

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-71

塑性の三方向せん断理論
塑性変形による異方性
塑性流動に及ぼす中間主応力の影響
応力状態と塑性変形の形

中西不二夫・佐藤和郎

1964年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-39 高負荷燃焼器の研究 (第I報)
—その性能におよぼす各種因子の
影響の定性的考察—
A Study of High Intensity Combustor (I)
—Its Qualitative Analysis— 1963年2月 大塚貞吉, 鈴木邦男
- TR-40 胴体内圧繰返し荷重試験装置について
Repeated Load Testing Facility for Full-
Scale Aircraft Fuselage Structures 1963年2月 竹内和之, 川島矩郎
野原利雄
- TR-41 輻射熱量計の較正
Calibration of Radiometer 1963年2月 竹中幸彦, 江川幸一
小川鉦一
- TR-42 非定常境界層の相似解とその安定
A Similar Solution of Unsteady Laminar
Boundary Layer and Its Stability
Characteristics 1963年7月 小橋安次郎, 恩地 暎
- TR-43 超音速における操縦面の効きについて
On the Effectiveness of Control Surfaces
in Supersonic Flow 1963年2月 河崎俊夫
- TR-44 高速翼列の実験について
(流入角の大きい減速翼列の予備実験)
Some Notes about the Effect of Tunnel
Configuration and Testing Technique on
Compressor Cascade Performance 1963年2月 近藤 博, 義田光弘
坂口 一, 山崎紀雄
- TR-45 固有値問題 ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$ の数値解法
A Numerical Method for the Eigenvalue
Problem ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$ 1963年4月 戸川隼人
- TR-46 翼の固有振動数に関する一解析法
On the Vibration Analysis of Aircraft
Wings 1963年6月 川井忠彦, 泉日出夫
戸川隼人, 林 洋一
- TR-47 鑄鉄円板の回転破壊におけるコリオリの
力の影響
Influence of Coriolis' Force on the Burst
of Rotating Disc of Cast Iron 1963年8月 佐藤和郎, 永井文雄
- TR-48 曲面に沿う境界層
Effects of Surface Curvature on Laminar
Boundary-Layer Flow 1963年8月 林 二 識
- TR-49 高速軸流圧縮機の研究 (III)
An Investigation of High Speed Axial
Flow Compressor (III) 1963年9月 松木正勝, 宮地敏雄
大山耕一, 吉田 晃
西脇英夫, 岩部柱相
- TR-50 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問
題の数値解法
Numerical Method for Boundary Value
Problems of Partial Differential Equa-
tions by Boundary Contraction 1963年9月 樋口一雄, 能美 力
- TR-51 人間の静的不安定系の制御能力
Human Control Ability of the
Statically Unstable System 1963年9月 武田 峻
- TR-52 粒状加熱器の熱特性
Thermal Characteristics of
a Pabble-Bed Heater 1963年9月 林 二 識
- TR-53 円管流の非定常熱伝達 (第I報)
—壁温が時間と流向距離のみによる場合
Thermal Characteristics of the Unsteady
Flow through a Circular Pipe whose
Temperature depends on Time and
Flow-Directional Distance only 1963年10月 林 二 識
- TR-54 偏微分方程式の混合境界値問題の差分法に
よる数値解法
Difference Method for the Mixed
Boundary Value Problems 1963年10月 三好 甫
- TR-55 ボスをもった車盤の回転強度
Rotating Strength of Rotor Which
Has a Boss 1963年11月 佐藤和郎, 永井文雄
- TR-56 亜音速および遷音速における二次元非定
常空気力の測定 (第I報)
Measurements of the Unsteady Airloads
for Two-Dimensional Flow at Subsonic
and Transonic Speed Range (I) 1963年11月 中村泰治, 田辺義一
- TR-57T Measurements of the Aerodynamic
Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil
in Supersonic Flow at Mach Number
2 to 3 January 1964 Takao ISHII
Mitsunori YANAGISAWA

目 次

塑性の三方向せん断理論	1
塑性変形による異方性	15
塑性流動に及ぼす中間主応力の影響	29
応力状態と塑性変形の形	42
後 記	52

塑性の三方向せん断理論*

中西不二夫**・佐藤和郎***

Three-Shear Theory of Plasticity

By Fujio NAKANISHI and Yasuo SATO

Hysteresis loops and anisotropy due to plastic deformations were studied, and the conclusions are as follows:—

1. Plastic deformation is to be divided into shears in three directions, and each shear must be considered individually.

2. Individual resistances in three directions, R_1 , R_2 , R_3 , are equal in magnitude, or

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

3. The stress range of elastic deformation in any direction, when the direction of shear is reversed, is R .

4. The resistances R_1 , R_2 , R_3 , do not correspond to the shearing stresses τ_1 , τ_2 , τ_3 , but they correspond to such shearing stresses S_1 , S_2 , S_3 , as

$$\begin{cases} S_3 - S_2 = \sigma_x - \sigma_m, \\ S_1 - S_3 = \sigma_y - \sigma_m, \\ S_2 - S_1 = \sigma_z - \sigma_m, \end{cases}$$

where, σ_x , σ_y , σ_z , are the principal stresses, and σ_m is the mean stress.

The above conclusions are the authors' new theory of plasticity.

By this theory the following experimental facts can be accounted for.

1. The relation between tension and pure shear.
2. Hysteresis loops.
3. Anisotropy due to plastic deformations.
4. The relation between the yield point of mild steel and the plastic deformation after that.

緒言

塑性理論は、次のような実験事実を説明できるものでなければならない。

1. 純粋せん断または二次元引張りと普通の引張りとの関係。
2. 履歴環を描くこと、およびその形。ある荷重をかけて塑性変形を起こさせてから、荷重を下

* 昭和 39 年 7 月 8 日受付

** 前所長

*** ロケット部長

し、再び荷重をかけると履歴環を描くということ。履歴環を描くことは、途中で塑性的になることであるが、どこで塑性変形を始めるかということ。

3. 塑性変形後の異方性。ある荷重で塑性変形を起こさせてから、その荷重を下し、次に違った荷重をかけると、応力-ひずみの関係は、同じ荷重を再びかける場合とは違ったものになる。たとえば、薄肉円筒の試験片に軸方向に伸びるような純粋せん断を加えてから下し、それに同じせん断応力でも、方向の違った、円周方向に伸びる純粋せん断になるような応力を加えると、これは初めから塑性的である。なぜこのように違うかということ、また違ってどうなるかということ。

4. 軟鋼降伏点との関係。応力分布が均等な場合には、荷重の種類にかかわらず、せん断応力一定で降伏が広がることはすでによく知られている。塑性理論はこれと矛盾しないものでなければならない。また、降伏とそれから先の塑性との関係がどうなるかということ。

以上のようなことをすべて説明できるような塑性理論をたててみたいと思う。

資料を得るために、著者のところでは多くの実験を行なった。実験の一つは、純粋せん断と引張りとの関係の実験⁽¹⁾である。技術的にはそう難しい実験ではないが、問題は材料の選定である。このような目的の実験には、材料は初めは等方性でなければならない。われわれのところでは、試験片は棒材から削り出して作っているが、棒材は多くの場合、焼なまししたくらいではなかなか等方性になってくれない。そこで多くの種類の棒材を検討して、ようやく等方性と認められるものを見だし、それについて実行を行なった。結果は第9図に示してある。

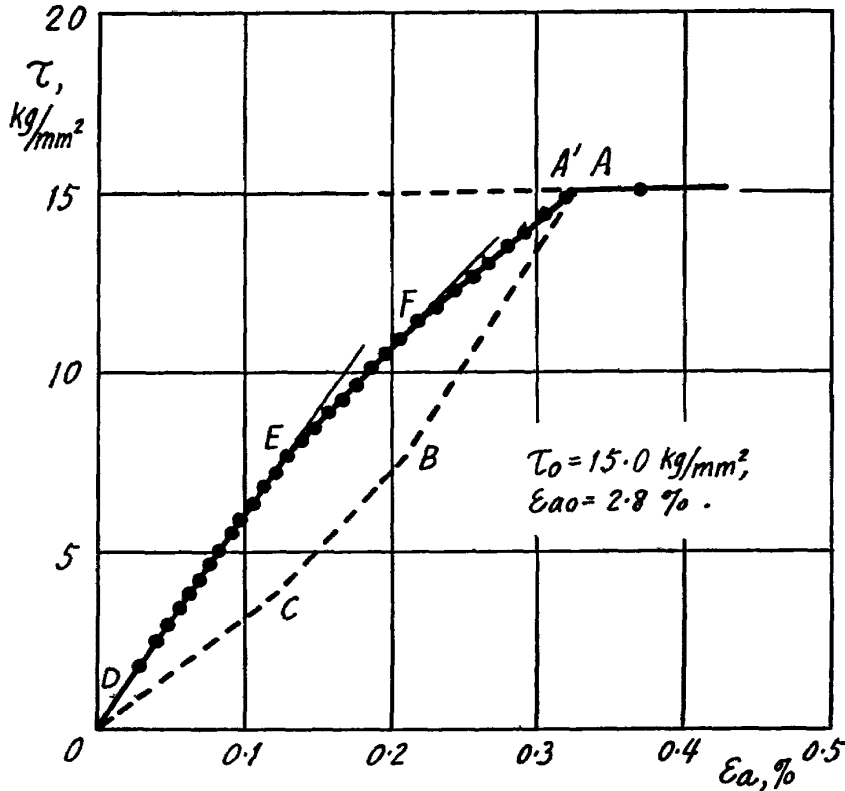
履歴環および異方性についても、数多くの実験を行なった。塑性がどういうものであるかを調べるのに最も役立つのは、この種の実験である。詳しい報告は別の機会にゆずるとして、ここでは、塑性理論をたてた経路を説明するのに必要な実験結果だけを述べることにする。

履歴環および異方性の実験

塑性で最も簡単なのは純粋せん断である。そこで、ここでは純粋せん断の実験について述べることにする。薄肉円筒の試験片に、塑性的には軸方向に伸びる純粋せん断になるように、内圧と引張りを適当な割合でかけて、ある点まで塑性変形を起こさせ、そこで一度荷重を下し、再び同じ荷重をかけて履歴環を描かせると第1図のようになる。縦軸はせん断応力 τ 、横軸は軸方向の伸びひずみ ϵ_0 で τ_0 、 ϵ_{a0} まで変形させてから荷重を下した後、再負荷したときの図である。材料は黄銅、その成分は Cu 59.59%、Zn 38.36%、Pb 1.29%、Sn 0.47%、Fe 0.29% である。試験片は外径 18 mm、内径 16 mm の円筒である。再荷重のとき、第1図の D から E までは弾性的である。あるいは準弾性的という方がいいかもしれないが、何回か履歴環を繰返すと、その部分はほとんど完全に弾性的になる。 E に達すると塑性的になるが、 E の応力は τ_0 のちょうど半分になっている。荷重を下すときはこれと対称的である。すなわち、 R を弾性的に変形する応力範囲とすれば、

$$R = \frac{1}{2}\tau_0$$

塑性理論は、この関係を満たすようなものでなければならない。



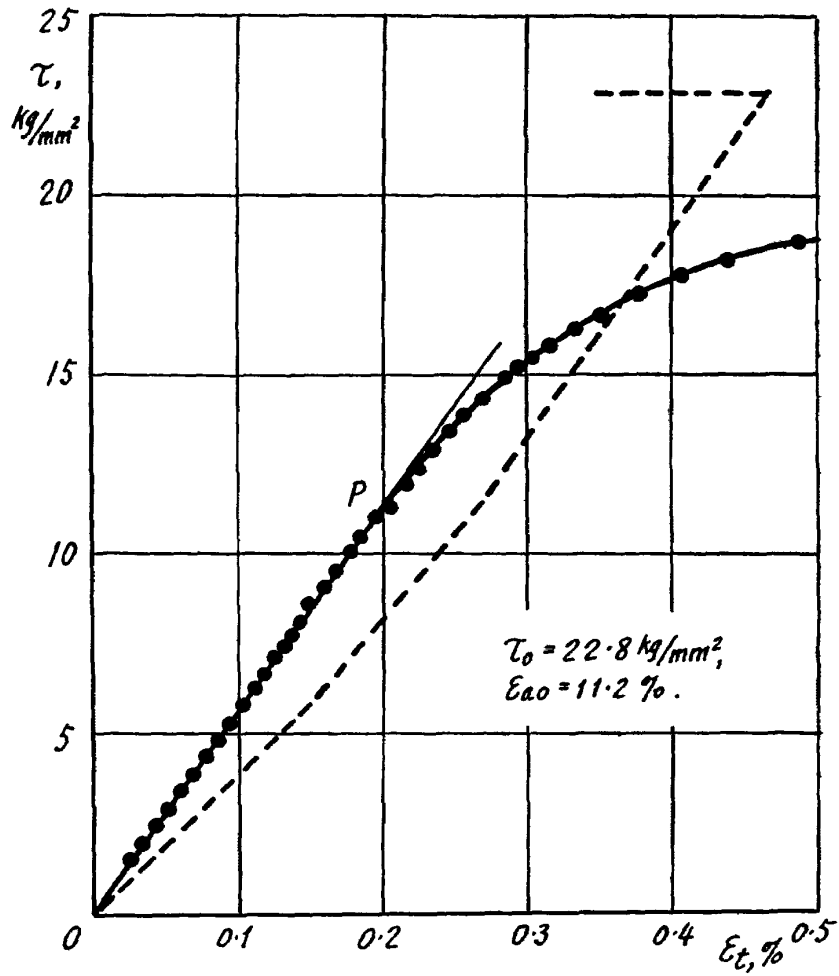
第 1 図

次に、最初の荷重は、前と同じ軸方向に伸びる純粋せん断を起こすような荷重で、再荷重は内圧だけの場合を採ってみる。薄肉円筒に内圧をかけるのは、塑性的には一つのせん断応力をかけることである。材料が等方性ならば、円周方向に伸びる純粋せん断になるようなせん断応力をかけることである。初め軸方向に伸びるようなせん断応力で塑性変形を起こさせておき、次に方向の異なるせん断応力をかけるわけである。再荷重のときの、応力 τ と円周方向の伸びひずみ ϵ_t との関係の例を示せば第 2 図のようになる。同時に、軸方向の伸びひずみ ϵ_a を測ってみると第 3 図のようになる。

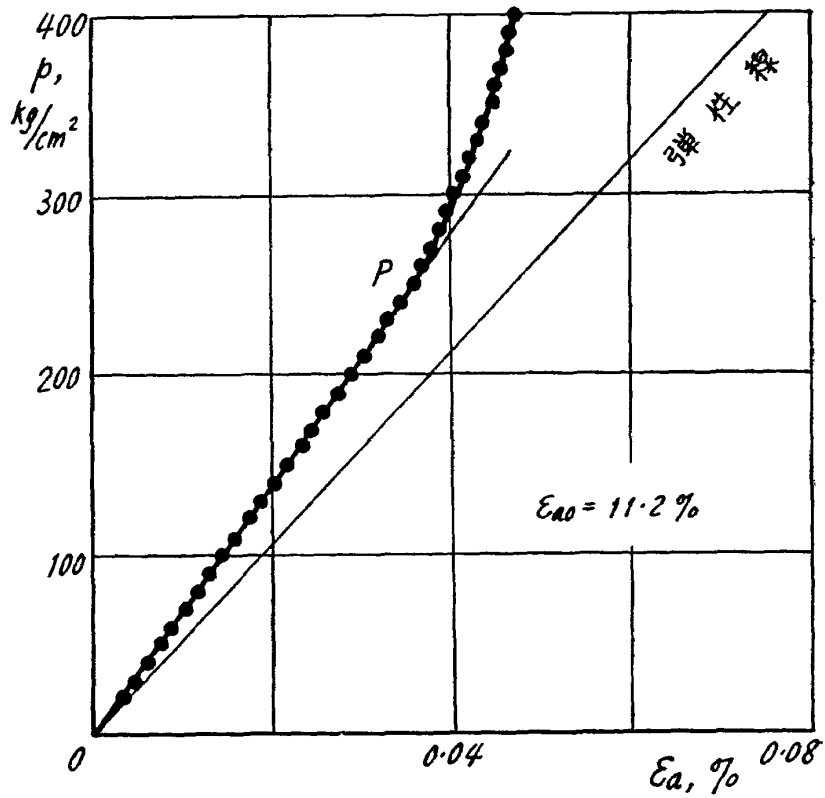
なお、比較のために、内圧で変形させたものに再び内圧をかけたときの軸方向の伸びを第 4 図に示しておいた。

内圧をかけたときの応力状態は、一つの均等引張りと一つのせん断応力とに分けて考えられる。第 3 図、第 4 図の弾性線は、均等引張りによる弾性ひずみの線である。第 4 図では、実験の点は、この弾性線の上によく乗っている。ところが第 3 図の実験結果は、弾性線からはずれていて、塑性的に軸方向に縮んだことを表わしている。

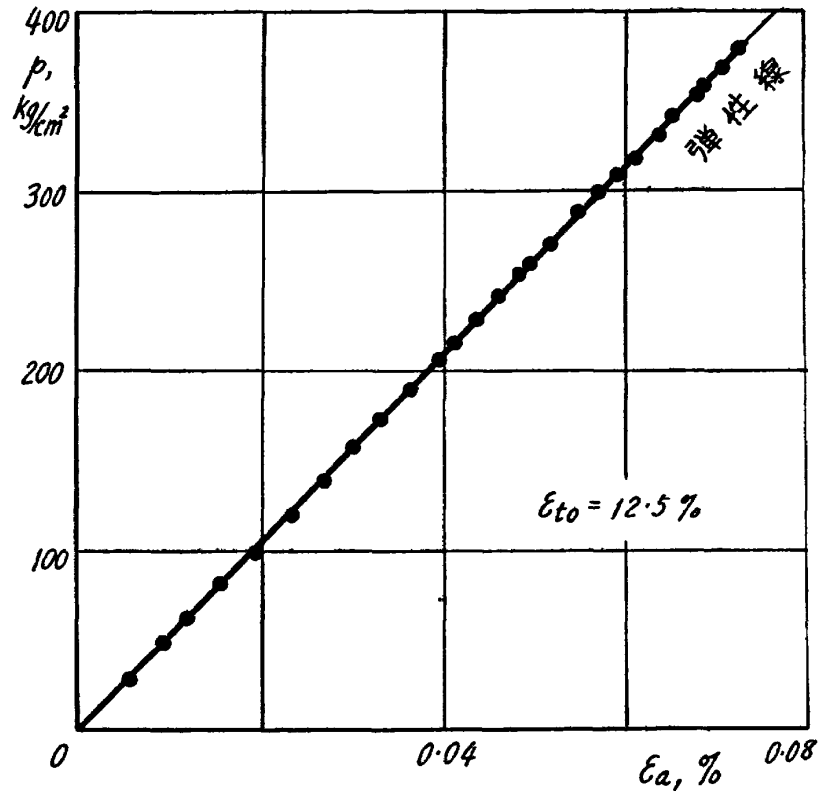
第 5 図のように、円筒の軸に平行に z 軸、半径方向に x 軸、円周方向に y 軸を採ることにする。



