

UDC 518.6
517.949

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-50

境界収縮法による偏微分方程式の境界値
問題の数値解法

樋口一雄・能美力

1963年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

境界収縮法による偏微分方程式の境界値 問題の数値解法*

樋口 一雄**・能 美 力**

Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction

By Kazuo HIGUCHI and Tsutomu NŌMI

In this paper we attempt to present some aspects of the method of Boundary Contraction which has been sought by H. W. Milnes, T. S. Chow and R. B. Potts as a numerical method of boundary value problems of partial differential equations ([1]~[5]). Our purpose is to give a complete proof on the stability of a contraction process for linear star and to solve Laplace equation by this method in higher accuracy.

1. 緒 言

偏微分方程式の境界値問題を差分法によって、近似的に解く場合の重要な問題点は、第1に、原方程式の差分近似と境界条件の近似の方法、第2に、その近似系の解法、第3は、それにより得られる近似解の有意性と精度である。これらを内容的に述べると、差分方程式系の近似度と、その系より得る近似解の誤差伝播に関する安定性および元の問題に対する真の解への収束性ということになる。第3の点については、近似空間の収束に応じて、近似解が真の解へ収束する時、はじめてそれが数学的な近似であるとの保証が得られるからきわめて本質的な問題といえる。安定性の問題は、近似系の構造とそれを解く方法にも密接な関連性を有する。本報告は、1959年頃から発表されてきた Boundary Contraction (境界収縮法) なる偏微分方程式の数値解法の一手法を紹介し、H. W. Milnes, R. B. Potts [1] による線型近似系一般に対する一つの収縮過程の安定性の条件を数学的に完全な証明を付して与え、不必要と思えるある種の反復的手法を、したがって、その収束条件を巡回行列の逆転公式を与えることにより除去した。また、H. W. Milnes, T. S. Chow [2] による Laplace 方程式の各種境界値問題への適用において使用された差分方程式系の近似度をさらに上げ、しかもそれがおのずから安定であるような収縮過程を導き、Robin 問題に対する適用も論じた。

* 昭和 38 年 9 月 11 日受付

** 計測工務部

なお、線型斉次の場合について、[5] を参考にしつつ、より一般的な近似系に関する一つの収縮過程を、不完全であるが論じた。境界収縮法は近来開発されたばかりで、その適用例は通常よく使われる iterative solution (反復解法) に比べてまだはるかに少なく、一般的な理論も完備しているとはいえないが、高速電子計算機によって数値解を得るための一手段としてはその計算速度と必要記憶量とにおいて、みるべき利点を有するものと思われる。

2. 線型問題に対する境界収縮法の一般理論

§ 2.1 一般的な境界収縮の過程と安定性

Ω は二次元の単連結領域で、その境界 Γ_0 は、区分的に滑らかな Jordan 曲線とし、さらに Ω は、単位円域 K に位相同型であるとする。以後、 Ω における問題は、 K におけるそれに変換されたものとして論ずる。 K の境界 C_0 を最外かくとする同心円の列、 C_0, C_1, C_2, \dots を考える。ただし

C_i の半径 r_i は、

$$r_0 > r_1 > r_2 > \dots \quad (1.1)$$

なる減少列。次に K の中心 0 の周りの角度分割、

$$\theta_j, j=0, 1, 2, \dots, N-1;$$

$$\theta_{N+j} = \theta_j, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

を行なう。 $K \cup C_0$ 上で与えられた方程式の境界値問題に対して、その差分近似方程式系を、nodes $(r_i, \theta_j) \equiv (i, j)$ に関して構成し、その解を、

$$u(r_i, \theta_j) \equiv u_{ij} \quad (1.3)$$

とする。またこの近似系を解くに際して、計算誤差を

も含むであろう近似解を、

$$v(r_i, \theta_j) \equiv v_{ij} \quad (1.4)$$

とする。計算誤差は、

$$\epsilon_{ij} = u_{ij} - v_{ij} \quad (1.5)$$

で表わす。 N 次元ベクトルを導入して、

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{i0} \\ u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iN-1} \end{pmatrix}, \quad V_i = \begin{pmatrix} v_{i0} \\ v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{iN-1} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

とすれば、

$$E_i = U_i - V_i \quad (1.7)$$

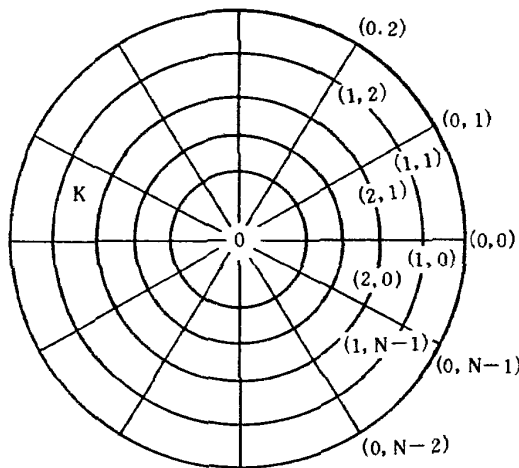


FIG. 1

さて、線型問題の場合の境界収縮過程は、変換作用素といわれる Nk 次の正方行列 $A_i^{(k)}$ で与えられる。ここに、 k は、contraction rank (収縮位数) とよび、既知ベクトル U_0, U_1, \dots, U_{k-1} の個数であり、これは近似方程式系がそれに応ずるように構成されていることを意味する。そこで改めてこの行列を A_i と略記することにすれば、収縮過程は、

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ U_{i+2} \\ \vdots \\ U_{i+k} \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_{i+k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_i^{(0)} \\ H_i^{(1)} \\ \vdots \\ H_i^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

ここに $H_i^{(t)}$, $t=0, 1, 2, \dots, k-1$, は近似方程式系における非斉次項よりなる N 次元の既知ベクトルで、無論 U によらない。いま、ベクトル記号を次のように改めることにする:

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{i0} \\ u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{i,N-1} \end{pmatrix} \equiv \langle u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i,N-1} \rangle, \quad (1.9)$$

同様に、

$$\begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_{i+k-1} \end{pmatrix} \equiv \langle U_i, U_{i+1}, \dots, U_{i+k-1} \rangle \quad (1.10)$$

とする。 V, E についても全く同様である。これらの記号を使えば、(1.8) は、

$$\begin{aligned} \langle U_{i+1}, U_{i+2}, \dots, U_{i+k} \rangle &= A_i \langle U_i, U_{i+1}, \dots, U_{i+k-1} \rangle \\ &\quad + \langle H_i^{(0)}, H_i^{(1)}, \dots, H_i^{(k-1)} \rangle, \\ & \quad i=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

と表わされる。これは帰納法によって、

$$\begin{aligned} \langle U_{i+1}, U_{i+2}, \dots, U_{i+k} \rangle &= \left(\prod_{l=0}^i A_l \right) \langle U_0, U_1, \dots, U_{k-1} \rangle \\ &\quad + \sum_{s=0}^i \left(\prod_{l=0}^{s-1} A_{i-l} \right) \langle H_{i-s}^{(0)}, H_{i-s}^{(1)}, \dots, H_{i-s}^{(k-1)} \rangle, \\ & \quad i=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

となる。ただし $s=0$ の場合には、 $\prod_{l=0}^{s-1} A_{i-l}$ は Nk 次の単位行列 I を意味するものとする。そこでいま (1.12) によって近似解を求めていく場合、もしその計算途上において、 $E_0 = E_1 = \dots = E_{n+k-2} = O$ であったものが、 $E_{n+k-1} \neq O$ なる誤差を生じたとすれば、その伝播の仕方は、仮に $H_i^{(t)}$ がすべて正確に計算されたとしても、

$$\langle \mathbf{E}_{n+i+1}, \mathbf{E}_{n+i+2}, \dots, \mathbf{E}_{n+i+k} \rangle = \left(\prod_{l=0}^i A_{n+i-l} \right) \langle \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{k-1}, \mathbf{E}_{n+k-1} \rangle \quad (1.13)$$

となることが容易に判る。かくして、誤差伝播は、ベクトルのノルム $\| \cdot \|$ を適当に導入して、 $\| \mathbf{E}_{n+k-1} \|$ と $\| \mathbf{E}_{n+i+k} \|$ とを比較することにより評価し得るが、一方 (1.13) は、この収縮過程の安定性が、行列積 $\prod_{l=0}^i A_{n+i-l}$ の i に関する一様有界性に依存することを示している。ついでながら、(1.12) をみれば知る通り、境界収縮法は、一つの explicit method にほかならない。

§ 2.2 定数係数の線型近似系に対する収縮過程の安定性の解析

本節では、次に示すような定数係数の線型近似方程式系の一般的な場合について、それより直接導かれる一つの境界収縮の安定性を論ずる：§ 2.1 で与えた mesh 構成 (FIG. 1 参照) に対して、

$$\sum_{t=0}^k \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} u_{i+t,j+s} = f_{ij}, \quad \begin{matrix} i=0, 1, 2, \dots \\ j=0, 1, 2, \dots, N-1, \end{matrix} \quad (2.1)$$

ここに、 $\beta_{t,s}$ は t, s にのみ依存する定数で、 f_{ij} は既知の非斉次項なる近似系が構成されたとする。導かれる形式の近似系は、たとえば、定数係数の線型偏微分方程式に対して用いられる。さらに、 $u_{0j}, u_{1j}, \dots, u_{k-1,j}; j=0, 1, 2, \dots, N-1$ が既知とする。上式をベクトルで表わせば、

$$\sum_{t=0}^k B_t \mathbf{U}_{i+t} = \mathbf{F}_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

