

UDC 533.6.013

629.13.014

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-74

遷音速パネルフラッタの研究

石井孝雄・柳沢三憲

1964年11月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤 博, 義田光弘 坂口 一, 山崎紀雄
TR-45	固有問題 ($\sum \lambda^k A_k)x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem ($\sum \lambda^k A_k)x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦, 泉日出夫 戸川隼人, 林 洋一
TR-47	鋳鉄円板の回転破壊におけるコリオリの 力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年8月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林 二 識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究 (Ⅲ) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (Ⅲ)	1963年9月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問 題の数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equa- tions by Boundary Contraction	1963年9月	樋口一雄, 能美 力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unstable System	1963年9月	武田 峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pebble-Bed Heater	1963年9月	林 二 識
TR-53	円管流の非定常熱伝達 (第I報) 一壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow- Directional Distance only	1963年10月	林 二 識
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題 の差分法による数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963年10月	三好 甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor Which Has a Boss	1963年11月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-56	亜音速および遷音速における二次元非定 常空気の測定 (第I報) Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I)	1963年11月	中村泰治, 田辺義一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度 500 フィートないし 10,000 フィート における上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of gust Velocities from 500 to 10,000 feet Altitude	1964年1月	竹内和之, 小野幸一 山根皓三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Data Reduction System and Its Performance	1964年1月	田畑浄治, 中 正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964年1月	埴 武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷 音速におけるフラッタ特性におよぼすマッ ハ数の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964年2月	中井暎一, 小原 瑛

遷音速パネルフラッタの研究*

石井孝雄**・柳沢三憲**

The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter

By Takao ISHII and Mitsunori YANAGIZAWA

The solution of the linearized differential equation of unsteady transonic flow is obtained for arbitrary time dependent motion of thin bodies. And the characteristics of the linearized theory are examined closely from the view point of physical understanding of acoustic wave propagation.

By applying this result to the panel flutter problem, the flutter boundary of two dimensional panels, which are simply supported at the leading and trailing edges, is obtained through the Galerkin method with three modes analysis. These results are compared with the theoretical results for the low supersonic panel flutter obtained by several authors, and also compared with the experimental results for the panels clamped at the leading and trailing edges of our own experiment. Our studies reveal that the critical panel thickness ratio (thickness to length) in transonic flow also remains in the finite (non-zero nor infinite) value.

序論と目的

第二次大戦中、V2号ロケットの外板が振動を起こして破壊した際、これを液体燃料の sloshing 運動と外板が共振したものであると¹⁾、きわめて常識的に考えていたパネルフラッタのれい明期から、今日の超高度極超音速試験機 X-15²⁾ に至っても、なお、パネルフラッタの問題は設計者を悩まし続けている。二次元パネル問題に限定して、パネルフラッタの現状を空気力学的立場から概観すると、マッハ数が約1.5以上では線型ポテンシャル理論による非定常空気力³⁾によるまでもなく、reduced frequency k が小さいとして、 k^2 以上の項を省略し、 k の一次の項までをとった、準定常理論⁴⁾⁵⁾によっても、かなり良く実験と合致する。もちろん、すべての空力弾性問題についていえることであるが、空力弾性現象の中で空気力が、どのような役割を演じているかを解明するには、適当な非定常空気力を適用し、弾性構造はその本質的な要素を見落さぬ程度に、モデル化(ないし単純化)すれば十分であろうが、フラッタ限界を求めるといふ、実際的な要求に対しては、弾性構

* 昭和39年11月13日受付

** 空気力学第一部

造上の特殊な要素を当然考慮に入れ解析しなければならない。パネルフラッタについていうならば軸力 (mid-plate stress) の影響⁶⁾, また座屈変形の影響⁵⁾⁶⁾, 剪断力の影響⁷⁾, 板の固定 (支持) 条件の影響⁵⁾等を無視しては, 正確なフラッタ限界を推定することはできないのは云うまでもない。この方面の研究はすでに数多くの研究者によってなされて, 実験との比較もされており, かなり良く一致している。(図1参照) したがって, 二次元パネルフラッタに関する限り, $M > 1.5$ では, 空気力学の立場からの研究は解決したと考えてよいであろう。

次に, マッハ数 1.4 以下での二次元パネルフラッタの解析理論では, 空気力として, ピストン理論⁹⁾ ($M \gg 1$ の条件下で適用しうる。)も, Fung 等⁶⁾の準定常理論 ($M > \sqrt{2}$) も適用の範囲外であるため, より厳密な理論より導かれる空気力を適用しなければならぬ。(しかし, 実験結果から考えて, reduced frequency $k < 1$ の近似は許される。)このような空気力を, 軸力零で, かつ, パネル両面の静的圧力差零と単純化したパネル模型について, これまでに理論的にフラッタ限界を求めている代表的結果を実験値と比較すると図1のようになる。タテ軸はフラッタの限界 (neutral stability) での (板厚)/(板の長さ), h/b の値で, ヨコ軸はマッハ数である。

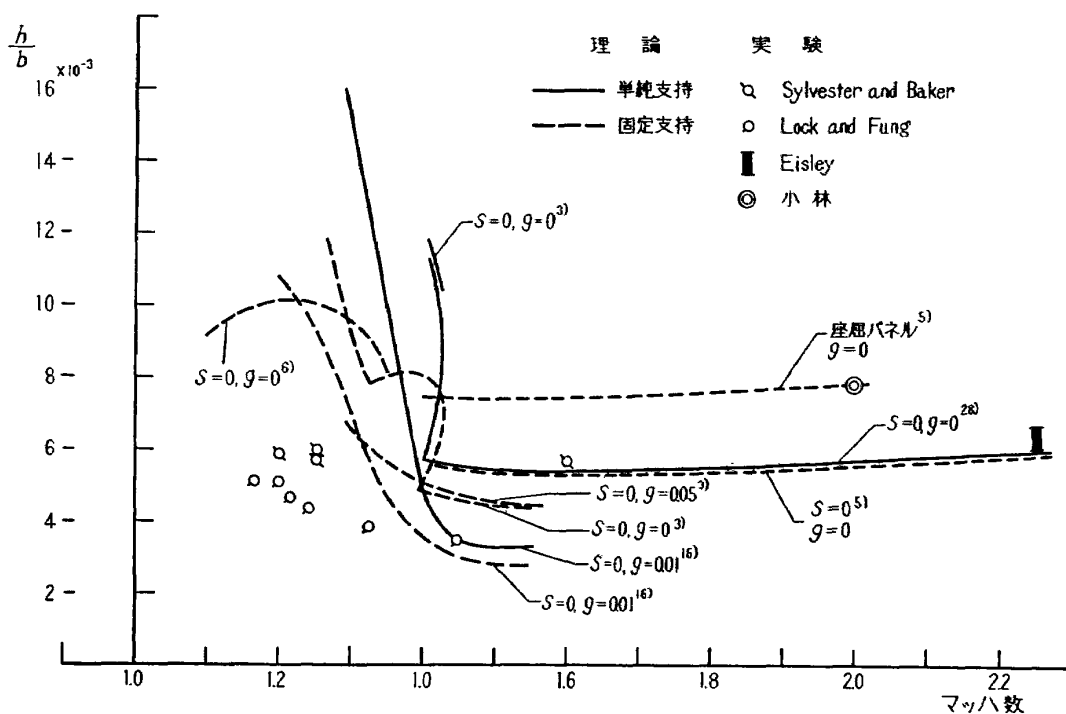


図 1

この図からわかるように, 実験値と理論値はマッハ数が 1 に近づくに従って, 大きく食い違い, 理論が与える (板厚)/(板の長さ) の値は実験値と比較して, 余りにも安全側 (conservative) となっている。

