$ $-219633.$
$-1.52678 p^2$	$16.9313 p^2$	$2.02798 p^2$ -193.827	$-11.4628 p^2$	$-1.57108 p^2$ $+365.370$	$-5.15494 p^2$	$0.91163 p^2$ -345.113	$18.9831 p^2$
$-7.01109 p^2$	$10557.9 p^2$ -1991740	$-11.4628 p^2$	$19375.6 p^2$ -33198500	$-6.53130 p^2$	$4940.11 p^2$ -16606200	$2.73224 p^2$	$-13982.4 p^2$ $+8638260$
$0.81907 p^2$	$8.07983 p^2$	$-1.57108 p^2$ $+365.370$	$-6.53130 p^2$	$2.59890 p^2$ -3635.58	$0.01323 p^2$	$-2.06625 p^2$ $+4199.70$	$3.73611 p^2$
$-2.87246 p^2$	$2053.83 p^2$ $+2058960$	$-5.15494 p^2$	$4940.11 p^2$ -16606200	$0.01323 p^2$	$3339.38 p^2$ -92229400	$10.1700 p^2$	$-1771.71 p^2$ -37056600
$-0.69512 p^2$	$-7.68253 p^2$	$0.91163 p^2$ -345.113	$2.73224 p^2$	$-2.06625 p^2$ $+4199.70$	$10.1700 p^2$	$3.03128 p^2$ -20872.8	$-15.0045 p^2$
$11.3375 p^2$	$-7671.70 p^2$ $-219633.$	$18.9831 p^2$	$-13982.4 p^2$ $+8638260$	$3.73611 p^2$	$-1771.71 p^2$ -37056600	$-15.0045 p^2$	$14435.8 p^2$ -181378000
							$=0$

(28-1)

TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962 年 10 月	川井忠彦, 堀武敏 戸川隼人, 高橋利之
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定と その微小振り振動について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962 年 11 月	川井忠彦, 林洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962 年 11 月	川井忠彦, 江川幸一
TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Reported Load Testing Rigs for Full Scale Aircraft Wing Structures	1962 年 12 月	竹内和之, 飯田宗四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963 年 1 月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Dver-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963 年 1 月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963 年 1 月	和田勇, 松崎利一
TR-37	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu Wada
TR-38	鋳鉄のような脆性材料からなる円板の 回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963 年 2 月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究 (第 1 報) —その性能によぼす各種因子の 影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963 年 2 月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full- Scale Aircraft Fuselage Structures	1963 年 2 月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963 年 2 月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉦一
TR-42	未刊行		
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963 年 2 月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963 年 2 月	近藤博, 蓑田光弘 坂口一, 山崎紀雄
TR-45	固有値問題の $(\sum \lambda^k A_k) x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem $(\sum \lambda^k A_k) x=0$	1963 年 4 月	戸川隼人

航空宇宙技術研究所報告 46 号

昭和 38 年 6 月 発行

発 行 所 航空宇宙技術研究所
東京都三鷹市新川 700
電話武蔵野 (0422) (3)5171 (代表)

印 刷 所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町 1 の 53