

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-48

曲面に沿う境界層

林 二 識

1963年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |       |   |           |                                  |
|-------|---|-----------|----------------------------------|
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての<br>実験的研究<br>Experimental Results of the Inter-<br>action between Shock Wave and<br>Turbulent Boundary Layer                                   | 1961年7月   | 須郷道也, 伝田幸雄                       |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層<br>On Compressible Boundary Layer<br>in Magnetodynamics   | 1961年7月   | 須郷道也, 小沢五郎                       |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・校正<br>Miniature Pressure Pickups for Measuring<br>the Pressure on Oscillating Airfoils in<br>Supersonic Flow                                  | 1961年8月   | 石井孝雄, 柳沢三憲                       |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題<br>の差分法による数値解法<br>On the Difference Method Solutions of the<br>Mixed Boundary Value Problems of Parabolic<br>Partial Differential Equations | 1961年11月  | 樋口一雄, 三好甫                        |
| TR-17 | 荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察<br>A Theoretical Comment on the Charge-<br>Beam Method of Measuring Gas Density  | 1961年12月  | 和田勇, 細川 巖<br>三好甫                 |
| TR-18 | 前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の<br>二次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較<br>Comparison of Inlet Guide Vane and High<br>Stagger Compressor Blade Performance<br>in a Rotor and in Cascade  | 1961年11月  | 松木正勝                             |
| TR-19 | 高速翼車の回転強度<br>Strength of High-Speed Rotor   | 1961年12月  | 佐藤和郎, 永井文雄                       |
| TR-20 | Blasius 型微分方程式の両側無限遠<br>境界値問題の数値解法<br>A Numerical Method for Solving Blasius'<br>Type Differential Equation   | 1962年1月   | 樋口一雄, 戸川隼人                       |
| TR-21 | 遷音速における二次元操縦面の研究 (I)<br>An Investigation of Two-dimensional<br>Control Surface at Transonic Speed (I)   | 1962年1月   | 神谷信彦                             |
| TR-22 | 変断面梁の曲げ自由振動について<br>On the Free Lateral Vibration of a Beam<br>with Variable Cross Section   | 1962年2月   | 川井忠彦, 戸川隼人<br>林 洋一               |
| TR-23 | いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の<br>モンテカルロ法による解法とその実験<br>Monte Carlo Solutions of the Boundary<br>Value Problems for Some Types of<br>Partial Differential Equations      | 1962年2月   | 樋口一雄, 高橋利之<br>島海良三               |
| TR-24 | 航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン<br>要素試験設備<br>Test Facilities of Turbo-jet Engine<br>Components at N. A. L.   | 1962年2月   | 航空技術研究所原動機部                      |
| TR-25 | 航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の<br>計画と構造<br>Desing and Construction of the National<br>Aeronautical Laboratory 2m×2m<br>Transonic Wind Tunnel                            | 1962年3月   | 航空技術研究所                          |
| TR-26 | 吹出式超音速風洞のノズルの予備実験<br>Preliminary Tests of Supersonic Nozzles<br>for the Supersonic Blowdown Wind<br>Tunnel  | 1962年3月   | 河崎俊夫, 岡部祐二郎<br>尾形吉和, 安藤 尚        |
| TR-27 | 非定常遷音速流の近似解析<br>An Approximate Analysis for Unsteady<br>Transonic Flow  | 1962年7月   | 細川 巖, 三好甫                        |
| TR-9T | Studies on the Small Disturbance Theory of<br>Transonic Flow (I)<br>—Nonlinear Correction Theory—   | July 1962 | Iwao Hosokawa                    |
| TR-28 | 疲労亀裂について<br>On Fatigue Cracks   | 1962年8月   | 竹中幸彦                             |
| TR-29 | 1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造<br>On the Design and Construction of the<br>1m×1m Supersonic Blow-down Wind<br>Tunnel  | 1962年10月  | 空気力学第二部                          |
| TR-30 | 平板翼の振動について<br>On the Natural Vibration of Plate-Like<br>Wings   | 1962年10月  | 川井忠彦, 塙 武敏<br>戸川隼人, 高橋利之<br>越出慎一 |
| TR-31 | 熱応力を受ける薄翼の安定と<br>その微小振り振動について<br>On the Instability and Small Natural<br>Torsional Vibration of a Thin Wing<br>under a Thermal Stress                         | 1962年11月  | 川井忠彦, 林 洋一<br>戸川隼人               |

# 曲面に沿う境界層\*

林 二 識\*\*

## Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow

By Nisiki HAYASI

The effects of surface longitudinal curvature  $K$  on laminar boundary-layer flow are investigated for the case where the potential flow velocity  $U_1$  is constant and  $K \propto x^{-1/2}$ ,  $x$  being the distance along the surface. The results of the former investigators are shown to be erroneous because of inaccurate numerical calculations. Adequate transformation for numerical calculation is derived, and correct result is obtained on an electronic digital computer. It is shown that the skin friction coefficient  $C_f$  increases with increase of  $C = -K(2\nu x/U_1)^{1/2}$ .