第 2 図



第 3 図



第 4 図

軸と主応力の方向とは一致している。なお、

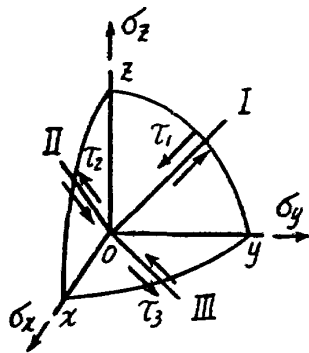
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は主応力,

τ_1, τ_2, τ_3 は主せん断応力で、

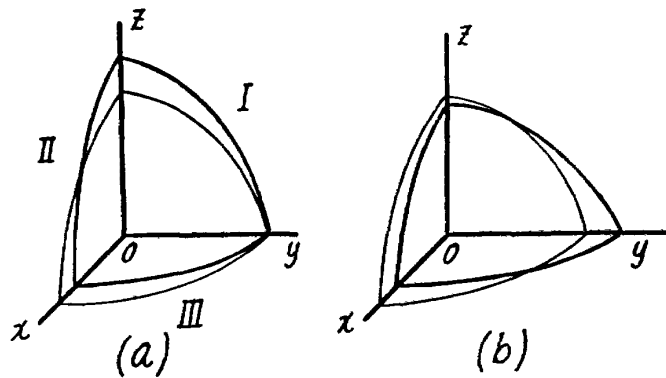
$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z),$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x),$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y),$$



第 5 図



第 6 図

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ は主ひずみ,

I, II, III はせん断の方向で, yz 断面に表われる変形を I 方向の変形ととなえることにし, $\varepsilon_y > \varepsilon_z$ の場合を正とする。同様に zx 断面, xy 断面に表われる変形を II, III の方向の変形とし, $\varepsilon_z > \varepsilon_x, \varepsilon_x > \varepsilon_y$ の場合を正とする。

内圧をかけるというのは, 均等引張りを除いて, せん断応力だけを考えれば, III 方向にせん断を加えることであって, このとき I の方向と II の方向とが性質が違わなければ, 軸方向の伸縮はないはずである。

第 4 図の (内圧)~(内圧) の場合は, 円周方向の応力ひずみを採れば第 1 図と同様な履歴環を描くのであって, 再荷重の最初の部分は弾性的である。したがって, I の方向も II の方向も弾性的であって, 性質はもちろん等しく, そのためにせん断応力による軸方向の伸縮は起こらないものと考えられ, 軸方向のひずみは均等引張りによる弾性ひずみだけということになる。

それに対して, 第 3 図の (引張り・内圧)~(内圧) の場合に, 軸方向が塑性的に縮むのは, I と II の方向の性質が違っているためであると考えられる。第 6 図は球の変形状態を示したものであるが, 初め (引張り・内圧) によって, 第 6 図 (a) のような変形を起こし, それに内圧を再荷重すれば, さらに第 6 図 (b) のように変形するはずである。II および III に生ずるせん断の方向は, (a) においても (b) においても同じである。したがって, この方向は弾性的であると考えられる。ところが, I の方向ではせん断が逆になる。そのため, I の方向は初めから塑性的であると考えられる。このようにして, I と II とでは性質が異なり, I の方向がひずみやすいのであって, そうすると第 6 図 (b) のようなせん断に対しては軸方向に縮むはずなのである。第 3 図の実験結果は, このことをよく表わしている。

このように, 変形は初めから塑性的なのであるが, 応力-ひずみの関係はだいたい直線的である。さらに内圧を上げて, 第 2 図の P に達すると, ここで応力-ひずみ曲線は曲り始める。第 3 図の P も同じ点である。この点の応力 τ は, 荷重を下す前の応力 $\tau_0 = 2R$ のちょうど半分であって, $\tau = R$ となっている。II と III の方向は弾性的であったのが, III の方向がここで塑性的になるものと考えられる。

このように塑性といっても, I, II, III の 3 方向全部が塑性的の場合だけでなく, 一つまたは二つが塑性的で, 他は弾性的という場合も存在するものと考えないと説明がつかない。すなわち, 塑性を考える場合には, 3 方向を同時に, しかし別々に考えなければならないと思う。

第 1 図の履歴環の場合でも, 再荷重のときに, 初めはどの方向も弾性的であったのが, E 点に達したところで, II の方向が塑性的になるものと考えられる。弾性の応力範囲を R としたが, この場合には, これは II の方向の弾性範囲である。さらに荷重を上げれば, F で I または III の方向が塑性的になり, 元の応力 τ_0 に達したところですべての方向が塑性的になるものと著者は考えているが,

これについては次の機会に詳しく報告するつもりである。

なお、IIの方向の弾性範囲が $R = \frac{1}{2}\tau_0$ であるだけでなく、第2図の結果からみれば、IIIの方向の弾性範囲も R である。すなわち、ある変形後の弾性範囲の大きさは、どの方向に対しても同じであるということになる。

塑性理論

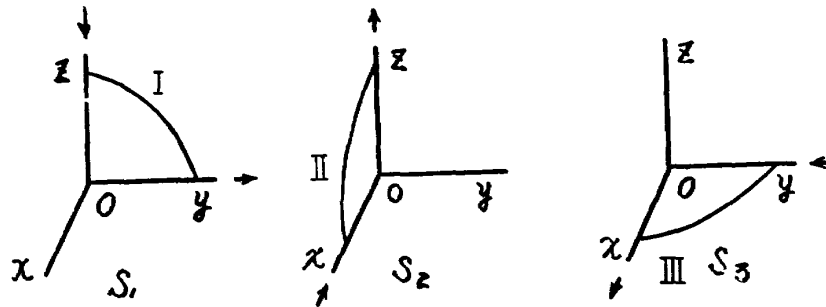
以上の実験結果を考慮に入れて、塑性理論をたててみると次のようになる。

1. I, II および III 方向のせん断を別々に考える。

2. 等方性の材料に応力を加え、単調にせん断ひずみが増しているとき、それぞれの方向のひずみ増加に対する抵抗 R_1, R_2, R_3 の大きさは等しい。すなわち、

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \quad (1)$$

3. それぞれの方向について、ひずみの方向が逆転する場合には、弾性的に変形する応力の範囲は R である。



第7図

なお、 τ_1, τ_2, τ_3 とは別に、第7図に示すようなせん断応力 S_1, S_2, S_3 を考える。 S_1, S_2, S_3 が同時に働いているときに、 σ と S の関係および τ と S の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_m - S_2 + S_3 \\ \sigma_y &= \sigma_m + S_1 - S_3 \\ \sigma_z &= \sigma_m - S_1 + S_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}S_1 + S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_3 &= -\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

τ は面に働いているせん断応力であって、 τ_1 には S_1 だけでなしに、 S_2, S_3 の成分もはいつている。それに対して、 R_1, R_2, R_3 というのは、I, II, III の方向の塑性ひずみに対する抵抗を、互いに独立して考えたものである。したがって、 R は τ に対応するものではなくて、 S に対応するものである。すなわち、

4. R_1, R_2, R_3 は S_1, S_2, S_3 に対応する。

以上、1, 2, 3, 4 に述べたのが、著者の塑性理論である。一つの方向について考えれば、単調に塑性変形を続けている間は、 $S=R$ であり、ある点から S を下げれば、 R の範囲は弾性的に変化し、そこから先は塑性的になるというのであって、きわめて簡明な理論である。ただ、これを3方向について同時に考えればいいのである。

もし、この理論に名前をつけるとすれば、3方向のせん断について別々に考えるという意味で、“3方向せん断理論”と呼んでもいいのであろう。この理論が、履歴環および異方性の問題をよく説明できることは、この理論の成立過程からみて明らかであるが、これについては別の機会に詳しく述べるつもりである。

ここでは、塑性純粋せん断と塑性引張りとの関係が、この理論ではどうなるかということ、および軟鋼の降伏点とこの塑性理論との関係を述べてみようと思う。

塑性純粋せん断または二次元塑性引張り

たとえば、薄肉円筒に引張りと内圧を、塑性的には軸方向に伸びる一つの純粋せん断になるような割合で、かけた場合である。これに、この塑性理論を適用してみよう。

この場合に起こる変形は、第6図(a)に示したものであって、IIの方向にせん断が起こっているが、同時に I, III の方向にもせん断ひずみが生じている。したがって、この変形を続けていくためには、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R_1 \\ S_2 &= R_2 \\ S_3 &= -R_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

これが純粋せん断の応力状態である。

応力状態は、普通は σ または τ_i で表わしているので、(4) を (3) に代入して τ を求めてみると、

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= R_1 - \frac{1}{2}R_2 + \frac{1}{2}R_3 = -R, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}R_1 + R_2 + \frac{1}{2}R_3 = 2R, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{2}R_2 - R_3 = -R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

τ_2 で II の方向にせん断を起こしていると考えられているが、変形を続けるのに必要なこの方向の応力、すなわちせん断応力の最大値 τ_{max} は

$$\tau_{max} = 2R \tag{5}'$$

この場合、一般には、 τ_2 でIIの方向にすべりを生ずるものと考えているが、そうすると、全すべり量 q' と伸びひずみ ϵ_a との関係は

$$q' = 2 \log(1 + \epsilon_a)$$

しかし、各方向の抵抗 R_1, R_2, R_3 は大きさは等しいのである。また、応力状態は(4)で示されているように、各方向の応力 S_1, S_2, S_3 も大きさは等しいのである。そうすると、各方向のすべりもまた等しいと考えるのが適当であると思う。変形を続ければ、加工硬化によって R の値は増してくるが、この場合に各方向のすべりが等しいと考えれば、 $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ということとよく一致する。変形については、Iの方向に $-dq$ 、IIの方向に dq 、IIIの方向に $-dq$ だけすべると考えるのと、Iの方向は 0、IIの方向に $2dq$ 、IIIの方向は 0 と考えるのと全く同じになるのである。

各方向のすべり量が等しいとすれば、全すべり量 q は、

$$q = 3 \log(1 + \epsilon_a) \tag{6}$$

それぞれのすべりを q_1, q_2, q_3 とすれば

$$q_1 = q_2 = q_3 = \log(1 + \epsilon_a) \tag{6}'$$

塑性引張り

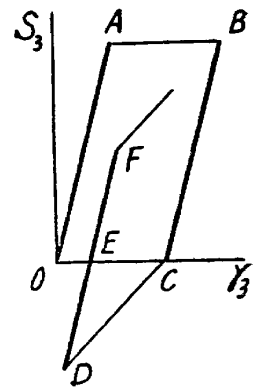
引張りの方向を z 軸に採れば、I、IIの方向にせん断が行なわれている。したがって、 S_1, S_2 は明らかに、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R_1 \\ S_2 &= R_2 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

問題は、 S_3 がどうなっているかである。

引張りの場合は、IおよびIIの方向に細かいすべりが交互に行なわれているものと考えられるが、Iの方向にすべるときと、IIの方向にすべるときとは、IIIの方向のせん断ひずみの変化は逆になるのである。IIIの方向の変化は逆になって、しかも τ_1 と τ_2 とは大きさが等しくなければならないのである。

いま、最初にIの方向にわずかにすべったものと仮定する。そうすると、IIIの方向のひずみ γ_3 もわずかに増して、第8図に示すように、 R_3 は OA から CB に移るであろう。この状態では、Iの方向に続けてすべるよりも、



第8図

IIの方向の方がすべりやすくなっている。それは、Iの方向にすべるにはIII方向の抵抗は R_3 であ

るが、II の方向にすべるには、抵抗は $-R_3$ ではなく、いったん塑性ひずみを起こした後は逆方向のひずみに対しては塑性的であって、第 8 図の CD のような道をたどるからである。そこで、 R_3 が CB から DF になるまで、II の方向のすべりが続くであろう。 DF において、 $DE=EF$ であるとすれば、ここでは I 方向のすべりに必要な応力 τ_1 と、II 方向のすべりに必要な応力 τ_2 とは等しくなり、この状態で交互のすべりが可能になると考えられる。この状態では、

$$S_3 = \pm \frac{1}{2} R_3 \quad (7)'$$

(7), (7)' から

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -R_1 - \frac{1}{2} R_2 - \frac{1}{4} R_3 = -\frac{7}{4} R, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} R_1 + R_2 + \frac{1}{4} R_3 = \frac{7}{4} R, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{2} R_2 \pm \frac{1}{2} R_3 = 0 \pm \frac{1}{2} R \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

τ_3 の $\pm \frac{1}{2} R$ というのは、1 点についてみれば、I の方向と II の方向に交互にすべっており、ある時期についてみれば、I の方向にすべっている部分もあり、II の方向にすべっている部分もあり、内部応力が生じているわけであって、巨視的にみた平均値は $\tau_3 = 0$ である。

塑性引張りひずみを続けていくのに必要なせん断応力の最大値 τ_{\max} は

$$\tau_{\max} = \frac{7}{4} R \quad (8)'$$

I, II の方向のすべりだけを考えれば、すべり量 q' と伸びひずみ ϵ_a との関係は

$$q' = 2 \log(1 + \epsilon_a)$$

I の方向に $-dq$, II の方向に dq だけすべると同時に、III の方向にも $\pm \frac{1}{2} dq$ だけすべると考えれば、(6), (6)' と全く同様に、全すべり量 q , および各方向のすべり量 q_1, q_2, q_3 は

$$q = 3 \log(1 + \epsilon_a), \quad (9)$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = \log(1 + \epsilon_a) \quad (9)'$$

引張りの場合に、自然ひずみまたは対数ひずみとなえているものは、すべり量を表わしているものである。引張りと圧縮との応力-ひずみの関係を比べる場合に、ひずみとして自然ひずみを採用すると応力-ひずみ曲線が一致するが⁽²⁾、これはすべり量の等しいところ、したがって加工硬化の等しいところを採って、応力を比べたことになっている。

塑性引張りと塑性純粋せん断の関係

引張りの場合の R の値 $R_{t,n}$ と、純粋せん断の場合の R の値 $R_{s,n}$ の等しいところでは、引張

りに必要なせん断応力 τ_{tn} と; 純粹せん断に必要な τ_{sh} の関係は, (5)', (8)' より

$$\frac{\tau_{tn}}{\tau_{sh}} = \frac{7}{8} \tag{10}$$

ただし,

$$R_{tn} = R_{sh} \tag{11}$$

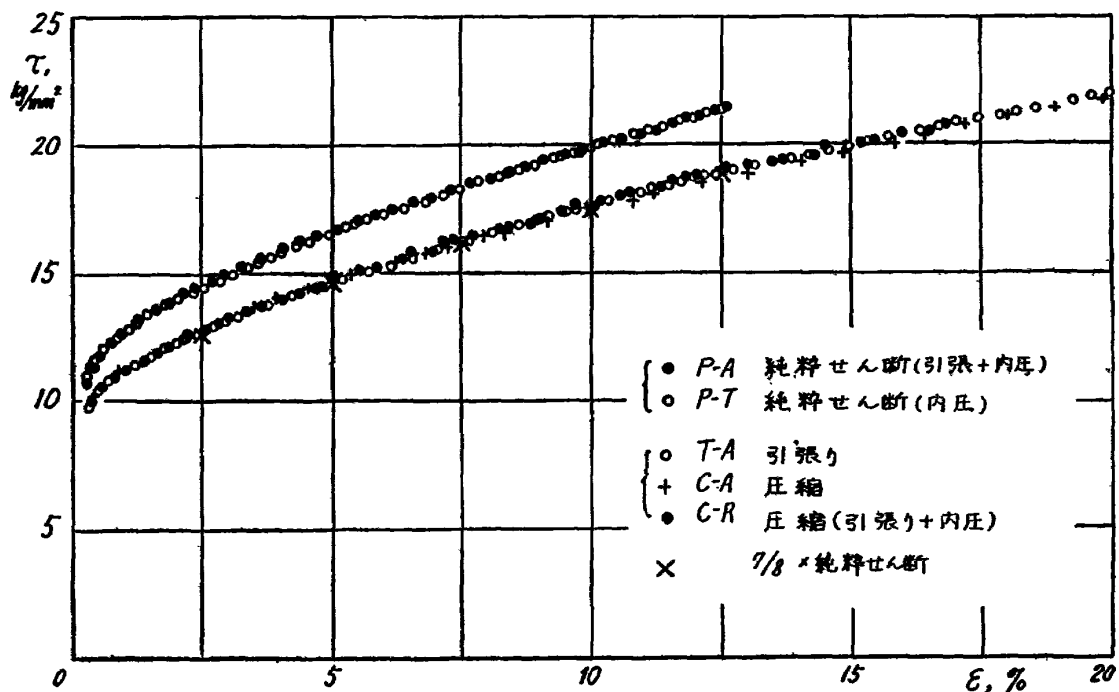
変形が進むにつれて, 加工硬化によって R の値は増してくるが, 加工硬化, したがって R の値はすべり量の関数であると考えていいであろう。すなわち, すべり量の等しいところでは, R の値も等しいと考えていいであろう。

すべり量と伸びひずみの関係は, 純粹せん断では (6), (6)' で表わされ, 引張りでは (9), (9)' で表わされているが, これは全く同じ関係である。したがって, (11) の条件が成立するためには, 次の条件が成り立てばよい。

$$\epsilon_{tn} = \epsilon_{sh} \tag{12}$$

すなわち, 伸びひずみの同じところでせん断応力を比較すれば (10) の関係が成り立つということである。

実験と比較してみよう。第9図は実験結果である。試験片は薄肉円筒で, その寸法は外径 18mm, 内径 16mm である。材料は黄銅, その成分は, Cu 59.59%, Zn 38.36%, Pb 1.29%, Sn 0.47%, Fe 0.29%, である。種々の棒材について検討し, ようやく等方性に近い1本の棒材を見だし, その棒材から削り出した試験片について実験をしたものである。たまたま, この棒材が等方性であったので, 上記成分の材料がいつも等方性であるわけではない。材料の選定, 実験の方法について