となる。ただし、 \mathbf{F}_i は components f_{ij} よりなる N 次元ベクトルであり、 B_t は次に示す N 次の circulant matrix (巡回行列) である。すなわち、

$$\mathbf{F}_i = \langle f_{0i}, f_{1i}, f_{2i}, \dots, f_{i,N-1} \rangle, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

$$B_t = \begin{pmatrix} \beta_{t0} & \beta_{t1} & \beta_{t2} & \dots & \beta_{t,N-2} & \beta_{t,N-1} \\ \beta_{t,N-1} & \beta_{t0} & \beta_{t1} & \dots & \beta_{t,N-3} & \beta_{t,N-2} \\ \beta_{t,N-2} & \beta_{t,N-1} & \beta_{t0} & \dots & \beta_{t,N-4} & \beta_{t,N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \beta_{t3} & \dots & \beta_{t,N-1} & \beta_{t0} \end{pmatrix}, \quad t=0, 1, 2, \dots, k \quad (2.4)$$

いま、 $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{k-1}$ が既知であるとしたから、方程式 (2.2) より \mathbf{U}_{i+k} を一意に決定せしめるには、 B_k が正則であればよい。このとき、

$$\mathbf{M} \equiv B_k^{-1} \quad (2.5)$$

とおくと

$$\mathbf{U}_{i+k} = -\mathbf{M} \sum_{t=0}^{k-1} B_t \mathbf{U}_{i+t} + \mathbf{M} \mathbf{F}_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

となる。これを前節に準じてブロック表現すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_{i+2}, \dots, \mathbf{U}_{i+k} \rangle &= \mathbf{A} \langle \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \dots, \mathbf{U}_{i+k-1} \rangle \\ &\quad + \langle \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{k-1}, \mathbf{M} \mathbf{F}_i \rangle, \quad i=0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここに、 A は Nk 次の正方行列で、 I を N 次の単位行列とすると、

$$A = \begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O \\ O & O & I & O & \cdots & O \\ & & & \cdots & & \\ O & O & \cdots & O & I \\ -MB_0 & -MB_1 & \cdots & -MB_{k-1} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

で与えられる。(2.7) は、(1.11)において、 $A_i \equiv A$, $i=0, 1, 2, \dots$; $H_i^{(0)} = \dots = H_i^{(k-2)} = O$; $H_i^{(k-1)} = MF_i$ なる場合に相当し、したがって、これは一つの収縮過程となる。帰納法によって、

$$\begin{aligned} \langle U_{i+1}, U_{i+2}, \dots, U_{i+k} \rangle &= A^{i+1} \langle U_0, U_1, \dots, U_{k-1} \rangle \\ &+ \sum_{s=0}^i A^{i-s} \langle O, \dots, O, MF_s \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

が得られるから、既知ベクトル U_0, U_1, \dots, U_{k-1} のもとに施すこの収縮過程の安定性は、変換作用素 A の性質に依存することがわかる。それは次のように述べることができる：

((収縮安定条件)) 近似方程式系 (2.1) に対する境界収縮の過程 (2.6) が、その誤差伝播に関して安定であるための必要十分条件は、

- [i] (2.4) で定義される巡回行列 B_k が正則であるとともに、
- [ii] $\omega = e^{2i\pi/N}$ ($i = \sqrt{-1}$) とするとき、 λ に関する k 次方程式、

$$\sum_{t=0}^k \lambda^t \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} \omega^{ps} = 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

が、各 p について、その k 個の根 λ が全て相異なり、かつ、

$$|\lambda| \leq 1 \quad (2.11)$$

を満足することである。

(証明) 安定性に関しては A の固有値の大きさが問題となる。今、

$$\mathbf{x}_i = \langle x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i, N-1} \rangle, \quad i=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.12)$$

とし、 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルを

$$\tilde{\mathbf{V}} = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1} \rangle \quad (2.13)$$

とすれば、固有方程式は

$$A\tilde{\mathbf{V}} = \lambda\tilde{\mathbf{V}}. \quad (2.14)$$

(2.8), (2.13) によれば、これは次のようになる：

$$\mathbf{x}_{i+1} = \lambda\mathbf{x}_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, k-2, \quad (2.15)$$

$$-M \sum_{t=0}^{k-1} B_t \mathbf{x}_t = \lambda \mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.16)$$

(2.15) より

$$X_i = \lambda^i X_0, \quad i=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.15')$$

を得るから、固有ベクトルは、

$$\tilde{V} = \langle X_0, \lambda x_0, \dots, \lambda^{k-1} x_0 \rangle \quad (2.13')$$

なる形をとる。(2.16) に、(2.5) および (2.15') を代入して変形すれば、方程式

$$\sum_{t=0}^k \lambda^t B_t x_0 = 0 \quad (2.17)$$

が得られる。いま、 B_t の固有値を μ_t 、対応する固有ベクトルを b_t とすれば、[R. 1] 4) によって、

$$\mu_t = \mu_{t,p} = \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} \omega^{ps}, \quad (2.18)$$

$$b_t = b_{t,p} = Z_p, \quad (2.19)$$

$p=0, 1, 2, \dots, N-1$; $t=0, 1, 2, \dots, k$, となる。しかも Z_p 全体は N 次元ベクトル空間の正規基底をなすから、

$$x_0 = \sum_{p=0}^{N-1} a_p Z_p \quad (2.20)$$

とおくと、方程式 (2.17) は、次のようになる。

$$\sum_{p=0}^{N-1} a_p \left(\sum_{t=0}^k \lambda^t \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} \omega^{ps} \right) Z_p = 0. \quad (2.21)$$

Z_p , $p=0, 1, 2, \dots, N-1$ は一次独立ゆえ、これは、

$$a_p \sum_{t=0}^k \lambda^t \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} \omega^{ps} = 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.22)$$

を意味する。一方、 \tilde{V} はゼロベクトルではないから、(2.13') によれば、 x_0 も 0 であってはならない。すなわち、少なくとも一つの p については、 $a_p \neq 0$ でなければならない。故に

$$\sum_{t=0}^k \lambda^t \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} \omega^{ps} = 0 \quad (2.23)$$

が少なくとも一つの p に関して成り立つことになる。このことはまた、方程式 (2.17) に、[R. 1] 1) を適用して直接導くことができる (\rightarrow [R. 2])。したがって、(2.17) の解 x_0 は、必ずしも一意に定まらないのであるが、今度は逆に、(2.23) なる条件を各 p に対して課すことにより、解 x_0 として、 N 個の一次独立なものを構成することができる。実際、(2.20) を参考にして、(2.23) が成立する場合、その p について、(2.17) の解として、

$$x_0 = Z_p \quad (2.24)$$

をとることにする。(2.17) がこれによって満足されることは自明である。いま各 p について、条件 (2.23) を満すべく $\lambda = \lambda_p$ を選ぶことにすると、 Z_0, Z_1, \dots, Z_{N-1} は、方程式 (2.17) の一次独立な解系をなす。

さて、(2.13') によれば、(2.23) を満足するように $\lambda = \lambda_p$ を与えると、(\mathbf{x}_0 として \mathbf{Z}_p をとるわけだから) それに対応する固有ベクトル $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}_p$ は決定する。一方、方程式 (2.23) は、根 λ として、一般に k 個を有するから、各 p について、もしそれらの根が全て相異なれば、それぞれに対応する固有ベクトル $\tilde{\mathbf{V}}$ は、互に一次独立となる。

以上のことをまとめてみる： 行列 A の固有値 $\lambda = \lambda_{pl}$ に対応する固有ベクトルを $\tilde{\mathbf{V}}_{pl}$ とする、 $p=0, 1, 2, \dots, N-1$; $l=0, 1, 2, \dots, k-1$ 。

$$A\tilde{\mathbf{V}}_{pl} = \lambda_{pl}\tilde{\mathbf{V}}_{pl}, \quad (2.25)$$

ここに、 λ_{pl} は、方程式 (2.23) の根で与え、 $\tilde{\mathbf{V}}_{pl}$ は

$$\tilde{\mathbf{V}}_{pl} = \langle \mathbf{Z}_p, \lambda_{pl}\mathbf{Z}_p, \dots, \lambda_{pl}^{k-1}\mathbf{Z}_p \rangle \quad (2.26)$$

で与えるものとする。まず、 $\tilde{\mathbf{V}}_{0l_0}, \tilde{\mathbf{V}}_{1l_1}, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_{N-1, l_{N-1}}$ の一次独立性は明らかである。ただし l_p は、各 p について、 $0, 1, 2, \dots, k-1$ の中で任意の添数。したがって、もし各 p について、

$$\lambda_{pl} \neq \lambda_{pl'}, \quad l \neq l' \quad (2.27)$$

が成り立てば、ベクトル系

$$\mathcal{E} \equiv \{ \tilde{\mathbf{V}}_{pl}, p=0, 1, 2, \dots, N-1; l=0, 1, 2, \dots, k-1 \}$$

は、一次独立な系を構成し、 Nk 次元のベクトル空間を張る。このことから、収縮過程 (2.6) の安定条件が直ちに得られる。 (証了)

B_k の正則条件は、[R. 1] 2) により、

$$\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,s} \omega^{ps} \neq 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.28)$$

である。このとき、 B_k の逆転は、[R. 1] 3) によって、次のように与えられる：

$$M \equiv B_k^{-1} \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{N-2} & m_{N-1} \\ m_{N-1} m_0 & m_1 & \cdots & m_{N-3} & m_{N-2} \\ m_{N-2} m_{N-1} m_0 & \cdots & m_{N-4} & m_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{N-1} m_0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$m_l = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,s} \omega^{(s+l)p} \right]^{-1}, \quad l=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.30)$$

ここで、条件 (2.28) をふり返ってみよう。 N が十分大なる場合が、むしろ一般的と考えられるから、これを若干きびしくして、方程式

$$\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,s} x^s = 0 \quad (2.31)$$

が、ガウス平面において、単位円上に根を持たないことを条件にとり入れる。 $|\omega|=1$ だから、むしろこの条件は、 B_k の正則性に対して十分であるが、[1] で与えられた反復解の安定かつ収束条