$M > 1.5$ では, 準定常空気力を適用してさえ, 理論値と実験値との良い一致が得られたが, 低超音速 ($M < \sqrt{2}$) では, 食い違いが大きくなるのはなぜであろうか。これに対する説明として, 完

全なものは、これまでのところ、まだなされていないが、Fung の示唆により McClure¹⁰⁾ は、パネル上の非定常境界層の影響によって、説明しようとした。彼が境界層を考慮しなければならぬとした根拠は、風胴壁と同じ面におかれたパネル上では、境界層の厚さがパネル弦長の 10% にも達している（実測値）から、通常の空力弾性問題と異なって、境界層の存在を無視しえないということにある。

しかし、パネル弦長の 10% にも達するような境界層をかぶらぬように、模型を風胴内におくことは技術的に可能であるから、このような実験データと理論値を比較すべきである。また、第 2 の疑問点は Tucker¹¹⁾ による、超音速風胴ノズル上の境界層の発達の計算によると、境界層の発達率はマッハ数の影響は余りうけず約 4/1,000 のこう配である¹²⁾。そうすると、超音速風胴壁と同じ面におかれたパネルについても、境界層の影響が大きく作用していると考えなければならぬが、実際には、その影響を無視しても、実験値と合致している。以上のごとき観点から、遷音速でのみ境界層の影響が著しいということは理解し難い。

図 1 で、理論値が与えるフラッタ限界を $M \rightarrow 1$ にすると (板厚)/(板の長さ) $\rightarrow \infty$ になることを暗示している。つまり、いかに厚い板でも (または、いかに板の剛性が大ききとも) $M \rightarrow 1$ では必ずフラッタを起こすことを暗示している。しかし、超音速理論で $M \rightarrow 1$ とすれば、解が発散するから、これから直ちに、上記のように超音速部の傾向を $M \rightarrow 1$ に外挿して推定することが正しいか、否かは疑問である。

しかるに一方、実験点を外挿して、 $M \rightarrow 1$ を考えると、フラッタ限界は (板厚)/(板の長さ) \rightarrow ほとんど零のごとく見える。このように、超音速領域で、理論が与えるフラッタ限界と実験式が与えるフラッタ限界を遷音速領域に外挿すると全く正反対の結論に達してしまうのである(注 1)、(注 2)。

石井と柳沢¹³⁾は 1958 年ごろ、遷音速でのパネルフラッタの限界値が、きわめて異常なることに興味をもち、音速付近のパネルフラッタの限界を実験的に求めた。当時、遷音速付近でのパネルフラッタの実験として石井・柳沢以外のものがなかったが、最近、Fung 等の実験結果が発表されたので¹⁶⁾、当時疑問としていた“フラッタ点の実験上の定義”について新しく比較検討することができるようになったので、これを以下に簡単に述べ、著者の実験研究は付録 A に記す。

(注 1) 翼断面の変形を無視した場合の翼の曲げ捩りフラッタは音速で、最もクリティカルになることは理論的¹⁴⁾にも実験的¹⁵⁾にも知られた事実なので、この結論のみを単純にパネルの場合にもあてはめて、遷音速で最もクリティカルになることを暗示している超音速領域のパネルフラッタ理論が与える傾向の外挿を合理的なものとしている説もあるが、これは根拠のないもので、実際にはこの分野の研究は理論的にも実験的にもまったく未開拓である。

(注 2) Fung⁶⁾が軸力の作用していない平板について、振動モードを仮定せず、弾性撓みについては梁の静的影響関数を導入して、振動方程式を $k_0 = \omega_0 b / U$ の実固有値問題として、 $M = 1.1, 1.2, 1.3$ で求めたフラッタ限界は、 $M = 1.22$ 付近で h/b の最大値を与えて、 $M \rightarrow 1.1$ では h/b は減少しているが、この理論曲線は Fung 自身が述べているように計算点が少ないので、低超音速での特性がこのようになるか否かは断言できないと思う。

石井・柳沢の報告で、フラッタと定義したのは、オッシロペーパーに記録したパネルの振幅の記録を見て、

- (1) 板の振幅が大きくなり、板が固定端で破壊した場合は、その振動の始まった点をとらえ、
- (2) 破壊に至らなくとも、振幅が突然数倍 (3~5 倍) になった点をとらえるか、
- (3) 振動記録の中に、板の上の不安定な衝撃波の非定常運動によってひき起こされる random vibration と、間けつ的な harmonic oscillation^(注 3) が混じりあって存在する場合も、これをフラッタの開始と定義した^(注 4)。

(1), (2) の場合の定義には、疑問の余地はないが、(3) の場合は、特に $1 \leq M < 1.1$ であらわれることを知っていて、われわれはこれを空気力の非線型的ふるまいとか、衝撃波のためにはく離れた流れとかの記述し難い (unpredictable) 原因で、大振幅に成長しない“弱いフラッタ”であると考えていた。

一方、Fung 等は振幅の振動的ふるまいをテープレコーダーに記録し、この周波数分析を行なって、パワースペクトラムを求めることによって、フラッタの定義を定めた。すなわち、(1) パワースペクトラムがきわめて狭い一周波数帯にのみ現われる振動を、フラッタと定義し¹⁶⁾、(1) パワースペクトラムがある基本周波数とそれの高調波点に分散してある場合にはフラッタではない (no flutter) としている。このような、Fung の定義に従うと、石井・柳沢の実験で、 $1 \leq M < 1.1$ 付近でみられた (3) の場合はパワースペクトラム測定技術上、かなり長い時間の平均値をとることを余儀なくさせられるため、パワースペクトラムの周波数分布測定結果は、衝撃波の振動によって、ひき起こされる応答の寄与の方が卓越したものとなって、フラッタか否かを判定することが困難であるとしている。したがって、 $1 \leq M < 1.1$ の範囲では、フラッタ限界を示していない。

マッハ数 1 の付近で、片側が空気の流れにさらされた板は空力的に完全に安定 (実験の外挿) なのか、それとも逆にきわめて不安定 (理論の外挿) なのか、これに答えることは重要である¹⁸⁾。そしてこれに答えようとするのが本研究の主目的である。

