

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-54

偏微分方程式の混合境界値問題の  
差分法による数値解法

三 好 甫

1963 年 10 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題の モンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differential Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン 要素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N.A.L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の 計画と構造 Design and Construction of the National Aeronautical Laboratory 2m×2m Transonic Wind Tunnel	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部祐二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao Hosokawa
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962年11月	川井忠彦, 堀 武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定とその 微小振り振動について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962年11月	川井忠彦, 林 洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962年11月	川井忠彦, 江川幸一
TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Reported Load Testing Rigs for Full Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田完四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田 晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田 勇, 松崎利一
TR-37T	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu Wada
TR-38	鑄鉄のような脆性材料からなる円板の 回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄

# 偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法\*

三 好 甫\*\*

## Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems

By Hajime MRYOSHI

The purpose of this paper is to give the convergence criterion of 2 or 3-level difference schemes for the mixed boundary value problems on the basis of the root of an algebraic equation.

The application of this method to some important partial differential equation is given.

### 1. 緒 論

数理物理学において生ずる双曲型または放物型偏微分方程式の混合境界値問題（初期値—境界値問題）において，方程式中に現われる時間変数に関する導関数の階数は1階または2階のものが多い。

したがって，偏微分方程式を差分近似を用いて解く場合，2-level または 3-level の差分近似が特に重要となる。

本報告においては 2-level または 3-level の近似差分方程式の解が原方程式の解に収束するための条件を簡単に求める方法を示す。

偏微分方程式の混合境界値問題を差分近似により解く場合の問題点は前報告 [1] においても指摘したように次の3つに分けて考えられる。

- (1) 差分近似式の構成法
- (2) 差分近似式の解法
- (3) 差分近似により得られた解の原方程式の解への収束性

(1) については [1] において古典的および新しい構成法が示され，同時にそれらをいくつかの問題に適用し，その精度について論ぜられた。

(2) に関しては近似差分式が implicit の場合に関してのみ問題が生ずる。この場合，近似式の解法はなんらかの意味で反復的操作を必要とする。この反復過程の収束性に関して，[1] において

---

\* 昭和38年10月24日受付

\*\* 計測工務部

方程式が定数係数の場合に行列の固有値を求めることにより収束条件が求められた。本報告においては、収束条件を求めることを (3) の議論の応用として述べる。この場合、方程式の線型、非線型性は任意である。[appendix B]

(3) に関しては、[1] において安定性の条件を差分近似式で作る行列の固有値の絶対値の大きさに基づいて求めた。近似差分式の安定性が示されれば、P. D. Lax の同値定理 [2] から近似解の原方程式の解への収束が証明できる。本報告においては、収束性を直接に代数方程式の求根により示すことを試みた。この方法は、差分近似式が 2-level または 3-level の場合には根の範囲を係数から直ちに知ることができるため、収束性の条件をうるのに有利である。

本論に入るに先だって記号の説明をしておく。

$p, q$  はおのおの  $x, t$  に関する 1 階偏導関数、 $r$  は  $x$  の 2 階偏導関数である。また  $f_{pt,j}, f_{qt,j}$  等は  $f$  を  $p$  または  $q$  で偏微分した場合の  $(x_i, t_j)$  点における  $p$  または  $q$  の値の近傍における  $f_p$  または  $f_q$  の値を示す。

$$\nabla_{1t} u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j}}{k}$$

$$\nabla_{2t} u_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

$$\nabla_{3t} u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

$$\nabla_{t^2} u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$\nabla_{1x} u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\nabla_{2x} u_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h}$$

$$\nabla_{3x} u_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h}$$

$$\nabla_{x^2} u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\nabla_{x^4} u_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}$$

## 2. 差分近似解の原方程式の解への収束条件

簡単のため方程式の定義域は  $x, t$  の 2 独立変数の空間内の領域とする。

いま、偏微分方程式の混合境界値問題

$$\begin{aligned}
 Lu &\equiv F(x, t, u, p, q, r, \dots) - f(x, t) = 0 \\
 a < x < b \quad 0 < t \leq T
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^s u &\equiv G_1^s(t, u, p, r, \dots) - \psi_1^s(t) = 0 \\
 x = a \quad 0 < t \leq T \quad s = 1, 2, \dots, s_1 \\
 \Gamma_2^s u &\equiv G_2^s(t, u, p, r, \dots) - \psi_2^s(t) = 0 \\
 x = b \quad 0 < t \leq T \quad s = 1, 2, \dots, s_2
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \varphi_1(x) \\
 u(x, 0) &= \varphi_2(x) \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

に対して定義域に

$$\begin{aligned}
 x_i &= a + ih \quad i = 0, \dots, M \\
 Mh &= b - a \\
 t_j &= jk \quad J = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

によって格子を導入する。格子点  $(x_i, t_j)$  における  $u, f, F$  等の値を  $u_{i,j}, f_{i,j}, F_{i,j}$  等により表わすと (2.1)~(2.2) に対する近似差分境界値問題は原方程式中の微分を差分でおきかえる方法, テイラー展開による方法, 多点近似法, 原方程式を局所的にそれぞれ  $x, t$  に関する2つの常微分方程式に分解し, その一般解または近似一般解を用いて差分近似式を構成する方法等により

$$\begin{aligned}
 l_h u_{i,j} &\equiv \sum_{k=-m_1}^{m_1} \sum_{l=-n_1}^{n_1} a_{k,l} F_{i+k, j+l}(x_{i+k}, t_{j+l}, u_{i+k, j+l}, \nabla_x u_{i+k, j+l}, \nabla_t u_{i+k, j+l}, \dots) - \sum_k \sum_l f_{i+k, j+l} = 0 \\
 a < x < b \quad 0 < t \leq T
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 r_{1h}^s u_j &\equiv \sum_{i=0}^k b_{1i} G_{1i}^s(t_j, u_{i,j}, \nabla_x u_{i,j}, \dots) - \psi_1^s(t_j) = 0 \\
 x = a \quad 0 < t \leq T \quad s = 1, 2, \dots, s_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{2h}^s u_j &\equiv \sum_{i=M-k}^M b_{2i} G_{2i}^s(t_j, u_{i,j}, \nabla_x u_{i,j}, \dots) - \psi_2^s(t_j) = 0 \\
 x = b \quad 0 < t \leq T \quad s = 1, 2, \dots, s_2
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i,0} &= \varphi_1(x_i) \\
 \nabla_t u_{i,0} &= \varphi_2(x_2) \quad a \leq x \leq b \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

と表わされる。

$l_h, r_{1h}, r_{2h}$  は原方程式  $F$ , 境界条件  $G_1, G_2$  の線型, 非線型性に応じてそれぞれ線型または非線型の差分方程式となる。また  $l_h$  が  $t_{j+n_2}$  における  $u$  の値を一個しか含まない時は  $l_h$  は explicit な差分近似式, それ以外の時は  $l_h$  は implicit な差分近似式であるという。

ここで (2.4)~(2.6) の解の原方程式の解への収束性を論ずるためにいくつかの仮定を設ける。

- (1) 方程式の混合境界値問題は properly posed であり, 解は解析的である。
- (2)  $F, G_1, G_2$  の  $x, t, u, p, q, r$  等に関する偏導関数は存在して連続である。
- (3) 初期条件は解析的である。

次に (2.1)~(2.3) の解を  $v$  とし, (2.4)~(2.6) の解を  $u_{i,j}$  とし, この  $u_{i,j}$  から補間して得られる定義域における関数を  $u$  とする。そこで

$$v(x, t) - u(x, t) = \alpha(x, t)$$

により近似解の真の解に対する誤差関数を定義する。もし, すべての格子点  $(i, j)$  において  $\alpha_{i,j}$  が 0 に収束すれば  $v$  の解析性から  $u$  は定義域において  $v$  に収束する [3]。

今,  $t_j$  を固定すると  $v, u, \alpha$  は  $x$  のみの関数となり,  $v_j, u_j$  がフーリエ展開可能であれば  $\alpha_j(x)$  もフーリエ展開可能となり,

$$\alpha_j(x) = \sum_m \beta_m^j e^{i\nu_m x}$$

$$\nu_m(x) = 2\pi m/b - a \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$\alpha_j(x)$  の  $L^2$ -norm は Parseval の等式から

$$\|\alpha_j(x)\| = \sum_m |\beta_m^j|^2 \quad (2.8)$$

となる。

$$v_{i,j} = u_{i,j} + \alpha_{i,j} \quad (2.9)$$

であるから, 先にのべたことにより, すべての格子点  $(x_i, t_j)$  において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \|\alpha_j\| = 0 \quad (2.10)$$