件よりは緩い (\rightarrow [R. 3])。

§ 2.3 境界収縮法の適用範囲の拡張

前節では、定数係数の近似系について論じたが、 $\beta_{i,s}$ が r にのみ依存するような変数係数のとき、つまり、 $\beta_{i,s} = \beta_{i,s}(r)$ なる場合については、どうであるかを考えてみる。近似方程式系

$$\sum_{i=0}^k \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{i,s}(r_{i+t}) \cdot u_{i+t,j+s} = f_{ij}, \quad \begin{matrix} i=0, 1, 2, \dots \\ j=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{matrix} \quad (3.1)$$

に対して、前節で与えたような収縮過程、すなわち、(2.6)において、 $M = M(r_{i+k})$, $B_i = B_i(r_{i+t})$ なるものを考えると、その安定性の解析は、前とほとんど類似的に行なわれ、次のような安定条件が得られる：

[i'] mesh の構成を十分細かくとる、特に、同心円列、 C_0, C_1, C_2, \dots , を十分密にとること。

[ii'] 行列 $B_k(r_{i+k})$ が正則であること、すなわち、

$$\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,s}(r_{i+k}) \cdot \omega^{ps} \neq 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

なること。あるいは、ややこれをきつくして、

$$\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,s}(r_{i+k}) \cdot x^s = 0 \quad (3.3)$$

なる方程式の根 x が、単位円上に存在せぬこと。

[iii'] 方程式

$$\sum_{i=0}^k \lambda^i \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{i,s}(r_{i+t}) \cdot \omega^{ps} = 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

が、各 p について、その k 個の根 λ を全て相異ならしめ、かつ

$$|\lambda| \leq 1 \quad (3.5)$$

を満足せしむること、しかも、これが i に関して一様に成立することである。

このほかに、 $\beta_{i,s} = \beta_{i,s}(\theta)$ なる場合、 $\beta_{i,s} = \beta_{i,s}(r, \theta)$ なる場合などが考えられるが、これらについてはまだ結論が得られていない。さらに、不規則な境界の場合、多連結領域の場合、また、領域を原型のままに保存して収縮過程を導入する問題および非線型方程式の取り扱い方などは今後に残された問題である。

§ 2.4 斉次近似系に対するある種の収縮過程

最近 T.S. Chow, H. W. Milne は [5] において単位円域における斉次方程式

$$\sum_{\alpha=0}^p \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{a_{\alpha\beta}}{r^{p-\alpha+\beta}} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial r^{\alpha-\beta} \partial \theta^{\beta}} = 0 \quad (4.1)$$

($a_{\alpha\beta}$ は、 r, θ によらない実定数) を境界条件

$$(\partial^s u / \partial r^s)(1, \theta) = f_s(\theta), \quad s=0, 1, 2, \dots, j \quad (4.2)$$

$$X_l = T(\omega) Y_l T(\bar{\omega}), \quad l=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.9)$$

とすれば, X_l は, 方程式 (4.5) を満たし, (4.4) で与えられる解としては,

$$V_i^{(l)} = X_l^i U_0, \quad i=0, 1, 2, \dots; \quad l=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.10)$$

が得られる。そこで, K_l を

$$\sum_{l=0}^{k-1} K_l = I \quad (4.11)$$

なる任意の N 次巡回行列とすると, [R. 1] 5) によって, (4.3) の一般解は, この場合,

$$U_i = \sum_{l=0}^{k-1} K_l V_i^{(l)}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

で与えられることが分る。 K_l の決定の仕方は, 与えられた具体的な問題における境界条件や, たとえば, 解の一樣有界性などの条件に照合させて論ぜられる。

3. 境界収縮法の適用例

ここに示す例題は, いずれも対象領域としては, 2. で述べた単位円域 K を考え, 記号もそれに準ずることとする。まず, その近似系から直接, 安定な収縮過程を誘導できる一例として, [1] にみられる双曲型方程式の境界値問題をあげて簡単に説明し, 次に § 2.4 の場合に相当する収縮過程を導入する例として, 楕円型の中で基本的な Laplace 方程式の各種境界値問題を, [2] で得られた諸結果と比較しつつ数値解析する。なお, データトロン 205 による計算例の一部を付記した。

§ 3.1 基本的な双曲型方程式の境界値問題

[問題]

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (K), \quad (1.1)$$

$$u = f(\theta) \quad (C_0), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \quad (C_0), \quad (1.3)$$

$$|u(r, \theta)| \leq M \quad (K \cup C_0), \quad (1.4)$$

[mesh の構成] 同心円 C_i の半径 r_i を,

$$r_i = \rho^i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

で与え, 角度分割 θ_j は,

$$\theta_j = j\alpha, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (1.6)$$

$$\alpha = 2\pi/N \quad (1.7)$$

で与える。ここに ρ は, contraction rate (収縮率) とよばれ,

$$0 < \rho < 1 \quad (1.8)$$

なる定数である。

[近似差分方程式系の構成] まず境界条件から,

$$u_{0,j}=f_j, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (1.9)$$

$$u_{1,j}=f_j-(1-\rho)g_j, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.10)$$

が既知であるとして, 方程式に対する近似を,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho(1+\rho)(1-\rho)^2} \left(u_{i+2,j+1} - \frac{1}{4}u_{i+2,j} + \frac{1}{4}u_{i+2,j-1} \right) \\ & - \frac{1}{\alpha^2} u_{i+1,j+2} + \left(\frac{9}{4\alpha^2} - \frac{2}{\rho(1-\rho)^2} \right) u_{i+1,j+1} + \left(\frac{1}{2\rho(1-\rho)^2} - \frac{7}{4\alpha^2} \right) u_{i+1,j} \\ & + \left(\frac{3}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\rho(1-\rho)^2} \right) u_{i+1,j-1} - \frac{1}{4\alpha^2} u_{i+1,j-2} \\ & + \frac{2}{(1+\rho)(1-\rho)^2} \left(u_{i,j+1} - \frac{1}{4}u_{ij} + \frac{1}{4}u_{i,j-1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

で与える。これは, $0(1-\rho)+0(\alpha)$ の近似度を有する。

さて, 近似方程式 (1.11) をベクトルで表わせば, 次のようになる:

$$\frac{2}{\rho(1+\rho)(1-\rho)^2} A U_{i+2} + B U_{i+1} + \frac{2}{(1+\rho)(1-\rho)^2} A U_i = 0, \quad (1.12)$$

ここに A, B は, いずれも N 次の巡回行列で, それぞれ,

$$A = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & & 0 & b_{-2} & b_{-1} \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & b_{-2} \\ b_{-2} & b_{-1} & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \\ b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & b_{-2} & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\rho(1-\rho)^2} - \frac{7}{4\alpha^2}, & b_1 &= \frac{9}{4\alpha^2} - \frac{2}{\rho(1-\rho)^2}, \\ b_2 &= -\frac{1}{\alpha^2}, & b_{-2} &= -\frac{1}{4\alpha^2}, & b_{-1} &= \frac{3}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\rho(1-\rho)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

である。この近似系は, § 2.2 において, $k=2$ の場合に相当し, (1.9), (1.10) により, U_0, U_r が与えられているから, これより一つの収縮過程を直接導くことができる。すなわち,

$$U_{i+2} = -\rho U_i - \frac{1}{2}\rho(1+\rho)(1-\rho)^2 A^{-1} B U_{i+1}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

まず念のため, A の正則性を確かめると,

$$\begin{aligned} \det A &= \prod_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cos \frac{2n\pi}{N} + \frac{3i}{4} \sin \frac{2n\pi}{N} \right) \\ &= \begin{cases} 8^{-m} \prod_{n=1}^m (13 - 5 \cos n\alpha - 8 \sin^2 n\alpha), & N=2m+1 \\ -12 \cdot 8^{-m} \prod_{n=1}^{m-1} (13 - 5 \cos n\alpha - 8 \sin^2 n\alpha), & N=2m \end{cases} \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

となり, A^{-1} は存在することが分る。次に収縮過程 (1.16) の安定性を検討するため § 2.2, (2.10) に対応する方程式をたて, 係数を整理すれば,

$$\lambda^2 - \frac{\rho(1+\rho)(1-\rho)^2}{2} \left(\frac{2}{\rho(1-\rho)^2} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{\omega^n}{\alpha^2} + \frac{\omega^{-n}}{\alpha^2} \right) \lambda + \rho = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.18)$$

ここに $\omega = e^{2i\pi/N}$, を得る。いま特に,

$$\alpha = 1 - \rho \quad (1.19)$$

と与えることにすれば, 方程式 (1.18) は,

$$\lambda^2 - (1+\rho)(1-\rho + \rho \cos n\alpha) \lambda + \rho = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.20)$$

となる。これは必ず,

$$|\lambda| \leq 1 \quad (1.21)$$

なる根を有する (→[R. 4])。重根になることを避けるためには,

$$\cos n\alpha \neq \frac{\rho^2 \pm 2\sqrt{\rho} - 1}{\rho(1+\rho)}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.22)$$

なるように α を, 従って N を選ばねばならないが, これは可能である。かくして, 条件 (1.19) および (1.22) のもとに, 安定な収縮過程 (1.16) を得ることができた。

§ 3.2 Laplace 方程式に対する Dirichlet 問題

[問題]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (K), \quad (2.1)$$

$$u = u_0(\theta) \quad (C_0) \quad (2.2)$$

[mesh の構成]

§ 3.1 の場合と同一。

[近似差分方程式系の構成]

$$1) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+2,j} - (1+\rho)u_{i+1,j} + \rho u_{ij}}{\rho^{2i+1}(1+\rho)(1-\rho)^2/2} + 0((1-\rho)^2 r_{i+1}) \quad (2.3)$$

$$2) \quad \frac{1}{r_{i+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{ij} - u_{i+2,j}}{\rho^{2i+1}(1+\rho)(1-\rho)} + 0((1-\rho)^2) \quad (2.4)$$

$$3) \quad \frac{1}{r_{i+1}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\rho^{2i+2}\alpha^2} + 0(d^2/r_{i+1}^2) \quad (2.5)$$

これらを用いて方程式 (2.1) を近似すれば,

$$u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{ij} + \kappa(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\kappa = (1-\rho)^2/\rho\alpha^2 \quad (2.7)$$