記 号

(局部的に用いた記号は省いた)

a : 音 速

(注 3) 音速付近では、パネルの微小変形によっても、パネル上にきわめて弱い垂直衝撃波が生じ、それ自身はく離れた境界層と組み合わさって、不安定な自励振動系を構成するので¹⁷⁾、板はこれに応じて、random なレスポンスを示し、フラッタの起こりはじめた点を判別するには、多数の実験の繰り返しと経験を要した。

(注 4) わが国では、高速風洞でフラッタの試験を行なった経験者がほとんどなく、(3) の間けつ的な harmonic oscillation をフラッタ開始点と解釈することの可否について、当時、他の経験ある研究者に確かめることができなかったが、1961~1963 年の滞米中に、この方面の研究者に確かめたところ、遷音速付近では特に間けつ的な harmonic oscillation が繰り返されることを知った。また、当研究所の機体部中井氏による後退翼のフラッタ試験でもフラッタの前ぶれとしてこれが認められている。

A_n : パネルの変位をフーリエ展開した場合の n 番項の複素振幅, (40) 式

b : パネルの長さ

c_p : 圧力係数, 8 ページ

\bar{c}_p : $c_p(x', z', t') \equiv \bar{c}_p(x', z') e^{i\omega t'}$, 8 ページ

$C(x)$: フレネルの余弦積分, 付録 B

D : $\equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, 板の曲げ剛性

E : ヤング率

f_n : $\equiv \sin(n\pi x)$, (40) 式

$F(x-\xi)$: (37) 式の定義

g : 構造減衰係数, 8 ページ

$g(\xi, k)$: (37) 式の定義

$g(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}, \omega)$: (14) 式で定義

G_0 : (11) 式の主要解

h : パネルの厚さ

H : 風胴模型と風胴壁の距離, 図 6 A

i : $=\sqrt{-1}$

I_1 : (18) 式の定義

I_2 : (24) 式の定義

I_3 : 20 ページの定義

I_4 : 20 ページの定義

k : $\equiv b\omega/U$, 無次元振動数 (13 ページ~14 ページ除く)

k_f : フラッタ限界点の無次元振動数

k : 13 ページ~14 ページではベクトル \vec{k} の絶対値, (21) 式

$k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}$: ベクトル \vec{k} の成分

M : マッハ数

N : フーリエ展開の有限項近似の上限, 22 ページ

p_a : 空気圧力

p_∞ : 一様流れの静圧

P_n : $\equiv n\pi + \frac{k}{2}$, 20 ページ

Q_a : $\equiv \frac{1}{2}\rho U^2 b^3/D$, 無次元動圧, 9 ページ

- Q_n : $\equiv n\pi - \frac{k}{2}$, 20 ページ
 \tilde{r} : \tilde{x}, \tilde{z} 座標系における距離, (21) 式
 R_{mn} : 23 ページの定義
 R_{mn}^R : R_{mn} の実部
 R_{mn}^I : R_{mn} の虚部
 \mathfrak{R} : (51a) 式の定義
 s : 軸力係数, 9 ページ
 $S(x)$: フレネル正弦積分, (付録 B)
 t, τ : 無次元時間, $t' \equiv (b/U)t$
 t', τ' : 物理系 (x', z', t') の時間
 $\tilde{t}, \tilde{\tau}$: (10) 式の定義
 T : パネルに作用する軸力, 引張りが正
 U : 一様流れの速度
 w : パネル上の down wash, 上向きが正
 \bar{w} : $w(x, z, t) = \bar{w}(x, z)e^{i\omega t}$
 x, ξ : $x' = bx$
 x', ξ' : 物理座標系
 $\tilde{x}, \tilde{\xi}$: (10) 式の定義
 X : $\equiv \pi^4 / (2Q_a)$, (48) 式
 Y : $\equiv \mu/2$, (48) 式
 z, ζ : $z' = bz$
 z', ζ' : 物理座標系
 $\tilde{z}, \tilde{\zeta}$: (10) 式の定義
 \bar{Z} : $\bar{Z}' = b\bar{Z}$
 \bar{Z}' : パネルの変位, 8 ページ
 α : (11) 式の定義
 γ : 比熱比 $= c_v / c_p$
 δ : デルタ関数, (12) 式
 δ_{mn} : Kronecker のデルタ
 μ : 質量比, 9 ページ
 ν : ポアソン比
 ρ : 空気の密度

- ρ_s : パネル材料の密度
- ϕ : 擾乱速度ポテンシャル
- $\bar{\phi}$: $\phi(x', z', t') = \bar{\phi}(x', z')e^{i\omega t'}$
- φ : 無次元速度ポテンシャル, $\phi \equiv bU\varphi$
- $\bar{\varphi}$: $\varphi = \bar{\varphi}e^{ikx}$
- ω : 角振動数
- ω_1 : (17) 式の定義
- ω_2 : (17) 式の定義

解 析

この報告で取り扱うパネルの弾性構造的なモデルは、前縁、後縁ともに支持 (pin support) された二次元平板を考え、かつ、板の上下面で静圧の差はないものとする。パネルの背面 (流れにさらされている面の反対側) の静止空気の影響は背面側が閉じた空間で、その音響的固有振動数がパネルの振動数と一致する付近以外では無視できることが、Nelson and Cunningham⁸⁾ の研究によって示されているので、これは考慮しない。このようなモデルについて、音速付近でのフラッタの可能性を調べ、フラッタ限界を以下に求める。

[基礎方程式] 図2のごとく両端支持されたパネルが、その片面だけが遷音速流にさらされている場合を考えよう。

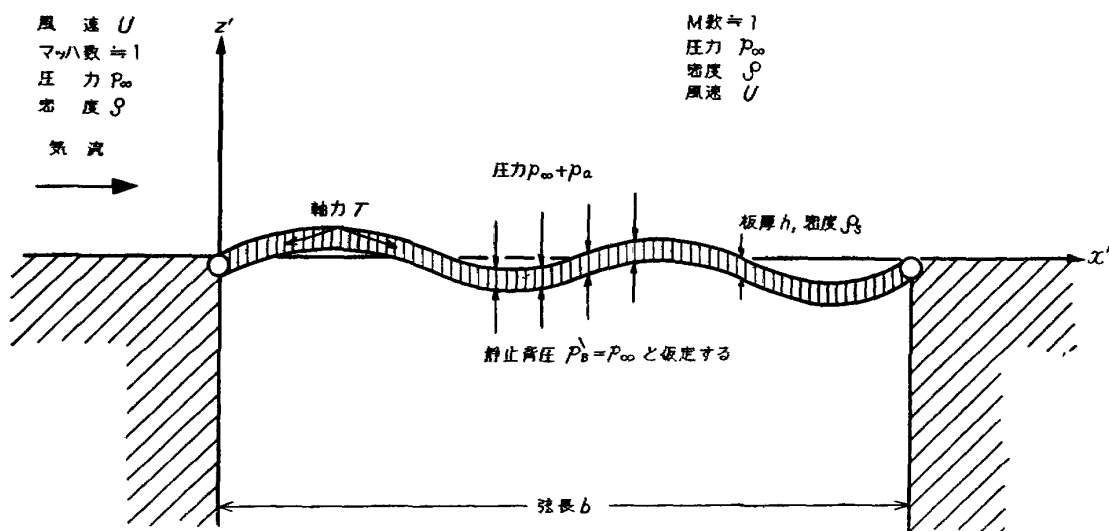


図 2

座標系を次のごとく定める。すなわち、原点を板の前縁にとり、流れ方向を x' 軸、上向きを z' 軸とする。前に述べたごとく、板の背面の空気は静止しているものとし、その圧力は一様流の圧力 p_∞ に等しいものとする。フラッタを起こしている場合を想定すると、板の単位弦長に作用してい