### 1. は し が き

通常境界層理論においては、物体表面の曲率半径は境界層の厚さに比べて十分大きいとして、この影響は省略される。これに対してこの影響の度合を調べることも行なわれている。すなわち、谷<sup>1),4)</sup>は主流速度が一定値  $U_1$  からわずかに異なる場合を考え、無次元量

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{\nu x}{U_1} \right)^{1/2}$$

が十分に小さく、 $\varepsilon^2$  以上の項を省略できるものとして、速度分布に対する一次補正項を計算し、凸面 ( $\varepsilon > 0$ ) では、表面に働く摩擦応力が平面に比べて減少することを示した。(ここに  $x$  は表面に沿う距離、 $R \propto x^{1/2}$  は表面の曲率半径で凸面の場合正、 $\nu$  は運動粘性率である。) また、伊藤<sup>2)</sup>は主流速度が  $x$  の奇数冪の級数で表わされ、 $R^{-1}$  が  $x$  の偶数冪の級数で表わされる場合の解をレイノルズ数の平方根の逆冪に展開して、始めの項を計算した。Murphy<sup>3)</sup> はこれらの研究と独立に、凸面上の境界層で主流速度  $U_1$  が一定で、かつ  $R \propto (\nu x/U_1)^{1/2}$  の場合に、層内速度分布は相似であることを示した。この場合の表面摩擦応力と  $R$  との関係も求めているが、

$$\eta = \frac{y}{2} \left( \frac{U_1}{\nu x} \right)^{1/2}$$

の級数展開を用いているので、その結果は不正確のようである(ここで  $y$  は壁面からの距離である)。

\* 昭和 38 年 8 月 1 日受付

\*\* 空気力学第一部

最近 Yen<sup>5),7)</sup> と鳥羽<sup>6),7)</sup> は、流線とこれに直交する曲線を基とした座標を用いて、Murphy の調べた問題を再び取り扱い、谷<sup>4)</sup> および Murphy 等の結論とは逆に、凸面では摩擦応力は増大すると主張し、Murphy との間に論争を起こしている<sup>8)</sup>。Murphy の計算<sup>3),6)</sup> は手計算および省略した式を基に電子計算機で計算したもので、最終的に信頼できる結果はまだ出していない。また Yen と鳥羽の計算は、流線座標による壁近傍の特異性のためと、基礎とした式の複雑さによる計算時間の増大を避けるための計算間隔の粗さのために、これもまた信頼できない。また Murphy が計算した式との関係も明らかでないので、両者の結果の相異が解析的な誤りによるものか、数値計算の誤りによるものかも不明である。この論文はこれらの点を明らかにするのが目的である。

説明の便宜上、まず、従来の解析を説明し、次いで Yen・鳥羽の結果の誤りを示す。さらに、従来扱われた場合は、実は適当な変換により、数値計算に適する形に導けることを示し、また Murphy の解析と Yen・鳥羽の解析は本質的に同じであることを明らかにする。最後に、上に述べた変換を施した後の式を電子計算機に依り解いた結果を、従来の結果と比較する。

## 2. Murphy の解析<sup>3)</sup>

縮まない流体の二次元流を考え、淀み点からの表面に沿う距離を  $x$ 、表面に垂直な距離を  $y$  とする。 $x$  方向および  $y$  方向の速度成分を  $u$  および  $v$ 、表面の曲率を  $K(x)$  とし、凸に対して  $K > 0$ 、凹に対して  $K < 0$  とする。Navier-Stokes の式は

$$\begin{aligned} & \frac{u}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{Kuv}{1+Ky} = -\frac{1}{\rho(1+Ky)} \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \nu \left\{ \frac{1}{(1+Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+Ky)^3} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & + \frac{K}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K^2 u}{(1+Ky)^2} + \frac{2K}{(1+Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\ & \left. + \frac{v}{(1+Ky)^3} \frac{\partial K}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{Ku^2}{1+Ky} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \nu \left\{ \frac{1}{(1+Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+Ky)^3} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ & + \frac{K}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{K^2 v}{(1+Ky)^2} - \frac{u}{(1+Ky)^3} \frac{\partial K}{\partial x} \\ & \left. - \frac{2K}{(1+Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \{(1+Ky)v\} = 0 \quad (2.3)$$

となる。

代表的な速度  $U_0$  と長さ  $L$  で無次元化した量

$$u' = u/U_0, \quad v' = v/U_0, \quad x' = x/L, \\ y' = y/L, \quad K' = KL, \quad p' = p/\rho U_0^2$$

を用い、以後 ' を省略すれば (2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ,  $\rho=1, \nu=Re^{-1}$  としたものになる。ただし  $Re=U_0L/\nu$  である。

境界層の厚さ  $\delta \ll 1$  として、上式の各項の大きさを比較する。経験的事実として

$$u = O(1), \quad \partial u / \partial x = O(1), \quad \partial^2 u / \partial x^2 = O(1), \quad \partial p / \partial x = O(1) \quad (2.4)$$