第9図

は別に報告してあるから⁽⁴⁾、ここでは結果だけをあげることにする。

第9図の $P-A$ は引張りと内圧を、軸方向に伸びる純粋せん断になるように、適当な割合でかけたものであって、縦軸にはせん断応力 τ 、横軸には軸方向の伸びひずみ ϵ_a が採ってある。 $P-T$ は内圧だけをかけたもので、これは円周方向に伸びる純粋せん断であって、横軸は円周方向の伸びひずみ ϵ_t である。 $P-A$ と $P-T$ とはすべりの方向が違うにもかかわらず、曲線は完全に重なっている。 $T-A$ は引張りで、横軸には伸びひずみ ϵ_a が採ってある。 $C-A$ は圧縮で、この試験片だけは中実の丸棒であって、横軸には直径の変化から引張りの ϵ_a に対応する量を計算したものが採ってある。 $C-R$ は引張りと内圧を同時にかけて、軸方向の引張応力と円周方向の引張応力とが、いつも等しくなるようにしたものであって、塑性的には、円筒の厚さ方向の圧縮である。軸方向の伸びと円周方向の伸びとを測定し、その結果から引張りの ϵ_a に対応する量を計算し、これを横軸に採ってある。これら3本の曲線は図にみるようによく重なっている。

同種類の荷重に対しては、すべりの方向が異なっても、応力-ひずみの関係は非常によく合っている。このことからみても、この実験結果は十分信頼していいと思う。

第9図には、純粋せん断曲線の7/8の点も入れておいた。図にみるように、これらの点は、全塑性域にわたって、引張曲線ときわめてよく一致している。

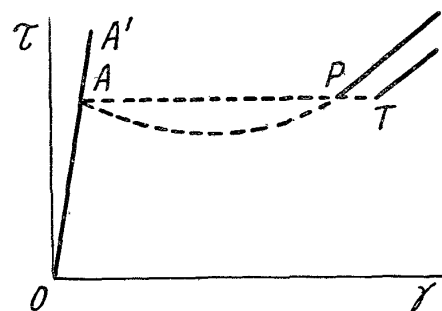
軟鋼降伏点との関係

まず純粋せん断の場合を考えてみる。軟鋼の降伏点では、せん断応力-ひずみの関係は不安定であって、ある部分で降伏が始まれば、その部分では平衡点に達するまでひずみの増加が続き、平衡点に達すれば、それ以上ひずみが増加するよりも、次の未降伏部分が降伏を始める方が容易となって、新しい部分に降伏が起こり、このようにして降伏が広がっていく。第10図において、 A がせん断応力-ひずみの関係が不安定になる点、 P が平衡点である。

次に引張りの場合を考えてみる。塑性引張りでは、前に述べたように、Iの方向とIIの方向とに交互に細かくすべっているものと考えられる。しかし、降伏点では、せん断応力-ひずみの関係が不安定であるから、ある部分で、どちらかの方向にすべり始めれば、その方向のひずみだけが増すのである。純粋せん断の場合と比べて、降伏を起こす原因は同じであり、したがって、降伏の広がるときのせん断応力 τ_y も同じになるのであって、

$$\tau_y = \text{const} \quad (12)$$

ただし、これは応力分布が均等であるときの降伏応力であることはもちろんである。



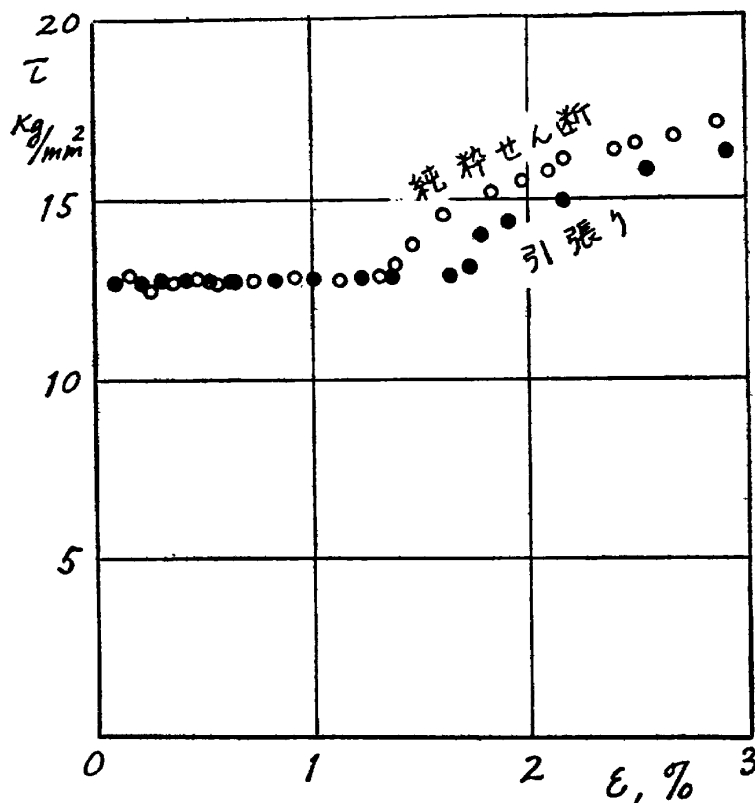
第10図

引張りの場合に、純粹せん断と異なるのは、平衡に達する点である。第 10 図の P 点に達するまでは全く同じであるが、引張りの場合、 I の方向にすべって P 点に達したとすれば、この状態では、 I の方向には応力と抵抗とが平衡を保ちうるが、 II の方向では抵抗の方が小さい。ここで、塑性引張りのところで、第 8 図について説明したのと同じことが起こって、 II の方向のすべりが生じ、さらに続いて I 、 II のすべりが生じて、ひずみも増加し、加工硬化により R の値も増して、第 10 図の T に達して、はじめて、 I の方向にも II の方向にも、抵抗と応力とが平衡を保ちうるようになるものと考えられる。

塑性引張りで、応力が (8)' で表わされるのは、第 8 図について説明した現象が起こるためである。降伏点では、この現象は第 10 図の P 点で起こるのであって、降伏はそれ以前の問題なのである。

簡単に考えれば、不安定であるために第 8 図の OA から CB に移る間隔、すなわち AB の長さが非常に長く現われるということである。そして、ここでは純粹せん断に対しても、引張りに対しても同じように $\tau=2R$ になるのである。

第 11 図は、降伏点付近の実験結果を示したもので、縦軸には τ 、横軸には伸びひずみ ϵ が採られている。材料は C: 0.39% の軟鋼で、試験片寸法は外径 18 mm、内径 16 mm の円筒である。材料が完全な等方性ではないので、塑性部分で正確に $7/8$ になってはいないが、降伏と、その後の塑性変形との関係がよくわかると思う。



第 11 図

結 論

塑性についての新しい理論を提唱した。これはきわめて簡明な理論であって、しかも純粹せん断と引張りとの関係は実験ときわめてよく一致する。なお、履歴環および塑性ひずみによる異方性についてもよく説明することができると思っている。

軟鋼の降伏点については、均等応力分布の場合には、荷重の種類によらずに、せん断応力一定で降伏が広がるということは、すでによく知られているが、新しい塑性理論はこのこととも矛盾するものではない。

終わりに、実験および実験結果の整理を手伝ってくれた永井文雄君に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) 佐藤： 機械学会論文集，24，143 (昭 33)，472.
- (2) 福井 外： 東大理工研報告，8，3 (昭 29)，

塑性変形による異方性*

中西不二夫**・佐藤和郎***

Anisotropy Due to Plastic Deformation

By Fujio NAKANISHI and Yasuo SATO

A new theory of plasticity was advanced to account for various experimental facts, and it was explained in the previous paper that the experiments on the stress relation between tension and pure shear agreed very well with this theory, and that the relation between the yielding of mild steel and the plastic deformation after that could be also accounted for. In this paper, the theory was compared with experiments on the anisotropy due to plastic deformation.

The author's theory is as follows:

1. The plastic deformation is to be divided into shears in 3 directions, and each shear is to be considered individually.

2. Let the resistances to the strain increases in the 3 directions be R_1 , R_2 and R_3 respectively, then

$$R_1=R_2=R_3=R$$

provided that the directions of principal stresses and those of principal strains coincide.

3. When the direction of shear strain is reversed, the stress range of elastic deformation is R concerning each direction.

4. R_1 , R_2 and R_3 do not correspond to the shearing stresses τ_1 , τ_2 and τ_3 , but they correspond to such shearing stresses S_1 , S_2 and S_3 as

$$\sigma_x - \sigma_m = S_3 - S_2$$

$$\sigma_y - \sigma_m = S_1 - S_3$$

$$\sigma_z - \sigma_m = S_2 - S_1$$

where, σ_x , σ_y and σ_z are principal stresses, and σ_m is the mean stress.

Concerning each direction, this theory is a shearing stress theory; the shearing stress in this case is not τ but S .

Anisotropy due to plastic deformations can also be accounted for by this theory. Experiments were carried out for comparison. Thin hollow cylinders of brass were at first deformed plastically under (a) internal pressure, (b) combined tension and internal pressure, the ratio being such that the plastic strain was a pure shear of longitudinal elongation, (c) tension, and (d) combined tension and internal

* 昭和 39 年 7 月 8 日 受付

** 前所長

*** ロケット部長

pressure, the ratio being such that the plastic strain was a compression in the direction of thickness, and unloaded. Then the cylinders were again subjected to internal pressure, and longitudinal and circumferential elongations were measured. The stress-strain relation conformed very closely to the theory.

塑性についての種々の実験事実を説明できるように、一つの試みとして、前に新しい塑性理論を提唱しておいた⁽¹⁾。そして、この理論は、引張りと純粋せん断の関係についての実験とよく一致すること、また軟鋼の降伏はせん断応力一定であり、その後の塑性変形はそうでないが、その理由もよく説明できることを述べた。ここでは、塑性変形による異方性をこの理論ではどう考えているかを説明し、実験と比較してみようと思う。

塑性理論

いま $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は主応力

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ は主ひずみ

τ_1, τ_2, τ_3 はせん断応力で

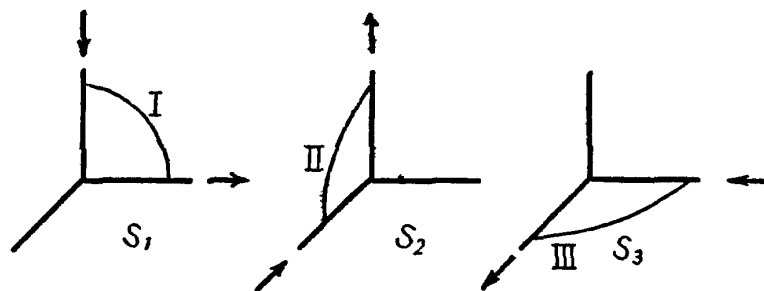
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned} \right\}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はせん断ひずみで、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_y - \varepsilon_z \\ \gamma_2 &= \varepsilon_z - \varepsilon_x \\ \gamma_3 &= \varepsilon_x - \varepsilon_y \end{aligned} \right\}$$

I, II, III はせん断の方向で、 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ のせん断ひずみの方向を I, II, III の方向と呼ぶこととし、 S_1, S_2, S_3 は第1図に示すようなせん断応力であるとする。

τ と S との関係は



第1図 せん断応力 S_1, S_2, S_3

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}S_1 + S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_3 &= -\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

著者の塑性論は、

1. I, II, IIIの3方向のせん断を別々に考える。せん断を別々に考えるということは、せん断ひずみの増加に対する抵抗も、それぞれの方向に別々に R_1, R_2, R_3 であると考えてことである。そうすると、たとえば τ_3 で III の負の方向にすべりを起こす場合には、材料中の微小球体の変形は第2図のようになり、そのときのIIIの方向の抵抗 R_3 はもちろん直接にきいてくるが、I, II の方向にもひずみを起こしているので R_1, R_2 もきいてくることになる。エネルギーの方から考えても、 R_1, R_2 のIII方向への成分から考えても、すべっている間は次のようになっているはずである。

$$\tau_3 = -\frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{2}R_2 - R_3$$

R_1, R_2, R_3 はそれぞれの方向のせん断ひずみ増加に対する抵抗であって、せん断応力に対応するものであるが、上記の関係にもみられるように、直接に τ_1, τ_2, τ_3 に対応するものではない。それぞれの方向に独立に考えるということは、 R_1, R_2, R_3 はせん断応力 S_1, S_2, S_3 に対応するということである。

2. 単調にせん断ひずみが増加していて、主応力の方向と主ひずみの方向とが一致している場合には、 R_1, R_2, R_3 の大きさは等しい。すなわち

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

3. それぞれの方向について、ひずみの変化の方向が逆転した場合に、弾性的に変形する応力範囲は R である。

荷重をおろすとき、または再負荷の場合などに起こるように、ひずみの変化の方向が逆転すれば、その逆転した変化は弾性的である。その弾性的変化がどこまで続き、どこからまた塑性的になるかが決まるのは、 τ によってではなく、 S によってである。それぞれの方向について、その方向の S の変化量が R に達するまでは弾性的であり、そこから先は塑性的になる。

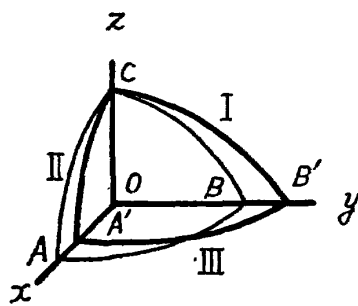
以上の 1, 2, 3 が著者の塑性理論である。3方向に別々に考えるのが特徴であって、それぞれの方向についてはせん断応力理論である。ただし、そのせん断応力というのは、 τ ではなく S である。

異 方 性

この塑性理論を、薄肉円筒に内圧をかけた場合に適用してみよう。この場合は、塑性的には、円

周方向に伸びる一つの純粹せん断である。

いま、材料の中の微小球体を考え、円筒の軸に平行に z 軸、円周方向に y 軸、半径方向に x 軸を採るものとする。そうすると、第 2 図のように、球体の一部 ABC は変形して $A'B'C$ のようになる。この変形は III 方向には負のせん断ひずみ、I, II の方向には正のせん断ひずみになっているので、単調に変形を続けている間は、応力状態は次のようになっているはずである。



第 2 図 内圧による変形

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

この状態を図で示せば第 3 図のようになる。

(2) の応力状態を τ で表わせば、

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= R \\ \tau_2 &= R \\ \tau_3 &= -2R \end{aligned} \right\} \quad (2)'$$

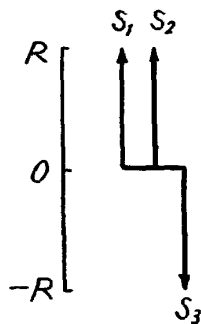
いま、 $\tau_3 = \tau_0, \gamma_3 = \gamma_0$ まで変形を与えてから荷重を下したものとする。そして、次にまたある荷重をかけたものとする。そのとき弾性的に変形する応力の範囲は、

$$\left. \begin{aligned} \text{I の方向;} & S_1 = 0 \sim R \\ \text{II の方向;} & S_2 = 0 \sim R \\ \text{III の方向;} & S_3 = 0 \sim -R \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

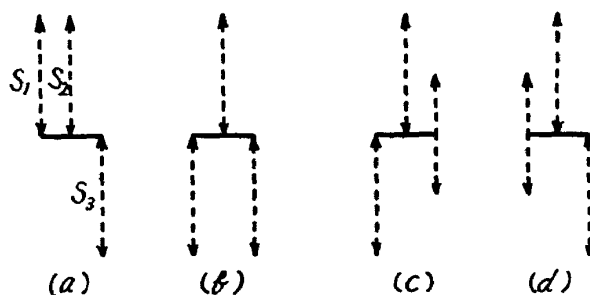
これを図で示せば、第 4 図 (a) のようになる。

このように、方向によって弾性範囲が違うということが、塑性変形によって生じた異方性である。

他の場合についても同様である。薄肉円筒に引張りと内圧とを、塑性的には軸方向に伸びる一つの純粹せん断になるような割合でかけた場合には、応力状態は⁽¹⁾、



第 3 図 内圧による塑性応力状態の図式表示



第 4 図 塑性変形後の弾性範囲の図式表示

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -R \\ \tau_2 &= 2R \\ \tau_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (4)'$$

この荷重を下したときの異方性を図で表わせば、第4図(b)のようになる。

引張りの場合の塑性応力状態は、この前の論文⁽¹⁾に説明しておいたように、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{7}{4}R \\ \tau_2 &= \frac{7}{4}R \\ \tau_3 &= 0 \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (5)'$$

引張りはIの方向とIIの方向に細かく交互にすべっているものと考えられるが、それに応じてIIIの方向は正負のひずみを繰返すことになり、弾性応力範囲がRであるためにS₃の値は(5)のようになる。τ₃は巨視的にみれば0であるが、内部応力が存在することになる。

この荷重を下したときの異方性を図で示せば、第4図(c)のようになる。ただし、IIIの方向の内部応力は、荷重を下しても消えてしまわないで、内部応力として残っているであろう。

薄肉円筒に引張りと同内圧とを、軸方向の引張応力と円周方向の引張応力とが、いつも等しくなるような割合でかけると、これは塑性的には円筒の厚さの方向の圧縮であって、その応力状態は、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \pm \frac{1}{2}R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 0 \pm \frac{1}{2}R \\ \tau_2 &= \frac{7}{4}R \\ \tau_3 &= -\frac{7}{4}R \end{aligned} \right\} \quad (6)'$$

この荷重を下したときの異方性は第4図(d)のようになる。このときには、Iの方向に内部応力が残っている。

内圧による軸方向の伸びひずみ

上記のような異方性のものに、ある荷重をかけるとする。そのときに生ずるひずみの方向が、I、II、IIIのいずれについても、弾性範囲の方向に向いているならば、変形は弾性的である。もし、一つでも弾性範囲の方向からはずれていれば、変形は初めから塑性的になるはずである。

前記第4図(a)、(b)、(c)、(d)の状態のものに内圧をかけた実験結果を採って、理論と比較してみよう。実験に用いた試験片は円筒で、その初めの寸法は外径18mm、内径16mmである。材料は黄銅で、その成分はCu 59.59%、Zn 38.36%、Pb 1.29%、Sn 0.47%、Fe 0.29%。手もとにあった種々の材料について検討し⁽²⁾、ようやく等方性と認められる1本の棒材を見だし、実験にはその材料を用いたのであって、前に引張りと純粋せん断の関係についての実験⁽¹⁾⁽²⁾に用いたものと同じものである。なお、この棒材がたまたま等方性であったので、この成分のものが等方性であるというわけではない。その後も同じ成分のものを使ってみているが、このときのような等方性のものはまだ得られないでいる。実験は第4図(a)、(b)、(c)、(d)のものに内圧を加えて、円筒の外径の伸びと、軸方向の伸びとを測定したものである。