る z' 軸方向の力のうち、フラッタを本質的に支配するのは、板の曲げ反力、慣性力、空気力の三つである。曲げ反力を弾性板の微小変型理論で表わせば

$$D \cdot \partial^4 Z'(x', t') / \partial x'^4 \quad (\text{上向きが正})$$

となり、慣性力は

$$\rho_s h \cdot \partial^2 Z'(x', t') / \partial t'^2 \quad (\text{上向きが正})$$

である。ただし、

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \text{板の曲げ剛性}, \quad E = \text{ヤング率}, \quad h = \text{板厚}, \quad \nu = \text{ポアソン比}, \quad \rho_s = \text{板の材料の密度}$$

空気力は $p_a(x', t')$ (下向きを正) と記すことにしこれに関する考察は次節に行なう。

次に、フラッタの可能性を論じる場合本質的なものではないが、フラッタ限界に対し影響を与える二次的力として、次のごとき、軸力と構造減衰力が考えられる。(1) パネルに軸力 (T)、すなわち引張り力、ないし圧縮力 (ただし、座屈荷重以下の力) が作用していると、これによって z' 軸方向に $-T \cdot \partial^2 Z' / \partial x'^2$ の力が生ずる。 T は引張り力を正にとる。(2) 構造減衰によるエネルギー散逸は振動の振幅の二乗に比例するという Theodorsen の経験側から導かれる構造減衰力 $\sim i \times$ (復元力) をとることにし、構造減衰力を

$$igD \frac{\partial^4 z'(x', t')}{\partial x'^4}$$

とおく。

これらの力の釣り合いとして、次の運動方程式を得る。

$$(1+ig)D \frac{\partial^4 z'}{\partial x'^4} - T \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \rho_s h \frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} = -p_a(x', z', t') \quad (1)$$

空気力を圧力係数 c_p を用いて、 $p_a = \frac{\rho}{2} U^2 c_p(x', z', t')$ とあらわし、また、パネルがフラッタの限界点で、調和振動を行なっているとして、パネルの変位を

$$Z'(x', t') = \bar{Z}'(x') e^{i\omega t'}$$

とおき、したがって、圧力係数も

$$c_p(x', z', t') = \bar{c}_p(x', z') e^{i\omega t'}$$

とおくと、(1) 式は

$$(1+ig) \frac{\partial^4 \bar{Z}'}{\partial x'^4} + \rho_s h (-\omega^2) \bar{Z}' = -\frac{1}{2} \rho U^2 \bar{c}_p(x', z')$$

となる。

次に、長さをパネルの弦長 b で無次元化し、時間を b/U で無次元化して、それぞれプライムのない記号で表わすことにする。

すなわち、 $x' = xb$, $\bar{Z}' = bZ$, $t' = (b/U)t$ と定義すると、上の式は

$$(1+ig)\frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 b^3}\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}-\frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 b}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\rho_s h(-\omega^2)}{\frac{1}{2}\rho U^2}bZ=-\bar{c}_p(x,z)$$

または

$$(1+ig)\frac{1}{Q_a}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-s\frac{\pi^2}{Q_a}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-\mu k^2 Z=-\bar{c}_p(x,z) \quad (2)$$

となる。ここで

$$Q_a=\frac{\frac{1}{2}\rho U^2 b^3}{D}, \quad k=\frac{b\omega}{U},$$

$$\mu=\frac{2\rho_s h}{\rho b}, \quad s=\frac{b^2 T}{\pi^2 D},$$

である。便宜上、 k を無次元振動数 (reduced frequency), Q_a を無次元動圧, μ を質量比, s を軸力係数と呼ぶことにする。なお、 s は $s=1$ のとき、 T が二次元板の座屈荷重に対応するように決めたものである。

(2) の振動方程式に対する境界条件は、両端支持の場合であるから、

$$Z(0)=Z(1)=0, \quad \partial^2 Z(0)/\partial x^2=\partial^2 Z(1)/\partial x^2=0 \quad (3)$$

である。

さて、(2) 式の右辺の空気力の項 \bar{c}_p は、板の振動と無関係に作用する“与えられた”外力ではなく、一様流の流体特性、すなわち、マッハ数 M 、密度 ρ 、速度 U によることはもちろん、板の振動モードと振動数にも依存している非定常空気力である。したがって、まず、 \bar{c}_p の表現式を求めなければ、(2) の基礎方程式の表現は完了しない。そこで空気力に関する考察を次節に行なう。

[空気力]

音速付近の流れ中に、流れと平行に置かれた薄い物体 (ないし細長い物体) が、微小な振幅で非定常運動をしている場合の、完全流体の流れ場を支配する流体力学の基礎方程式 (非線型) は Lin, Reissner and Tsien¹⁰⁾ および Landahl²⁰⁾ によって、無次元擾乱ポテンシャル φ について次のごとく導かれた。

$$[1-M^2-M^2(\gamma+1)\varphi_x]\varphi_{xx}+\varphi_{xx}-2M^2\varphi_{xt}-M^2\varphi_{tt}=0 \quad (4)$$

非線型項の係数は、微小項の評価のアプローチの方法によって、 $(\gamma+1)$, $2M^2\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]$, $M^2\cdot(\gamma+1)$ となるが、(4) 式の $M^2(\gamma+1)$ は Spreiter²¹⁾ によって、厳密解ならびに実験と最も良く合致するように、経験的に見いだされたものと同じである。

微小擾乱の仮定の限りでは、(4) をこれ以上簡単化することはできないが、非定常の度合を無次元振動数 k の大きさを表わすとき、流れの場のいたるところで、

$$k \gg |\varphi_{0x}| \quad \text{および} \quad 1-M=O(\varphi_{0x}) \quad (5)$$

がなりたつなら、物体の非定常運動によって、ひき起こされる擾乱のポテンシャルは次の線型方程式によって支配されることが、Landhal によって示された。(ここで φ_0 は流れ場の中に物体が存在することによる定常な擾乱の速度ポテンシャル。)

$$\varphi_{zz} - 2M^2\varphi_{zt} - M^2\varphi_{tt} = 0 \quad (6)$$

ε を定常擾乱に寄与する、物体の最大厚み比とすると、二次元流の場合には $\varphi_{0x} = O(\varepsilon^{2/3})$ であるから、(5) の第一の条件は

$$k \gg \varepsilon^{2/3} \quad (7)$$

となる。また、(5) の第 2 の条件は

$$k \gg |1-M|_{max} \quad (8)$$

とすることもできる。

本研究で取り扱う平板のフラッタの場合には、 $\varepsilon=0$ であるから、(7) の条件は十分に満たしている。(8) の条件の吟味は結果論ではあるが、フラッタの起こる無次元振動数 k は海面上で $k \approx 0.3$ 、高度 20 km で、 $k \approx 0.2$ 程度であるから、(8) の条件は、マッハ数 1 ± 0.05 ではかなりよくなり、マッハ数 1 ± 0.1 まではかろうじてなりたつと考えるとよいであろう。