を採用し、また

$$K = O(\delta^{-1}) \quad (2.5)$$

とする。(2.3) を積分すれば、 $y=0$  で  $v=0$  故

$$(1+Ky)v = - \int_0^y (\partial u / \partial x) dy.$$

故に

$$|v| \leq \frac{O(1)}{|1+Ky|} \int_0^y dy = \frac{O(\delta)}{|1+Ky|}$$

を得る。以下では  $K > 0$  とする。 $1+Ky = O(1)$  故

$$v = O(\delta). \quad (2.6a)$$

同様にして (2.3) を  $x$  で偏微分したもの、およびさらに  $y$  で偏微分したものから

$$\left. \begin{aligned} \partial v / \partial x &= O(\delta), \quad \partial^2 v / \partial x \partial y = O(1). \\ \partial v / \partial y &= O(1). \end{aligned} \right\} \quad (2.6b)$$

(2.3) から

ただし

$$\partial K / \partial x = O(\delta^{-1}) \quad (2.7)$$

と仮定している。(2.1) から

$$Re = O(\delta^{-2}) \quad (2.8)$$

となり、これを (2.2) に入れると

$$\partial p / \partial y = O(\delta^{-1}) \quad (2.9)$$

となる。結局境界層方程式は、次元量に戻して、

$$\frac{u}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{Kuv}{1+Ky} = - \frac{1}{\rho(1+Ky)} \frac{\partial p}{\partial x} \\ + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{K}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K^2 u}{(1+Ky)^2} \right\}, \quad (2.10a)$$

$$\frac{Ku^2}{1+Ky} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.10b)$$

連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \{(1+Ky)v\} = 0. \quad (2.10c)$$

壁での境界条件は

$$u=v=0, \quad (y=0). \quad (2.11)$$

境界層外端でポテンシャル流につながるとすれば、無次元量で、

$$\frac{1}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Ku}{1+Ky} = 0.$$

(2.4), (2.5), (2.6) を考慮すれば、第1項は省略でき、次元量に対して

$$u = U_1(x)/(1+Ky), \quad (2.12)$$

ただし  $U_1$  は粘性を無視した場合の壁に沿う速度である。それ故境界層外端での境界条件は

$$u \rightarrow \frac{U_1(x)}{1+Ky}, \quad (y \rightarrow \infty). \quad (2.13)$$

以下では、 $A$  を定数とした時、

$$K = A(U_1/\nu x)^{1/2} \quad (2.14)$$

の場合を考える。流れ関数  $\psi$  を導入すれば

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{1+Ky} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.15)$$

独立変数を

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{2} \left( \frac{U_1}{\nu x} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

に変え、

$$\psi = (\nu U_1 \xi)^{1/2} f(\eta) \quad (2.17)$$

の形の解を求める。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} U_1 f', & v &= \frac{1}{2(1+2A\eta)} \left( \frac{\nu U_1}{\xi} \right)^{1/2} (\eta f' - f), \\ Ky &= 2A\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

で、(2.10b) は

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\rho A U_1^2 f'^2}{2(1+2A\eta)}. \quad (2.19)$$

これを (2.10a) に入れると、相似解があるためには

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad (2.20)$$

でなければならない、この時

$$(1+2A\eta)^2 f''' + 2A(1+2A\eta) f'' - 4A^2 f' + 2A f f' + (1+2A\eta) f f'' = 0. \quad (2.21)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0, \\ f'(\infty) &= \frac{2}{1+2A\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

### 3. Yen<sup>5),7)</sup> と鳥羽<sup>6),7)</sup> の解析

直交曲線座標  $\xi, \eta$  を用い,  $\xi$  軸および  $\eta$  軸の寸法因子を  $h_\xi^{-1}$  および  $h_\eta^{-1}$ ,  $\xi$  軸および  $\eta$  軸の曲率半径を  $R_\xi$  および  $R_\eta$  とすれば,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$h_\xi = \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad h_\eta = \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad (3.2)$$

$$h_\eta \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} = -\frac{h_\xi}{R_\xi}, \quad h_\xi \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} = -\frac{h_\eta}{R_\eta}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta^2} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi^2} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (3.4)$$

$\xi$  方向および  $\eta$  方向の速度成分を  $v_\xi$  および  $v_\eta$  とし,  $v^2 = v_\xi^2 + v_\eta^2$  とすれば, Navier-Stokes の式は

$$h_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} v^2 + p \right) - v_\eta \omega = -\frac{h_\eta}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad (3.5)$$

$$h_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{2} v^2 + p \right) + v_\xi \omega = \frac{h_\xi}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \xi}, \quad (3.6)$$

ただし  $p$  は圧力,

$$\omega = h_\xi h_\eta \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v_\eta}{h_\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v_\xi}{h_\xi} \right) \right\}.$$

連続式は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v_\xi}{h_\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v_\eta}{h_\xi} \right) = 0. \quad (3.7)$$

ポテンシャル流 ( $\omega=0$ ) では, 直交曲線座標は  $\xi$  と  $\eta$  が解析函数の実部および虚部であるように選ぶことができ, この場合

$$h_\xi = h_\eta \equiv h. \quad (3.8)$$

(3.4) から  $\ln h$  は調和函数であることがわかる。

$\psi(x, y)$  を流れ函数とすれば

$$v_\xi = h_\eta (\partial \psi / \partial \eta), \quad v_\eta = -h_\xi (\partial \psi / \partial \xi). \quad (3.9)$$