すなわち

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} |\beta_m^j| = 0 \quad m=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, 2 \quad (2.11)$$

を証明すれば (2.4)~(2.6) の解の原方程式の解への収束は証明できたことになる。

ここで近似差分作用素  $l_h$  の偏微分作用素  $L$  に対する打ち切り誤差の格子点  $(x, t_j)$  における値を  $\epsilon_{i,j}$  とし

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \|\epsilon_{i,j}\| = 0 \quad (2.12)$$

なることを要請する。

$$L(v) - l_h(v_{i,j}) = \epsilon_{i,j} \quad (2.13)$$

しかるに  $L(v) = 0, l_h(u_{i,j}) = 0$  なるゆえ (2.13) より

$$l_h(u_{i,j}) - l_h(u_{i,j}) = \epsilon_{i,j} \quad (2.14)$$

となる。

ここで仮定 (2) から平均値の定理を用いて (2.14) を  $\alpha_{i,j}$  について整理すれば, (2.14) は  $F$  の線型, 非線型にかかわらず  $\alpha_{i,j}$  に関する線型差分方程式となり,  $l_h$  が 2-level の場合には

$$\sum_{k_1} C_{i+k_1, j+1} \alpha_{i+k_1, j+1} = \sum_{k_2} C_{i+k_2, j} \alpha_{i+k_2, j} + k^{q_1} \epsilon'_{i,j}$$

$$0 \leq i+k_1, i+k_2 \leq M \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

3-level の場合には

$$\sum_{k_1} C_{i+k_1, j+1} \alpha_{i+k_1, j+1} = \sum_{k_2} C_{i+k_2, j} \alpha_{i+k_2, j} + \sum_{k_3} C_{i+k_3, j-1} \alpha_{i+k_3, j-1} + k^{q_2} \epsilon'_{i,j}$$

$$0 \leq i+k_1, i+k_2, i+k_3 \leq M \quad j=1, 2, \dots \quad (2.16)$$

ここで  $k_1, k_2, k_3$  は正または負の整数値をとり,  $\epsilon'_{i,j}$  は  $k$  と  $h$  がある一定の関係にあるものとして

$$\epsilon_{i,j} = k^r \epsilon'_{i,j}$$

とおいたものであり,  $q_1, q_2$  は  $\tau + \tau'_i \quad i=1, 2$  なる有理数である。

(2.15), (2.16) に (2.7) を代入すればそれぞれ

$$\sum_{k_1} C_{i+k_1, j+1} \sum_m \beta_m^{j+1} e^{i\nu_m(x_i + \Delta k_1 h)} = \sum_{k_2} C_{i+k_2, j} \sum_m \beta_m^j e^{i\nu_m(x_i + \Delta k_2 h)} + \sum k^{q_1} \delta_m^j e^{i\nu_m x_i} \quad (2.17)$$

$$\sum_{k_1} C_{i+k_1, j+1} \sum_m \beta_m^{j+1} e^{i\nu_m(x_i + \Delta k_1 h)} = \sum_{k_2} C_{j+k_2, j} \sum_m \beta_m^j e^{i\nu_m(x_i + \Delta k_2 h)}$$

$$+ \sum_{k_3} C_{i+k_3, j-1} \sum_m \beta_m^{j-1} e^{i\nu_m(x_i + \Delta k_3 h)} + \sum_m k^{q_2} \delta_m^j e^{i\nu_m x_i} \quad (2.18)$$

$$\epsilon'_{j} = \sum \delta_m^j e^{i\nu_m x_i}$$

(2.17), (2.18) において  $e^{i\nu_m x_i}$  を辺々消去すれば, すべての  $m$  に対してそれぞれ

$$A_{j+1} \beta_m^{j+1} = A_j \beta_m^j + k^{q_1} \delta_m^j$$

$$A_{j+1} \beta_m^{j+1} = A_j \beta_m^j + A_{j-1} \beta_m^{j-1} + k^{q_2} \delta_m^j$$

が導かれ, これから  $\beta_m$  に関する差分方程式

$$\beta_m^{j+1} + B_j \beta_m^j = k^{q_1} \delta_m^j \quad (2.19)$$

$$\beta_m^{j+1} - B_j \beta_m^j + B_{j-1} \beta_m^{j-1} = k^{q_2} \delta_m^j \quad (2.20)$$

が導かれる。

$B_j, B_{j-1}$  は差分近似式の型によって実定数, 複素定数, 実変数, 複素変数となる。複素定数, 複素変数が生ずるのは方程式中の低位の項があること, 方程式の係数が変数係数であること, 方程式が非線型であることによるが, いずれの場合も  $B_j$ , または  $B_{j-1}$  は  $c + ihD, c + ikD$  の如き形をしている。

そこで近似差分方程式 (2.4) ~ (2.6) の解が境界条件の近似に誤差がないと考えた場合に,  $h$  と  $k$  をある一定の関係のもとに  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  としたとき (2.1) ~ (2.3) の解に収束するための条件を次の定理により示す。(証明は Appendix A に示す。)

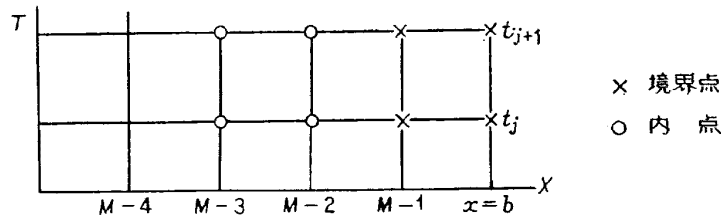
### 定理 1

(2.1)~(2.3) に対する 2-level または 3-level の近似差分方程式, (2.4)~(2.6) の解が  $h, k$  の間に一定の条件を保持しながら  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  ならしめたとき, (2.1)~(2.3) の解に収束するためには差分方程式  $\beta_m^{i+1} + B_j \beta_m^i = B, \beta_m^{i+1} - B_j \beta_m^i + B_{j-1} \beta_m^{i-1} = 0$  の特性方程式の根の絶対値がすべての  $i, j$  に対して  $1 + O(k)$  を越えず, かつ  $q_1 - 1 \geq 1$  または  $q_2 - 2 \geq 1$  なることで十分である。定理 1 においては境界条件から生ずる誤差は無視されている。そこで境界条件にも誤差があることを仮定して考察を進める。

### 定義

格子点  $(x_i, t_j)$  における未知関数が近似式 (2.4) により求められる場合, これを内点とする。また, 近似式 (2.5) を用いて求められる場合, これを境界点とする。

いま,  $t = t_j$  の内点の計算が終了し, 近似境界条件 (2.5) を用いて境界点  $u_{M,j}, u_{M-1,j}, \dots, u_{0,j}, u_{1,j}$  の値が求まったとする。すなわち,



第 1 図

2-level の近似式の時, 境界点を  $u_{M-1}, u_M$  とすれば, これは (2.5) の  $x=b$  に関する近似境界条件を用いて

$$u_{M,j} = g_{2M}(x, t_j, u_{M-2}, u_{M-3}, \dots, u_{M-N_1}) \quad (2.21)$$

$$u_{M-1,j} = g_{2M-1}(x, t_j, u_{M-2}, u_{M-3}, \dots, u_{M-N_2}) \quad (2.22)$$

と表わされる。ここで  $r_2^i$  の  $\Gamma_2^i$  に対する打ち切り誤差を  $\epsilon_{r_2}^i$  とし,  $\max_i \epsilon_{r_2}^i = \epsilon_{r_2}$  とすれば

$$\alpha_{M,j} = \sum_{i=2}^{N_1} g_{2M} u_{M-t_j} \alpha_{M-i,j} + \epsilon_{r_2} \quad (2.23)$$

$$\alpha_{M-1,j} = \sum_{i=2}^{N_2} g_{2M-1} u_{M-i} \alpha_{M-i,j} + \epsilon_{r_2} \quad (2.24)$$

となる。(この場合も仮定 (2) が使われている。)