(6) で与えられる遷音速非定常線型方程式を、物理座標系 (x', z') と物理時間 (t') で表わすと、

$$\phi_{z'z'} - \frac{2M^2}{U}\phi_{z't'} - \frac{M^2}{U^2}\phi_{t't'} = 0 \quad (9)$$

$$(\text{ただし, } \phi = bU\varphi)$$

となるものであるが、

$$x' = M\tilde{x}, \quad z' = \tilde{z}, \quad t' = \tilde{t} \quad (10)$$

の変換を行なうと(注 5)、

$$\phi_{\tilde{z}\tilde{z}} - \alpha\phi_{\tilde{x}\tilde{t}} - \frac{\alpha^2}{4}\phi_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0, \quad \alpha \equiv \frac{2M}{U} = \frac{2}{a} \quad (11)$$

a は音速となる。

ある時刻 $\tilde{t}=0$ に、空間内の一点 $(\tilde{x}=0, \tilde{z}=0)$ にデルタ函数状のインパルスが突然与えられた時、(11) 式がいかなる波動伝播を示すか調べよう。すなわち、(11) の主要解 G_0 をまず求める。 G_0 は次の方程式を満たすべき解である。

$$G_{0\tilde{z}\tilde{z}} - \alpha G_{0\tilde{x}\tilde{t}} - \frac{\alpha^2}{4}G_{0\tilde{t}\tilde{t}} = -\delta(\tilde{z})\delta(\tilde{x})\delta(\tilde{t}) \quad (12)$$

(12) の右辺の各デルタ函数を積分表示して、

(注 5) この変換を施すことによって、今後の計算が非常に簡単になる。しいて物理的な意味づけをすると、音速 ($M=1$) の場合を解くことに相当する。

$$\delta(\tilde{x})\delta(\tilde{z})\delta(\tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{\tilde{x}}\tilde{x} + k_{\tilde{z}}\tilde{z})} dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \quad (13)$$

とし、これに応じて、主要解を次のごとき形に仮定すると、

$$G_0(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}, \omega) e^{i(k_{\tilde{x}}\tilde{x} + k_{\tilde{z}}\tilde{z} - \omega t)} d\omega \quad (14)$$

(12), (13), (14) から g が決められる。

$$g(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}, \omega) = \frac{1}{k_{\tilde{z}}^2 + \alpha k_{\tilde{x}} \omega - \frac{\alpha^2}{4} \omega^2} \quad (15)$$

(15) を (14) に代入すると、主要解は、

$$G_0(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{\tilde{x}}\tilde{x} + k_{\tilde{z}}\tilde{z})} dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{k_{\tilde{z}}^2 + \alpha k_{\tilde{x}} \omega - \frac{\alpha^2}{4} \omega^2} d\omega \quad (16)$$

となる。

(16) 中の ω に関する積分 (I_1 と定義) は、積分路を適当にとることによって、留数から求められる。

I_1 の被積分函数の分母を

$$\left. \begin{aligned} k_{\tilde{z}}^2 + \alpha k_{\tilde{x}} \omega - \omega^2 \frac{\alpha^2}{4} &= -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \frac{\alpha^2}{4} \\ \omega_{1,2} &= 2(k_{\tilde{x}} \pm \sqrt{k_{\tilde{x}}^2 + k_{\tilde{z}}^2}), \quad \omega_1 > \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで

と表わすと、 $k_{\tilde{x}}^2 + k_{\tilde{z}}^2 \geq 0$ であるから、 ω_1, ω_2 は共に実数で得られ、したがって極は実軸上にあることがわかる。(図 3 参照)

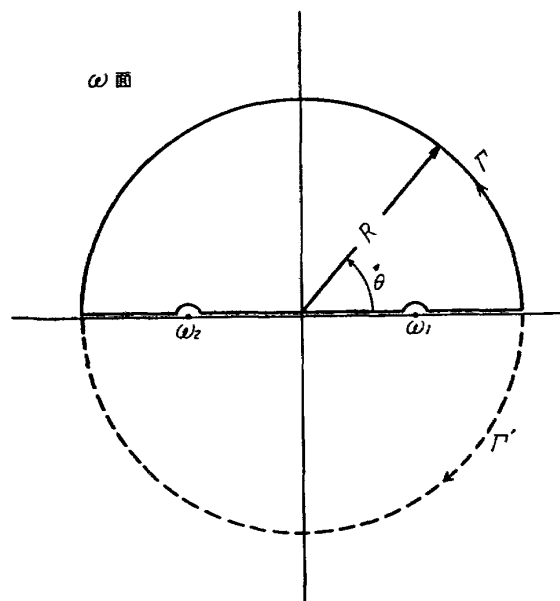


図 3

積分路 Γ 上では, $I_{\text{mag}}(\omega) > 0$ であるから, $\omega = Re^{i\theta}$ とあらわすと, $0 < \theta < \pi$, よって,

$$\text{分子} = e^{-i\omega\tilde{t}} = e^{-iR\tilde{t}\cos\theta} e^{R\tilde{t}\sin\theta}$$

であるから, $\tilde{t} < 0$ の時には, Γ 上では $R \rightarrow \infty$ と共に分子 $\rightarrow 0$ となり, Jordan の Lemma の条件を満たす。

ゆえに,

$$I_1 = \int_{\Gamma}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tilde{t}}}{k_{\tilde{z}}^2 + \alpha k_{\tilde{x}} \omega - \frac{\alpha^2}{4} \omega^2} d\omega = 0, \quad \tilde{t} < 0 \quad \text{に対し} \quad (18)$$

同様な考察により, $\tilde{t} > 0$ の場合については, 積分路を Γ' にとり,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma'}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tilde{t}}}{k_{\tilde{z}}^2 + \alpha k_{\tilde{x}} \omega - \frac{\alpha^2}{4} \omega^2} d\omega \\ &= \frac{8\pi i}{\alpha^2} \{R_{\text{res.}}(\omega_1) + R_{\text{res.}}(\omega_2)\} \\ &= \frac{8\pi i}{\alpha^2(\omega_1 - \omega_2)} \{\cos \omega_1 \tilde{t} - \cos \omega_2 \tilde{t} - i \sin \omega_1 \tilde{t} + i \sin \omega_2 \tilde{t}\} \end{aligned} \quad (19)$$