以下では流線を  $\eta$  軸とし,

$$\eta = \psi$$

とする。この時  $v_\xi$  が速度となり、 $v_\eta = 0$ 、また (3.9) より  $v_\xi = h_\eta$  となる。

$$\lambda \equiv \frac{h_\eta}{h_\xi} = \frac{v_\xi}{h_\xi} \quad (3.10)$$

なる函数を導入し、(3.5) および (3.6) より  $p$  を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda^{-1} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = Re \frac{\partial \omega}{\partial \xi}, \quad (3.11)$$

ここで

$$\omega = -h_\xi^2 \lambda (\partial \lambda / \partial \eta). \quad (3.12)$$

(3.4) は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \ln h_\xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial \ln h_\xi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{\lambda} \right). \quad (3.13)$$

ポテンシャル流では (3.8), (3.10) より  $\lambda = 1$ 。また、壁では  $v_\xi = 0$  故  $\lambda = 0$ 。そこで境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \psi = 0 \quad \text{で} \quad \lambda = 0, \\ \psi \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \lambda \rightarrow 1. \\ \psi \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \partial \lambda / \partial \eta \rightarrow 0. \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

また (3.12) より

また (3.3) より

$$\psi = 0 \quad \text{で} \quad \lambda (\partial h_\xi / \partial \eta) = -R^{-1}, \quad (3.15)$$

ここで  $R$  は表面での  $R_\xi$  である。

変換

$$\eta^* = Re^{1/2} \eta$$

を行ない、 $\eta^*$  を  $\eta$  と書けば、(3.11) および (3.13) は境界層近似の後、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( h_\xi^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\xi^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial \eta} \right) \right], \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial \ln h_\xi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (3.17)$$

境界条件 (3.15) は

$$\eta = 0 \quad \text{で} \quad \lambda \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} = -(Re^{1/2} R)^{-1}. \quad (3.18)$$

今

$$\zeta = \eta / g(\xi) \quad (3.19)$$

として相似解を求める。(3.16), (3.17) の解が

$$\lambda(\xi, \eta) = \lambda(\zeta), \quad (3.20)$$



$$h_{\xi}(\xi, \eta) = h_{\xi 0}(\xi)H(\zeta) \quad (3.21)$$

の形と仮定して、この両式を (3.16) へ入れれば

$$\alpha_1 H^2 \frac{d\lambda^2}{d\zeta} - \alpha_2 \zeta \frac{d}{d\zeta} \left( H^2 \frac{d\lambda^2}{d\zeta} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left[ \lambda \frac{d}{d\zeta} \left( H^2 \frac{d\lambda^2}{d\zeta} \right) \right], \quad (3.22)$$

ただし

$$\alpha_1 = \frac{g^3}{h_{\xi 0}^2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{h_{\xi 0}^2}{g} \right), \quad \alpha_2 = g \frac{dg}{d\xi}.$$

相似解があるためには  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  は定数でなければならない。 $\alpha_2=1$  として

$$g = (2\xi)^{1/2}, \quad (3.23)$$

$$h_{\xi 0} = \xi^{(\alpha_1+1)/4}. \quad (3.24)$$

(3.20), (3.21) を (3.17) へ入れて積分すれば、積分定数を  $C$  として

$$\lambda(dH/d\zeta) = CH. \quad (3.25)$$

(3.18) と (3.25) から

$$R^{-1} = -C \left( \frac{Re}{2} \right)^{1/2} \xi^{(\alpha_1-1)/4}. \quad (3.26)$$

結局 (3.22) で  $\alpha_2=1$  としたものと (3.25) を、境界条件

$$\lambda(0)=0, \quad H(0)=1, \quad \lambda(\infty)=1, \quad d\lambda/d\zeta \rightarrow 0 \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (3.27)$$

の下に解けば良い。

相似解が存在する時

$$v_{\xi} = h_{\eta} = h_{\xi 0}(\xi)H(\zeta)\lambda(\zeta), \quad (3.28)$$

ただし (3.25) より  $H = \exp\left(C \int_0^{\zeta} \lambda^{-1} d\zeta\right)$ 。粘性を省略したポテンシャル流では  $\lambda=1$  故  $h_{\xi 0}(\xi)$  は表面での速度となる。すなわち、ポテンシャル流による速度分布が  $\xi^{(\alpha_1+1)/4}$  の形で、表面の曲率分布が (3.26) で与えられる時、相似解が存在する。

$\xi$  軸と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすれば

$$h_{\xi}(\partial\theta/\partial\xi) = -R_{\xi}^{-1}. \quad (3.29)$$

(3.26) より  $\eta=0$  で

$$\theta = \theta_0 + C(2R\xi)^{1/2}. \quad (3.30)$$

さて

$$\partial x/\partial \xi = h_{\xi}^{-1} \cos \theta, \quad \partial y/\partial \xi = h_{\xi}^{-1} \sin \theta$$