次に  $t = t_{j+1}$  において  $u_{M-3,j+1}, u_{M-2,j+1}$  等を求めるとき (2.4) の近似式中に  $u_{M-1,j}, u_{M,j}$  が用いられたとすると (2.15) において  $\alpha_{M-1,j}, \alpha_{M,j}$  には (2.23), (2.24) が代入され, (2.19) は

$$\beta_m^{i+1} + B_j^i \beta_m^i = k^{a_i} \delta_{0m}^{(ij)} \quad i = M-2, M-3 \quad (2.25)$$

となる。この場合  $B_j^{M-2}, B_j^{M-3}, B_j$  は互いに異なる。

いま, (2.25) に関しても定理の条件がそれぞれ満足されているとし,  $\max_j |\delta_{0m}^{(ij)}| = \delta_{0m}^{(i)}$  とすると



$$|\beta_m^{i+1}| < c^i k^{q_{1i}-1} |\delta_{0m}^i| \quad i=M-2, M-3$$

が、内点のみの場合と同様に成立する。

ここで  $q_{1i} \geq q_1$  とすると境界点を含めて

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|\alpha_j\| = 0$$

が成立し、その精度は  $O(k^{q_1-1})$  である。

また  $q_{1i} < q_1$  の場合、

- (i)  $q_{1i} - 1 \geq 1$  ならばその精度は  $O(k^{q_{1i}-1})$
- (ii)  $q_{1i} - 1 \leq 0$  ならば発散する。

3-level の場合には、 $t_{j+1}$  における値の計算に  $t_j, t_{j-1}$  における境界点の誤差を考慮する必要がある。この場合結果として

$q_{2i} \geq q_2$  ならば全体の精度は  $O(k^{q_2-1})$   
 $q_{2i} < q_2$  ならば

- (i)  $q_{2i} - 2 \geq 1$  ならば全体の精度は  $O(k^{q_{2i}-1})$
- (ii)  $q_{2i} - 2 \leq 0$  ならば発散する。

その結果、境界条件を考慮した場合の次の定理が証明できた。

**定理 2**

(2.1)~(2.3) に対する 2-level または 3-level の近似差分方程式 (2.4)~(2.6) の解が  $h$  と  $k$  の間に一定の関係を保ちつつ  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  ならしめた時 (2.1)~(2.3) の解に収束するためには

- (1) 近似差分式から作られた差分方程式  $\beta_m^{i+1} + B_j \beta_m^i = 0$  および  $\beta_m^{i+1} - B_j \beta_m^i + B_{j-1} \beta_m^{i-1} = 0$  の特性方程式の根が近似式 (2.4) が内点のみに関係する場合も、境界点に関係する場合にもその絶対値において  $1 + O(k)$  を越えないこと、
- (2)  $\min_i (q_1 - 1, q_{1i} - 1) = Q_1 \geq 1$  または  
 $\min_i (q_2 - 2, q_{2i} - 1) = Q_2 \geq 1$

なることで十分である。その際近似解の精度はそれぞれ  $O(k^{Q_1})$  または  $O(k^{Q_2})$  である。

境界条件の考慮が重要であることの例として次の例をあげる。

$$u_{xxxx} + u_{tt} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0 \tag{2.26}$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0 \tag{2.27}$$

$$u(x, 0) = 0.2 \sin \pi x \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2.28}$$

$$u_t(x, 0) = 0 \tag{2.29}$$

(2.26) の近似式として

$$\nabla_x^4 u_{i,j} + \nabla_z^2 u_{i,j} = 0 \quad (2.30)$$

を取り,  $k = \lambda h^2$ ,  $\lambda \leq 1/2$  とすればこれは定理 1 の条件を満足する。これは 3-level の方程式であって  $q_2 = 4$  となる。しかしながら (2.27) の近似式としてたとえば  $x=a$  で  $u_x = 1/2h(u_{2j} - u_{0,j})$  とすれば発散する。 $u_x = 1/h(u_{1,j} - u_{0,j})$  とすれば発散はしないが精度は非常に落ちる。前の場合  $q_{2,2} = 2$  後の場合  $q_{2,2} = 2.5$  である。

[注意] 定理 1, 2 の証明において方程式の混合境界値問題に関して 3 つの仮定を行なったが, その中で (1) の解の解析性に関する仮定は  $u_{i,j}$  による補間を格子点全体を通る一つの補間多項式というように解釈すれば必要であるが, 補間多項式に関する条件をゆるめるならば (たとえば一次補間多項式または二次補間多項式を連結することにより定義域をおおようにする。), この条件はずっとゆるめることができ, 方程式の要求するだけの連続性条件に変えることはできるであろう。

### 3. 2-level formula\*

#### (A) 定数係数放物型

$$u_t = p u_{xx} \quad a \leq x \leq b \quad t > 0 \quad p > 0 \quad (3.1)$$

近似差分式  $k = \lambda h^2 \quad \lambda > 0$

$$(1) \quad \nabla_{1t} u_{i,j} = p \nabla_x^2 u_{i,j}$$

$$\begin{array}{c} i, j+1 \\ | \\ i-1, j \quad i, j \quad i+1, j \end{array} \quad \epsilon_{i,j} = 0(k) + 0(h^2)$$

(2.15) 式は

第 2 図

$$\alpha_{i,j+1} = \lambda p (\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j}) + (1 - 2p\lambda) \alpha_{i,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} + \left( 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 \right) \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

ゆえに

$$\left| 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 \right| < 1 + 0(k)$$

したがって  $\lambda \leq 1/2p$  ならば収束する。

$$(2) \quad \nabla_{2t} u_{i,j+1} = p \nabla_x^2 u_{i,j+1}$$

$$\begin{array}{c} i-1, j+1 \quad i, j+1 \quad i+1, j+1 \\ | \\ i, j \end{array} \quad \epsilon_{ij} = 0(k) + 0(h^2)$$

第 3 図

\*[注意] §3, §4 においてあつかう方程式はいずれも仮定 (1), (2), (3) を満足するものとする\*

(2.15) 式は

$$-p\lambda(\alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i-1,j+1}) + (1+2p\lambda)\alpha_{i,j+1} = \alpha_{i,j} + k^2\epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{1}{1+2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}} \beta_m^j = k^2 \delta'_{0m}$$

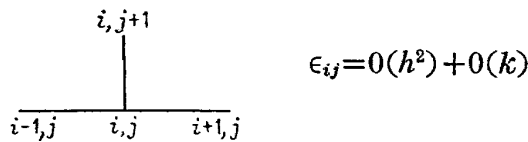
故に任意の  $\lambda$  に関して収束。

(B) 定数係数放物型

$$u_t = pu_{xx} + qu_x + ru \quad a \leq x \leq b \quad t > 0 \quad p > 0 \quad (3.2)$$

近似差分式  $\lambda h^2 = k, \lambda > 0$

$$(1) \quad \nabla_{1t} u_{i,j} = p \nabla_x^2 u_{i,j} + q \nabla_{1x} u_{i,j} + r u_{i,j}$$



第 4 図

(2.15) 式は

$$\alpha_{i,j+1} = \left( p\lambda + \frac{q\lambda}{2}h \right) \alpha_{i+1,j} + (1-2p\lambda + rk) \alpha_{i,j} + \left( p\lambda - \frac{q\lambda}{2}h \right) \alpha_{i-1,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

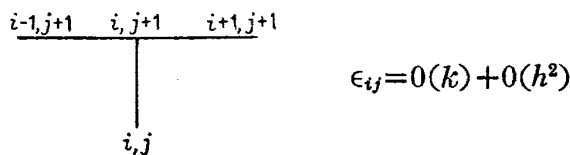
$$\beta_m^{j+1} + \left( 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 - rk - iq\lambda h \sin \nu_m h \right) \beta_m^j = k^2 \delta'_{0m}$$

したがって収束のためには

$$\left| 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 - rk - iq\lambda h \sin h \right| < 1 + 0(k)$$

すなわち  $\lambda \leq 1/2p$  なることである。

$$(2) \quad \nabla_{2t} u_{i,j} = p \nabla_x^2 u_{i,j+1} + q \nabla_{1x} u_{i,j+1} + r u_{i,j+1}$$