初期変形が弾性的であるか、塑性的であるかというだけでなく、どの方向が塑性的になっているかということまでみるには、内圧による円筒の軸方向の伸びを調べるのがいいと思う。

薄肉円筒に内圧をかけたときの応力は、一つの均等引張応力と、一つのせん断応力とに分けて考えられる。均等引張応力に対しては、材料は弾性的であって、この応力によってすべての方向に弾性引張りひずみを生ずる。せん断応力によるひずみは、第2図に示すようなひずみであって、I、IIの方向は正、IIIの方向は負のひずみである。これを第4図の弾性範囲と比べてみれば、せん断応力による初期変形が弾性的であるか、塑性的であるかがすぐにわかると思う。すなわち、(a)、(d)は弾性的であり、(b)、(c)はIの方向が塑性的になるはずである。

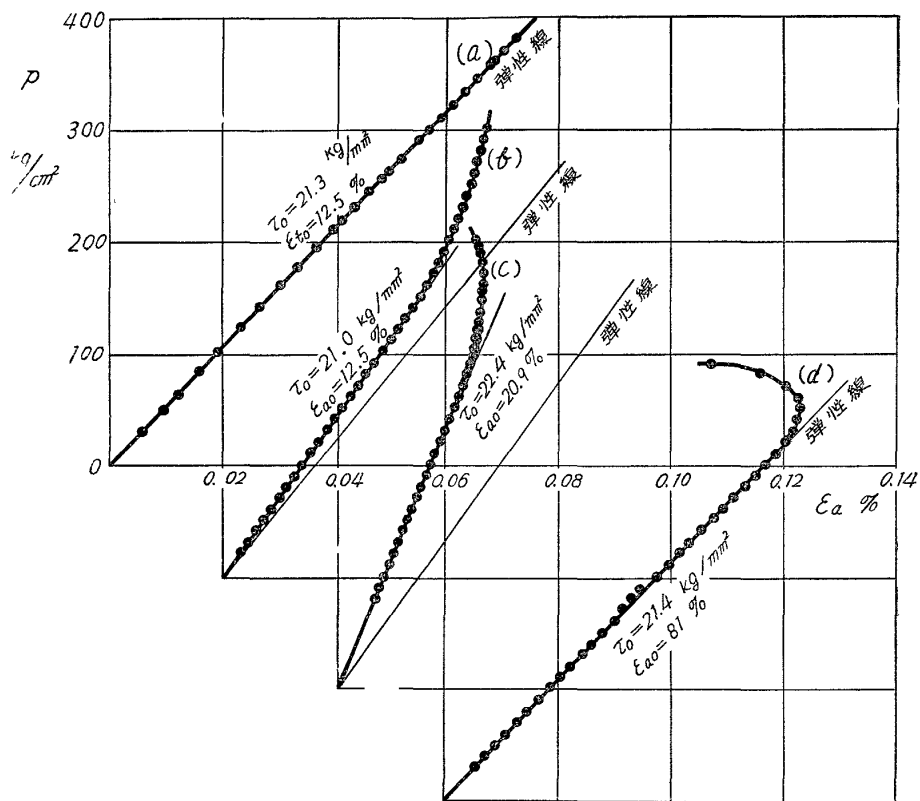
内圧をかけるといえるのは、せん断応力についていえば、IIIの負の方向にせん断応力をかけることであるが、このとき(a)、(d)のように、IとIIとはいずれも弾性的で、その性質が等しければ、せん断応力による軸方向の伸縮は起こらない。すなわち、軸方向に現われるひずみは均等引張りによる弾性ひずみだけである。

これに対して、(b)、(c)のようにIが塑性的、IIは弾性的という場合には、IIIの負の方向のせん断に対しては、軸方向には塑性的な縮みが現われるはずである。すなわち、軸方向の伸びは均等引張りによる弾性ひずみの線からはずれてくるはずである。これらのことを実験と比較してみよう。

(a) 内圧~内圧 初め内圧をかけて、 $\tau_s = \tau_0$ 、外径の伸びひずみ $\epsilon_t = \epsilon_{t0}$ まで変形させてか

ら荷重を下し、次にまた内圧をかけた実験で、第5図(a)が実験結果である。縦軸には内圧 p ，横軸には軸方向の伸びひずみ ϵ_a が採っている。

図の弾性ひずみの線は、試験片のこのときの寸法と、この材料の体積弾性率とから計算した線であって、実験の点はこの上によく乗っている。



(a) 内圧, (b) 純粋せん断, (c) 引張り, (d) 圧縮
第5図 前歴のある円筒に内圧をかけた場合の軸方向の伸びひずみ

(b) 純粋せん断～内圧 ここで純粋せん断というのは、引張りと内圧とを、塑性的には軸方向に伸びる一つの純粋せん断になるような割合でかけた場合のことであって、初め $\tau_2 = \tau_0$, $\epsilon_z = \epsilon_{a0}$ まで変形を与えておいて、次に内圧だけをかけた実験である。結果は第5図(b)に示す。

実験の点は弾性線からはずれて、軸方向に塑性的に縮んでいることがよくわかる。

(c) 引張り～内圧 初め引張りによって、 $\tau_2 = -\tau_1 = \tau_0$, $\epsilon_z = \epsilon_{a0}$ まで変形を与えておいて、次に内圧をかけた実験で、第5図(c)が実験結果である。これも軸方向に塑性的に縮んでいて、理論とよく合っている。

(d) 圧縮～内圧 ここで圧縮というのは、円筒に引張りと内圧とを、軸方向引張応力と円周方向引張応力とが、いつも等しくなるような割合でかけて、塑性的には円筒の厚さの方向の圧縮になるようにしたものである。初め圧縮によって、 $\tau_2 = -\tau_3 = \tau_0$, $\epsilon_z = \epsilon_{a0}$ まで変形を与えておいて、次に内圧をかけた実験で、第5図(d)が実験結果である。実験の点は弾性線の上によく乗っている。

以上四つの実験結果にみるように、実験と理論とはよく合っている。

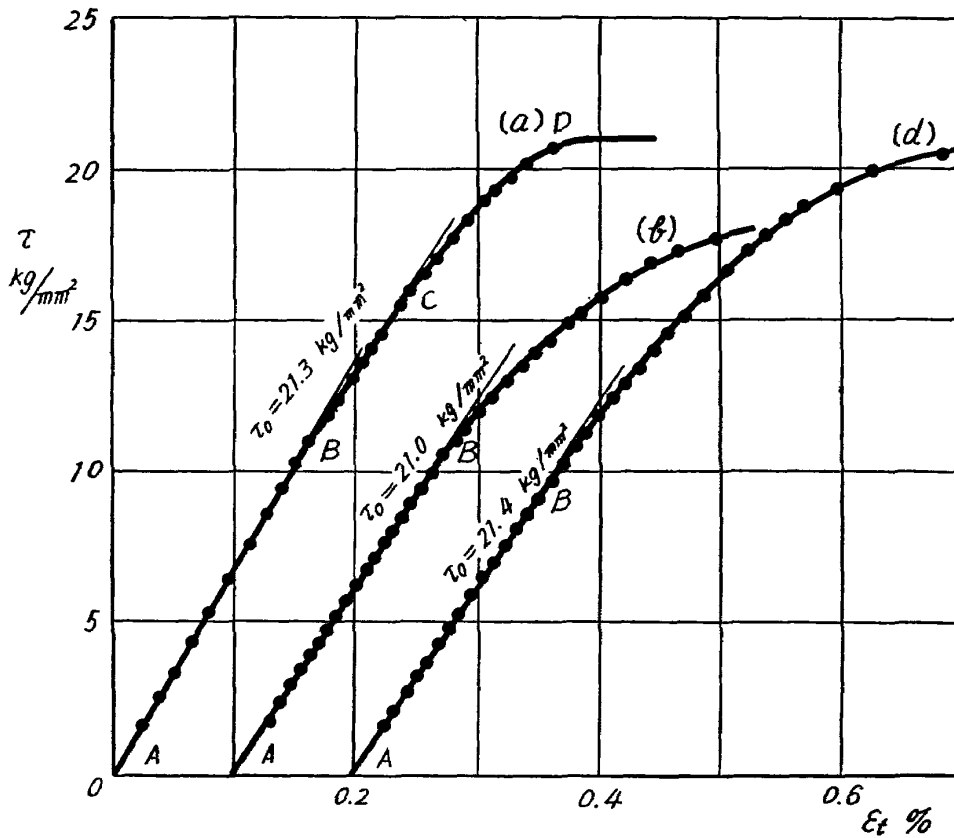
内圧による応力～ひずみの関係

初期変形だけでなく、その後の応力-ひずみの関係も、著者の理論で説明できると思っている。実験と理論と比較してみよう。

(a) 内圧～内圧 内圧～内圧の場合の応力-ひずみの関係を図に示せば、第6図 (a) のようになる。縦軸は内圧によるせん断応力 τ_s であり、横軸は円筒外径の伸びひずみ ϵ_t である。応力-ひずみ曲線は B, C, D で急に曲っているが、これらの点の応力と、初めの荷重を下す前の応力 τ_0 とを比べてみると、次のようになっている。

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ において,} \\ C \text{ において,} \\ D \text{ において,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tau_s = \frac{1}{2} \tau_0 \\ \tau_s = \frac{3}{4} \tau_0 \\ \tau_s = \tau_0 \end{array} \quad (7)$$

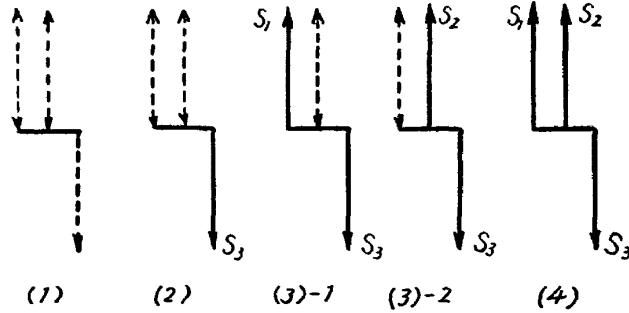
著者の理論では、内圧～内圧というのは、初めの荷重を下したことによって、弾性応力範囲が第7図(1)のようになっているものに、せん断応力だけについて考えれば、最終的には第7図(4)のようになる応力をつけることである。



(a) 内圧～内圧, (b) 純粹せん断～内圧, (d) 圧縮～内圧

第6図 前歴のある円筒に内圧をかけた場合の応力-ひずみの関係

材料が塑性的になれば、 S_1, S_2, S_3 の値は決まってくるが、弾性範囲では、これらの値は決ま
てこない。しかし、弾性状態からすべての方向が塑性的になるまでに、 S_1, S_2, S_3 が一つずつ順次
かかってくるものと考えれば、以上の実験結果は説明がつく。なお、内圧によるせん断応力は、III
の方向のせん断応力であって、これは S_3 そのものであるから、内圧を受けることによって最初に
かかるのは S_3 であると考えことにする。そうすると、第7図(2)の状態に達したところで、III
の方向が塑性的になる。この状態は



第7図 内圧～内圧の場合の S_1, S_2, S_3 のかかり方

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}R \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}R \\ \tau_3 &= -R = \frac{1}{2}\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)'$$

これは、第6図(a)のB点に相当する。

さらに内圧を増せば、 S_3 はこれ以上増し得ないので、 S_1 または S_2 がかかることになるであろ
う。そして、第7図(3)-1 または (3)-2 の状態に達したところでは、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= R \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3}{2}R \\ \tau_2 &= 0 \\ \tau_3 &= -\frac{3}{2}R = \frac{3}{4}\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)'$$

または、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 0 \\ \tau_2 &= \frac{3}{2}R \\ \tau_3 &= -\frac{3}{2}R = \frac{3}{4}\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)'$$

ここで、I または II の方向が塑性的になるであろう。これは第 6 図 (a) の C 点に相当する。

第 7 図 (3)-1 または (3)-2 の状態は、それ自身では純粹せん断ではないので、おそらくこの二つの状態が混ざって存在しているのであろう。そして応力は次の状態になっているであろう。

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3}{4}R \pm \frac{3}{4}R \\ \tau_2 &= \frac{3}{4}R \mp \frac{3}{4}R \\ \tau_3 &= -\frac{3}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

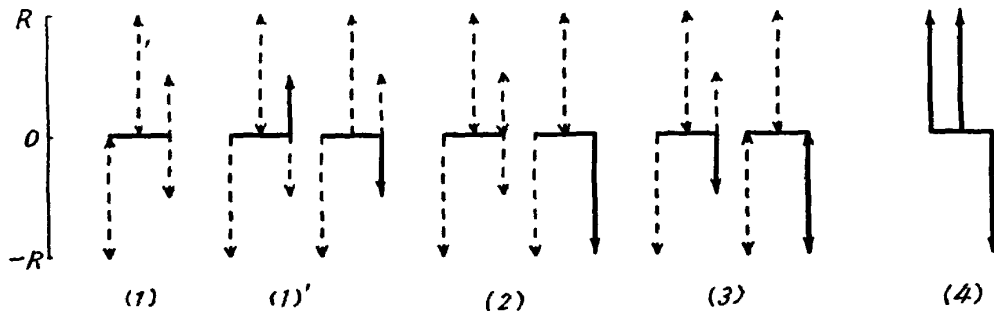
内部応力は存在しているが、巨視的にみれば、これは III 方向の一つのせん断応力である。

さらに内圧を増せば、終わりに第 7 図 (4) の応力状態に達する。これは初めの荷重を下す前の応力状態であって、ここですべての方向は塑性的となり、ここから先は塑性流動を起こすことになる。

(b) 純粹せん断～内圧 これは第 4 図 (b) の状態にある試験片に、最終的には第 3 図のようになる応力を加える場合である。

応力-ひずみの関係は第 6 図 (b) のようになる。前に述べたように、I の方向は初めから塑性的であるが、応力-ひずみの関係は直線的である。B 点に達したところで直線からはずれてくるが、そのときの応力は

B 点において、
$$\tau_3 = \frac{1}{2}\tau_0$$



第 8 図 引張り～内圧の場合の S_1, S_2, S_3 のかかり方

前と同じように、内圧を加えることによって最初にかかるのは、 S_3 であると考え。そうすると、次の状態に達したところでⅢの方向が塑性的になる。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

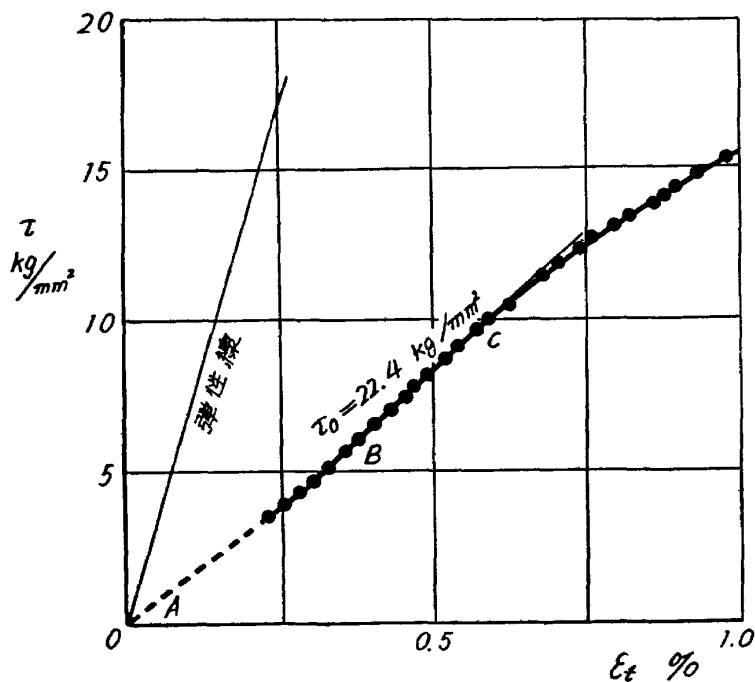
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}R \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}R \\ \tau_3 &= -R = \frac{1}{2}\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)'$$

これが実験のB点に相当する。

さらに内圧を増せば、 S_1 または S_2 が加かることになるであろう。 S_1 が加かれば、それにつれてⅠの方向では弾性応力範囲の移動をともしうことになるが、こういう場合にはいつも応力-ひずみの関係はゆるやかになるようである。実験でB点から先がゆるやかになっているのは、このためであると思われる。そして、応力-ひずみ曲線が漸近的に到達する最後の値は $\tau_3 = \tau_0$ である。

(c) 引張り～内圧 これは第8図(1)の状態の試験片に、最終的には第8図(4)のようになる応力がかかる場合である。

実験結果は第9図に示す。この応力-ひずみ曲線の特徴は、前の(a),(b)の場合と比べて傾きが非常にゆるやかであることと、初めのうちは下方に凸形であることである。



第9図 引張り～内圧の場合の応力-ひずみの関係

下方に凸形になるのは、 B 点で上方に曲るためであるが、第9図では、この点はあまり明らかでない。途中で一度下して、また上げると、応力-ひずみの関係はもちろん急になるが、この曲がる点の応力は正確に測定することができて、次のようになることがわかっている。

$$\tau_3 = \frac{2}{7}\tau_0$$

著者の理論では、引張りで塑性変形を与えた後の状態は、第8図(1)のようになっている、しかもⅢの方向には $\pm\frac{1}{2}R$ の内部応力が残っているはずである。すなわち、 $+\frac{1}{2}R$ の部分と $-\frac{1}{2}R$ の部分が存在しているはずであって、これを図に表わすと第8図(1)'のようになる。

内圧を加えれば、最初は S_3 がかかり、 S_3 が次の値になったところが、第8図(2)の状態である。

$$S_3 = -\frac{1}{2}R \quad (13)$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{2}R = \frac{2}{7}\tau_0 \quad (13)'$$

ここに達するまでは、図にみるように、一部は弾性的であり、一部は塑性的で、しかも弾性応力範囲の移動をともなっている。応力はⅢの方向のせん断応力であり、弾性応力範囲の移動の行なわれているのもⅢの方向であり、そのためにⅢの方向のせん断ひずみが大きく現われて、第9図の AB の間の傾きが非常にゆるやかになったものと考えられる。