となる。[2] では、1) が $0((1-\rho)r_{i+1})$ 、2) が $0(1-\rho)$ 、3) は $0((1-\rho)/r_{i+1}^2) + 0(\alpha^2/r_{i+1}^2)$ なる差分近似を与えている。近似系 (2.6) は、方程式 (2.1) に対し、全体として、 $0((1-\rho)^4) + 0((1-\rho)^3 r_{i+1}^3) + 0((1-\rho)^2 \alpha^2)$ の近似度を有する。ベクトル表現によれば、(2.6) は、

$$\mathbf{U}_{i+2} - (2I - \kappa S)\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i = 0 \quad (2.8)$$

となる。ここに S は、 N 次の巡回行列、

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

であり、 I は N 次の単位行列を表わす。ところで、境界条件 (2.2) により \mathbf{U}_0 は既知である。差分近似系構成の立場からいえば、この既知ベクトル \mathbf{U}_0 を用いて、(2.8) を解くことになるが、これは明らかに、一意解 \mathbf{U}_0 をうるためには条件不足である。(2.8) をみると、さらに \mathbf{U}_1 さえ何らかの方法で与え得れば、この系の解は、

$$\mathbf{U}_{i+2} = (2I - \kappa S)\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

によって、順次決定するわけで、これは見掛上、一つの境界収縮を与えていることになる。しかし、その過程が安定性を欠くことは容易に示される。実際、安定条件を検討するに、§ 2.2, (2.10) に当る方程式は、この場合、

$$\lambda^2 - 2 \left\{ 1 + \kappa \left(1 - \cos \frac{2p\pi}{N} \right) \right\} \lambda + 1 = 0 \quad (2.11)$$

となり、この根 λ の絶対値は、いかなる κ に対しても、1 を超えることがわかる。それでは、単なる代数的な変形によって、直接得られる収縮過程が安定であるような近似系を構成しうるかという、今のところ、それは知られていない。しかしながら、ここに論じている問題に関しては、§ 2.4 で示した収縮過程を適用することができる (→[R. 5])。そこでいま、ある適当な N 次の

巡回行列,

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-3} & x_{N-2} \\ x_{N-2} & x_{N-1} & x_0 & \cdots & x_{N-4} & x_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{N-1} & x_0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

によって, (2.8) の解が,

$$U_i = X^i U_0, \quad i=0, 1, 2, \cdots \quad (2.13)$$

で与えられるとし, これを方程式 (2.8) に代入すれば, X に関する方程式

$$X^2 - (2I - \kappa S)X + I = 0 \quad (2.14)$$

をうる。ただし, 0 は N 次の零行列である。 I および S は, いずれも巡回行列ゆえ, § 2.4 で論じたように, 上方程式を $T(\omega)$ によって対角化して, X の固有値を λ_p , S のそれを S_p , $p=0, 1, 2, \cdots, N-1$ とすれば, 同値な方程式

$$\lambda_p^2 - (2 - \kappa S_p)\lambda_p + 1 = 0, \quad p=0, 1, 2, \cdots, N-1 \quad (2.15)$$

をうる。ここで, [R. 1] 4) により,

$$\zeta_p = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{N}, \quad p=0, 1, 2, \cdots, N-1 \quad (2.16)$$

であるから, (2.15) の根は,

$$\lambda_p = \begin{cases} \lambda_p^{(1)} = 1 - 2 \left(\sqrt{\kappa + \kappa^2 \sin^2 \frac{p\pi}{N}} - \kappa \sin \frac{p\pi}{N} \right) \sin \frac{p\pi}{N}, \\ \lambda_p^{(2)} = 1 + 2 \left(\sqrt{\kappa + \kappa^2 \sin^2 \frac{p\pi}{N}} + \kappa \sin \frac{p\pi}{N} \right) \sin \frac{p\pi}{N}, \end{cases} \quad p=0, 1, 2, \cdots, N-1 \quad (2.17)$$

となる。 $\lambda_p^{(1)}$ を要素とする対角行列を $D^{(1)}$, $\lambda_p^{(2)}$ のものを $D^{(2)}$ とすれば, (2.14) の解 X としては,

$$X^{(\nu)} = T(\omega) D^{(\nu)} T(\bar{\omega}), \quad \nu=1, 2 \quad (2.18)$$

が得られ, 方程式 (2.8) の一般解は,

$$U_i = (K_1 X^{(1)i} + K_2 X^{(2)i}) U_0, \quad i=0, 1, 2, \cdots \quad (2.19)$$

で与えられる (→ § 2.4)。ここに, K_1 と K_2 は, いずれも N 次の巡回行列で,

$$K_1 + K_2 = I \quad (2.20)$$

なるものである。ところで, (2.17) をみると, いかなる $\kappa > 0$ を与えても,

$$\lambda_0^{(2)} = 1, \quad \lambda_p^{(2)} > 1, \quad p=1, 2, \cdots, N-1 \quad (2.21)$$

であるから, $X^{(2)}$ の方は, 安定な収縮過程をもたらさない。そのみか, 近似解の有界性をも保

障しない。故に今の場合、 $X^{(2)}$ を棄却する。すなわち、

$$K_1=I, K_2=0 \quad (2.22)$$

とする。したがって、(2.19) は、

$$U_i=X^{(1)i}U_0, i=0,1,2,\dots \quad (2.23)$$

となるが、これが確かに安定な収縮過程を与えることは、(2.17) による $\lambda_p^{(1)}$ が、

$$|\lambda_p^{(1)}| \leq 1, p=0,1,2,\dots,N-1 \quad (2.24)$$

を、いかなる $\kappa > 0$ に対しても、おのずから満足することによって保障される。ちなみに、[2] では、 $\kappa \leq 1$ なる安定条件を必要とした。

さて、(2.17)、(2.18) および (2.23) により、所要の解は、次のように与えられることがわかる：

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \lambda_p^{(1)} \bar{\omega}^{sp} \\ &= \frac{1}{N} \left[(1+\kappa) \sum_{p=0}^{N-1} \cos \frac{2sp\pi}{N} - \frac{\kappa}{2} \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \cos \frac{2(s-1)p\pi}{N} + \cos \frac{2(s+1)p\pi}{N} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sin \frac{(2s+1)p\pi}{N} - \sin \frac{(2s-1)p\pi}{N} \right\} \sqrt{\kappa + \kappa^2 \sin^2 \frac{p\pi}{N}} \right], \\ &\quad s=0,1,2,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$u_{ij} = \sum_{s=0}^{N-1} x_s u_{i-1,j+s}, \quad i=0,1,2,\dots; j=0,1,2,\dots,N-1 \quad (2.26)$$

簡単のため、 $X^{(1)}$ は今後 X と表わすことにする。ついでながら、 $x_{N-s}=x_s$ ゆえ、 X は実対称行列であり、また (2.24) によって、

$$|x_s| \leq 1, s=0,1,2,\dots,N-1 \quad (2.27)$$

も明らかである。

§ 3.3 Laplace 方程式に対する Neumann 問題

[問題]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (K), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \partial u / \partial r &= g(\theta) \quad (C_0), \\ u(1,0) &= a \end{aligned} \quad (3.3)$$

[mesh の構成]

§ 3.1 の場合と同一

[近似差分方程式系の構成]

方程式 (3.1) に対する近似系は、§ 3.2 のものと同一。境界条件 (3.2) に対する近似は、

$$(u_{0,j} - u_{1,j}) / (1-\rho) = g_j, j=0,1,2,\dots,N-1, \quad (3.4)$$

ただし, $g_j \equiv g(\theta_j)$, で与える。条件 (3.3) は,

$$u_{0,0} = a \quad (3.5)$$

さらに, 上記問題の解の存在条件は,

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0 \quad (3.6)$$

であるから, これを近似して,

$$\sum_{j=0}^{N-1} g_j = 0 \quad (3.7)$$

とする。

さてこの場合, $u_0(\theta) \equiv u(1, \theta)$ さえ explicit に与え得れば, 問題はまったく Dirichlet タイプのものに帰着する。したがって, 近似系の解 U_i もまた, U_0 さえ決定すれば, 前節で求めた巡回行列 X を用いて

$$U_i = XU_{i-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

と収縮的に求められるはずである。この U_0 の決定法であるが, ここでは, まず [2] で与えられた方法 (これを間接法と仮称する) に準ずるもの, 次に, 筆者等が解析して得た一方法 (直接法と仮称する) の両方を示す。

(間接法) まず, 結果を示すと,

$$U_0 = \frac{\pi}{N} PG + \sigma e \quad (3.9)$$

となる。ここに,

$$G = \langle g_0, g_1, g_2, \dots, g_{N-1} \rangle, \quad (3.10)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} \\ p_{N-1} & p_0 & p_1 & \dots & p_{N-3} & p_{N-2} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & p_0 & \dots & p_{N-4} & p_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{N-1} & p_0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$p_k = \frac{1}{N} \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\cos(2kl\pi/N)}{\sin(l\pi/N)} \right], \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

$$\sigma = a - \frac{1-\rho}{2\sqrt{\kappa}} \sum_{k=0}^{N-1} p_k g_k, \quad (3.13)$$

および, e は N 次元のベクトル,

$$e = \langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle \quad (3.14)$$

である。

証) 近似境界条件 (3.4) をベクトルで表わすと

$$(U_0 - U_1)/(1 - \rho) = G. \quad (3.15)$$

(3.8) を用いると、上は、 U_0 に関する方程式、

$$(I - X)U_0 = (1 - \rho)G \quad (3.16)$$

を与える。ところで、この $I - X$ が、正則ならざることは、

$$T(\bar{\omega})(I - X)T(\omega) = I - D^{(\omega)} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 - \lambda_1^{(\omega)} & & & 0 \\ & & 1 - \lambda_2^{(\omega)} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 - \lambda_N^{(\omega)} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