第 5 図

(2.15) 式は

$$-\left( p\lambda + \frac{q\lambda}{2}h \right) \alpha_{i,j+1} + (1+2p\lambda - rk) \alpha_{i,j+1} - \left( p\lambda - \frac{q\lambda}{2}h \right) \alpha_{i-1,j+1} = \alpha_{i,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

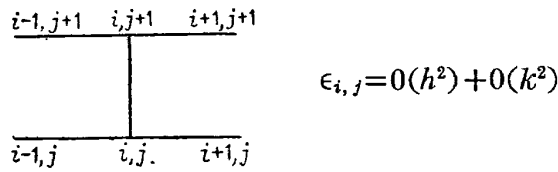
$$\beta_m^{j+1} - \frac{1}{1 + 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - rk - iq\lambda h \sin \nu_m h} \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって収束のためには

$$\left| \frac{1}{1 + 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - rk - iq\lambda h \sin \nu_m h} \right| < 1 + O(k)$$

ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

$$(3) \quad \nabla_{1t} u_{i,j} = \frac{p}{2} (\nabla_z^2 u_{i,j+1} + \nabla_z^2 u_{i,j}) + \frac{q}{2} (\nabla_{1x} u_{i,j+1} + \nabla_{1x} u_{i,j}) + \frac{r}{2} (u_{i,j+1} + u_{i,j})$$



第 6 図

(2.15) 式は

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda q}{4} h\right) \alpha_{i+1,j+1} + \left(1 + \lambda p - \frac{rk}{2}\right) \alpha_{i,j+1} - \left(\frac{p\lambda}{2} - \frac{\lambda q}{4} h\right) \alpha_{i-1,j+1} \\ & = \left(\frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda q}{4} h\right) \alpha_{i+1,j} + \left(1 - \lambda p + \frac{rk}{2}\right) \alpha_{i,j} + \left(\frac{p\lambda}{2} - \frac{\lambda q}{4} h\right) \alpha_{i-1,j} + k^2 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

(2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{1 - 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + \frac{rk}{2} + i \frac{\lambda q k}{2} \sin \nu_m h}{1 + 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{rk}{2} - i \frac{\lambda q h}{2} \sin \nu_m h} \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって収束のためには

$$\left| \frac{1 - 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + \frac{rk}{2} + i \frac{\lambda q h}{2} \sin \nu_m h}{1 + 2p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{rk}{2} - i \frac{\lambda q h}{2} \sin \nu_m h} \right| < 1 + O(k)$$

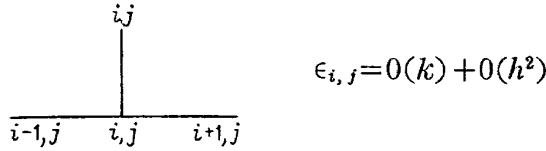
ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

(C) 変数係数放物型

$$\begin{aligned} u_t &= p(x, t) u_{xx} + q(x, t) u_x + r(x, t) u \\ p(x, t) &> 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

近似差分式

$$(1) \quad \nabla_{1t} u_{i,j} = p_{ij} \nabla_z^2 u_{i,j} + q_{i,j} \nabla_{1x} u_{i,j} + r_{i,j} u_{i,j}$$



第 7 図

(2.15) 式は

$$\alpha_{i,j+1} = \left( p_{i,j} \lambda + \frac{q_{i,j} \lambda}{2} h \right) \alpha_{i+1,j} + (1 - 2p_{i,j} \lambda + r_{i,j} k) \alpha_{i,j} + \left( p_{i,j} \lambda - \frac{q_{i,j} \lambda}{2} h \right) \alpha_{i-1,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

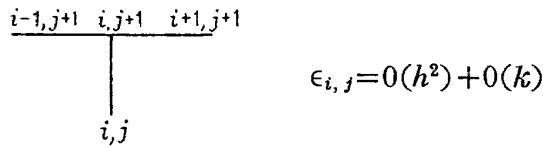
$$\beta_m^{j+1} + \left( 4p_{i,j} \lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 - r_{i,j} k - iq_{i,j} \lambda h \sin \nu_m h \right) \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって収束のためには

$$\left| 4p_{i,j} \lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - 1 - r_{i,j} k - iq_{i,j} \lambda h \sin \nu_m h \right| < 1 + O(k)$$

すなわち、 $\lambda \leq \frac{1}{2 \max p_{i,j}}$  なることである。

(2)  $\nabla_{2z} u_{i,j+1} = p_{i,j} \nabla_x^2 u_{i,j+1} + q_{i,j+1} \nabla_{1x} u_{i,j+1} + r_{i,j+1} u_{i,j+1}$



第 8 図

(2.15) 式は

$$-\left( p_{i,j+1} \lambda + \frac{q_{i,j+1} \lambda}{2} h \right) \alpha_{i+1,j+1} + (1 + 2p_{i,j} \lambda - r_{i,j} k) \alpha_{i,j+1} - \left( p_{i,j+1} \lambda - \frac{q_{i,j+1} \lambda}{2} h \right) \alpha_{i-1,j+1} = \alpha_{i,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

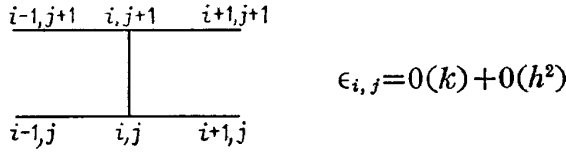
$$\beta_m^{j+1} - \frac{1}{1 + 2p_{i,j+1} \lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - r_{i,j+1} k - iq_{i,j+1} \lambda h \sin \nu_m h} \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって、収束のためには

$$\left| \frac{1}{1 + 2p_{i,j+1} \lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - r_{i,j+1} k - iq_{i,j+1} \lambda h \sin \nu_m h} \right| < 1 + O(k)$$

ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

$$(3) \quad \nabla_{1t} u_{i,j} = \frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2} \frac{1}{2} (\nabla_x^2 u_{i,j} + \nabla_x^2 u_{i,j+1}) \\ + \left( \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j}}{2} \right) \frac{1}{2} (\nabla_{1x} u_{i,j+1} + \nabla_{1x} u_{i,j}) + \frac{r_{i,j} + r_{i,j+1}}{2} \frac{1}{2} (u_{i,j+1} + u_{i,j})$$



第 9 図

(2.15) 式は

$$- \left\{ \frac{\lambda(p_{i,j+1} + p_{i,j})}{2} + \frac{\lambda(q_{i,j+1} + q_{i,j})}{8} \right\} \alpha_{i+1,j+1} + \left\{ 1 + \lambda(p_{i,j+1} + p_{i,j}) - \frac{(r_{i,j+1} + r_{i,j})k}{4} \right\} \alpha_{i,j+1} \\ - \left\{ \frac{\lambda(p_{i,j+1} + p_{i,j})}{2} - \frac{\lambda(q_{i,j+1} + q_{i,j})}{4} \right\} \alpha_{i-1,j+1} = \left\{ \frac{\lambda(p_{i,j} + p_{i,j+1})}{2} + \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{8} \right\} \alpha_{i+1,j} \\ + \left\{ 1 - \lambda(p_{i,j+1} + p_{i,j}) + \frac{(r_{i,j+1} + r_{i,j})k}{4} \right\} \alpha_{i,j} + \left\{ \frac{\lambda(p_{i,j} + p_{i,j+1})}{2} - \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{8} \right\} \alpha_{i-1,j} \\ + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{1 - (p_{i,j} + p_{i,j+1}) \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{(r_{i,j} + r_{i,j+1})k}{4} k - i \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{4} \sin \nu_m k}{1 + (p_{i,j} + p_{i,j+1}) \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{(r_{i,j+1} + r_{i,j})k}{4} k - i \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{4} \sin \nu_m k} \beta_m^j = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって収束のためには

$$\left| \frac{1 - (p_{i,j} + p_{i,j+1}) \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{(r_{i,j} + r_{i,j+1})k}{4} k - i \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{4} \sin \nu_m h}{1 + (p_{i,j} + p_{i,j+1}) \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{(r_{i,j} + r_{i,j+1})k}{4} k - i \frac{\lambda(q_{i,j} + q_{i,j+1})}{4} \sin \nu_m h} \right| < 1 + 0(k)$$

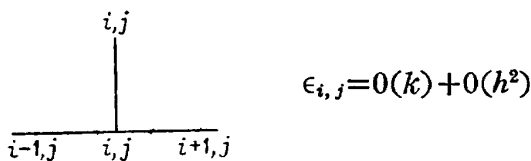
ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