を得る。

(18), (19) より主要解 G_0 は次のようになる。

$$G_0(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) \begin{cases} = 0, & \tilde{t} > 0 \text{ に対して} \\ = \frac{4i}{(2\pi)^2 \alpha^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{\tilde{x}} \tilde{x} + k_{\tilde{z}} \tilde{z})} \frac{\cos \omega_1 \tilde{t} - \cos \omega_2 \tilde{t} - i \sin \omega_1 \tilde{t} + i \sin \omega_2 \tilde{t}}{\omega_1 - \omega_2} dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{z}}, & \tilde{t} > 0 \text{ に対して} \end{cases} \quad (20)$$

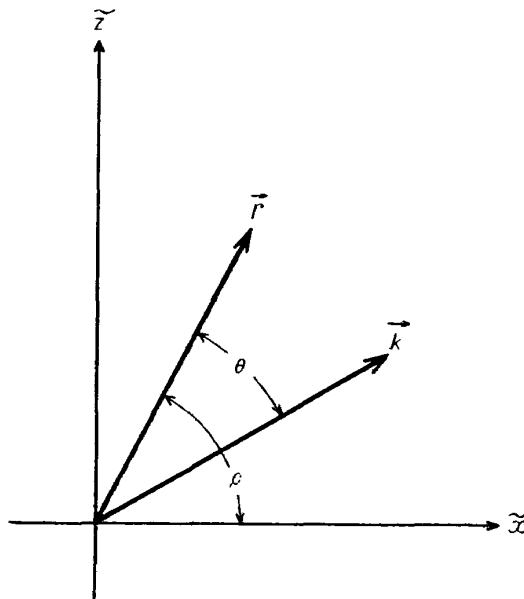


図 4

(20) 式中の $k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}$ に関する積分 (I_2 と定義) を行なうために次のごとき座標変換を行なう。(図 4 参照)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &\equiv \{\tilde{x}, \tilde{z}\}, \quad \vec{k} \equiv \{k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{z}}\} \\ dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{z}} &= k d\theta dk, \quad k \equiv |\vec{k}| \\ k_{\tilde{x}} \tilde{x} + k_{\tilde{z}} \tilde{z} &= \vec{r} \cdot \vec{k} = k\tilde{r} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(17) で定義した ω_1, ω_2 をこの極座標によって表わせば,

$$\omega_{\pm} = \frac{2}{\alpha} k \{\cos(p - \theta) \pm 1\}, \quad (22)$$

したがって,

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{4}{\alpha} k \quad (23)$$

となる。(10) の変換は (22), (23) がこのように簡単な形になるように考慮したものである。(22), (23) を用いて, I_2 を表わすと,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\alpha}{4} \int_0^{\infty} (-2 \sin A\tilde{r}) dk \int_0^{2\pi} \{\cos(k\tilde{r} \cos \theta) + i \sin(k\tilde{r} \cos \theta)\} \\ &\quad \times [\sin\{A\tilde{r} \cos p \cos \theta\} \cos\{A\tilde{r} \sin p \sin \theta\} \\ &\quad - \cos\{A\tilde{r} \cos p \cos \theta\} \sin\{A\tilde{r} \sin p \sin \theta\} \\ &\quad + i \cos\{A\tilde{r} \cos p \cos \theta\} \cos\{A\tilde{r} \sin p \sin \theta\} \\ &\quad + i \sin\{A\tilde{r} \cos p \cos \theta\} \sin\{A\tilde{r} \sin p \sin \theta\}] d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

ただし,

$$A \equiv \frac{2k}{\alpha}$$

(24) の被積分項を展開すると, 次のごとき 8 種の項について, $\theta = 0 \sim 2\pi$ の積分が必要となる。

- (i) $\sin(a \cos \theta) \sin(b \cos \theta) \cos(c \sin \theta)$
- (ii) $\cos(a \cos \theta) \sin(b \cos \theta) \cos(c \sin \theta)$
- (iii) $\sin(a \cos \theta) \cos(b \cos \theta) \sin(c \sin \theta)$
- (iv) $\cos(a \cos \theta) \cos(b \cos \theta) \sin(c \sin \theta)$
- (v) $\sin(a \cos \theta) \cos(b \cos \theta) \cos(c \sin \theta)$
- (vi) $\cos(a \cos \theta) \cos(b \cos \theta) \cos(c \sin \theta)$
- (vii) $\sin(a \cos \theta) \sin(b \cos \theta) \sin(c \sin \theta)$
- (viii) $\cos(a \cos \theta) \sin(b \cos \theta) \sin(c \sin \theta)$

ただし, $a \equiv k\tilde{r}, \quad b \equiv A\tilde{r} \cos p = \frac{2k}{\alpha} \tilde{r} \frac{\tilde{x}}{\tilde{r}}, \quad c \equiv A\tilde{r} \sin p = \frac{2k}{\alpha} \tilde{r} \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}}$

これらのおおのの被積分項について、 $\theta=\pi$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$ まわりの対称性, 非対称性を検討することにより, (i), (vi) を除いて, すべての積分が零になることがわかる。また, (i), (vi) は

$$(i) \text{ の積分} = \pi [J_0(\sqrt{(a-b)^2+c^2}) - J_0(\sqrt{(a+b)^2+c^2})]$$

$$(vi) \text{ の積分} = \pi [J_0(\sqrt{(a+b)^2+c^2}) - J_0(\sqrt{(a-b)^2+c^2})]$$

となる。ここで J_0 はベッセル函数。

この結果を (14) に代入して, I_2 として

$$I_2 = -i\alpha\pi \int_0^\infty \sin\left(\frac{2\tilde{t}}{\alpha}k\right) J_0\left(k\sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2}\right) dk$$

をうる。ところで, 一般に

$$\int_0^\infty \sin(Ax)J_0(Bx)dx = \begin{cases} 0, & B > A > 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}}, & A > B > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから,

$$I_2 = \begin{cases} 0, & t > 0 \text{ かつ } \sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2} > \frac{2\tilde{t}}{\alpha} \text{ のとき} \\ -i\alpha\pi\sqrt{\left(\frac{2\tilde{t}}{\alpha}\right)^2 - \left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 - \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2}, & t > 0 \text{ かつ } \sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2} < \frac{2\tilde{t}}{\alpha} \text{ のとき} \end{cases} \quad (25)$$

(25) を (20) にもどして, 代入すると, 主要解の最終形として,

$$G_0(\tilde{x}, z, \tilde{t}) = \begin{cases} = 0 \dots\dots\dots \begin{cases} \tilde{i} < 0 \text{ のとき,} \\ \text{または, } \tilde{i} > 0 \text{ で, かつ } \sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2} > \frac{2\tilde{t}}{\alpha} \text{ のとき} \end{cases} \\ = \frac{1}{\alpha\pi\sqrt{\left(\frac{2\tilde{t}}{\alpha}\right)^2 - \left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 - \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2}} = \frac{1}{\alpha\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2\tilde{t}^2 - (\tilde{x}-a\tilde{t})^2 - \tilde{z}^2}} \dots\dots\dots (26) \\ \dots\dots\dots t > 0 \text{ で, かつ } \sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2} < \frac{2\tilde{t}}{\alpha} \text{ のとき} \end{cases}$$