により明らかである。故に方程式 (3.16) は、そのままの行列逆転によっては解き得ないが、しかし今の場合、別に条件 (3.5) が与えられているから、連立一次系としては、rank を 1 つ下げ得るわけで、したがって解可能のはずである。そこでいま、 N 次行列、

$$Q = T(\omega)HT(\bar{\omega}) + I - X, \quad (3.18)$$

$$H = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\kappa} & 0 \cdots \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 \cdots \cdots 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

に対して、方程式

$$Q\tilde{U}_0 = (1 - \rho)G \quad (3.20)$$

を満足するベクトル $\tilde{U}_0 = \langle \tilde{u}_{0,0}, \tilde{u}_{0,1}, \dots, \tilde{u}_{0,N-1} \rangle$ を求めることを考える。 Q が正則であることは自明である。よって、

$$\tilde{U}_0 = (1 - \rho)Q^{-1}G, \quad (3.21)$$

ところが、この \tilde{U}_0 はまた、(3.16) をも満たすことがいえる。実際、

$$\begin{aligned} (I - X)\tilde{U}_0 &= (1 - \rho)(I - X)Q^{-1}G \\ &= (1 - \rho)(Q - T(\omega)HT(\bar{\omega}))Q^{-1}G \\ &= (1 - \rho)G - (1 - \rho)(T(\omega)HT(\bar{\omega}))Q^{-1}G \end{aligned} \quad (3.22)$$

となり、ここで、

$$T(\omega)HT(\bar{\omega}) = \frac{2\sqrt{\kappa}}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots \cdots 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots \cdots 1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots \cdots 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

は、やはり一つの巡回行列、よって、 Q および Q^{-1} も巡回行列であるから、[R. 1] 5) により、

(3.22) は、次のようになる。

$$(I-X)\tilde{U}_0 = (1-\rho)G - (1-\rho)Q^{-1}(T(\omega)HT(\bar{\omega}))G, \quad (2.22')$$

さらにここで、(3.7) および (3.23) によれば、

$$(T(\omega)HT(\bar{\omega}))G = 0 \quad (3.24)$$

であるから、結局

$$(I-X)\tilde{U}_0 = (1-\rho)G. \quad (3.25)$$

故に \tilde{U}_0 は、確かに (3.16) の解ではあるが、しかし条件 (3.5) を必ずしも満たすとは限らない。そこでいま、(3.14) で与えたベクトル e を考えると、これが、 $I-X$ の null space に属することは

$$\sum_{s=0}^{N-1} x_s = 1 \quad (3.26)$$

なることより知れるから、

$$U_0 = \tilde{U}_0 + \sigma e \quad (3.27)$$

とおき、定数 σ を、条件 (3.5) から、

$$\sigma = u_{0,0} - \hat{u}_{0,0} = a - \hat{u}_{0,0} \quad (3.28)$$

によって与えれば、この U_0 が、(3.5) を満足するような、(3.16) の解であることが保障される。

かくして、残るところは、行列 Q の逆転であるが、(3.17) および (3.18) により、

$$Q = T(\omega)[H+I-D^{(1)}]T(\bar{\omega}), \quad (3.29)$$

$$H+I-D^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\kappa} & & & & \\ & 1-\lambda_1^{(1)} & & & 0 \\ & & 1-\lambda_2^{(1)} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1-\lambda_{N-1}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

であるから、

$$Q^{-1} = T(\omega)[H+I-D^{(1)}]^{-1}T(\bar{\omega}) \quad (3.31)$$

となる。したがって、

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}P, \quad (3.32)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{N-2} & p_{N-1} \\ p_{N-1} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-3} & p_{N-2} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & p_0 & \cdots & p_{N-4} & p_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{N-1} & p_0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

とおくと,

$$p_k = \frac{2\sqrt{\kappa}}{N} \left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa}} + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\bar{\omega}^{kl}}{1-\lambda_l^{(1)}} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1+\kappa \sin^2(l\pi/N)}}{\sin(l\pi/N)} \right] + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sqrt{\kappa}, & k=0 \\ \frac{1}{N} \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\cos(2kl\pi/N)}{\sin(l\pi/N)} \sqrt{1+\kappa \sin^2(l\pi/N)} - \frac{\sqrt{\kappa}}{N} \right], & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$
(3.34)

となる。 $\kappa = (1-\rho)^2/\rho\alpha^2$ および $\alpha = 2\pi/N$ に注意すれば, 以上のことから,

$$U_0 = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{N} PG + \sigma e \quad (3.35)$$

をうる。いま特に, ρ を 1 に近づけた場合の極限を考えてみると,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} U_0 = \frac{\pi}{N} (\lim_{\rho \uparrow 1} P) G + \sigma e, \quad (3.36)$$

ここに, $\lim_{\rho \uparrow 1} P$ は,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} p_k = \frac{1}{N} \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\cos(2kl\pi/N)}{\sin(l\pi/N)} \right], \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

を要素とする巡回行列となる。

そこで改めて, $\lim_{\rho \uparrow 1} p_k$ を p_k , $\lim_{\rho \uparrow 1} P$ を P , また, $\lim_{\rho \uparrow 1} U_0$ を U_0 とそれぞれ書き表わすことにし, そのときの σ を (3.13) で与えることにすれば, (3.9) をうる。

((直接法)) 結果は, $u_{0,0} = a$ が既知ゆえ,

$$U_0^* = \langle u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,N-1} \rangle \quad (3.38)$$

とおくと,

$$U_0^* = S_*^{-1} B^* \quad (3.39)$$

となる。ここに,

$$B^* = \langle b_1^*, b_2^*, \dots, b_{N-1}^* \rangle, \quad (3.40)$$

$$b_1^* = b_1 - a; \quad b_k^* = b_k, \quad k=2, \dots, N-2; \quad b_{N-1}^* = b_{N-1} - a, \quad (3.41)$$

$$b_k = \frac{1-\rho}{\kappa} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_l g_l - (1+2\kappa)g_k + \kappa(g_{k-1} + g_{k+1}) \right],$$

$$N=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.42)$$

であり, また S_* は, $N-1$ 次の行列で,

$$S_*^{-1} = -\frac{1}{N} (\zeta_{ij}), \quad (3.43)$$

$$S_{ij} = \begin{cases} i(N-j), & i \leq j \\ j(N-i), & i > j \end{cases} \quad (3.44)$$

と与えられる。

証) いま,

$$U_i - U_{i+1} = d_i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

とおく。近似境界条件 (3.4) から,

$$d_0 = (1-\rho)G \quad (3.46)$$

を得る。さて近似解 U_i は, (3.8) によって与えられるから,

$$d_i = U_i - U_{i+1} = XU_{i-1} - XU_i = X(U_{i-1} - U_i),$$

すなわち,

$$d_i = Xd_{i-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.47)$$

となり, d_i は, (3.46), (3.47) によって直ちに得られる。ここで, 近似系 (2.8) において, $i=0$ の場合についてみると,

$$U_2 - (2I - \kappa S)U_1 + U_0 = 0 \quad (3.48)$$

ところが, (3.45), (3.47) により,

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_0 - d_0, \\ U_2 &= U_1 - d_1 = (U_0 - d_0) - Xd_0 = U_0 - (I+X)d_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

となるから, これらを (3.48) に代入し, (3.46) を用いれば, U_0 に関する一次方程式,

$$SU_0 = B, \quad (3.50)$$

$$B = \frac{1-\rho}{\kappa} (X - I + \kappa S)G \quad (3.51)$$

を得る。(2.16) によれば, S が非正則なることを知る。よって, 方程式 (3.50) は, 直接, 行列 S の逆転によって解くことはできない。いま (3.50), (3.51) をくわしく書くと,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ \vdots \\ u_{0,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$b_k \rightarrow (3.42)$$

となる。(3.50') をみれば分ることだが, この方程式が有意であるためには, 少なくとも,

$$\sum_{k=0}^{N-1} b_k = 0 \quad (3.52)$$

が成立すべきであるが, それは条件 (3.7) により保証されている。ところで, 条件 (3.5) によって $u_{0,0} = a$ が既知であるから, (3.50') の rank は, 高々 $N-1$ (実は $N-1$ である) となり, 方程式としては, 次のようになる:

$$S_* U_0^* = B^*, \quad (3.53)$$

ここに, S_* は $N-1$ 次の tri-diagonal 行列で,

$$S_* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

なるもの, U_0^* は (3.38) で, B^* は (3.40), (3.41) で与えたものである。 S_* が正則であることは,

$$\det S_* = (-1)^{N-1} N \quad (3.55)$$

なること (\rightarrow [R. 6]) より明らかである。故に解 U_0^* が, (3.39) で与えられ, また, S_*^{-1} が (3.43), (3.44) で与えられることも容易に証明できる。

なお, ついでながら, 方程式 (3.16) もこのようにして解き得るし, 逆にまた, 方程式 (3.50) を先述した間接法によって解くこともできる。

§ 3.4 Laplace 方程式に対する Robin 問題

[問題]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (K), \quad (4.1)$$

$$u - a \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \quad (C_0), \quad a > 0 \quad (4.2)$$

[mesh の構成]

§ 3.1 の場合と同一

[近似差分方程式系の構成]

方程式 (4.1) に対する近似系は, § 3.2 のものと同一。境界条件 (4.2) は,

$$u_{0,j} - \frac{a}{1-\rho} (u_{0,j} - u_{1,j}) = g_j, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.3)$$

$g_j \equiv g(\theta_j)$, で近似する。

この場合も, $u_0(\theta) \equiv u(1, \theta)$ が決まれば, すなわち U_0 を決定すれば, (4.1), (4.2) の解が存在する限り, 近似解は,

$$U_i = X U_{i-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

で与えられる。これを用いて, (4.3) のベクトル表現をとれば,

$$(bI + X) U_0 = \frac{1-\rho}{a} G, \quad (4.5)$$

$$b = \frac{1-\rho}{a} - 1 \quad (4.6)$$

となる。ここで、

$$T(\bar{\omega})(bI+X)T(\omega) = bI + D^{(1)} = \begin{pmatrix} b+\lambda_0^{(1)} & & & & \\ & b+\lambda_1^{(1)} & & & \\ & & b+\lambda_2^{(1)} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & b+\lambda_{N-1}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