第8図(2)の状態に達したところで、弾性応力範囲の移動は止まる。そこで、ここから先は応力-ひずみの関係がいくらか急になるものと考えられる。

第8図(3)の状態に達すれば、ここから先は、いままで弾性変形をしていた部分に弾性応力範囲の移動が行なわれることになる。したがって、ここでまた応力-ひずみ曲線の傾きはゆるやかになるであろう。この状態での、平均の S_3 の値は

$$S_3 = -\frac{3}{4}R \quad (14)$$

$$\tau_3 = -\frac{3}{4}R = \frac{3}{7}\tau_0 \quad (14)'$$

第9図の C 点がこれに相当する。

このようにして、まず S_3 、次に S_1 または S_2 がかかり、漸近的に到達する最終値は

$$\tau_3 = -2R = \frac{8}{7}\tau_0 \quad (15)$$

(d) 圧縮～内圧 これは、第4図(d)の状態にある試験片が、内圧を受ける場合である。実験結果は第6図(d)に示す。

内圧をかければ、まず最初に S_3 がかかってきて、次の状態に達したところでⅢの方向が塑性的

になるであろう。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\tau_3 = -R = \frac{4}{7}\tau_0 \quad (16)'$$

さらに内圧を増せば、 S_1 または S_2 がかかってくるであろう。そして、 S_1 のかかる部分が次の状態に達したところで、I の方向が塑性的になるであろう。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}R \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\tau_3 = -\frac{5}{4}R = \frac{5}{7}\tau_0 \quad (17)'$$

I の方向には、内部応力が残っている。これを考慮に入れば、III の方向が塑性的になるのは

$$\tau_3 = -R \pm \frac{1}{4}R = \frac{3}{7}\tau_0 \sim \frac{5}{7}\tau_0 \quad (16)''$$

第6図(d)で、応力-ひずみ曲線が直線関係からはずれ始める点は、 $3\tau_0/7$ になっていて、(16)'' に相当する。

I の方向が塑性的になるのは、内部応力を考慮に入れば、 S_1 がかかり始めるとすぐになるはずであって、(17) の S_1 の代りに内部応力を考えればいいので、(17)' はそのままいい。第6図(d)では、この点は明らかでないが、第5図(d)で軸方向の塑性的縮みの始まる点が、ちょうどこの点に相当している。

しかし、ここに、こういう問題がある。I の方向の弾性応力範囲は $\pm \frac{1}{2}R$ であり、そこに $\pm \frac{1}{2}R$ の内部応力が残っている。前の引張り～内圧の場合には、III の方向に内部応力が残っていて、その方向にせん断応力 S_3 が働くのであるから、その方向もすぐに塑性的になるのは当然である。圧縮～内圧の場合にも、最初にかかるのは S_3 であるが、そのためにIII の方向だけでなく、I、II の方向にもひずみを起こす。このI の方向のひずみに対して、内部応力がなければ、もちろんI の方向は弾性的であるが、内部応力があっても弾性的であるかどうかは問題である。第5図(d)の実験結果は、これが弾性的であることを示している。I の方向が塑性的になるか否かは S_1 によって決まるのであって、内部応力があるために、 S_1 がかければすぐに塑性的になるであろう。しかし、 S_1 がかけられない限りI の方向は弾性的であって、残存内部応力があり、その上に S_3 によるI 方向のひずみが加わっても弾性的であると解釈できる。これでいいと思うが、この点に関しては研究の余地がある。

圧縮～内圧の場合に、漸近的に到達する最終値は、

$$\tau_3 = -2R = \frac{8}{7}\tau_0 \quad (18)$$

結 言

塑性変形による異方性を、著者の理論ではどう考えているかを説明した。

再負荷の場合にひずみの方向が一つでも前歴のひずみの方向と違えば、変形は初めから塑性的であるという実験結果は、次のことを示している。

1. 3方向のせん断を別々に考えるべきこと、
2. ある荷重を下し、次に別種の荷重をかけるとき、荷重を下すときのひずみの変化の方向が、再荷重のときにもそのまま続くときには、その変化は塑性的であること。

また、弾性状態から塑性流動を起こすまでの応力-ひずみ曲線の形は、 S_1, S_2, S_3 が一つずつ順次かかってくるものと考えれば、著者の理論とよく一致する。そして、次のことを示している。

3. それぞれの方向について、ひずみの変化の方向が逆転した場合に、その逆転したひずみは初めは弾性的であり、その方向のせん断応力 S の変化量が R に達したところでまた塑性的になること。
4. R の大きさは、3方向いずれについても同じであること。

これは、結晶集合体の材料の塑性については、どうしても著者の理論のように考えなければならぬことを示しているものと思う。

以上の実験は、いずれも主応力の方向と主ひずみの方向が一致している場合である。一致しない場合に、 R の値は方向によって差があるかどうか、これについてはもっか研究中である。

終わりに、実験および実験結果の整理を手伝ってくれた永井文雄君に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) 中西・佐藤： 機械学会論文集，24，147 (昭 33-11)，791.
- (2) 佐藤： 機械学会論文集，24，143 (昭 33-7)，472.

塑性流動に及ぼす中間主応力の影響*

中西不二夫**・佐藤和郎***

Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow

By Fujio NAKANISHI and Yasuo SATO

Let σ_1 , σ_2 and σ_3 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) be the principal stresses, and $\sigma_3 = 0$. Taking σ_1 and σ_2 as the axes, the limit over which the plastic flow may occur is not expressed by a smooth curve by the authors' theory, but under the stress field between tension and pure shear, it is expressed by two straight lines which abruptly bend at $\sigma_1 = 4\sigma_2$.

Experiments were carried out. The results show that there is a sudden bent as expected according to the authors' theory.

前に塑性の新理論を提唱し、これによって塑性についての種々の実験事実を説明できることを報告した⁽¹⁾⁽²⁾。その一つとして、塑性引張りと塑性純粋せん断応力の関係も実験と理論とはよく一致する⁽¹⁾。ここでは、引張りと純粋せん断との中間の状態に

塑性理論

いま、 σ_x , σ_y , σ_z は主応力、

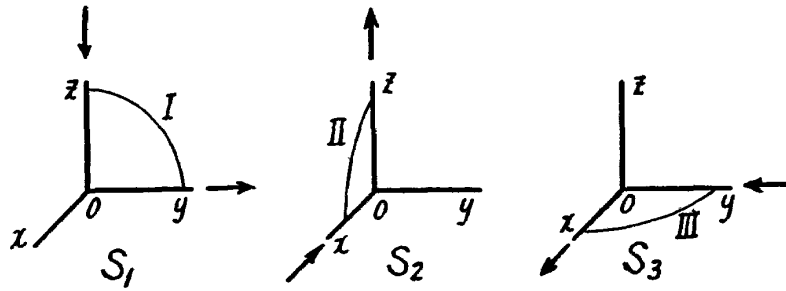
τ_1 , τ_2 , τ_3 は主せん断応力で、

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z), \\ \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x), \\ \tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \end{array} \right.$$

S_1 , S_2 , S_3 は第1図に示すようなせん断応力であるとすれば、

τ と S の関係は

* 昭和 39 年 7 月 8 日 受付
 ** 前所長
 *** ロケット部長



第 1 図

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}S_1 + S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_3 &= -\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ は主ひずみ,

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はせん断ひずみで

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_y - \varepsilon_z \\ \gamma_2 &= \varepsilon_z - \varepsilon_x \\ \gamma_3 &= \varepsilon_x - \varepsilon_y \end{aligned} \right.$$

I, II, IIIはせん断の方向で $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ のせん断ひずみの方向を I, II, IIIの方向と呼ぶこととする。

著者の塑性理論は,

1. I, II, IIIの3方向のせん断を別々に考える。

別々に考えるということは, せん断ひずみの増加に対する抵抗も, それぞれの方向に独立に R_1, R_2, R_3 であると考えることである。そうすると, たとえば, τ_2 でIIの方向にすべりを起こしたとしてみると, 材料中の微小球体の変形は第2図のようになり, そのときにIIの方向の抵抗 R_2 はもちろん直接にきいてくるが, I, IIIの方向にもひずみが起こっているので, R_1, R_3 もきくことになる。エネルギーの方から考えても, R_1, R_3 のII方向への成分から考えても, すべっている間は次のようになっているはずである。

$$\tau_2 = \frac{1}{2}R_1 + R_2 + \frac{1}{2}R_3$$

R_1, R_2, R_3 はそれぞれ方向のせん断ひずみ増加に対する抵抗であって, せん断応力に対応するものであるが, 上記の関係にもみられるように, 直接に τ_1, τ_2, τ_3 に対応するものではない。それぞれの方向に独立に考えるということは, R_1, R_2, R_3 はせん断応力 S_1, S_2, S_3 に対応するというこ

とである。上記の関係と (1) とを比べてみても、このことは明らかである。

2. 単調にせん断ひずみが増加していて、主応力の方向と主ひずみの方向とが一致している場合には、 R_1, R_2, R_3 の大きさは等しい。すなわち

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

3. それぞれの方向についてひずみの方向が逆転した場合には、弾性的に変形する応力範囲は R である。荷重をおろすとき、または再荷重の場合などに起こるように、ひずみの変化の方向が逆転すれば、その逆転した変化は弾性的である。その弾性的変化がどこまで続き、どこからまた塑性的になるかが決まるのは、 τ によってではなく、 S によってである。それぞれの方向について、その方向の S の変化量が R に達するまでは弾性的であり、そこから先は塑性的になる。

以上 1, 2, 3 に述べたのが著者の塑性理論である。3方向を別々に考えるのが特徴であって、それぞれの方向についてはせん断応力理論である。ただし、そのせん断応力というのは、 τ ではなく、 S である。

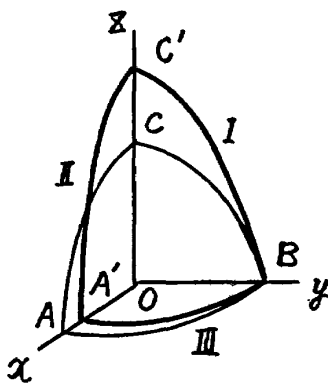
この理論を、薄肉円筒に引張りと内圧とを、塑性的には軸方向に伸びる純粹せん断になるような割合で、かけた場合に適用してみよう。

材料の中に微小球体を考え、円筒の軸に平行に z 軸、円周方向に y 軸、半径方向に x 軸を採るものとする。そうすると、この場合には、第2図のように球の一部 ABC は変形して $A'BC'$ になる。すなわちIIは正の方向の変形、I, IIIは負の方向の変形になっているから、単調に変形を続けているときの応力状態は、著者の理論では次のようになっているはずである⁽¹⁾。

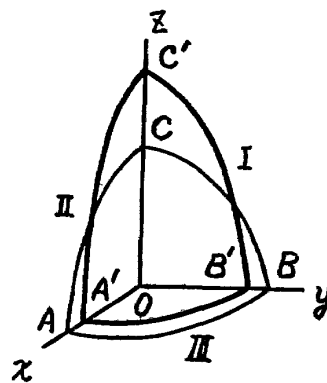
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

応力状態を τ で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -R \\ \tau_2 &= 2R \\ \tau_3 &= -R \end{aligned} \right\} \quad (2)'$$



第2図 純粹せん断



第3図 引張りによる変形

同様に、引張りの場合には第 3 図のようになって、その応力状態は⁽⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{7}{4}R \\ \tau_2 &= \frac{7}{4}R \\ \tau_3 &= 0 \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (3)'$$

引張りでは I, II の方向に細かく交互にすべっているものと考えられるが、I の方向にすべるときは III は正の方向の変形、II の方向にすべるときは III は負の方向の変形になる。すなわち III の方向では正負の変形を繰り返しているのであって、その弾性応力範囲は R であり、 τ_1 と τ_2 とは大きさは等しくなければならないので、 S_3 の値は (3) 式のようにならなければならない⁽⁴⁾。 $+\frac{1}{2}R$ が I 方向のすべりに対するもの、 $-\frac{1}{2}R$ が II に対するものである。(3)' 式の τ_3 は、巨視的にみれば 0 であるが、ある瞬間についてみれば、I の方向にすべっている部分もあり、II の方向にすべっている部分もあって、III の方向には $\pm\frac{1}{2}R$ の内部応力が存在していることになる。

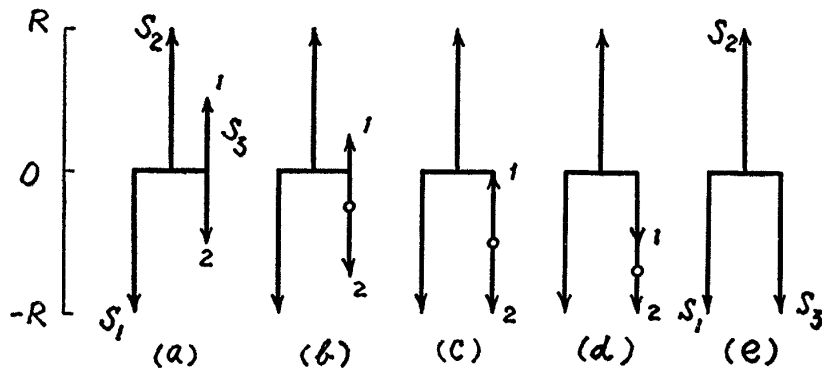
中間主応力の影響

いま、塑性変形には均等引張り、均等圧縮は影響はないものとする。そうすると、塑性については、次のような $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を主応力と考えても一般性を失わない。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z - \sigma_x \\ \sigma_2 &= \sigma_y - \sigma_x \\ \sigma_3 &= \sigma_x - \sigma_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

そして、 $\sigma_2=0$ なら引張りであり、 $\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_1$ なら純粋せん断である。この中間、すなわち $0 < \sigma_2 < \frac{1}{2}\sigma_1$ の範囲の塑性流動の応力状態を調べるのが、ここでの目的である。そして、この範囲さえわかれば、他の範囲もおのずからわかることになる。

(3) 式で表わされる塑性引張りの応力状態を、図で示せば第 4 図 (a) のようになる。同様に、(2) 式の純粋せん断の状態は第 4 図 (e) のようになる。この二つを比べてみると、違うのは III の方向の S_3 の値である。中間主応力 σ_2 が 0 から増すに従って S_3 の状態が変り、 $\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_1$ のところで第 4 図 (e) の状態になるのである。そうすると、その中間の状態は第 4 図 (b), (c), (d) のよう



第4図 引張りから純粋せん断までの応力状態の図式表示

になっているに相違ない。

第4図の(a)から(c)の間は、 $\pm \frac{1}{2}R$ の弾性範囲が移動している状態であって、その間の塑性応力状態は

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -\alpha R \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

τ で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{7}{4}R + \frac{1}{2}\alpha R \\ \tau_2 &= \frac{7}{4}R + \frac{1}{2}\alpha R \\ \tau_3 &= -\alpha R \pm \frac{1}{2}R \end{aligned} \right\} \quad (5)'$$

τ_3 の $\pm \frac{1}{2}R$ というのは内部応力であって、外力による応力を考えるときには省略していいものである。 τ_1, τ_2, τ_3 は、また

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}\sigma_1 \\ \tau_3 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(5)', (6) 式から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{7}{2}R + \alpha R \\ \sigma_2 &= 2\alpha R \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_1 = \frac{7}{2}R + \frac{1}{2}\sigma_2 \quad (8)$$

これが、塑性流動状態における σ_1 と σ_2 の関係である。図に示せば、第5図の直線 TQ である。そして、第4図(c)の状態が第5図の Q に対応する。

第4図(c)の状態に達すれば、IIの方向のすべりに対する S_3 の値は、すでに $-R$ に達していて、その絶対値はこれ以上増すことはできない。Iの方向のすべりに対する S_3 の値は、初め正の値であったのが、第4図(c)で0となり、ここから先は負の値となる。そして第4図(e)の純粹せん断において、Iのすべりに対しても、IIのすべりに対しても $-R$ になるはずである。すなわち第4図の(c)から(e)の間では、応力状態は

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -R \\ S_2 &= R \\ S_3 &= -\alpha R \pm (1-\alpha)R \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

τ で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -2R + \alpha R \\ \tau_2 &= 2R \\ \tau_3 &= -\alpha R \pm (1-\alpha)R \end{aligned} \right\} \quad (9)'$$

外力による応力を考える場合には、 τ_3 の $\pm(1-\alpha)R$ は省略してさしつかえないから、(9)'式と(6)式とから

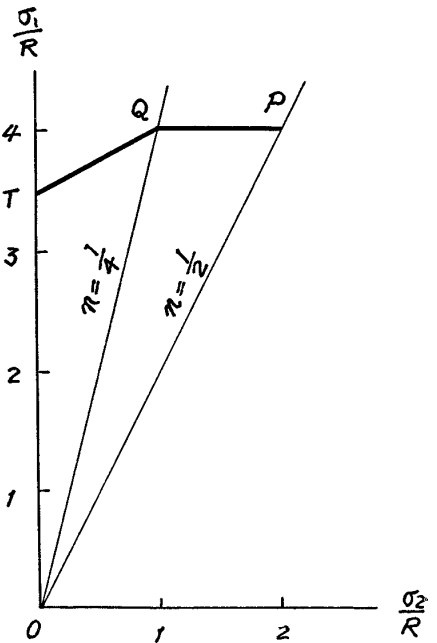
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 4R \\ \sigma_2 &= 2\alpha R \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これを図に表わせば、第5図の水平線 QP となる。

すなわち、塑性流動の限界線は、著者の理論ではなめらかな曲線ではなく、塑性引張りの点 T と塑性純粹せん断の点 P との間は2本の直線になっている。

$$\sigma_2 / \sigma_1 = n$$

とおけば、 $n=0$ が引張りであり、それから $n=\frac{1}{4}$ までは $\frac{1}{2}$ の傾きをもった1本の直線、 $n=\frac{1}{4}$ から $n=\frac{1}{2}$ の純粹せん断までは、水平な直線であって $n=\frac{1}{4}$ のところで急に曲がることになる。