故

$$x = \int_0^{\xi} \xi^{-(\alpha_1+1)/4} \cos \theta d\xi, \quad y = \int_0^{\xi} \xi^{-(\alpha_1+1)/4} \sin \theta d\xi.$$

表面に沿う距離を  $s$  とすれば

$$s = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{h_{\xi 0}} = \frac{4}{3-\alpha_1} \xi^{(3-\alpha_1)/4}. \quad (3.31)$$

$\eta$  軸に沿う距離  $n$  は

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{h_{\xi} \lambda} = \left( \frac{2}{Re} \right)^{1/2} \xi^{(1-\alpha_1)/4} \int_0^{\xi} \lambda^{-1} \exp \left( -C \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\lambda} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \left( \frac{2}{Re} \right)^{1/2} \xi^{(1-\alpha_1)/4} \left\{ 1 - \exp \left( -C \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\lambda} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

変換

$$f = \zeta, \quad \chi = \int_0^{\xi} \lambda^{-1} d\xi \quad (3.33)$$

を行なえば, (3.25) より

$$\lambda = d\zeta/d\chi = df/dx.$$

(3.22) で  $\alpha_2=1$  としたものは

$$f'''' + ff'''' - \alpha_1 f' f'' + 2C(2f'''' + ff'' + 2Cf'') = 0, \quad (3.34)$$

ただし ' は  $\chi$  微分を表わす。境界条件は

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad f''(\infty) = 0. \quad (3.35)$$

鳥羽<sup>6),7)</sup>は (3.22) で  $\alpha_2=1$  としたものと (3.25) から導いた式

$$\lambda^2 \frac{d^3 \lambda^2}{d\zeta^3} + \left( 4C\lambda + \lambda\zeta + \frac{1}{2} \frac{d\lambda^2}{d\zeta} \right) \frac{d^2 \lambda^2}{d\zeta^2} + (4C^2 + 2C\zeta - \alpha_1 \lambda) \frac{d\lambda^2}{d\zeta} = 0 \quad (3.36)$$

で  $\alpha_1 = -1$  の場合を, IBM 650 で解いた。併しこの式は原点  $\zeta=0$  に特異性があり, このままでは解けないので,  $\zeta=0$  の近傍では

$$\lambda^2 = a^2 \zeta - 4C^2 \zeta^2 + \frac{4a}{15} \left( \alpha_1 + \frac{32}{a^2} C^3 \right) \zeta^{5/2} - \frac{2}{9} \left\{ (2\alpha_1 + 1)C + \frac{80}{a^2} C^4 \right\} \zeta^3 + \dots \quad (3.37)$$

と展開し,  $a$  を仮定して  $\zeta=0.0001$  での  $\lambda, \lambda', \lambda''$  を計算し, それ以後を Runge-Kutta 法で積分した。積分間隔は  $C=0$  の場合 0.00012 で,  $C \neq 0$  では時間節約のため, さらに大きい間隔を用いた。

#### 4. Yen・鳥羽の結果に対する注意

鳥羽の展開式 (3.37) の  $\zeta^3$  の係数は

$$-\frac{2}{9} \left\{ (2\alpha_1 + 1)C + \frac{64}{a^3} C^4 \right\}$$

の誤りである。また積分間隔は  $C=0$  の場合 0.00012 は大き過ぎ, 0.00001 程度にとらなければならない。0.00001 とした時の結果を次頁の表に示す。

$\zeta$	$\lambda$	$\lambda'$	$\lambda''$
0.0001	0.0096909987	48.454973	-242275.25
0.00011	0.010164003	46.200036	-210000.60
0.0002	0.013705135	34.262884	-85657.599

この場合 0.0001(0.00001) 0.005(0.0001) 0.05(0.001) 0.5(0.01)5 として Datatron 205 で計算した結果は1回の試行に約20分を要し実際的でないことがわかった。(3.34)を数値的に解く方が良い。

### 5. $\alpha_1 = -1$ の場合の解

$\alpha_1 = -1$  の時 (3.34) は

$$\frac{d}{dx}(f''' + ff'' + 2Cf'') + 2C(f''' + ff'' + 2Cf'') = 0 \tag{5.1}$$

と書けるので、1回積分できて

$$f''' + ff'' + 2Cf'' = Be^{-2Cx}, \tag{5.2}$$

ただし  $B$  は積分定数である。 $B$  を定めるためには  $x \rightarrow \infty$  の時の  $f''$  の漸近的性質を調べなければならない。このため  $D$  を定数として

$$f = x + D + G$$

と置き、(5.2)へ入れれば

$$G''' + \{x + (2C + D + G)\}G'' = Be^{-2Cx}$$

となる。境界条件 (3.35) から  $x$  大の時、 $G, G', G''$  は小さいことがわかる。 $G''$  の漸近的性質を調べるためには、上式の中かっこの第二項は省略できて

$$G''' + xG'' = Be^{-2Cx}$$

となる。この一般解は

$$G'' = \left[ E + B \int_0^x \exp\{(\chi^2/2) - 2C\chi\} d\chi \right] \exp(-\chi^2/2),$$