(D) 非線型放物型方程式

$$u_{xx} = f(x, t, u, p, q) \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0 \\ f_q > 0$$

差分近似式

$$(1) \quad \nabla_x^2 u_{i,j} = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u_{i,j}, \nabla_{1x} u_{i,j}, \nabla_{1t} u_{i,j})$$



第 10 図

(2.15) 式は

$$f_{qi,j} \alpha_{i,j+1} = \lambda \left( 1 - \frac{f_{pi,j} h}{2} \right) \alpha_{i+1,j} + (f_{qi,j} - 2\lambda - k f_{ui,j}) \alpha_{i,j} + \lambda \left( 1 + \frac{f_{pi,j} h}{2} \right) \alpha_{i-1,j} + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

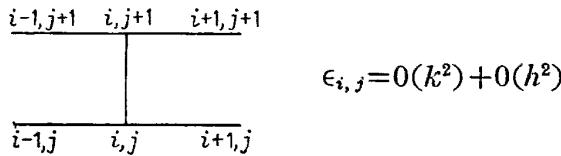
$$\beta_m^{j+1} - \left( 1 - \frac{f_{qi,j}}{\lambda} \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{f_{ui,j}}{f_{qi,j}} k - i \frac{f_{pi,j}}{f_{qi,j}} \lambda h \sin \nu_m h \right) \beta_m^j = k \delta'_{0m}$$

したがって収束のためには

$$\left| 1 - \frac{\lambda}{f_{qi,j}} \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{f_{ui,j}}{f_{qi,j}} k - i \frac{f_{pi,j}}{f_{qi,j}} \lambda h \sin \nu_m h \right| < 1 + O(k)$$

ゆえに  $\lambda \leq \frac{f_{qi,j}}{2}$  ならば収束する。

$$(2) \quad \frac{1}{2} (\nabla_x^2 u_{i,j} + \nabla_x^2 u_{i,j}) = f \left( x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} (\nabla_{1x} u_{i,i} + \nabla_{1x} u_{i,j+1}), \nabla_{1x} u_{i,j} \right)$$



第 11 図

(2.15) 式は

$$-\frac{\lambda}{2} (\alpha_{i+1,j+1} - 2\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i-1,j+1}) + f_{qi,j+\frac{1}{2}} \alpha_{i,j+1} + \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda h}{4} (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i-1,j+1}) = \frac{\lambda}{2} (\alpha_{i+1,j} - 2\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j}) - f_{qi,j+\frac{1}{2}} \alpha_{i,j} - \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} \alpha_{i,j} - \frac{\lambda h}{4} (\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}) + k^2 \epsilon'_{i,j}$$

(2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{f_{qi,j+\frac{1}{2}} - 2\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} - \frac{i\lambda h}{4} f_{qi,j} \sin \nu_m h}{f_{qi,j+\frac{1}{2}} + 2\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} + \frac{i\lambda h}{4} f_{qi,j+\frac{1}{2}} \sin \nu_m h} \beta_m^j = k' \delta'_{0m}$$

したがって

$$\left| \frac{f_{qi,j+\frac{1}{2}} - 2\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} - \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} - \frac{i\lambda h}{4} f_{qi,j+\frac{1}{2}} \sin \nu_m h}{f_{qi,j+\frac{1}{2}} + 2\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + \frac{k}{2} f_{ui,j+\frac{1}{2}} + \frac{i\lambda h}{4} f_{qi,j+\frac{1}{2}} \sin \nu_m h} \right| < 1 + O(h)$$

ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

(3)

(3) の近似差分式は原方程式の常微分方程式の近似一般解を用いて構成する

$$u(x t_j) = \iint f d\eta d\xi + cx + d$$

$$u(x t_{j+1}) = \iint f d\eta d\xi + c'x + d'$$

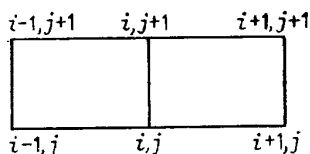
2つの式からおのこの

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = \frac{1}{12} (f_{i+1,j+1} + 10f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1})$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{12} (f_{i+1,j} + 10f_{i,j} + f_{i-1,j})$$

この2式から近似差分式は

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{12} \{ (f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j}) + 10(f_{i,j+1} + f_{i,j}) + (f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j}) \}$$



$$\epsilon_{i,j} = O(h^4) + O(k^2)$$

第 12 図

$$f_{i-1,l} = f(x_{i+1} t_{j+\frac{1}{2}} u_{i-1,l}, \nabla_{2x} u_{i-1,l}, \nabla_{1t} u_{i-1,j+\frac{1}{2}})$$

$$f_{i,l} = f(x_i t_{j+\frac{1}{2}} u_{i,l}, \nabla_{1x} u_{i,l}, \nabla_{1t} u_{i,j+\frac{1}{2}}) \quad l = j, j+1$$

$$f_{i+1,l} = f(x_{i+1} t_{j+\frac{1}{2}} u_{i+1,l}, \nabla_{3x} u_{i+1,l}, \nabla_{1t} u_{i+1,j+\frac{1}{2}})$$

とすると (2.15) 式は

$$\begin{aligned} & (f_{qi+1,j+\frac{1}{2}} - 6\lambda) \alpha_{i+1,j+1} + (10f_{qi,j+\frac{1}{2}} + 12\lambda) \alpha_{i,j+1} + (f_{qi-1,j+\frac{1}{2}} - 6\lambda) \alpha_{i-1,j+1} \\ & + \frac{k}{12} (f_{ui+1,j+1} \alpha_{i+1,j+1} + 10f_{ui,j+1} \alpha_{i,j+1} + f_{ui-1,j+1} \alpha_{i-1,j+1}) + \frac{\lambda h}{24} \{ (3f_{pi+1,j+1} + 10f_{pi,j+1} \\ & - f_{pi-1,j+1}) \alpha_{i+1,j+1} - 4(f_{pi+1,j+1} - f_{pi-1,j+1}) \alpha_{i,j+1} + (f_{pi+1,j+1} - 10f_{pi,j+1} - 3f_{pi-1,j+1}) \} \\ & = (f_{qi+1,j+\frac{1}{2}} + 6\lambda) \alpha_{i+1,j} + (10f_{qi,j+\frac{1}{2}} - 12\lambda) \alpha_{i,j} + (f_{qi-1,j+\frac{1}{2}} + 6\lambda) \alpha_{i-1,j} \\ & - \frac{k}{12} (f_{ui+1,j} \alpha_{i+1,j} + 10f_{ui,j} \alpha_{i,j} + f_{ui-1,j} \alpha_{i-1,j}) - \frac{\lambda h}{24} \{ (3f_{ui+1,j} + 10f_{pi,j} \\ & - f_{pi-1,j}) \alpha_{i+1,j} - 4(f_{pi+1,j} - f_{pi-1,j}) \alpha_{i,j} + (f_{pi,j} - 10f_{pi,j} - 3f_{pi-1,j}) \alpha_{i-1,j} \} + k^3 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

ここで  $f_p, f_q$  が  $x$  の関数として 2 階微分可能であるとすると Taylor 展開を用いて  $h^2$  以下の項を落せば, (2.19) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2f_{qi,j+\frac{1}{2}} \cos \nu_m h + 10f_{qi,j+\frac{1}{2}} - 24\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + O(h)}{2f_{qi,j+\frac{1}{2}} \cos \nu_m h + 10f_{qi,j+\frac{1}{2}} + 24\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + O(h)} \beta_m^j = k^3 \delta_{0m}^j$$



となり，収束のためには

$$\left| \frac{2f_{q_i, j+\frac{1}{2}} \cos \nu_m h + 10f_{q_i, i+\frac{1}{2}} - 24\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + 0(h)}{2f_{q_i, i+\frac{1}{2}} \cos \nu_m h + 10f_{q_i, j+\frac{1}{2}} + 24\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} + 0(h)} \right| < 1 + 0(h)$$