であるから、

$$b+\lambda_p^{(1)} \neq 0, \quad p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

なるように、 ρ および α を与え得れば、

$$U_0 = \frac{1-\rho}{a} (bI+X)^{-1} G_0 \quad (4.9)$$

このとき、

$$(bI+X)^{-1} = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{N-3} & t_{N-2} \\ t_{N-2} & t_{N-1} & t_0 & \dots & t_{N-4} & t_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_{N-1} & t_0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \bar{\omega}^{kl} / (b+\lambda_l^{(1)}) \\ &= \frac{\pi\sqrt{\rho}}{N^2(1-\rho)} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\cos(2kl\pi/N)}{(\pi\sqrt{\rho}/Na) - \{\sqrt{1+\kappa} \sin(l\pi/N) - \sqrt{\kappa} \sin(l\pi/N)\} \sin(l\pi/N)}, \\ & \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。

§ 3.5 Laplace 方程式に対する混合条件問題

[問題]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (K), \quad (5.1)$$

$$u = g^{(1)}(\theta) \quad (C_0^{(1)}), \quad (5.2)$$

$$\partial u / \partial r = g^{(2)}(\theta) \quad (C_0^{(2)}), \quad (5.3)$$

$$C_0^{(1)} + C_0^{(2)} = C_0 \quad (5.4)$$

[mesh の構成]

$$\begin{aligned}
 MU_0 &= ((B_1 + B_2) - B_2 X(I - B_1))U_0 \\
 &= (I + B_2 X)B_1 U_0 + B_2(I - X)U_0 \\
 &= (I + B_2 X)G^{(1)} + (1 - \rho)G^{(2)},
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$G = (I + B_2 X)G^{(1)} + (1 - \rho)G^{(2)} \quad (5.14)$$

とすると,

$$MU_0 = G \quad (5.15)$$

を得る。故に、もし M が正則であれば,

$$U_0 = M^{-1}G \quad (5.16)$$

により所要の U_0 を求めることができる。 M は、明らかに一つの実対称行列であって、いま

$$b_j^{(2)} \equiv \beta_j, \quad \beta_j \beta_k \equiv \beta_{j,k}, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.17)$$

とおけば,

$$M = \begin{pmatrix}
 (1 - \beta_{0,0}x_0) & -\beta_{0,1}x_1 & -\beta_{0,2}x_2 & \dots & -\beta_{0,N-1}x_{N-1} \\
 -\beta_{1,0}x_{N-1} & (1 - \beta_{1,1}x_0) & -\beta_{1,2}x_1 & \dots & -\beta_{1,N-1}x_{N-2} \\
 -\beta_{2,0}x_{N-2} & -\beta_{2,1}x_{N-1} & (1 - \beta_{2,2}x_0) & \dots & -\beta_{2,N-1}x_{N-3} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -\beta_{N-1,0}x_1 & -\beta_{N-1,1}x_2 & -\beta_{N-1,2}x_3 & \dots & (1 - \beta_{N-1,N-1}x_0)
 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

となる。ここで,

$$\sqrt{\kappa + \kappa^2 \sin^2 \frac{k\pi}{N}} = \sqrt{\kappa} + \sin \frac{k\pi}{N} - \varepsilon_k(\kappa) \quad (5.19)$$

とおくと,

$$\varepsilon_k(\kappa) = 2\kappa \left(\sin \frac{k\pi}{N} \right) \left/ \left(1 + \sqrt{\kappa} \sin \frac{k\pi}{N} + \sqrt{1 + \kappa \sin^2 \frac{k\pi}{N}} \right) \right. \quad (5.20)$$

ゆえ,

$$\begin{aligned}
 \lambda_k^{(1)} &= 1 - 2\sqrt{\kappa} \sin \frac{k\pi}{N} + 2\varepsilon_k(\kappa) \cdot \sin \frac{k\pi}{N}, \\
 &k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 E_s(\kappa) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k(\kappa) \cdot \sin \frac{k\pi}{N} \cos \frac{2sk\pi}{N}, \\
 &s = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \quad (5.22)$$

とおけば,

$$x_s = \begin{cases} 1 - \frac{2\sqrt{\kappa}}{N} \cot \frac{\pi}{2N} + E_0(\kappa), & s=0 \\ \frac{\sqrt{\kappa}}{N} \left(\sin \frac{\pi}{N} \right) \left/ \left(\sin \frac{(2s-1)\pi}{2N} \sin \frac{(2s+1)\pi}{2N} \right) \right. + E_s(\kappa) & s=1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.23)$$

となる。さてこれまでは、 $\kappa > 0$ は任意でよかったが、ここでは、 M の正則性を保つため、少し修正する。すなわち、 N は一応固定しておき、 ρ を 1 に十分近くとり（したがって κ は十分小）、

$$x_s \geq 0, \quad s=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.42)$$

ならしめるようにする。それは、(5.20), (5.22), (5.23) によって可能である。

このとき、Lévy-Hadamard-Geschgorin の定理(*)により

$$|\det M| \geq \prod_{i=0}^{N-1} \left[|1 - \beta_{ii} x_0| - \sum_{j \neq i} |\beta_{ij} x_{N-i+j}| \right],$$

ただし、 $x_{N+k} = x_k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, また (5.24) と、 $B_1 \neq 0$ なること、および (3.26) を用いると、上式における右辺は、

$$> \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 - \sum_{j=0}^{N-1} x_j \right) = 0,$$

すなわち、

$$\det M \neq 0 \quad (5.25)$$

が成り立つ。 M が正則であるから、その逆転は可能であるが、それを解析的に与えるのは困難である。ここでは、反復法を使って、 U_0 を求めることを考えてみる。(5.13) と (5.15) から、

$$U_0 = (B_2 X B_2) U_0 + G \quad (5.26)$$

をうる。これを利用して、iteration

$$U_0^{(n)} = (B_2 X B_2) U_0^{(n-1)} + G, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

を考える。いま、(5.15) の解 U_0 に対して、

$$E^{(n)} = U_0 - U_0^{(n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

とおけば、(5.26), (5.27) から、帰納的に、

$$E^{(n)} = (B_2 X B_2)^n E^{(0)} \quad (5.29)$$

をうる。よって、この iteration が U_0 へ収束するためには、 $B_2 X B_2$ の固有値 η (この行列は、実対称だから、 η は必ず実数となる) のすべてが、

$$|\eta| < 1 \quad (5.30)$$

を満足すればよい。上述したような ρ , したがって κ のとり方を行なうとき、或る十分小さなる $\kappa_0 > 0$ が存在して、 $0 < \kappa \leq \kappa_0$ なる場合には、任意の η は、ガウス平面において、 x_0 を中心とし、半径 r が

$$r = \max_i \sum_{j \neq i} |\beta_{ij} x_{N-t+j}| \quad (5.31)$$

なる円の内部に含まれることが, Lévy-Hadamard-Geschgorin の定理で保証される。ところで, $B_1 \neq 0$ および (5.24) により,

$$r = \max_i \sum_{j \neq i} \beta_{ij} x_{N-t+j} < \max_i \sum_{j \neq i} x_{N-t+j} = 1 - x_0 \quad (5.32)$$

ゆえ,

$$|\eta| \leq |x_0| + r = x_0 + r < 1 \quad (5.33)$$

となり, (5.30) が満たされた。

(*)E. Bodewig, Matrix Calculus, Int. Pub., 1956, 1959

§ 3.6 Laplace 方程式に対する各種境界値問題の計算例

当所の計数型電子計算機データトロン 205 により, 標題の問題に対する一例を, 計算してみた。解析解は, いずれも

$$u = r \cos \theta \quad (6.1)$$

なるもので, mesh の構成は,

$$\rho = 0.95, \alpha = \pi/20 \quad (6.2)$$

とし, $i=19$ までを求めてみたが, 以下はその中のいくつかのデータを示すにとどめる:

[Dirichlet 問題] $u = \cos \theta (C_0)$

$i \backslash j$	0	10	20	30
0	1.0000000	0.00000031	-0.99999999	-0.00000094
1	0.94875053	-0.00000035	-0.94875059	-0.00000033
10	0.59090862	-0.00000410	-0.59090896	0.00000351
19	0.36803457	-0.00000503	-0.36803498	0.00000452

[Neumann 問題] $\partial u / \partial r = \cos \theta (C_0), u_{0,0} = 1$

$i \backslash j$	0	10	20	30
0	1.0000000	-0.00100078	-1.0020996	-0.00109922
1	0.94869677	-0.00100391	-0.95079641	-0.00109607
10	0.59047947	-0.00102501	-0.59257904	-0.00107475
19	0.36737152	-0.00103671	-0.36947099	-0.00106285

[Robin 問題] $u - 0.07 \frac{\partial u}{\partial r} = 0.93 \cos \theta (C_0)$

$i \backslash j$	0	10	20	30
0	1.0019667	0.00004719	-1.0019661	-0.00004707
1	0.95061632	0.00004402	-0.95061604	-0.00004440
10	0.59207075	0.00002344	-0.59207103	-0.00002402
19	0.36875847	0.00001209	-0.36875883	-0.00001259

[Mixed Conditions 問題] $u = \cos \theta$ ($C_0^{(1)}$), $\partial u / \partial r = \cos \theta$ ($C_0^{(2)}$)

$C_0^{(2)}$: $j=0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 14, 15, 18, 22, 23, 24, 28, 29, 33, 34, 37$

$i \backslash j$	0	10	20	30
0	0.99245780	0.00002321	-0.99999999	-0.00000094
1	0.94248446	0.00006483	-0.94842317	0.00009913
5	0.76432504	-0.00012375	-0.76759851	-0.00001434
9	0.61940086	-0.00031697	-0.62177006	-0.00015399

(tolerance = 10^{-4})

境界誤差の収縮は、ベクトルのノルムの意味で保証できる。それは、各問題について、全データを用いて計算して確かめられた。ただ、 X 自身の精度を上げることも重要な問題点であることを指摘しておく。