ただし  $E$  は積分定数である。この式から次のことがわかる。

- (1)  $C < 0$  の時  $x \rightarrow \infty$  で  $G'' \rightarrow 0$  のためには  $B = 0$  でなければならない。この時  $G''$  は、 $\exp(-x^2/2)$  の形で0に近づく。すなわち、この解は強い解である<sup>9)</sup>。
- (2)  $C = 0$  の時  $B = 0$  なら強い解が得られる。 $B \neq 0$  なら  $G''$  は  $x^{-1}$  の形で0に近づく。すなわち、この解は弱い解である<sup>9)</sup>。
- (3)  $C > 0$  の時  $B = 0$  なら強い解が得られる。 $B \neq 0$  なら  $G''$  は  $e^{-2Cx}$  の形で0に近づく。すなわち、この解は中間の解である<sup>9)</sup>。

境界層の概念から強い解のみを考えるべきであり、それゆえ

$$B=0$$

と選ばなければならない。故に (5.2) は

$$f''' + ff'' + 2Cf'' = 0 \quad (5.2')$$

となる。あるいは  $f+2C=F$  とすれば

$$F''' + FF'' = 0 \quad (5.3)$$

と書くことができる。Fに対する境界条件は

$$F(0)=2C, \quad F'(0)=0, \quad F'(\infty)=1 \quad (5.4)$$

で与えられる。

(5.3), (5.4) は変換

$$F=ky, \quad \chi=k^{-1}X$$

を行なうと、それぞれ

$$y''' + yy'' = 0, \\ y(0)=2Ck^{-1}, \quad y'(0)=0, \quad y'(\infty)=k^{-2}$$

となる。故に  $y(0)=\alpha$ ,  $y'(0)=0$ ,  $y''(0)=\beta$  の初期条件の解が  $y'(\infty)=\gamma$  の時,  $2C=\alpha\gamma^{-1/2}$  に対する (5.3) の解は,

$$F(0)=2C, \quad F'(0)=0, \quad F''(0)=\beta\gamma^{-3/2}$$

の初期条件で得られる。すなわち、この場合境界値問題が初期値問題となる。このことは (5.3) が数値計算に特に適していることを示している。

さて  $\chi$  および  $f'$  の物理的意味については Yen は何も触れていないが、これらは次の意味を持っている。

(3.26), (3.32) より

$$n = -\frac{1}{K} \left\{ 1 - \exp \left( -C \int_0^\chi \frac{d\zeta}{\lambda} \right) \right\} = -\frac{1}{K} (1 - e^{-c\chi})$$

故

$$\chi = -\frac{1}{C} \ln (1 + Kn) \quad (5.5)$$

となる。また、表面でのポテンシャル流による速度  $h_{\xi 0}$  を  $U_1$  と書けば、(3.28) より

$$v_\xi = U_1 H \lambda = U_1 f' e^{c\chi} = \frac{U_1 f'}{1 + Kn}$$

となる。さて、粘性を無視したポテンシャル流での速度を  $u_{\text{pot}}$  と書けば、(2.12) より

$$u_{\text{pot}} = U_1 / (1 + Ky)$$

である。いま

$$v_\xi \doteq u, \quad n \doteq y$$

故,

$$f' = \frac{u}{u_{\text{pot}}} \tag{5.6}$$

となる。

### 6. Murphy の結果と Yen・鳥羽の結果との関係

本節では混同を避けるために Murphy の  $f$  を  $F$  と表わす。(2.12), (2.18) より

$$\frac{dF}{d\eta} = \frac{2u}{U_1} = \frac{2u}{(1+Ky)u_{\text{pot}}} = \frac{2}{1+2A\eta} f'. \tag{6.1}$$

(3.26), (3.31) より

$$R^{-1} = -C \left( \frac{Re}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{3-\alpha_1}{4} s \right)^{(\alpha_1-1)/(3-\alpha_1)}.$$

いま  $\alpha_1 = -1$  故

$$R^{-1} = -C \left( \frac{Re}{2s} \right)^{1/2}.$$

次元量で表わせば

$$R^{-1} = -C \left( \frac{U_1}{2\nu s} \right)^{1/2}. \tag{6.2}$$

(2.14) と比べ,  $s \doteq x$  故

$$A = -2^{-1/2} C. \tag{6.3}$$

(5.5) は  $n \doteq y$  故

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}A} \ln(1+Ky) = \frac{1}{\sqrt{2}A} \ln(1+2A\eta). \tag{6.4}$$

故に

$$F = \sqrt{2} f \tag{6.5}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{d\eta^2} &= \frac{2}{(1+2A\eta)^2} \left( \sqrt{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - 2A \frac{df}{dx} \right), \\ \frac{d^3 F}{d\eta^3} &= \frac{4}{(1+2A\eta)^3} \left( \frac{d^3 f}{dx^3} - 3\sqrt{2} A \frac{d^2 f}{dx^2} + 4A^2 \frac{df}{dx} \right). \end{aligned}$$