第5図 塑性流動の限界

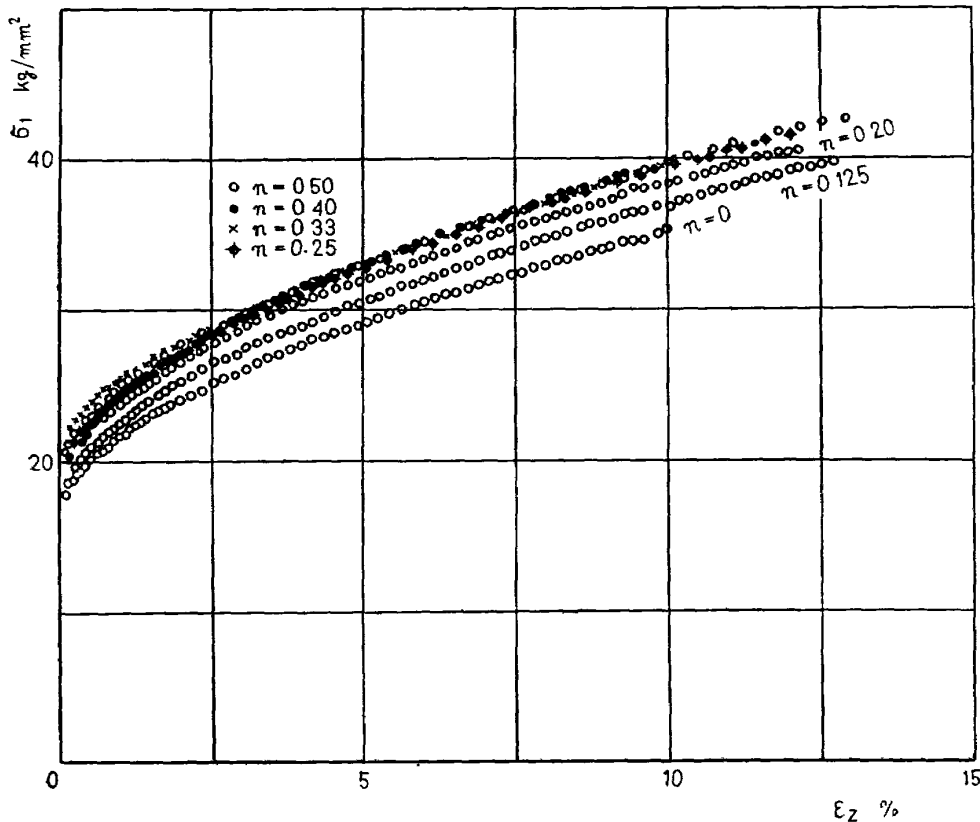
実験 1

塑性純粋せん断と塑性引張りの関係は、 R の等しいところで最大せん断応力の比、すなわち σ_1 の比が $8/7$ になるということは、すでに前の実験⁽¹⁾で確かめられている。ここでは、その中間を調べるために、 n の種々の値について実験してみた。

試験片は外径 18 mm, 内径 16 mm の円筒である。材料は黄銅で、成分は前の実験のと同じであって、Cu 59.59%, Zn 38.36%, Pb 1.29%, Sn 0.47%, Fe 0.29%。前の実験は、種々の材料の棒について検討して、ようやく十分等方性であると認められる 1 本の棒材を見だし、それから削り出した試験片について実験したものである。ここでも、それと同じ成分の材料を用いた。しかし、前のときほど完全に等方性ではないようである。しかし、引張りと純粋せん断の実験結果は、前の実験とよく一致するので、この目的には、これで十分であると考えられる。

実験は、引張りと内圧とを種々な割合でかけたものであって、その結果は第 6 図に示す。縦軸には σ_1 、横軸には軸方向の伸びひずみ ϵ_z を採っている。

第 5 図は σ_1, σ_2 と R との比で表わしてある。 R の値は加工硬化によってひずみとともに増すものであるが、その値はすべり量の関数であると考えられる。引張りと軸方向に伸びる純粋せん断とでは、引張りひずみの等しいところで、すべり量が等しいことになる⁽¹⁾。その中間についても同



第 6 図 n の種々の値についての応力-ひずみ曲線

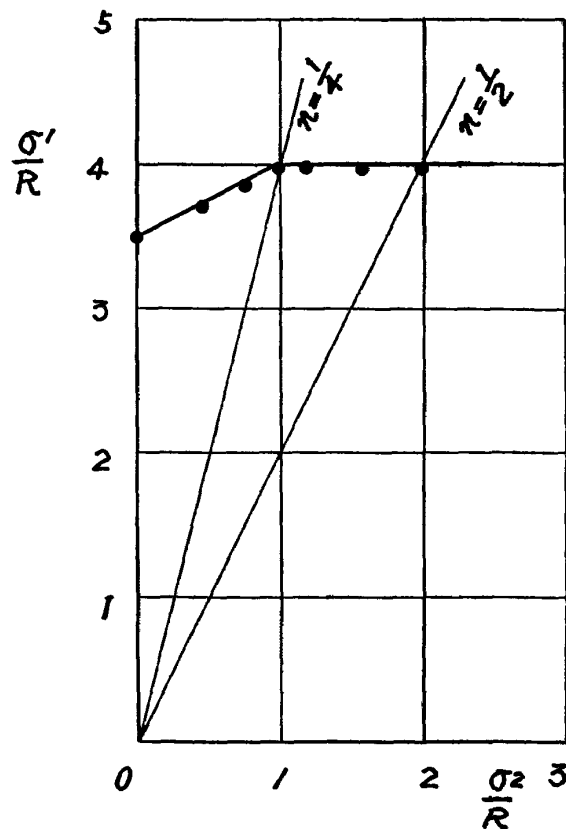
様である。したがって、 R の等しいところで比較するという事は、引張りひずみ ε_x の等しいところで比較するという事である。

純粹せん断，すなわち $n=0$ のところでは (3)' 式から

$$\tau_2 = \frac{7}{4}R, \quad \sigma_1 = \frac{7}{2}R$$

であるから、第6図の ε_x の等しいところで、引張りの σ_1 を $\frac{7}{2}R$ として、他の曲線の σ_1 との比を採って図に表わすと第7図のようになる。第5図と比べて理論と実験とはよく合っている。

試験片は1本の棒材から削り出したものである。しかし、材料は完全に均等であると考えられないので、 $n=\frac{1}{4}$ のところで急に曲る事の証拠としては、この実験だけでは不十分かも知れない。そこで、1本の試験片について、さらに実験をしてみることにした。

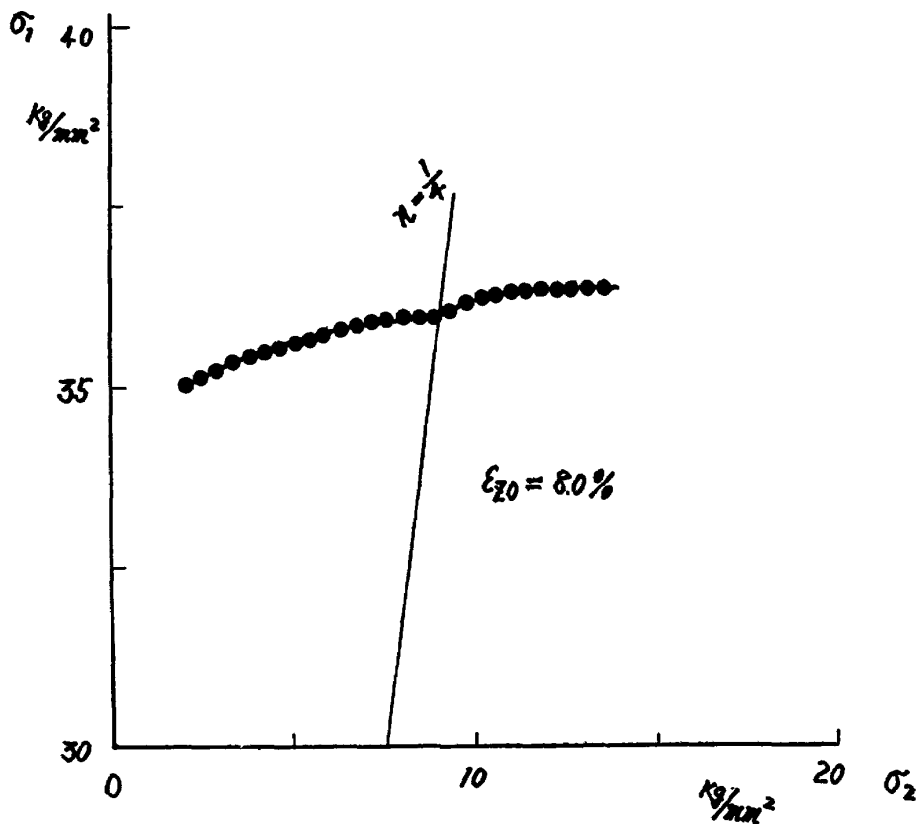


第7図 塑性流動限界の実験結果

実 験 2

多数の試験片を使わないで、1本の試験片で、 $n=\frac{1}{4}$ のところに急な曲りがあるかどうかを調べたものである。すなわち、初め引張りで塑性変形を起こさせておき、次にその上に内圧を加えていって、 $n=\frac{1}{4}$ のところで、塑性流動の限界線が急に曲るかどうかをみる実験である。試験片の材料、寸法は前の実験のときと同じである。

自動平衡形の試験機を用いて、引張りで伸びひずみ $\epsilon_x = \epsilon_{x0}$ まで塑性変形を与えておき、荷重の方はそのままにして、手を触れなくて、内圧を加えていくと、第 8 図のような結果が得られる。



第 8 図 引張りの上に内圧を加えたときの応力の変化

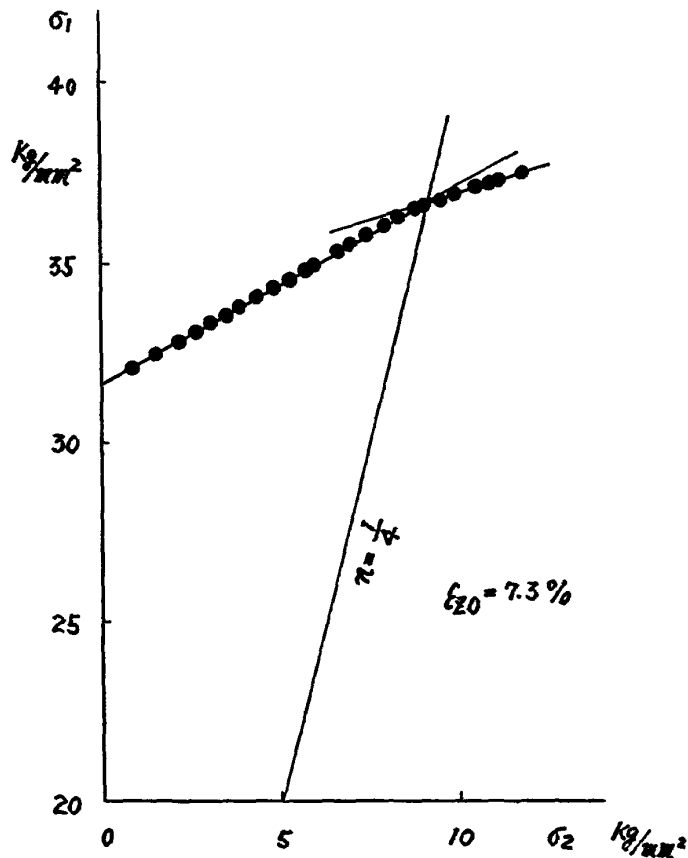
$n = \frac{1}{4}$ の前後でようすの変ることは認められるが、第 5 図の形とは全く違う形である。このように出てきたのは、実験方法がこの目的に合わないからであると思われる。その理由は

1. 内圧による応力は、均等引張りと同様の負の方向のせん断とに分けて考えられる。均等引張りによっては、すべての方向に弾性引張りひずみが起こる。また、IIIの負の方向のせん断に対しては、IIの方向は塑性的に変化するが、Iの方向はひずみの変化が引張りのときとは逆になるために弾性的であり、そのためにIII方向のせん断によって、軸方向に伸びひずみを起こす。結局内圧をかけることによって、わずかではあるが試験片は軸方向に伸びひずみを起こす。試験機に手を触れなくておけば、この伸びひずみのために荷重は下がってくるのであって、この実験は伸びひずみによる引張荷重の降下を測定したことになる。

2. 上記のように、内圧を加えると、IIの方向には引張りによる正のひずみに引き続いて正の塑性ひずみを起こすので、この方はさしつかえない。Iの方向は、引張りでは負のひずみであったのに対して、内圧を加えると正のひずみを起こさなければならないのであって、弾性的に応力が下がることになる。いま測ろうとしているのは、塑性流動、すなわちすべての方向が塑性的になっているときの応力であって、Iの方向が弾性的に応力が下がっているという状態ではいけないのである。

塑性流動の状態にするためには、すなわち I の方向も塑性的にするためには、内圧を加えた後で引張りによる塑性流動を起こし始めるまで引張荷重を増す必要がある。そこで、そういう方法で実験をやり直すことにした。

実験方法は、まず引張荷重をそのままにして、内圧を増し、次に内圧を一定に保ったままで引張塑性流動をごくわずか起こすまで引張荷重を増し、平衡に近い状態になるのを待って、引張荷重を読む。これを繰り返すという方法である。

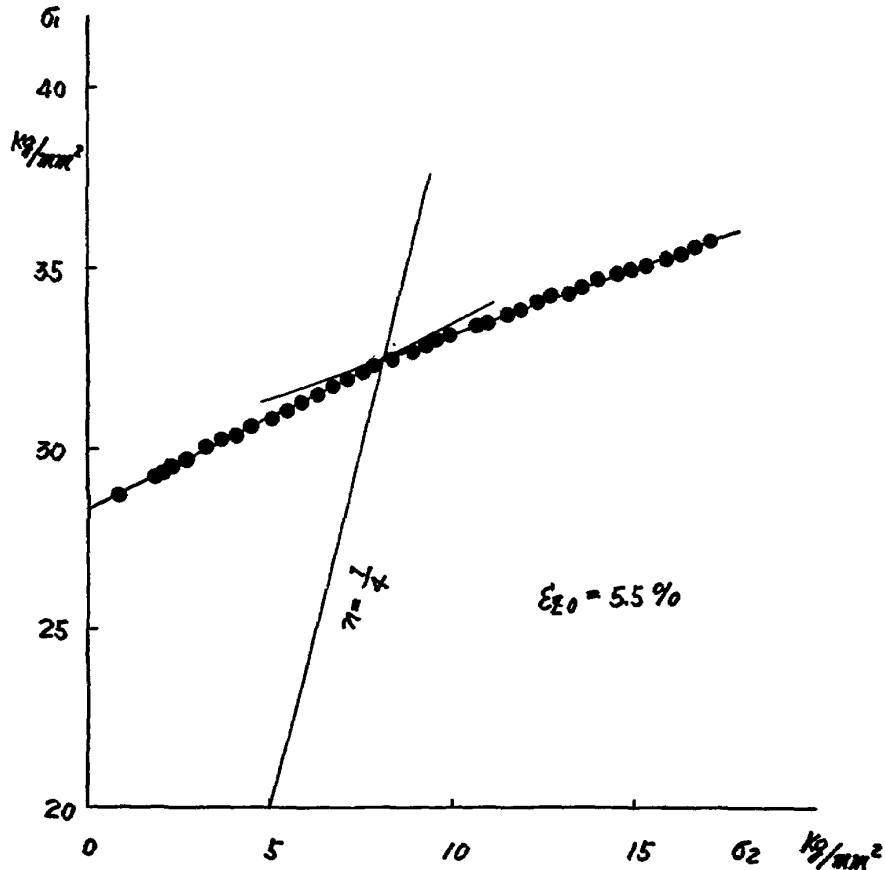


第9図 塑性流動の限界の実験結果

第9図、第10図はこのようにして得られた実験結果である。第9図に示したのは、まず引張りによって軸方向伸びひずみ $\epsilon_z = \epsilon_{z0}$ を与えてから、内圧と引張りとを加えていったもので、図に示しただけの点を探る間に、軸方向には、内圧による伸びと、引張荷重の増加による伸びと、わずかずつではあるが引張塑性流動を与えたための伸びと、合わせて 2.1% 伸びている。第10図のものについても同様であって、実験中に 2.4% 伸びている。

実験結果は図にみるように、 $n = \frac{1}{4}$ のところに急な曲りがめいりょうに現われている。これは、著者の理論の正しいことを示すものとみていいであろう。

第9図、第10図で、引張りの σ_1 と $n = \frac{1}{4}$ のところの σ_1 との比は $\frac{7}{8}$ になっていないし、また $n > \frac{1}{4}$ で σ_1 は一定にもなっていない。しかし、これは当然のことである。7/8 になるとか、ま



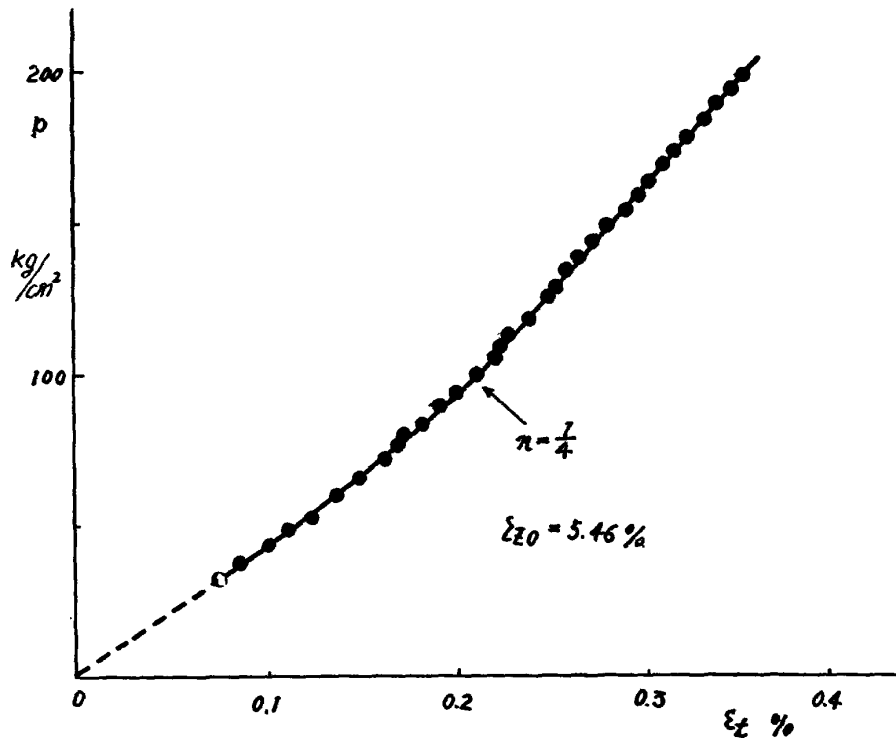
第 10 図 塑性流動の限界の実験結果

た $n > \frac{1}{4}$ で水平になるとかいうのは、 R の値の等しいところで比較しての話であって、ここでは、塑性変形のために R の値が変わってくるのであるから、 $7/8$ でもなく、また $n > \frac{1}{4}$ で水平でもないのは当然なのである。問題は、 $n = \frac{1}{4}$ のところで急に曲るかどうかをみるのが、この実験の目的なのである。