4. 結 論

1) 与えられた境界値問題に対して、近似方程式系を構成し、それに境界収縮法を適用するには、まず、安定な transformer $A_i^{(k)}$ を決定すること、次にこれに応じて、収縮位数 (k) 個の既知ベクトル, U_0, U_1, \dots, U_{k-1} , を与えることである。

前者については、近似系それ自体の代数的な変形から直接得られる場合と、そうでない場合とがある。常に、安定な収縮過程を、その代数的変形のみによって誘導しうるような近似系を、もとの問題に対して構成できるか否かは、断じ難い。Laplace 方程式にみられたように、もとの問題に立ちかえて、安定な収縮過程の存在を確認した上で、それを近似系へ持ち込んで、その具体的な形を決定するという行き方もあるわけで、安定な収縮過程の構成には、与えられた問題とそれに対する近似系とを照合する必要がある。

後者に関しては、与えられた条件そのままで充足される場合と、必ずしもそうでない場合とが考えられるが、特にこのあとの場合には、安定な収縮過程が得られておれば、評価可能な範囲での適当な近似を用いて、収縮位数に達するまでの条件補充を行なわねばならない。問題を近似する以上、その近似度は、できるだけ上げたいのであるが、上述した事情もあって、必ずしも、その要求は満たされないであろう。

2) 最初に述べたように、対象領域 Ω としては、単位円域 K に位相的に同値であればよい。したがって Ω は、必ずしも、平面上の領域と限らなくてもよい。たとえば、oriented な二次曲面上で与えられた問題として、次のようなものは、いずれも境界収縮法の適用が可能かもしれない。以下、 L は偏微分作用素、 Γ は境界作用素とする：

(ex. 1), (ex. 2) は、変換: $t' = 1 - \frac{t}{a}$ により、(ex. 3) では、変換: $t' = \frac{1}{1+t}$ によって、

それぞれ単位円域 K へ移る。これらは巡回性を有する初期値問題とも考えられる。

(ex. 1) cone

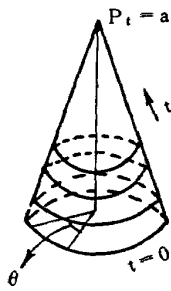


FIG. 2

$$\begin{cases} Lu=f(t, \theta), \\ (\Gamma u)(0, \theta)=g(\theta) \end{cases}$$

(ex. 2) semi-sphere

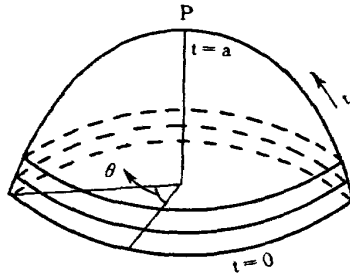


FIG. 3

$$\begin{cases} Lu=f(t, \theta), \\ (\Gamma u)(0, \theta)=g(\theta) \end{cases}$$

(ex. 3) infinite cylinder

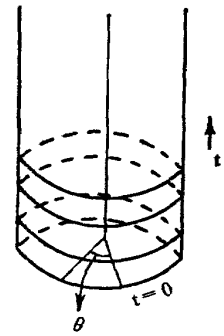


FIG. 4

$$\begin{cases} Lu=f(t, \theta), \\ (\Gamma u)(0, \theta)=g(\theta), \\ u(\infty, \theta)=C \end{cases}$$

3) 原領域のまま、境界相似的に収縮する方法が考えられるが、その場合には、これまで考えてきた半径 r_i は、一般に、動径 $r_i(\theta)$ となるから、近似系は、係数として、 $\beta_{i,s}=\beta_{i,s}(r_i(\theta), \theta_j)$ を有するものとなる。これは今後に残された問題の中でもきわめて複雑なものの一つである。一方、特に r_i が θ によらない簡単な一例として、環状域 $\Omega: a \leq r \leq b$ において、

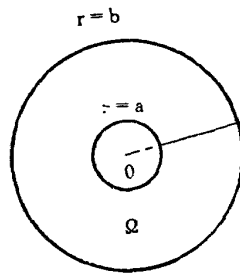


FIG. 5

$$\begin{cases} Lu=f(t, \theta), & a < r < b, \\ (\Gamma_1 u)(a, \theta)=g_1(\theta), \\ (\Gamma_2 u)(b, \theta)=g_2(\theta), \end{cases}$$

L は偏微分作用素、 Γ_1, Γ_2 は境界作用素、なる境界値問題を考えてみるのは興味がある。これは、たとえば (ex. 3) において、第三条件として、 $u(\infty, \theta)=h(\theta)$ なる場合などを変換したときに相当する。両境界で条件が与えられているから、反復法によって解くのが普通であるが、境界収縮法適用の可能性はどうであろうか。 $a=0$ とすれば、これまで論じてきた単位円域の内部問題とみられ、 $a>0, b=+\infty$ とすれば、外部境界値問題となるから、領域的には、かなり一般性をもつ。

本研究に対し、筆者等に貴重な助言を与えられた当所計測工務部計算研究室 三好技官ならびに計算を手伝って下さった高島久美子、岩井美智子両氏に感謝の意を表す。

5. 補 遺

[R. 1] circulant matrix の諸性質

一般の N 次の巡回行列、

$$C = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{N-2} & \xi_{N-1} \\ \xi_{N-1} & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{N-3} & \xi_{N-2} \\ \xi_{N-2} & \xi_{N-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{N-4} & \xi_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_{N-1} & \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

について、いくつかの基本的な性質を列挙する：

1) base matrix W による表現

N 次の巡回行列のうち、特に、 $\xi_1=1, \xi_s=0, s=0, 2, 3, \dots, N-1$, なるもの、すなわち、

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

なる行列を考えると、 C は次のように表わせる。

$$C = \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s W^s \quad (3)$$

2) 対角化と行列式

N 次の対称かつユニタリな行列、

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ただし、 $\omega = e^{2i\pi/N} (i = \sqrt{-1})$, を考える。この行列式は、一つの Vandermondean であり、

$$\det T(\omega) = (-1)^{N(N-1)/2} N^{-N/2} \prod_{s < t} (\omega^t - \omega^s) \neq 0 \quad (5)$$

と与えられる。また、

$$T(\omega)^{-1} = \overline{T(\omega)} = T(\bar{\omega}) \quad (6)$$

が成立する。任意の N 次巡回行列 C は、この $T(\omega)$ によって対角化できて、

N 次の巡回行列の全体からなる集合は、可換環をなす。行列積に関する交換律は、(3) によって明白である。

[R. 2] § 2.2 における方程式 (2.23) の直接的な誘導

(3) により、巡回行列 B_i は、

$$B_i = \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{i,s} W^s \quad (16)$$

と表わせる。いま、

$$\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}^{(0)} \equiv \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1} \rangle, \quad (17)$$

$$\mathbf{x}^{(s)} \equiv W^s \mathbf{x}^{(0)}, \quad s=0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

とおくと、 W の性質から、

$$\mathbf{x}^{(s)} = \langle x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{s+N-1} \rangle \quad (19)$$

なることが容易にわかる。ただし、 $x_{N+s} = x_s$, $s=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ とする。さて方程式 (2.17) に、(16), (19) をあてはめると、

$$\sum_{s=0}^{N-1} q_s \mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$q_s = \sum_{i=0}^k \lambda^i \beta_{i,s}, \quad s=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (21)$$

をうる。(20) は、次のような連立一次系である。

$$\sum_{s=0}^{N-1} q_s x_{s+i} = 0, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (20')$$

さらに、れこを、ベクトルで表現すると、

$$Q \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (20'')$$

となる。ここに Q は、 N 次の巡回行列、

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_{N-1} \\ q_{N-1} & q_0 & q_1 & \cdots & q_{N-2} \\ q_{N-2} & q_{N-1} & q_0 & \cdots & q_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

である。 $\mathbf{x}^{(0)} \neq \mathbf{0}$ でなければならないから、(20'') は

$$\det Q = 0 \quad (23)$$

の成立を必要とする。(8), (21) によれば、これは

$$\sum_{i=0}^k \lambda^i \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{i,s} \omega^{ps} = 0 \quad (24)$$

が、少なくとも一つの p について成り立つことを意味する。

[R. 3] § 2.2 における方程式 (2.1) の一反復解法

$\beta_{k,l} \neq 0$ のとき, (2.1) を変形して得られる式を用いて, iteration,

$$u_{i+k,j+l}^{(n)} = -\frac{1}{\beta_{k,l}} \sum_{s=l} \beta_{k,s} u_{i+k,j+s}^{(n-1)} - \frac{1}{\beta_{k,l}} \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{N-1} \beta_{t,s} u_{i+t,j+s} + \frac{1}{\beta_{k,l}} f_{ij},$$

$$j=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (25)$$

を行ない, U_{i+k} を逐次求める方法が, [1] で与えられ, その安定性と収束性の条件は, 方程式

$$\sum_{s=0}^{N-1} \beta_{k,l-s} z^{N-1-s} = 0, \quad (26)$$

ただし, $\beta_{k,N+s} = \beta_{k,s}$, $s=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, の根 Z が, 0 ならざる限り, すべて相異なり, しかも

$$|z| < 1 \quad (27)$$

なることが, $\beta_{k,l} \neq 0$ なる限り成立することであると示された。これは, 条件 (2.28) に対して, 一般に十分であるが, さらに, § 2.2 の最後に述べた十分条件よりも厳しい。しかも, 反復的手法を, 収縮過程の各段階で用いるのは, あまり好ましいことではない。もともと, 行列 B_k の逆転は, 本論で与えたごとく, きわめて簡単である。

[R. 4] α, β が実数なるとき, 二次方程式

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \quad (28)$$

の根が, ガラス平面において, 原点を中心とする単位円の内部, もしくは境界上に存在するための必要十分な条件は,

$$|\alpha| - 1 \leq \beta \leq \alpha^2/4 \leq 1, \quad (29)$$

または,

$$\alpha^2/4 < \beta \leq 1 \quad (30)$$

のいずれかが成立することである。(29) は, 実根の場合に, (30) は, 実数でない根の場合に相当する。

[R. 5] Poisson 積分の巡回性

§ 3.2, (2.1), (2.2) に対する解析解が,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \varphi) + r^2} u_0(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} u_0(\varphi) d\varphi \quad (31)$$