ゆえに任意の  $\lambda$  に関して収束する。

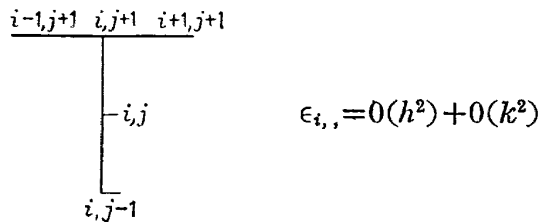
4. 3-level formula

(A) 定数係数放物型方程式

$$u_t = p u_{xx} \quad p > 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0$$

差分近似式

$$(1) \quad \frac{3}{2} \nabla_{2t} u_{i, j+1} - \frac{1}{2} \nabla_{2t} u_{i, j} = p \nabla_x^2 u_{i, j+1}$$



第 13 図

(2.16) 式は

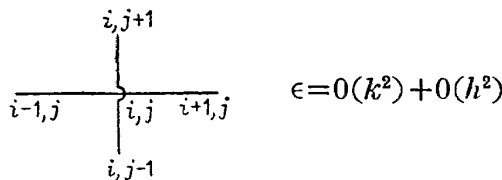
$$-p\lambda(\alpha_{i+1, j+1} + \alpha_{i-1, j+1}) + \left(\frac{3}{2} + 2p\lambda\right)\alpha_{i, j+1} - \alpha_{i, j} + \alpha_{i, j-1} = k^2 \epsilon'_{i, j}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2}{\frac{3}{2} + 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}} \beta_m^j + \frac{1}{\frac{3}{2} + 4p\lambda \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}} \beta_m^{j-1} = k^2 \delta_{0m}^j$$

二次方程式  $x^2 + ax + b$  の根の絶対値が共に  $1 + 0(k)$  より小なるためには  $b < 1$ ,  $b < |a| - 1$  であるが上式は任意の  $\lambda$  に関してこれを満足するから収束する。

$$(2) \quad \nabla_{3t} u_{i, j} = p \nabla_x^2 u_{i, j}$$



第 14 図

(2.16) 式は

$$\alpha_{i, j+1} - \{2p\lambda(\alpha_{i+1, j} + \alpha_{i-1, j}) - 4p\lambda\alpha_{i, j} - \alpha_{i, j-1}\} = k^2 \epsilon_{i, j}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} + 8\lambda p \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} \beta_m^j - \beta_m^{j-1} = k^2 \delta_{0m}^j$$

上式は (2) のべた条件を任意の  $\lambda$  に関して満足しないから収束しない。

(B) 定数係数双曲型方程式

$$u_{tt} = pu_{xx} \quad p > 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0$$

近似差分式

$$\lambda = h/k$$

$$(1) \quad \nabla_i^2 u_{i,j} = p \nabla_x^2 u_{i,j}$$

$$\begin{array}{c} | \\ i-1,j \\ | \\ i,j \\ | \\ i+1,j \\ | \\ i,j-1 \\ | \\ i,j+1 \end{array} \quad \epsilon_{i,j} = 0(k^2) + 0(h^2)$$

第 15 図

(2.16) 式は

$$\alpha_{i,j+1} - \{2\alpha_{i,j} - p\lambda^2(\alpha_{i+1,j} - 2\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j})\} + \alpha_{i,j-1} = k^4 \epsilon'_{i,j}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - 2\left(1 - 2p\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}\right) \beta_m^j + \beta_m^{j-1} = k^2 \delta_{0m}^j$$

したがって  $\lambda \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{1/2}$  が収束の条件である。

$$(2) \quad \nabla_i^2 u_{i,j} = \frac{p}{4} (\nabla_x^2 u_{i,j+1} + 2\nabla_x^2 u_{i,j} + \nabla_x^2 u_{i,j-1})$$

$$\begin{array}{c} i-1,j+1 \quad i,j+1 \quad i+1,j+1 \\ | \\ i-1,j \quad | \quad i,j \quad i+1,j \\ | \\ i-1,j-1 \quad | \quad i,j-1 \quad i+1,j-1 \end{array} \quad \epsilon_{i,j} = 0(k^2) + 0(h^2)$$

第 16 図

(2.16) 式は

$$\begin{aligned} & -\frac{p\lambda^2}{4} (\alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i-1,j+1}) + \left(1 + \frac{p\lambda^2}{2}\right) \alpha_{i,j+1} - \frac{p\lambda^2}{2} (\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j}) + (p\lambda^2 - 2) \alpha_{i,j} \\ & -\frac{p\lambda^2}{4} (\alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i-1,j-1}) + \left(1 + \frac{p\lambda^2}{2}\right) \alpha_{i,j-1} = k^4 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2\left(1 - p\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}\right)}{1 + p\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}} \beta_m^j + \beta_m^{j-1} = k^2 \delta_{0m}^j$$

上式において右辺を 0 とした時の特性方程式の根は任意の  $\lambda$  に関して  $1+O(k)$  を越えない。から収束する。

(C) 定数係数双曲型方程式

$$u_{tt} + su_t = pu_{xx} + qu_x + ru \quad p > 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0$$

差分近似式  $\lambda = h/k$

$$\nabla_t^2 u_{i,j} + s\nabla_{st} u_{i,j} = p\nabla_x^2 u_{i,j} + q\nabla_{1x} u_{i,j} + ru_{i,j}$$

$$\begin{array}{c} | \\ i,j+1 \\ \hline i-1,j \quad | \quad i,j \quad | \quad i+1,j \\ \hline | \\ i,j-1 \end{array} \quad \epsilon_{i,j} = O(k^2) + O(h^2)$$

第 17 図

(2.16) 式は

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{sk}{2}\right) \alpha_{i,j+1} - \left(p\lambda^2 + \frac{q\lambda k}{2}\right) \alpha_{i+1,j} + (2p\lambda^2 - rk^2 - 2) \alpha_{i,j} - \left(p\lambda^2 - \frac{q\lambda k}{2}\right) \alpha_{i-1,j} \\ & + \left(1 - \frac{sk}{2}\right) \alpha_{i,j-1} = k^4 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2\left(1 - 2p\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}\right) + rk^2 + iq\lambda k \sin \nu_m h}{1 + \frac{sk}{2}} \beta_m^j + \frac{1 - \frac{sk}{2}}{1 + \frac{sk}{2}} \beta_m^{j-1} = k^4 \delta_{0m}^j$$

したがって  $\lambda < \left(\frac{1}{p}\right)^{1/2}$  ならば収束する。

(D) 非線型双曲型方程式

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$$

$$\nabla_t^2 u_{i,j} - \nabla_x^2 u_{i,j} = f(x_i, t_j, u_{i,j}, \nabla_{1x} u_{i,j}, \nabla_{st} u_{i,j})$$

$$\begin{array}{c} | \\ i,j+1 \\ \hline i-1,j \quad | \quad i,j \quad | \quad i+1,j \\ \hline | \\ i,j-1 \end{array} \quad \epsilon_{i,j} = O(k^2) + O(h^2)$$

第 18 図

(2.16) 式は

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{kf_{qi,j}}{2}\right) \alpha_{i,j+1} - \left\{ \left(\lambda^2 + \frac{\lambda kf_{pi,j}}{2}\right) \alpha_{i+1,j} + (2 - 2\lambda^2 + k^2 f_{ui,j}) \alpha_{i,j} \right. \\ & \left. + \left(\lambda^2 - \frac{\lambda kf_{pi,j}}{2}\right) \alpha_{i-1,j} \right\} + \left(1 + \frac{kf_{qi,j}}{2}\right) \alpha_{i,j-1} = k^4 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2 \left( 1 - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} \right) + k^2 f_{u_{i,j}} + i\lambda k f_{p_{i,j}} \sin \nu_m h}{1 - \frac{k f_{q_{i,j}}}{2}} \beta_m^j + \frac{1 + \frac{k f_{q_{i,j}}}{2}}{1 - \frac{k f_{q_{i,j}}}{2}} \beta_m^{j-1} = k^4 \delta_{0m}^j$$

したがって  $\lambda < 1$  ならば収束する。

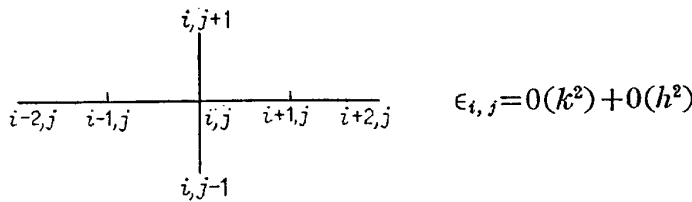
(E) 4 階定数係数放物型方程式

$$u_{tt} + p u_{xxxx} + q u_{xx} + r u_t = 0 \quad p > 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0$$