これらの式を Murphy の式 (2.21) へ入れれば,

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{d^2 f}{dx^2} (f - 2\sqrt{2} A) = 0. \tag{6.6}$$

(6.3) を考えれば, (6.6) は Yen・鳥羽の式から導いた式 (5.2) と全く同じである。また (6.4) よ

り  $\eta=0$  は  $x=0$  に,  $\eta \rightarrow \infty$  は  $x \rightarrow \infty$  に対応するので,  $F$  に対する境界条件 (2.22) は, (6.5), (6.1) より

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

という  $f$  に対する境界条件に対応し, これもまた (3.35) に全く同じである。すなわち Murphy の式も Yen の式も全く同じである。

## 7. 計算結果と従来の結果との比較

(5.3) を Datatron 205 により積分間隔 0.01 で Runge-Kutta 法を用いて解いた結果を付図に示す。(この式は原点付近に特異性を持たないので, この積分間隔で十分である。) ただし

$$C_f = \frac{2\nu}{U_1^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

である。この図には Murphy および鳥羽の結果も比較のために示したが, 図から読み取ったので多少の誤差があるかも知れない。さて谷<sup>4)</sup>によれば

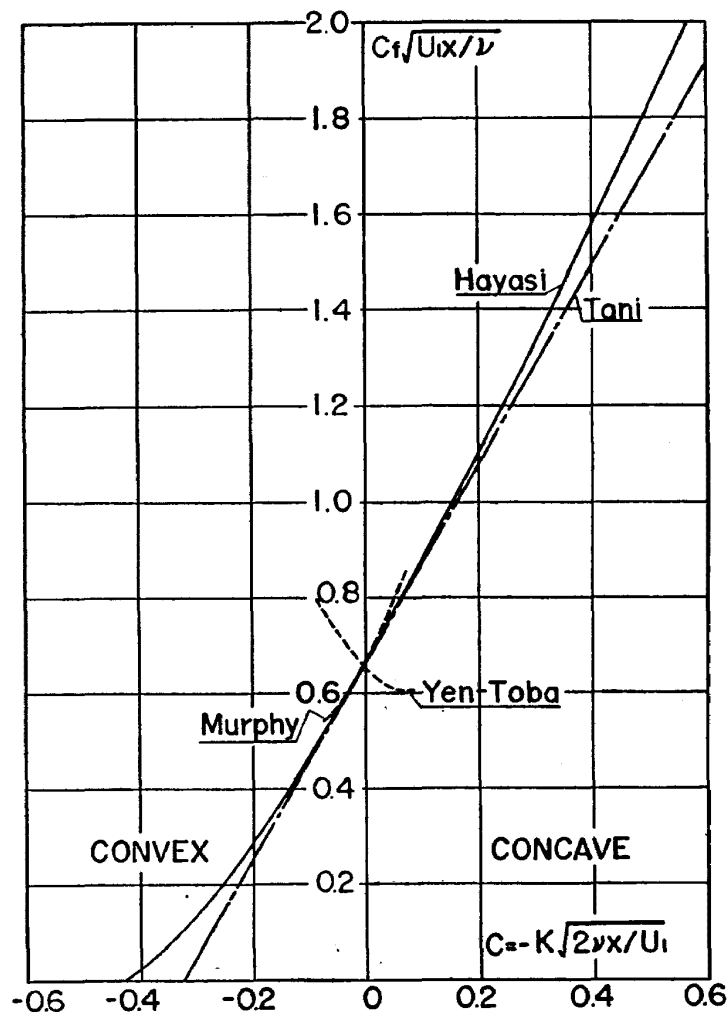


Fig. 1. Skin friction coefficient as a function of surface curvature.

$$C_f = 0.664 - 2.90A = 0.664 + 2.05C$$

である。これも図に示した。この図から明らかなように、谷の結果は本論文の結果と  $C=0$  で接し予想された通りである。Murphy の結果は、傾向は合うが定量的には一致しない。これは彼の結果が級数展開によるものであり、Yen・鳥羽<sup>7)</sup>も指摘している通り、 $C_f$  の決定には若干の任意性があるためと思われる。Yen・鳥羽の結果は全く誤っているが、これは (3.36) のように原点付近に特異性のある式を基礎として、粗い間隔で積分したためであろう。

終りに、この問題に対し著者の注意を喚起された東京大学航空研究所谷一郎所長、ならびに有益なる御注意を賜った今井功教授に厚く御礼申上げる。なお、本研究は東京大学航空研究所との共同研究「層流境界層に関する研究」の一部として行なったものである。