(26) の $\tilde{i} < 0$ に対して, $G_0=0$ は物理的に当然な結果である。次に,

$$\sqrt{\left(\tilde{r}-\frac{2\tilde{t}\tilde{x}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2 + \left(\frac{2\tilde{t}\tilde{z}}{\alpha\tilde{r}}\right)^2} > \frac{2\tilde{t}}{\alpha}$$

の条件を吟味する。 $\tilde{r}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2$, $\alpha = \frac{2}{a}$ に注意するとこれは

$$\frac{(\tilde{x}-a\tilde{t})^2}{(a\tilde{t})^2} + \frac{\tilde{z}^2}{(a\tilde{t})^2} > 1 \quad (27)$$

となるが、ここで、ひとたび物理座標系にもどって (27) 式を考察すると

$$\frac{(x' - ut')^2}{(ut')^2} + \frac{z'^2}{(at')^2} > 1 \tag{28}$$

となる。

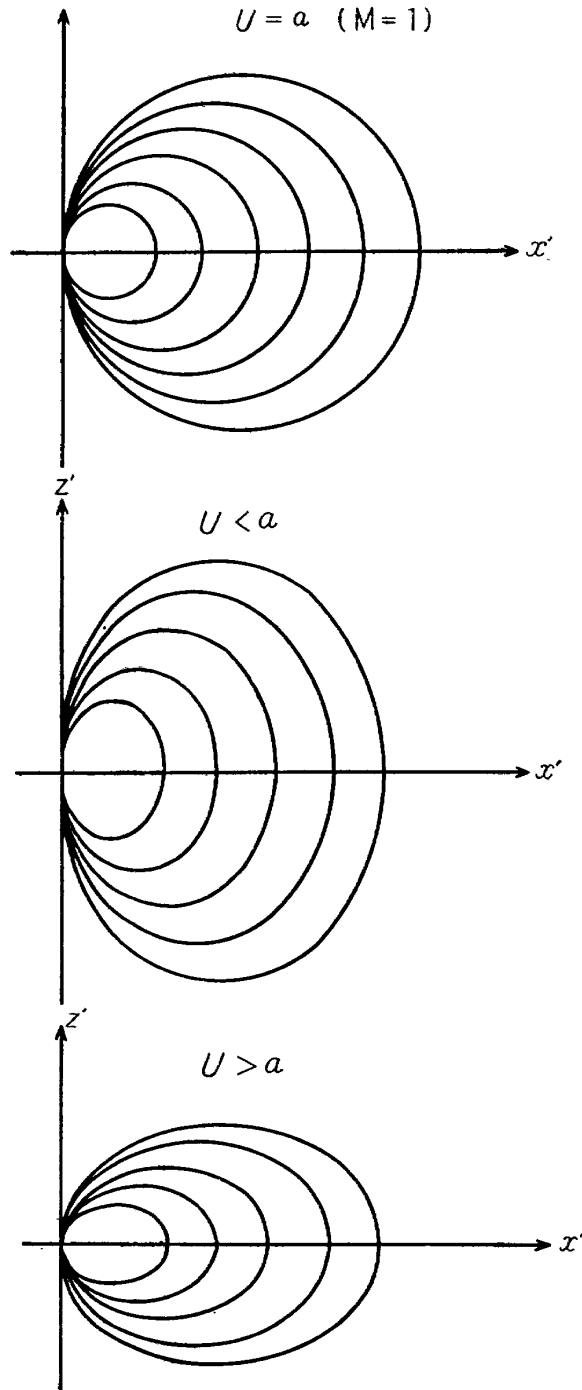


図 5

$u < a$ (亜音速), $u = a$ (音速), $u > a$ (超音速) に対応して, (28) は図 5 の a, b, c のハッチングを施した部分を表わしている。そして (26) 式はこのハッチングの領域では $G_0 = 0$, 内側では

$G_0 \neq 0$ ということを表わしている。音速の場合の波動の伝播形式は物理的にも合理的なものであるから、遷音速非定常線型基礎方程式 (6) ないし (9) は音速流では合理的と考えることができる。しかし、音速からわずかにはずれた亜音速ないし、超音速では、楕円形の波動伝播を示している。これは、 z 軸方向には音速で広がる合理的な波動であるが、 x 軸方向には (音速 + 一様流の速さ) の代わりに、一様流の速さの 2 倍の速度で伝播する波動を表わしていることになる。

したがって、(6), (9) 式はパルス源から出た波動の retarding wave front が常に発生点位置にとどまるように近似したものといえることができる。

音速にきわめて近いマッハ数付近の実際の現象では retarding wave front が音速に比して、きわめて遅い速度で、 x 方向に (亜音速なら x の負の方向に、超音速なら x の正の方向に) 伝播するのであるが、これを亜音速ないし超音速線型理論で忠実にあらわすと、結果的にはパネル上のいたるところで、圧力の分布の勾配 $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ が無限に大きい点が起こるような結果が導びかれる。(Landahl²⁷⁾ はこれを一次元のアナロジーを用いて説明している。) つまり、結果的に、無限に大きい φ_{xx} の解が得られるのであって、これは (4) 式で第 1 項を無視できるとした。出発の仮定に反した自己どう着におちいるのである。

(9) 式の解が、 $\frac{\partial p}{\partial x}$ の無限大になることなくスムーズな圧力分布を与えるのは、上述のごとくある点から出された連続波動の retarding wave がすべてその点に固定されるので、物体が周期的運動を続ける場合には、各 wave front は半周期前に出された逆符号の大きさの wave front と、大部分が打ち消され、しかも、打ち消されなかった残余の圧力の積分値も有限に止まると解釈すれば理解できる。

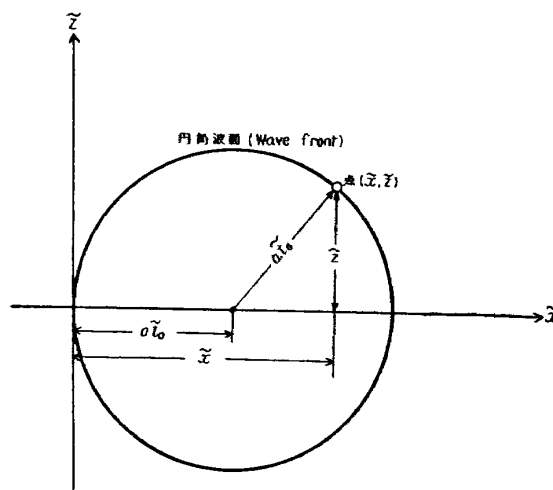


図 6

さて、再び変換された座標系 $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t})$ にもどって考えると、原点 $(0, 0)$ から出たパルスが、点 (\tilde{x}, \tilde{z}) に到達するに要する時間 \tilde{t}_0 は、図 6 から、幾何学的にわかるように、

$$a\tilde{t}_0 = \sqrt{\tilde{z}^2 + (\tilde{x} - a\tilde{t}_0)^2}$$

で与えられる。これから直ちに

$$\tilde{t}_0 = \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2}{2a\tilde{x}} = \frac{\tilde{r}^2}{2a\tilde{x}} \quad (29)$$