塑性流動の限界線に、 $n = \frac{1}{4}$ のところに急な曲りがあるならば、同じ方法で実験すれば、応力-ひずみの関係、すなわち内圧と円周の伸びひずみの関係にも、 $n = \frac{1}{4}$ のところに急な曲りが見られるであろう。

第 11 図は、内圧 p と円周方向の伸びひずみ ϵ_t の関係である。まず、引張りで伸びひずみ $\epsilon_s = \epsilon_{s0}$ を与えておき、それに前と同じ方法で、内圧を加えていったときの実験結果である。 $n = \frac{1}{4}$ のところに、応力-ひずみ曲線の傾きの急変がみられる。

この応力-ひずみ曲線の特徴は、 $n = \frac{1}{4}$ のところの曲りによって、上方に凹形になることである。 $n=0$ から $n = \frac{1}{4}$ まで、すなわち第 4 図 (a) から (c) までは、Ⅲの方向の $\pm \frac{1}{2}R$ の R の範囲の移動が行なわれ、こういう場合には、応力-ひずみの関係は非常にゆるやかであるらしい。その後は R の範囲の移動は行なわれないので、傾きはいくらか急になり、それで応力-ひずみの関係が上



第 11 図 塑性流動限界における内圧とひずみ

方に凹形になるのであると思われる。

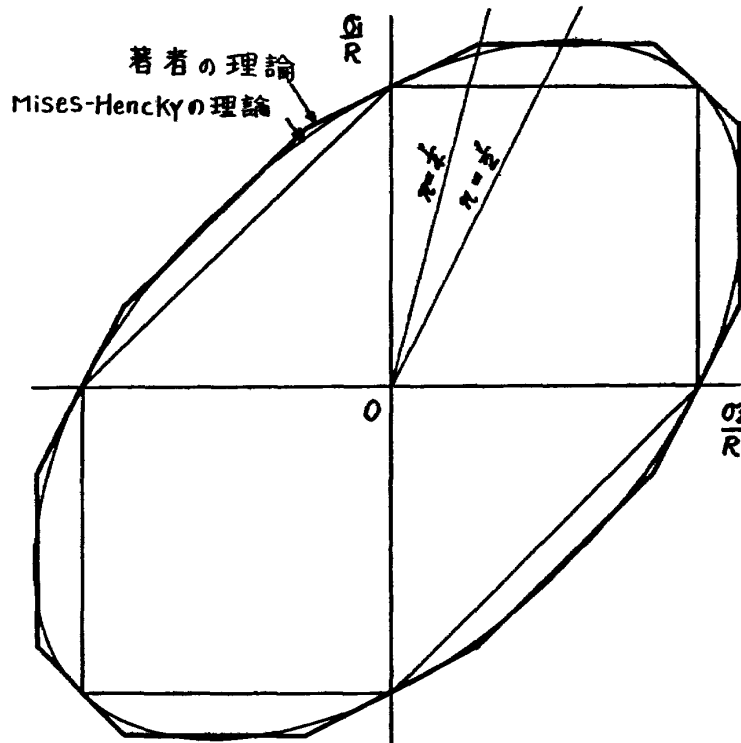
同じ現象は、引張荷重をおろして、それに内圧をかけるときの応力-ひずみの関係にも現われる。引張荷重をおろしても、Ⅲ方向には $\pm \frac{1}{2}R$ の内部応力が残っており、そこに内圧によって、 S_3 が加わるのであって、Ⅲ方向だけを採って考えれば、第 4 図と同じようなことが行なわれるからであると考えられる⁽²⁾。

結 言

著者の塑性理論から求めた塑性流動の限界線は、なめらかな曲線ではなく、引張りと純粋せん断の間は、 $n = \frac{1}{4}$ で交わる 2 本の直線で表わされるが、実験の結果からみて、これは正しいと思われる。

引張りと圧縮とはすべり面は同じで、ただすべる方向が逆になっているだけで、すべり量の等しいところで応力は等しいこと⁽⁴⁾を考え、また均等引張り、均等圧縮が塑性変形に影響はないものと考えれば、全域の塑性流動の限界は、第 12 図のようになるはずである。

塑性流動の理論としては、従来 Mises-Hencky の理論が広く行なわれているので、これについても一言述べておくことが必要であろう。これは、理論的に正しいというよりも、数学的取扱いが容易であるという意味で、広く用いられている。いま、引張りの点を合わせて、Mises-Hencky の式を図に表わしてみると、第 12 図のようになる。著者は、もちろん自分の理論を正しいものと思っている。これと比較して、Mises-Hencky の式は、図にみるように、従来考えられていた以上にき



第 12 図 著者の理論による塑性流動限界および Mises-Hencky の理論による限界

わめてよい近似である。違いは $n = \frac{1}{2}$ のところで $+1.04\%$ 、 $n = \frac{1}{4}$ のところが最も離れているが、それでも -2.93% であって、近似式としては非常によくできていると思う。ただ、単調に塑性変形を続けている場合に適用するとして、その適用範囲、適用条件を誤らないように注意することが必要であろう。

終わりに、実験および整理を手伝ってくれた永井文雄君に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) 中西・佐藤： 機械学会論文集，24，137 (昭 33-11)，791.
- (2) F. Nakanishi & Y. Sato： Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1958).

応力状態と塑性変形の形*

中西不二夫**・佐藤和郎***

Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation

By Fujio NAKANISHI and Yasuo SATO

In plastic deformation, it is generally assumed that the shear strains γ_1 , γ_2 and γ_3 are proportional to the shearing stresses τ_1 , τ_2 and τ_3 . But the experiments by Lode and also the experiments by Taylor and Quinney show that this assumption is not correct. The way of deformation such as shown by experiments, however, is not yet accounted for.

A new theory on plasticity has been advanced by the authors, and it was already explained that, not only the relation between plastic stresses under various states of stress, but also the forms of hysteresis curves, anisotropy due to plastic deformation, and the relation between the yielding of mild steel and the deformation beyond that could be well accounted for by this theory.

As for the strain ratio relationship this theory also conforms very closely with the experiments.

1. 緒 言

金属材料がある応力状態の下で塑性変形を起こすとき、どういう形の変形が起こるかということは、塑性の基本的な問題であるにもかかわらず、まだよくわかっていない。引張応力、圧縮応力を受けたときの形はわかっている。また、一つのせん断応力だけを受けたときの形もわかっている。しかし、その中間の応力状態のときのひずみの起こり方がわかっていないのである。

実際の変形の起こり方がわからないまま、これまで一般には、金属材料を粘性体と同様に考えている。

いま、

x, y, z : 主応力の方向

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 主応力

τ_1, τ_2, τ_3 : 主せん断応力

* 昭和 39 年 7 月 8 日 受付

** 前所長

*** ロケット部長

$$\tau_1 = (\sigma_y - \sigma_z)/2, \quad \tau_2 = (\sigma_z - \sigma_x)/2, \quad \tau_3 = (\sigma_x - \sigma_y)/2$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: 主ひずみ

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: せん断ひずみ

$$\gamma_1 = \varepsilon_y - \varepsilon_z, \quad \gamma_2 = \varepsilon_z - \varepsilon_x, \quad \gamma_3 = \varepsilon_x - \varepsilon_y.$$

この場合、粘性流体と同様に考えれば変形の起こり方は次のようになる。

$$\gamma_1/\tau_1 = \gamma_2/\tau_2 = \gamma_3/\tau_3 \tag{1}$$

いま、 z 軸を引張りの方向に採れば、Lode の表示法による応力状態を示す μ およびひずみの形を示す ν は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}, \\ \nu &= \frac{2\varepsilon_y - \varepsilon_z - \varepsilon_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_2} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

z 方向に伸び、 x 方向に縮むような純粋せん断では $\mu=0, \nu=0$ であり、 z 方向の引張りでは $\mu=-1, \nu=-1$ である。この中間は (1) の関係が成立するとすれば

$$\nu = \mu \tag{1}'$$

であって、第3図のように μ を横軸に、 ν を縦軸に採って図に描けば、引張りの点と純粋せん断の点を結んだ直線になるはずである。

ところが ν と μ の関係については、すでに古く、W. Lode の実験⁽¹⁾があり、また G. I. Taylor and H. Quinney の実験⁽²⁾もあり、実験の点は $\nu = \mu$ の直線からはめいりょうにはずれている。

著者は前に塑性の3方向せん断理論というのを提唱しておいた⁽³⁾。塑性引張応力と塑性純粋せん断応力との関係⁽³⁾、中間主応力の影響⁽⁴⁾、前歴のある材料に同種または別種の応力を加えたときに塑性的になりはじめる点⁽⁴⁾などについて、実験結果とよく一致する。

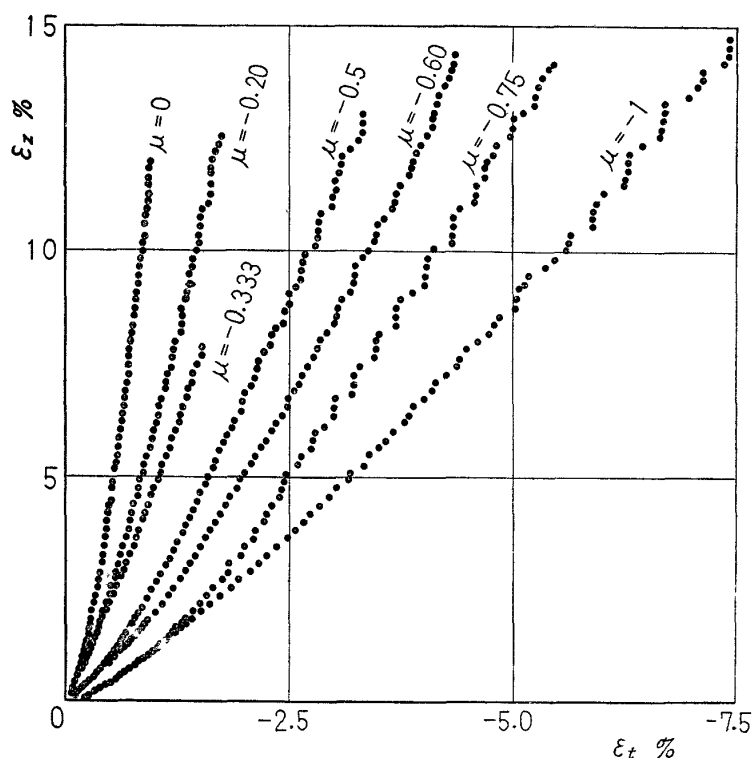
塑性ひずみの起こり方が、 $\nu = \mu$ の関係に合わないこと、そして実際にはどのように起こるかということも、著者の理論で説明できるのではないかと思う。この論文では、このことを述べてみたい。

2. 実 験

われわれのところでも実験を行なってみた。前にあげたように、すでに実験はあるのであるが、いずれも途中まで他の荷重をかけてから、次にある荷重をかけるというやり方のものである。われわれのところでも実験を行なったのは、初めからある荷重をかけてみたかったからである。なお、Taylor-Quinney のは、せん断はねじりによる単純せん断である。単純せん断でも同様であると思うが、純粋せん断のほうが著者の理論と比較するのに都合がいいので、純粋せん断になるような実験を行なってみた。

実験に用いた材料は黄銅で、その成分は Cu 59.59%, Zn 38.26%, Pb 1.29%, Sn 0.47%, Fe 0.29% である。試験片は外径 18 mm, 内径 16 mm の円筒で、実験は、 μ の値が一定で変形していくように引張りと内圧とを種々の割合でかけたものである。

いま、材料中の微小部分を考えて、円筒の軸に平行に z 軸、半径方向に x 軸、円周方向に y 軸を採ることとする。実験で測定したのは、荷重による円筒の伸びひずみ ε_z と外径のひずみ ε_t であって、第 1 図が実験結果である。



第 1 図 薄肉円筒に引張りと内圧を加えたときの軸方向の伸びひずみ ε_z と外径の伸びひずみ ε_t

第 1 図の実験結果をみるに、 ε_z に比べて ε_t の初期ひずみ大きいことから考えて、この実験に用いた材料は等方性ではないようである。前に塑性引張りと塑性純粋せん断の応力の関係を探るための実験⁽³⁾⁽⁵⁾を行なったことがあるが、このときには種々の材料の棒材について検討し、ようやく等方性と認められる一本の棒材を見だし、それについて実験を行なった。その後、等方性の材料がなかなか得られないでいる。ここで用いたのも、前の等方性であった材料と成分は同じものなのであるが、これは等方性であるとは認められない。

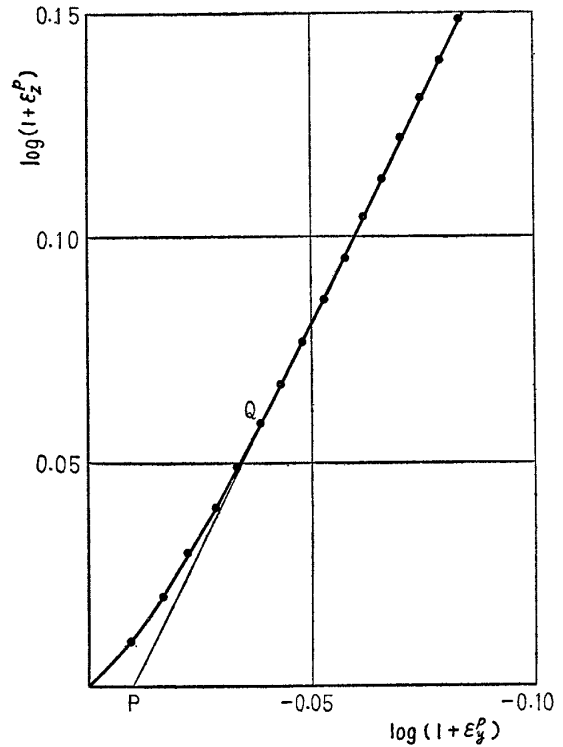
そこで、 $\mu = -1$ すなわち引張りの実験結果について、次のような計算を行なってみた。

1. 弾性ひずみは、塑性ひずみにくらべてわずかであるが、これをさし引いて、軸方向の塑性伸びひずみ ε_z^p と外径の塑性伸びひずみ ε_t^p との関係を求める。
2. 外径のひずみ ε_t^p は、円周方向のひずみ ε_y^p と円筒の厚さの方向のひずみ ε_x^p との影響を受けているので、 ε_y^p を求めるために、まず内径のひずみを計算する。すなわち、塑性変形は容積一

定で行なわれるものとして、内径のひずみを計算する。

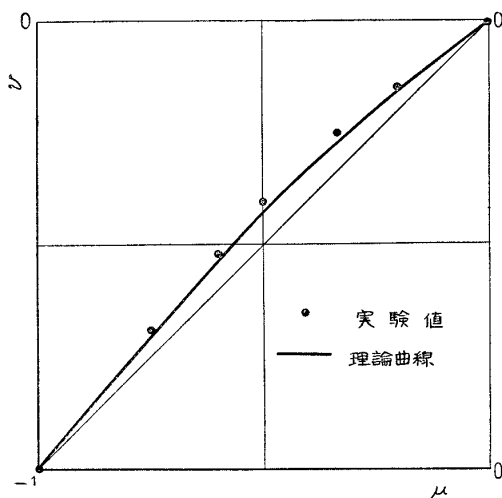
3. 内径のひずみと外径のひずみの平均を採る。薄肉円筒であるから、この平均が ϵ_y^p であると考えていい。

このようにして求めた ϵ_y^p と ϵ_z^p とを対数ひずみの形にして図に描くと第2図のようになる。もし材料の初期状態が等方性であるならば、曲線は2の傾きをもった直線になるはずである。図にみるように、初めのうちは傾きが2になっていないが、これは材料が等方性でなかったことを示すものである。ところが、軸方向の伸びひずみが5%から上のところをみると、傾き2の直線の上に非常によく乗っている。このことは、この材料は、初めは等方性でなくても、しばらく塑性変形を続けているうちに等方性になってくるということである。等方性になるといっては、あるいは誤解をまねくかもしれない。正しくいえば、この材料は、しばらく塑性変形を続けると、後は、第2図のP点で示される寸法の等方性の試験片があったものとして、それに引張りを加えたときと同じ変形をするようになるということである。



第2図 円筒の引張りによる軸方向の塑性伸びひずみ ϵ_z^p と円周方向の塑性伸びひずみ ϵ_y^p との関係

る。P点の代りに、第2図のすでに直線的になってからの点Qを元として、ここからのひずみを測っても同じであって、こうすれば初めに等方性であった材料について試験するのと同じ結果になると思う。



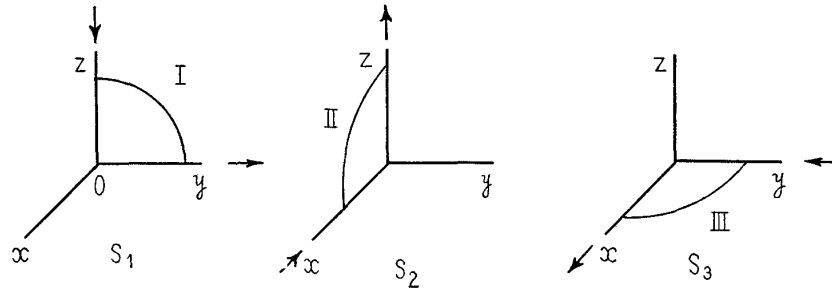
第3図 μ と ν の関係

そこで、他の実験結果についても、引張りのときと同様に、1, 2, 3 の計算を行ない、軸方向の伸びひずみが6%の点を元にして、そこから上の部分について、 ν の値を計算してみた。第3図の実験の点は、このようにして求めた ν の点である。この実験結果は、実験のやり方は違うが、Lode の実験結果とも、Taylor-Quinney の実験結果ともよく合っている。

図をみればわかるように、実験結果は $\nu = \mu$ の関係から明らかにはずれているが、著者の塑性理論から、このはずれることが説明できるように思う。

3. 塑性理論

いま, S_1, S_2, S_3 は第4図に示すようなせん断応力であるとし, I, II, III はせん断の方向で, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ のせん断ひずみの方向を I, II, III の方向と呼ぶことにする。