で与えられることは周知である。故に, 論じられた mesh の構成の仕方では, C_{i-1} 上の解 $u(r_{i-1}, \theta)$ が既知であるとすれば, 一般に

$$u(r_i, \theta) \equiv u_i(\theta), \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

とおくとき, 解の境界依存性が, r に関して一様であることから, C_i 上では

$$\begin{aligned}
u_i(\theta_j) \equiv u_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_{i-1}^2 - r_i^2}{r_{i-1}^2 - 2r_{i-1}r_i \cos(\theta_j - \varphi) + r_i^2} u_{i-1}(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_1^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta_j - \varphi) + \rho^2} u_{i-1}(\varphi) d\varphi
\end{aligned} \tag{33}$$

となる。すなわち、 r -independent な積分作用素、

$$J_j \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta_j - \varphi) + \rho^2} (*) d\varphi, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{34}$$

を考えれば、

$$u_{ij} = J_j u_{i-1} \tag{35}$$

となること、つまり、

$$U_i = J U_{i-1} \equiv \langle J_0 u_{i-1}, J_1 u_{i-1}, \dots, J_{N-1} u_{i-1} \rangle \tag{36}$$

であることが分る。さて、(34) で定義した J_j の巡回性、

$$J_{N+j} = J_j, \quad j=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{37}$$

と、§ 3.2, (2.6) の j に関する巡回性とを対応させ、上述した事情を近似解に反映させると、ある適当な N 次の巡回行列 X によって、

$$U_i = X U_{i-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \tag{38}$$

となるべきことを知る。ここに、 X は、 r によらない行列であり、まさに、 J の近似作用素とみることが出来る。

[R. 6] symmetric tri-diagonal matrix の行列式

一般に、 n 次の symmetric かつ tri-diagonal な行列

$$S_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & & & \\ 1 & x & 1 & & 0 \\ & 1 & x & 1 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & 1 \\ 0 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & x \end{pmatrix} \tag{39}$$

に対して、

$$\det S_n(x) = \Delta_n(x) \tag{40}$$

とおけば、定差方程式

$$\Delta_n(x) = x \Delta_{n-1}(x) - \Delta_{n-2}(x) \tag{41}$$

をうる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0(x) &\equiv 1 \text{ (定義)}, \quad \Delta_1(x) = x, \quad \Delta_2(x) = x^2 - 1, \\ \Delta_3(x) &= x^3 - 2x, \quad \Delta_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad \dots \end{aligned} \right\} \tag{42}$$

一般に,

$$\Delta_n(x) = \sum_{k=1}^{\sigma_n} \frac{(-1)^{k+1} \cdot (n+1-k)!}{(n+2-2k)! (k-1)!} x^{n+2-2k}, \quad (43)$$

$$\sigma_n = 1 + [n/2] \quad (44)$$

となるが, 特に $x = -2$ の場合, 帰納法によって,

$$\Delta_n(-2) = (-1)^n (1+n) \quad (45)$$

をうる。

文 献

- [1] H. W. Milnes & R. B. Potts, "Numerical Solution of Partial Differential Equations by Boundary Contraction", Quart. Appl. Math., Vol XVIII, April 1960.
- [2] T. S. Chow & H. W. Milnes, "Numerical Solution of the Neumann and Mixed Boundary Value Problems by Boundary Contraction", J. A. C. M., Vol 8, No. 3, July 1961.
- [3] T. S. Chow & H. W. Milnes, "Boundary Contraction Solution of Laplace's Differential Equation II," J. A. C. M., 7, 1960.
- [4] T. S. Chow & H. W. Milnes, "Numerical Solution of a Class of Hyperbolic-Parabolic Partial Differential Equations by Boundary Contraction," Jour. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 10, No. 1, March 1962.
- [5] T. S. Chow & H. W. Milnes, "Boundary Contraction Method for Numerical Solution of Partial Differential Equations: Convergence and Boundary Conditions," Quart. Appl. Math., Vol XX, No. 3, oct. 1962.
- [6] A. N. Lowan, "The Operator Approach to Problems of Stability and Convergence," The Scripta Mathematica Studies, No. 8, 1957.
- [7] A. D. Booth, "Numerical Methods" 1955.
- [8] 遠山 啓, "行列論" 共立.
- [9] 藤原松三郎, "行列および行列式" 岩波.
- [10] 犬井鉄郎, "偏微分方程式論".
- [11] G. E. Forsythe & P. C. Rosenbloom, "Numerical Analysis and Partial Differential Equations," Surveys in Applied Mathematics V.
- [12] 犬井鉄郎, "境界値問題の差分法による近似解法", 数学概論, 寺沢編, 岩沢.

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|---|----------|----------------------------|
| TR- 1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験
Preliminary Investigation of N.A.L. Transonic
Wind-Tunnel Test-Section | 1960年2月 | 平木一, 石井孝雄
大島信彦 |
| TR- 2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機
I. 模型送風機による性能試験
22.5 W Main Blower for N.A.L. Transonic
Wind Tunnel
I. Performance Test of the Model Blower | 1960年5月 | 山内正男, 松木正勝
塩入淳平, 富永守之 |
| TR- 3 | 風洞用角度計の試作実験
An Experiment on Angle Mesuring Instru-
ments of Airplane Models in Wind Tunnel Test | 1960年8月 | 小橋安次郎, 長洲秀夫
高島一明, 波木井 潔 |
| TR- 4 | 回転円板の強度
Strength of Rotating Discs | 1960年9月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR- 5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音速
フラッタ試験設備の計画と整備試験
Design and Development of N.A.L. 60 cm×60
cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for
for Flutter Testing | 1960年12月 | 中井暎一, 橋瓜 宏
中村泰治 |
| TR- 6 | 高温歪ゲージの温度特性
Tumperature Charcteristics of High Tempera-
ture Strain Gage | 1960年12月 | 竹中幸彦 |
| TR- 7 | 遷音速風洞の測定部
On the Transonic Test Section | 1961年1月 | 村崎寿満 |
| TR- 8 | 繰返し荷重試験装置の予備試験
Preliminary Study for Development of Repeati-
ed Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft
Structures | 1961年3月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR- 9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance Theory of
Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory— | 1961年3月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades | 1961年3月 | 松木正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild Steel | 1961年4月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-12 | 薄肉開断面梁の自由振動について
On the Natural Vibration of Thin-Walled Bea-
ms of Open Cross Section | 1961年5月 | 川井忠彦, 塙 武敏 |
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての実験的研究
Experimental Results of the Interaction between
Shock Wave and Turbulent Boundary Layer | 1961年7月 | 須郷道也, 伝田幸雄 |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層
On Compressible Boundary Layer in Magneto-
dynamics | 1961年7月 | 須郷道也, 小沢五郎 |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・較正
Miniature Pressure Pickups for Measuring the
Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic
Flow | 1961年8月 | 石井孝雄, 柳沢三憲 |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法
による数値解法
On the Difference Method Solutions of the
Mixed Boundary Value Problems of Parabolic
Partial Differential Equations | 1961年11月 | 樋口一雄, 三好 甫 |

<p>NAL TR-50 航空宇宙技術研究所 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法</p> <p>1963年9月 34ページ</p> <p>境界収縮法の紹介をし、Milnes, Potts による線型近似系一般に対する収縮過程の安定性の条件を完全な証明を付して与え、ある種の反復的手法を除去した。また Laplace 方程式の各種境界値問題の差分方程式系の近似度を上げた収縮過程を導き Robin 問題をも論じた。最後にデータロン 205 電子計算機による計算例を挙げた。</p>	<p>I. 樋口一雄 能美力</p> <p>II. NAL TR-50</p> <p>III. 518.6 517.949</p>	<p>NAL TR-50 航空宇宙技術研究所 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法</p> <p>1963年9月 34ページ</p> <p>境界収縮法の紹介をし、Milnes, Potts による線型近似系一般に対する収縮過程の安定性の条件を完全な証明を付して与え、ある種の反復的手法を除去した。また Laplace 方程式の各種境界値問題の差分方程式系の近似度を上げた収縮過程を導き Robin 問題をも論じた。最後にデータロン 205 電子計算機による計算例を挙げた。</p>	<p>I. 樋口一雄 能美力</p> <p>II. NAL TR-50</p> <p>III. 518.6 517.949</p>
<p>NAL TR-50 航空宇宙技術研究所 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法</p> <p>1963年9月 34ページ</p> <p>境界収縮法の紹介をし、Milnes, Potts による線型近似系一般に対する収縮過程の安定性の条件を完全な証明を付して与え、ある種の反復的手法を除去した。また Laplace 方程式の各種境界値問題の差分方程式系の近似度を上げた収縮過程を導き Robin 問題をも論じた。最後にデータロン 205 電子計算機による計算例を挙げた。</p>	<p>I. 樋口一雄 能美力</p> <p>II. NAL TR-50</p> <p>III. 518.6 517.949</p>	<p>NAL TR-50 航空宇宙技術研究所 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法</p> <p>1963年9月 34ページ</p> <p>境界収縮法の紹介をし、Milnes, Potts による線型近似系一般に対する収縮過程の安定性の条件を完全な証明を付して与え、ある種の反復的手法を除去した。また Laplace 方程式の各種境界値問題の差分方程式系の近似度を上げた収縮過程を導き Robin 問題をも論じた。最後にデータロン 205 電子計算機による計算例を挙げた。</p>	<p>I. 樋口一雄 能美力</p> <p>II. NAL TR-50</p> <p>III. 518.6 517.949</p>

航空宇宙技術研究所報告 50 号

昭和 38 年 9 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1,880
電話 武蔵野 (0422) (3) 5171 (代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町 1 の 53