近似差分式

$$\lambda = k/h^2$$

$$\nabla_x^2 u_{i,j} + p \nabla_x^4 u_{i,j} + q \nabla_x^2 u_{i,j} + r \nabla_{3t} u_{i,j} = 0$$



第 19 図

(2.16) 式は

$$\left( 1 + \frac{r}{2} k \right) \alpha_{i,j+1} + p \lambda^2 (\alpha_{i+2,j} + \alpha_{i-2,j}) + (\lambda k q - 4 p \lambda^2) (\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j}) + (6 p \lambda^2 - 2 - 2 \lambda k q) \alpha_{i,j} + \left( 1 - \frac{r}{2} k \right) \alpha_{i,j-1} = k^3 \epsilon_{i,j}$$

(2.20) 式は

$$\beta_m^{j+1} - \frac{2 - 16 p \lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2}}{1 + \frac{r k}{2}} \beta_m^j + \frac{1 - \frac{r k}{2}}{1 + \frac{r k}{2}} \beta_m^{j-1} = k^3 \delta_{0m}^j$$

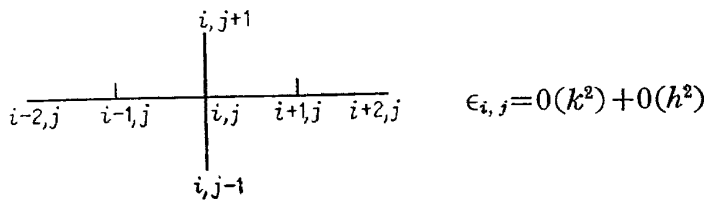
したがって  $\lambda \leq \left( \frac{1}{4p} \right)^{1/2}$  ならば収束する。

(F) 4 階非線型放物型方程式

$$c F_{xx}(r, p) + u_{tt} = 0 \quad F_r \geq 0 \quad a \leq x \leq b \quad t > 0$$

近似方程式

$$\nabla_x^2 F_{i,j} + \nabla_t^2 u_{i,j} = 0$$



第 20 図

(2.16) 式は

$$\begin{aligned} & \alpha_{i,j+1} + p\lambda^2 \left( G_{r_{i+1,j}} + \frac{1}{2}h G_{p_{i+1,j}} \right) \alpha_{i+2,j} - p\lambda^2 \{ 2(G_{r_{i+1,j}} + G_{r_{i,j}}) + h G_{p_{i,j}} \} \alpha_{i+1,j} \\ & + \left[ c\lambda^2 \left\{ (G_{r_{i+1,j}} + 4G_{r_{i,j}} + G_{r_{i-1,j}}) + \frac{1}{2}h (G_{p_{i-1,j}} - G_{p_{i+1,j}}) \right\} - 2 \right] \alpha_{i,j} \\ & - c\lambda^2 \{ 2(G_{r_{i-1,j}} + G_{r_{i,j}}) - h G_{p_{i,j}} \} \alpha_{i-1,j} + c\lambda^2 \left( G_{r_{i-1,j}} - \frac{1}{2}h G_{p_{i-1,j}} \right) \alpha_{i-2,j} \\ & - 2\alpha_{i,j-1} = k^3 \epsilon'_{i,j} \end{aligned}$$

(2.20) 式は

$$\begin{aligned} & \beta_m^{j+1} - \left[ 2 + 4c\lambda^2 \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} (G_{r_{i+1,j}} e^{i\nu_m h} - 2G_{r_{i,j}} + G_{r_{i-1,j}} e^{-i\nu_m h}) \right. \\ & \left. + ih \sin \nu_m h (G_{p_{i+1,j}} e^{i\nu_m h} - 2G_{p_{i,j}} + G_{p_{i-1,j}} e^{-i\nu_m h}) \right] \beta_m^j - \beta_m^{j-1} = k^3 \delta_{0m}^j \\ & \max c_{i,j} = G_r \\ & \max r_{i,j} = G_p \end{aligned}$$

とすると

$$\beta_m^{j-1} - \left[ 2 - 16c\lambda^2 \sin^4 \frac{\nu_m h}{2} G_r - i4G_p \sin \nu_m h \sin^2 \frac{\nu_m h}{2} \right] \beta_m^j - \beta_m^{j-1} = k^3 \delta_{0m}^j$$

したがって  $\lambda \leq \frac{1}{4pG_r}$  ならば収束する。

### 3. 結 論

本報告において筆者は応用上重要な偏微分方程式の差分法による数値解法においてしばしば用いられる 2-level, 3-level の差分近似式の解の収束条件を示した。それによれば

- (1) 収束条件は差分近似式から得られた最終的な差分方程式 (2.19), (2.20) の係数から直ちに明らかとなる。
- (2) 方程式および境界条件に対する近似方程式近似境界条件の打ち切り誤差のオーダーが重要な役割を果すこと。(このことの真の重要さは多次元の非矩形的な領域において矩形格子を用いる際に現われる。)

が明らかとなった。

4-level 以上の差分式に対しても (これが用いられることはほとんどない。) 本報告の議論は, そのまま適用できるが三次以上の代数方程式の係数から根の絶対値の大きさが直ちに明らかとなれば, 本論で述べた方法はやはり非常に有利である。

同様なことが連立偏微分方程式の場合についてもいえる。

連立偏微分方程式系において重要なのは一階双曲系であるが、これに本報告の方法を適用すれば連立一階差分方程式系が生じ、この解ベクトルの絶対値の大きさが問題となる。この問題についてはいずれ稿を改めて明らかにするつもりである。

## Appendix A

### 定理 1 の証明

(A) 2-level の場合

$\beta_m^{i+1} + B_j \beta_m^i = 0$  の特性方程式の根は  $-B_j$  であり、その絶対値は

$$|B_j| < 1 + ck \quad j=0, 1, \dots \quad c < \infty$$

である。ゆえに (2.19) によりすべての  $j, m$  に関して

$$|\beta_m^{i+1}| \leq (1 + ck) |\beta_m^i| + k^{q_1} |\delta_{0m}^i| \quad (\text{A} \cdot 1)$$

初期条件は厳密に与えられるとしてよいから\*

$$|\beta_m^0| = 0$$

とおける。したがって

$$|\beta_m^1| \leq k^{q_1} |\delta_{0m}^0| \quad (\text{A} \cdot 2)$$

ゆえに

$$|\beta_m^j| \leq \sum_{i=0}^j (1 + ck)^{j-i} k^{q_1} |\delta_{0m}^i| \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ここで

$$\max_{0 \leq i \leq j} |\delta_{0m}^i| = |\delta_{0m}^0|$$

とすると

$$|\beta_m^j| \leq c' k^{q_1-1} |\delta_{0m}^0| \quad (\text{A} \cdot 4)$$

ゆえに  $k^{q_1-1} \delta_{0m}^0 = o(k)$  を考えれば

$$\lim_{k \rightarrow 0} |\beta_m^j| = 0$$

したがって

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|\alpha_j\| = 0 \quad (\text{A} \cdot 5)$$

(B) 3-level の場合

$\beta_m^{i+1} - B_j \beta_m^i + B_{j-1} \beta_m^{i-1} = 0$  の特性方程式の根を  $\rho_{1j}, \rho_{2j}$  とすれば、定理の仮定から

$$|\rho_{i,j}| < 1 + ck \quad |\rho_{i,j}| < 1 + ck$$

$$j=1, 2, 3, \dots$$

すると (2.20) は

\* 実際は初期条件にも誤差があるが、この誤差は近似差分式の打ち切り誤差よりも任意に小さくできる。したがって (2.22) はこの場合にも成立すると考えてよい。

$$\beta_m^{j+1} + (\rho_{1j} + \rho_{2j})\beta_m^j + \rho_{1,j}\rho_{2,j}\beta_m^{j-1} = k^{q_s}\delta_{0m}^j$$

これは

$$\beta_m^{j+1} + \rho_{1j}\beta_m^j = -\rho_{2j}(\beta_m^j + \rho_{1,j}\beta_m^{j-1}) + k^{q_s}\delta_{0m}^j$$