## 文 献

- 1) 谷 一郎: 日本機械学会誌, 52 (1949), No. 372, 476-477.
- 2) 伊藤英覚: 境界層理論における曲率の影響, 1949. 日本機械学会論文集 18 (1952), No. 69, 23-28.
- 3) J. S. Murphy: Some Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow, 1952. JAS 20 (1953) 338-344.
- 4) 谷 一郎: 境界層の速度分布におよぼす曲率の影響 (正誤), 1954. 日本機械学会誌, 57 (1954) 596-598.
- 5) K. T. Yen: On a Boundary Layer Approximation Technique. TR AE 5802, Rensselaer Polytechnic Inst., AFOSR TN 58-403, AD 158-206 (1958).
- 6) K. Toba: Some Effects of Surface Curvature on the Laminar Boundary Layer Flow. TR AE 5904, Rensselaer Polytechnic Inst., AFOSR TN 60-448, AD 237-088 (1960).
- 7) K. T. Yen & K. Toba: A Theory of the Two-Dimensional Laminar Boundary Layer over a Curved Surface, 1960. JAS 28 (1961) 877-884.
- 8) J. S. Murphy: Comment on a Theory of the Two-Dimensional Laminar Boundary Layer over a Curved Surface, 1961. JAS 29 (1962) 366-367.  
K. T. Yen & K. Toba: Authors' Reply. *ibid*, 367-368.
- 9) N. Hayasi: On Similar Solutions of the Unsteady Quasi-Two-Dimensional Incompressible Laminar Boundary-Layer Equations, 1961. J. Phys. Soc. Japan 16 (1961) 2316-2329.

I. 林 二 識  
II. NAL TR-48  
III. 532.5

NAL TR-48  
航空宇宙技術研究所  
曲面に沿う境界層

1963 年 8 月 13 ページ

境界層内の流れに及ぼす壁面の曲率の影響を調べるために、主流の速度が一定で、曲率が表面に沿う距離の  $-1/2$  乗に比例する場合を扱った。この場合層内速度分布は相似となる。この問題は従来にも種々の方法で扱われているが、結果が一致しないので、再び取り上げたものである。

従来の解析を詳細に検討した結果、本質的には全く等しく、結果の相異は、数値計算の精度がいづれも不足しているためであること  
を明らかにした。数値計算に適する変換が示され、この変換によつて導いた式を電子計算機で解いて、曲率の真の影響を求めた。

I. 林 二 識  
II. NAL TR-48  
III. 532.5

NAL TR-48  
航空宇宙技術研究所  
曲面に沿う境界層

1963 年 8 月 13 ページ

境界層内の流れに及ぼす壁面の曲率の影響を調べるために、主流の速度が一定で、曲率が表面に沿う距離の  $-1/2$  乗に比例する場合を扱った。この場合層内速度分布は相似となる。この問題は従来にも種々の方法で扱われているが、結果が一致しないので、再び取り上げたものである。

従来の解析を詳細に検討した結果、本質的には全く等しく、結果の相異は、数値計算の精度がいづれも不足しているためであること  
を明らかにした。数値計算に適する変換が示され、この変換によつて導いた式を電子計算機で解いて、曲率の真の影響を求めた。

I. 林 二 識  
II. NAL TR-48  
III. 532.5

NAL TR-48  
航空宇宙技術研究所  
曲面に沿う境界層

1963 年 8 月 13 ページ

境界層内の流れに及ぼす壁面の曲率の影響を調べるために、主流の速度が一定で、曲率が表面に沿う距離の  $-1/2$  乗に比例する場合を扱った。この場合層内速度分布は相似となる。この問題は従来にも種々の方法で扱われているが、結果が一致しないので、再び取り上げたものである。

従来の解析を詳細に検討した結果、本質的には全く等しく、結果の相異は、数値計算の精度がいづれも不足しているためであること  
を明らかにした。数値計算に適する変換が示され、この変換によつて導いた式を電子計算機で解いて、曲率の真の影響を求めた。

I. 林 二 識  
II. NAL TR-48  
III. 532.5

NAL TR-48  
航空宇宙技術研究所  
曲面に沿う境界層

1963 年 8 月 13 ページ

境界層内の流れに及ぼす壁面の曲率の影響を調べるために、主流の速度が一定で、曲率が表面に沿う距離の  $-1/2$  乗に比例する場合を扱った。この場合層内速度分布は相似となる。この問題は従来にも種々の方法で扱われているが、結果が一致しないので、再び取り上げたものである。

従来の解析を詳細に検討した結果、本質的には全く等しく、結果の相異は、数値計算の精度がいづれも不足しているためであること  
を明らかにした。数値計算に適する変換が示され、この変換によつて導いた式を電子計算機で解いて、曲率の真の影響を求めた。



TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962年11月	川井忠彦, 江川幸一
TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Reported Load Testing Rigs for Full Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田宗四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田 勇, 松崎利一
TR-37	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu Wada
TR-38	鋳鉄のような脆性材料からなる円板の回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究 (第1報) —その性能におよぼす各種因子の影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full-Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	幅射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川敏一
TR-42	非定常境界層の相似解とその安定 A Similar Solution of Unsteady Laminar Boundary Layer and Its Stability Characteristics	1963年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤 博, 義田光弘 坂口 一, 山崎紀雄
TR-45	固有値問題の $(\sum \lambda^k A_k) x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem $(\sum \lambda^k A_k) x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦, 泉日出夫 戸川隼人, 林 洋一
TR-47	鋳鉄円板の回転破壊におけるコリオリの力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年7月	佐藤和郎, 永井文雄

## 航空宇宙技術研究所報告 48号

昭和 38 年 8 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1,880  
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53