第4図 せん断応力 S_1, S_2, S_3

著者の塑性理論⁽³⁾は,

(i) I, II, III の3方向のせん断を別々に考える。

別々に考えるということは, せん断ひずみの増加に対する抵抗も, それぞれの方向に独立に R_1, R_2, R_3 であると考えることである。いま, 材料中の微小球体を探って, その変形を考えるとして, 純粋せん断の場合には, その変形は第5図のようになる。従来の考え方のように, τ_2 で II の方向にすべって, この変形が生ずるものと考えれば, このとき抵抗 R_2 はもちろん直接にきいてくるが, I, III の方向にもひずみが起こっているので, R_1, R_3 もきくことになる。エネルギーのほうから考えても, R_1, R_3 の II の方向への成分から考えても, すべっている間は次のようになっているはずである。

$$\tau_2 = \frac{1}{2}R_1 + R_2 + \frac{1}{2}R_3 \quad (3)$$

R_1, R_2, R_3 はそれぞれの方向のせん断ひずみ増加に対する抵抗であって, せん断応力に対応するものであるが, 上記の関係にもみられるように, 直接に τ_1, τ_2, τ_3 に対応するものではない。それぞれの方向に独立に考えるということは, 第4図に示したせん断応力 S_1, S_2, S_3 に対応するということである。 τ と S の関係は

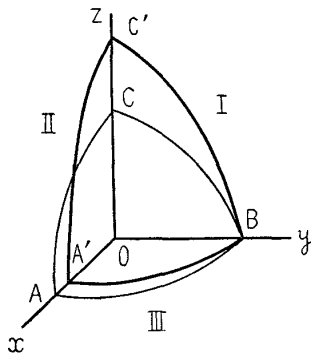
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2}S_1 + S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ \tau_3 &= -\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

第5図の各方向のひずみの正負を考えて, (3) 式と (4) 式とを比べてみれば, R と S とが対応し

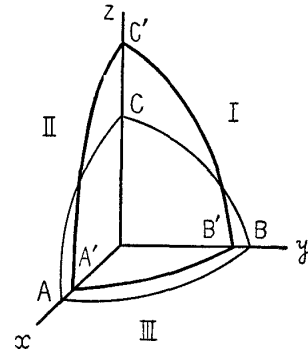
ていることがよくわかると思う。

(ii) 単調にせん断ひずみが増して、主応力の方向と主ひずみの方向とが一致している場合には、 R_1, R_2, R_3 の大きさは等しい。すなわち、

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \tag{5}$$



第5図 純粹せん断



第6図 引張変形

(iii) それぞれの方向について、ひずみの方向が逆転した場合には、弾性的に変形する応力の範囲は R である。

荷重を下すとき、または再荷重の場合などに起こるように、ひずみの変化の方向が逆転すれば、その逆転した変化は弾性的である。その弾性的変化がどこまで続き、どこからまた塑性的になるかが決まるのは、 τ によってではなく、 S によってである。それぞれの方向について、その方向の S の変化量が R に達するまでは弾性的であり、そこからさきは塑性的になる。

以上 (i), (ii), (iii) に述べたのが著者の塑性理論である。3方向を別々に考えるのが特徴であって、それぞれの方向については、せん断応力理論である。ただし、そのせん断応力というのは、 τ ではなく、 S である。

4. 応力状態とひずみの起こり方

4・1 純粹せん断 上記の塑性理論を、 $\mu=0$ の純粹せん断に適用してみよう。材料の中に微小球体を考えれば、この場合の変形は第5図のようになる。すなわち、球体の一部 ABC は変形して $A'BC'$ となり、IIの方向は正の変形、I, IIIの方向は負の変形になっているので、応力状態は次のようになっているはずである。

$$S_1 = -R, \quad S_2 = R, \quad S_3 = -R \tag{6}$$

τ で表わせば

$$\tau_1 = -R, \quad \tau_2 = 2R, \quad \tau_3 = -R \tag{6}$$

応力状態は一般に σ または τ で表わされているので、(4) 式に (6) 式を入れて (6)' 式をだしてみたのであるが、塑性流動の応力状態を直接的に表わしているのは (6) 式である。

(6) 式の応力状態のもとで、どういふ変形を起こすと考えたらいいであろうか。それぞれの方向のせん断抵抗は等しく、そこに働くせん断応力の大きさも当然等しい。こういう状態のもとでは、それぞれの方向のせん断、あるいはそれぞれの方向のすべりと呼んでもいいと思うが、それを ds_1 , ds_2 , ds_3 とすれば、これらの大きさは等しいと考えるのが当然であろう。

すなわち、

$$ds_1 = -ds, \quad ds_2 = ds, \quad ds_3 = -ds \quad (7)$$

こういうすべりを起こした結果が、第5図に示すような変形になることは明らかである。

4・2 引張り 引張りによる変形は、第6図のようであって、このときの応力状態は⁽⁸⁾、

$$S_1 = -R, \quad S_2 = R, \quad S_3 = \pm \frac{1}{2}R \quad (8)$$

$$\tau_1 = -\frac{7}{4}R, \quad \tau_2 = \frac{7}{4}R, \quad \tau_3 = \pm \frac{1}{2}R \quad (8)'$$

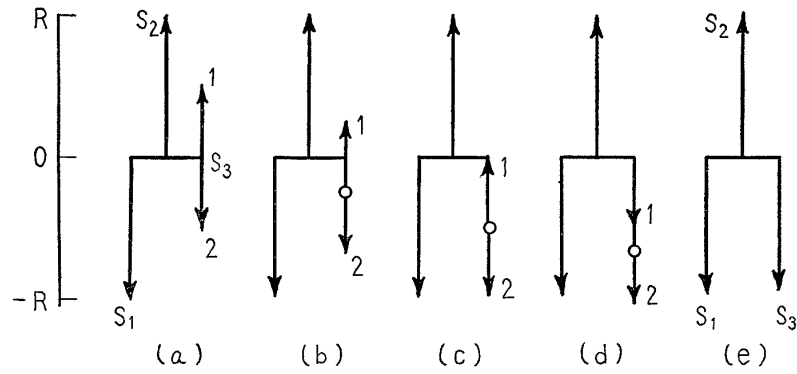
引張りは、I, IIの方向には細かく交互にすべっているものと考えられるが、Iの方向にすべるときはIIIは正の変形、IIの方向にすべるときはIIIは負の変形になる。すなわち、IIIの方向では正負の変形を繰り返しているのであって、(iii)に述べたように弾性範囲は R であり、正負の方向に交互に同量の変形を繰返すとすれば、IIIの方向の応力状態は(8)式のようにいなければならない。 $+R/2$ がIの方向のすべりに対応するもの、 $-R/2$ がIIに対応するものである。ある1点についてみれば交互にすべっており、ある瞬間についてみれば、Iの方向にすべっている部分もあり、IIの方向にすべっている部分もあって、IIIの方向は巨視的には応力は0であるが、 $\pm R/2$ の内部応力が存在することになる。

ひずみについても同様であって、IIIの方向には正の方向にすべっている部分もあり、負の方向にすべっている部分もあって、巨視的にみればIIIの方向のせん断ひずみは0になる。すなわち、測定に出てくる量としては

$$ds_1 = -ds, \quad ds_2 = ds, \quad ds_3 = 0 \quad (9)$$

4・3 中間の応力状態 塑性応力状態を図で表わしてみる。第7図(e)は(6)式の純粹せん断を表わしたものであり、同図(a)は(8)式の引張りの状態を表わしたものである。この二つを比較してみると、I, IIの方向については同じであり、違っているのはIIIの方向だけである。したがって、中間の状態では、IIIの方向の状態が引張りから純粹せん断へ順次変っていくはずであって、弾性範囲が R であることを考えれば、中間の状態は第7図(b), (c), (d)のようになっているに相違ない⁽⁴⁾。

第7図の(a)から(c)までは、 $\pm R/2$ の弾性範囲がそのまま移動している状態であって、その応力状態は次のように表わせる。



(a) 引張り, (e) 純粹せん断

第7図 応力状態の図式表示

$$S_1 = -R, \quad S_2 = R, \quad S_3 = -\alpha R \pm \frac{1}{2}R \quad (10)$$

$$\tau_1 = -\frac{7}{4}R + \frac{1}{2}\alpha R, \quad \tau_2 = \frac{7}{4}R + \frac{1}{2}\alpha R, \quad \tau_3 = -\alpha R \pm \frac{1}{2}R \quad (10)'$$

ただし,

$$0 < \alpha < 1/2$$

(10) 式に示す応力状態のもとでは, III の方向には $-\alpha R + R/2$ で正の方向にすべっている部分もあり, $-\alpha R - R/2$ で負の方向にすべっている部分もあって, 巨視的にみれば次のようになるであろう。

$$ds_1 = -ds, \quad ds_2 = ds, \quad ds_3 = -\alpha ds \quad (11)$$

s と γ の関係は

$$\gamma_1 = s_1 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}s_1 + s_2 - \frac{1}{2}s_3, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 + s_3 \quad (12)$$

(11), (12), (2) 式から ν を求めれば

$$\nu = -\frac{3(1-\alpha)}{3+\alpha} \quad (13)$$

(10)' 式の τ_3 の $\pm R/2$ というのは塑性変形のために生ずる内部応力であって, 外力による応力としてはこれは別にして考えなければならない。これを除いて考えれば, μ の値は

$$\mu = -\frac{7-6\alpha}{7+2\alpha} \quad (14)$$

ν と μ の関係は

$$\nu = \frac{3+27\mu}{25+\mu} \quad (15)$$

ただし,

$$-1 < \mu < -1/2$$

次に第7図の (c) から (e) の間は,

$$S_1 = -R, \quad S_2 = R, \quad S_3 = -\alpha R \pm (1-\alpha)R \quad (16)$$

$$\tau_1 = -2R + \alpha R, \quad \tau_2 = 2R, \quad \tau_3 = -\alpha R \pm (1-\alpha)R \quad (16)'$$

ただし, $1/2 < \alpha < 1$

巨視的にみたとすべりは, (11) 式と同様に

$$ds_1 = -ds, \quad ds_2 = ds, \quad ds_3 = -\alpha ds \quad (11)'$$

したがって, ν の値も (13) 式と同様に

$$\nu = -\frac{3(1-\alpha)}{3+\alpha} \quad (13)'$$

μ の値は, (16)' 式の τ_3 の $\pm(1-\alpha)R$ を前同様に除いて考えて,

$$\mu = -(1-\alpha) \quad (17)$$

ν と μ の関係は

$$\nu = \frac{3\mu}{4+\mu} \quad (18)$$

ただし, $-1/2 < \mu < 0$

(15) 式および (18) 式の ν と μ の関係を図示すれば, 第 3 図のようになる。図にみるように, 理論と実験とはよく合っている。

5. 結 言

塑性変形の起こり方については, 一般に $\nu = \mu$ であると考えられているが, 実際はそうでないことが前からわかっていた。しかし, どうして実験のようになるかということは, 説明がつかなかったのである。著者の塑性理論では, その説明がつかし, 理論と実験とはよく一致する。

著者の理論は, 純粹せん断以外は, (10), (16) 式に示されるように, 内部応力が存在しているのが特徴である。もし, 内部応力を保ち得ないような材料があれば, これはこの理論の適用範囲外である。あるいは, 常温では保ち得ても, 高温では保ち得ないという場合の高温状態についても同様である。こういう場合には, ds_i が s_i に比例すると考えても, 結果は $d\gamma_i$ が τ_i に比例すると考えるのと同じことになる。

Taylor-Quinney の実験の中に, 赤熱状態のガラスの実験結果があり, $\nu = \mu$ の線に乗っているが, これは当然のことである。また, 鉛およびカドミウムについての実験の点があり, これらは $\nu = \mu$ の直線に近いところにあるが, これらは, 常温においてもクリープする材料であって, 内部応力を十分保つことができないためであると思われる。アルミニウム, 銅, 軟鋼などについての実験結果は, 著者の理論とよく合っている。

終わりに, 実験およびその整理を手伝ってくれた永井文雄君に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) W. Lode: Mitt. u. Forschungsarb., 303 (1928).
A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids (1950), McGraw Hill.
- (2) G. I. Taylor & H. Quinney: Proc. Roy. Soc. London, Sec. A, 230 (1931).
- (3) 中西・佐藤: 機械学会論文集, 24, 147 (昭 33-11), 791.
- (4) 中西・佐藤: 機械学会論文集, 25, 155 (昭 34-7), 587, 596.
- (5) 佐藤: 機械学会論文集, 24, 143 (昭 33-7), 472.

後 記

ここに収めた4つの論文は中西不二夫先生が、昭和32年に当研究所の所長に就任せられてから、学会で発表された論文の一部であって、塑性理論の基本をなすものである。

最近はヒステリシス・ループ、パウシンガー効果等の問題に研究を進められていて、これらの問題も解明できる構想がまとまったように伺っていたところである。そうなれば塑性の理論体系が完成するので、塑性の研究はもちろん今までの強度関係の研究をまとめる考えをしておられたようである。しかし、この研究の集大成をみることなく、不幸にも病にたおれ昭和39年6月ついに死去されたことは悲痛のきわみである。

塑性の研究が始ったのは昭和28年頃であったと記憶している。先生はそれ以前から構想をもっておられたのであるが、当面必要なものは、その構想を確かめるための正確な実験資料であったようである。正確な資料を出すためには、初めに等方性と考えられる材料について実験をやる必要がある。しかし、実験をやってみてわかったことは、そのような材料はなく、ほとんどの材料は初めから異方性であることである。実験はまず、軟鋼、アルミニウム、銅、黄銅といった種々の材料について、試験をして初めに等方性と考えられる材料を探し出すことから始めざるを得なかった。そして試験は等方性の材料が有るか無いか分らないが、見つかるまでやらなければならなかった。幸いにも等方性であると思われる1本の黄銅丸棒を遂に探し出すことができた。この黄銅から求めた資料を基にして樹立した理論が“塑性の三方向せん断理論”であり、それから続いて発表した一連の論文が“塑性変形による異方性”であり“中間主応力が塑性流動に及ぼす影響”であり、また“応力状態と塑性変形の形”である。

これらの論文はすでに機械学会論文集に掲載されたものであるが、そのままここに収録することにした。その理由は、先生が説く理論はその表現は簡明であるが、深い思慮から組み立てられたものであるので、思想を正確に伝えるには先生自身の書き下しの論文が最もよいと考えたからである。

(佐藤和郎)

<p>NAL TR-71 航空宇宙技術研究所 塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 1964年7月 52ページ</p> <p>塑性の三方向せん断理論というのは新しい塑性理論であって、これは種々の塑性に関する実験事実を説明する一つの試みとして提唱されたものである。</p> <p>本文では、この理論を樹立するまでの経路ならびに、この理論は塑性引張応力と塑性せん断応力との関係、塑性変形による異方性、中間主応力が塑性流動に及ぼす影響、応力状態と塑性変形の形など多くの実験結果とよく一致することが述べてある。中でも応力状態と塑性変形の形については古くから実験はあったが、従来の理論ではどうしても説明ができなかった問題である。</p>	<p>I. 中西不二夫 佐藤和郎 II. NAL TR-71 III. 539.3</p>	<p>NAL TR-71 航空宇宙技術研究所 塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 1964年7月 52ページ</p> <p>塑性の三方向せん断理論というのは新しい塑性理論であって、これは種々の塑性に関する実験事実を説明する一つの試みとして提唱されたものである。</p> <p>本文では、この理論を樹立するまでの経路ならびに、この理論は塑性引張応力と塑性せん断応力との関係、塑性変形による異方性、中間主応力が塑性流動に及ぼす影響、応力状態と塑性変形の形など多くの実験結果とよく一致することが述べてある。中でも応力状態と塑性変形の形については古くから実験はあったが、従来の理論ではどうしても説明ができなかった問題である。</p>	<p>I. 中西不二夫 佐藤和郎 II. NAL TR-71 III. 539.3</p>
<p>NAL TR-71 航空宇宙技術研究所 塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 1964年7月 52ページ</p> <p>塑性の三方向せん断理論というのは新しい塑性理論であって、これは種々の塑性に関する実験事実を説明する一つの試みとして提唱されたものである。</p> <p>本文では、この理論を樹立するまでの経路ならびに、この理論は塑性引張応力と塑性せん断応力との関係、塑性変形による異方性、中間主応力が塑性流動に及ぼす影響、応力状態と塑性変形の形など多くの実験結果とよく一致することが述べてある。中でも応力状態と塑性変形の形については古くから実験はあったが、従来の理論ではどうしても説明ができなかった問題である。</p>	<p>I. 中西不二夫 佐藤和郎 II. NAL TR-71 III. 539.3</p>	<p>NAL TR-71 航空宇宙技術研究所 塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 1964年7月 52ページ</p> <p>塑性の三方向せん断理論というのは新しい塑性理論であって、これは種々の塑性に関する実験事実を説明する一つの試みとして提唱されたものである。</p> <p>本文では、この理論を樹立するまでの経路ならびに、この理論は塑性引張応力と塑性せん断応力との関係、塑性変形による異方性、中間主応力が塑性流動に及ぼす影響、応力状態と塑性変形の形など多くの実験結果とよく一致することが述べてある。中でも応力状態と塑性変形の形については古くから実験はあったが、従来の理論ではどうしても説明ができなかった問題である。</p>	<p>I. 中西不二夫 佐藤和郎 II. NAL TR-71 III. 539.3</p>

TR-58	高度500フィートないし10,000フィートにおける上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of gust Velocities from 500 to 10,000 feet altitude	1964年1月	竹内和之, 小野幸一 山根皓三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Data Reduction System and Its Performance	1964年1月	田畑浄治, 中正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964年1月	塙武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角45°, テーパー比0.6の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964年2月	中井暎一, 小原 瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964年2月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964年3月	小橋安次郎, 遠藤 浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁歪計器の応用 Some Developments of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964年3月	幸尾治朗
TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of the Stability Characteristics of the Unsteady Laminar Boundary Layer	1964年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-66	変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の場合) Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates)	1964年6月	川井忠彦, 塙武敏 越出慎一, 戸川隼人 落合 薫
TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964年4月	井上建二, 野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論 (I) —揚力面理論— Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I) —Lifting Surface Theory—	1964年6月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究 (I) An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964年7月	鳥崎忠雄, 能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory	1964年10月	松浦陽恵, 樋口一雄 池谷光栄, 堀川勇壯 村上力, 百盛元 三好純子, 岡部正典

航空宇宙技術研究所報告71号

昭和39年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53