したがって

$$|\beta_m^{j+1} + \rho_{1,j}\beta_m^j| \leq |\rho_{2,j}| \cdot |\beta_m^j + \rho_{1,j}\beta_m^{j-1}| + |k^{q_s}\delta_{0m}^j| \quad (\text{A}\cdot 6)$$

しかるに  $|\beta_m^j + \rho_{11}\beta_m^0|$  は 2-level の場合と同様に任意に小さいと考えてよいから

$$|\beta_m^2 + \rho_{1,1}\beta_m^1| \leq k^{r_s}\delta_{0m}^1 \quad (\text{A}\cdot 7)$$

したがって (A・6), (A・7) から, すべての  $j$  に対して

$$|\beta_m^{j+1} + \rho_{1,j}\beta_m^j| \leq \sum_{i=0}^j (1 + ck)^{j-i} k^{q_s} |\delta_{0m}^i| \quad (\text{A}\cdot 8)$$

ゆえに

$$|\beta_m^{j+1} + \rho_{1,j}| < c' k^{q_s-1} |\delta_{0m}^j|$$

となる。さらに

$$\beta_m^{j+1} = -(\rho_{1,j} + \rho_{2,j})\beta_m^j - \rho_{1,j}\rho_{2,j}\beta_m^{j-1} + k^{q_s}\delta_{0m}^j$$

であることから

$$|\beta_m^{j+1}| \leq |\rho_{1,j}\beta_m^j| + |\rho_{2,j}(\beta_m^j + \rho_{1,j}\beta_m^{j-1})| + |k^{q_s}\delta_{0m}^j|$$

(A・8) より

$$|\beta_m^{j+1}| \leq |\rho_{1,j}\beta_m^j| + c' k^{q_s-1} |\delta_{0m}^j| + |k^{r_s}\delta_{0m}^j|$$

これから  $c''$  を適当にとれば

$$|\beta_m^{j+1}| \leq |\rho_{1,j}\beta_m^j| + c'' k^{q_s-1} |\delta_{0m}^j|$$

これから 2-level の場合と同じ様にしてすべての  $j$  に関して

$$|\beta_m^j| \leq c''' k^{q_s-2} |\delta_{0m}^j| \quad (\text{A}\cdot 9)$$

$k^{q_s-2}\delta_{0m}^j = 0(k)$  であるから, すべての  $j$  に関して

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|\beta_m^j\| = 0 \quad (\text{A}\cdot 10)$$

したがって, すべての  $j$  に関して

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|\alpha_j\| = 0 \quad (\text{A}\cdot 11)$$

## Appendix B

近似差分式  $l_h u_{i,j}$  が implicit な場合これは反復的操作を用いることが必要であるが, その収束性は以下のようにして判定する。

いま  $l_h u_{i,j} = 0$  から何らかの方法で

$$u = Tu \quad (\text{B}\cdot 1)$$

が導びかれたとする。これから反復過程

$$u^{n+1} = Tu^n \quad (\text{B} \cdot 2)$$

が構成されるが、差分近似の場合  $T$  は

$$u_{i,j+1}^{n+1} = f(x, t, \dots, u_{i,j}, \dots, u_{j-1,j+1}^n, u_{j,i+1}^n, u_{i+1,j+1}^n, \dots) \quad (\text{B} \cdot 3)$$

の形をしている。ここで  $f$  は  $u_{i-1,j+1}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j+1}, \dots$  に関して微分可能で  $f, u_{i,j+1}$  等が連続とする (この条件は仮定 (2) から導びかれる)。

いま,  $u = Tu$  の解  $u$  に対する第  $n$  近似  $u^{n+1}$  の誤差関数を

$$u - u^n = \alpha^n$$

により導入し  $u = Tu$  を  $u^n + \alpha^n$  代入すると

$$u = T(u^n + \alpha^n) \quad (\text{B} \cdot 4)$$

ゆえに

$$\alpha^{n+1} = T(u^n + \alpha^n) - Tu^n$$

ここで  $f$  に対する, すなわち  $T$  に対する仮定を用いれば  $\alpha$  に関する 2-level の線型差分方程式

$$\alpha^{n+1} = A_n \alpha^n$$

が導びかれ, 反復過程の収束条件は

$$\|A_n\| < 1$$

となる。

## 参 考 文 献

- [1] 樋口一雄, 三好 甫: NAL TR-16, 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法  
1961 年 11 月
- [2] R. D. Richtmeyer Difference Method for Initial Value problems: Interscience Publisher
- [3] Kryrov: Approximate Calculation of Integrals, John Wiley and Sons.



<p>NAL TR-54 航空宇宙技術研究所 偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法</p> <p>1963年10月 22ページ</p> <p>偏微分方程式の混合境界値問題を差分法近似を用いて解く場合、2-level または 3-level の近似差分式が特に重要である。本報告においては、これらの近似式を用いた場合に、近似解が真の解に収束するための条件が、近似式に誤差関数を代入して得られる二次または一次の代数方程式の根の絶対値の大きさにより示されることを証明し、いくつかの典型的な偏微分方程式にこの理論を適用し、差分近似式の収束、非収束を示した。</p>	<p>I. 三好 甫 II. NAL TR-54 III. 518.1</p>	<p>NAL TR-54 航空宇宙技術研究所 偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法</p> <p>1963年10月 22ページ</p> <p>偏微分方程式の混合境界値問題を差分法近似を用いて解く場合、2-level または 3-level の近似差分式が特に重要である。本報告においては、これらの近似式を用いた場合に、近似解が真の解に収束するための条件が、近似式に誤差関数を代入して得られる二次または一次の代数方程式の根の絶対値の大きさにより示されることを証明し、いくつかの典型的な偏微分方程式にこの理論を適用し、差分近似式の収束、非収束を示した。</p>	<p>I. 三好 甫 II. NAL TR-54 III. 518.1</p>
<p>NAL TR-54 航空宇宙技術研究所 偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法</p> <p>1963年10月 22ページ</p> <p>偏微分方程式の混合境界値問題を差分法近似を用いて解く場合、2-level または 3-level の近似差分式が特に重要である。本報告においては、これらの近似式を用いた場合に、近似解が真の解に収束するための条件が、近似式に誤差関数を代入して得られる二次または一次の代数方程式の根の絶対値の大きさにより示されることを証明し、いくつかの典型的な偏微分方程式にこの理論を適用し、差分近似式の収束、非収束を示した。</p>	<p>I. 三好 甫 II. NAL TR-54 III. 518.1</p>	<p>NAL TR-54 航空宇宙技術研究所 偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法</p> <p>1963年10月 22ページ</p> <p>偏微分方程式の混合境界値問題を差分法近似を用いて解く場合、2-level または 3-level の近似差分式が特に重要である。本報告においては、これらの近似式を用いた場合に、近似解が真の解に収束するための条件が、近似式に誤差関数を代入して得られる二次または一次の代数方程式の根の絶対値の大きさにより示されることを証明し、いくつかの典型的な偏微分方程式にこの理論を適用し、差分近似式の収束、非収束を示した。</p>	<p>I. 三好 甫 II. NAL TR-54 III. 518.1</p>

TR-39	高負荷燃焼器の研究(第1報) —その性能によぼす各種因子の 影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full- Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉦一
TR-42	非定常境界層の相似解とその安定 A Similar Solution of Unsteady Laminar Boundary Layer and Its Stability Characteristics	1963年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤 博, 藪田光弘 坂口 一, 山崎紀雄
TR-45	固有値問題 $(\sum \lambda^k A_k)x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem $(\sum \lambda^k A_k)x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦, 泉日出夫 戸川隼人, 林 洋一
TR-47	鑄鉄円板の回転破壊におけるコリオリの 力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年8月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林 二 識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究(Ⅲ) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (Ⅲ)	1963年9月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田 晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問 題の数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equa- tions by Boundary Contraction	1963年9月	樋口一雄, 能美 力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unetable System	1963年9月	武田 峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pabble-Bed Heater	1963年9月	林 二 識
TR-53	円管流の非定常熱伝達 第1報 —壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963年10月	林 二 識

---

## 航空宇宙技術研究所報告54号

昭和38年10月 発行

発 行 所      航空宇宙技術研究所  
 東京都調布市深大寺町1880  
 電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印 刷 所      笠井出版印刷社  
 東京都港区芝南佐久間町1の53

---