を得る。一方、(26) 式で $G_0 \neq 0$ となる値を与える最小の \tilde{t} の値も $\tilde{t}_0 = \tilde{r}^2/2a\tilde{x}$ となるから、(26) 式の付帯条件の意味は明らかである。

ここで、 $\tilde{x} \geq 0$ におかれたパネルが振動しているために、パネルが擾乱パルスを出すものと考えよう。すなわち、 x 軸上に分布している強さ A のパルス源から、時間的にも連続にパルスが出されていると考える。そうすると、 x 軸上の $(\tilde{\xi}, \tilde{\xi} + d\tilde{\xi})$ 部分から、ある時間 $(\tilde{T}, \tilde{T} + d\tilde{T})$ の間に出されたパルスが、時刻 \tilde{t} に点 (\tilde{x}, \tilde{z}) に作るポテンシャルを求めると、それは (26) 式から

$$\frac{1}{\alpha\pi} \frac{A(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}=0, \tilde{T}) d\tilde{\xi} d\tilde{T}}{\sqrt{a^2(\tilde{t}-\tilde{T})^2 - \{(\tilde{x}-\tilde{\xi}) - a(\tilde{t}-\tilde{T})\}^2 + \tilde{z}^2}}$$

であることがわかる。

点 (\tilde{x}, \tilde{z}) のポテンシャルに寄与するパルス群は、点 (\tilde{x}, \tilde{z}) からの前方マッハ円錐の中に含まれるものであるから、 $0 \leq \tilde{\xi} \leq \tilde{x}$ の間にあるものである。

“二次元空間の一点 $(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$ のパルス源というのは、三次元的表現をすれば、 $(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$ を通る $\tilde{\eta}$ 軸上の $-\infty$ から $+\infty$ までをさしているのであるから、この $\tilde{\eta} = \pm\infty$ の方にあるパルス源から出された波動が点 (\tilde{x}, \tilde{z}) に到達するには無限の時間を要する。

もちろん、最短の時間は前述のごとく t_0 である。したがって、二次元的一点から出されたパルスのうち、時刻 \tilde{t} に、点 (\tilde{x}, \tilde{z}) のポテンシャルに寄与するのは $-\infty < \tilde{T} < \tilde{t} - \tilde{t}_0$ の時間内に出されたものである。

よって、全パルス群によって点 (\tilde{x}, \tilde{z}) に、時刻 \tilde{t} に作られるポテンシャルは

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{\tilde{x}} d\tilde{\xi} \int_{-\infty}^{\tilde{t}-\tilde{t}_0} \frac{A(\tilde{\xi}, 0, \tilde{T})}{\sqrt{a^2(\tilde{t}-\tilde{T})^2 - \{(\tilde{x}-\tilde{\xi}) - a(\tilde{t}-\tilde{T})\}^2 - \tilde{z}^2}} d\tilde{T}$$

または、 $\tilde{T} = \tilde{t} - \tilde{\tau}$ と変換を行なうと

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{\tilde{x}} d\tilde{\xi} \int_{\tilde{t}_0}^{\infty} \frac{A(\tilde{\xi}, 0, \tilde{t}-\tilde{\tau})}{\sqrt{a^2\tilde{\tau}^2 - \{(\tilde{x}-\tilde{\xi}) - a\tilde{\tau}\}^2 - \tilde{z}^2}} d\tilde{\tau} \quad (30)$$

となる。パルスの分布強さ $A(\tilde{\xi}, 0, \tilde{t})$ は、(30) 式から導びかれる \tilde{z} 軸方向の速度が、パネル上の平行流の条件 (Tangential Flow Condition) を満たすように決定されなければならない。パネル上の down wash を $w(\tilde{x}, 0, \tilde{t})$ とすると、これは

$$w(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = \frac{\partial Z(\tilde{x}, 0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} + U \frac{\partial Z(\tilde{x}, 0, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} \quad (31)$$

で与えられる。(30) から求める $\lim_{\tilde{z} \rightarrow 0} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}}$ は (31) に等しいものでなければならぬ。この条件によって、 A が w の函数として決定される。この極限操作は $\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}}$ の表示式の被積分函数が、 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0$ および $\tilde{\xi} = \tilde{x}$ で無限大になるため、ややめんどろなものであるが、けっきょく

$$A(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = -2w(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) \quad (32)$$

を得る。

この (32) を (30) に代入することによって、速度ポテンシャルは

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\frac{2}{\alpha\pi} \int_0^{\tilde{x}} d\tilde{\xi} \int_{\tilde{t}_0}^{\infty} \frac{w(\tilde{\xi}, 0, \tilde{t}-\tilde{\tau})}{\sqrt{a^2\tilde{\tau}^2 - \{(\tilde{x}-\tilde{\xi}) - a\tilde{\tau}\}^2 - \tilde{z}^2}} d\tilde{\tau} \quad (33)$$

となる。(10) の変換によって、物理座標系 (x', z', t') にもどして、かつ $\alpha = \frac{2}{a}$ に注意すると、

$$\phi(x', z', t') = -\frac{a}{\pi M} \int_0^{x'} d\xi' \int_{t'_0}^{\infty} \frac{w(\xi', 0, t'-\tau')}{\sqrt{a^2\tau'^2 - \{(x'-\xi')M - a\tau'\}^2 - z'^2}} d\tau' \quad (34)$$

この (34) が擾乱速度ポテンシャルの最も一般的な形である。いま、ここで特に振動数 ω の調和振動を仮定すると $w'(\xi', 0, t'-\tau') = \bar{w}'(\xi', 0)e^{i\omega(t'-\tau')}$ とおけ、 τ' に関する積分は Fresnel 積分の形で容易に求められて、

$$\phi(x', z', t') = -\frac{e^{i\omega t'}}{M\sqrt{2}} \int_0^{x'} \frac{\bar{w}'(\xi', 0) e^{-i\frac{\omega(x'-\xi')}{2U}}}{\sqrt{i\pi\frac{\omega}{U}(x'-\xi')}} d\xi' \quad (35)$$

となる。さきに振動方程式を無次元表示した座標系 (x, z, t) を用い、かつ、無次元速度ポテンシャル φ を $\phi = bU\varphi = bU\bar{\varphi}e^{ikt'}$ のごとく導入すると、(35) は次のように表わされる。

$$\varphi(x, z, t) = \bar{\varphi}(x, z)e^{ikt} = -\frac{e^{ikt}}{M\sqrt{2}} \int_0^x \frac{\bar{w}(\xi, 0) e^{-i\frac{k(x-\xi)}{2}}}{\sqrt{i\pi k(x-\xi)}} d\xi \quad (36)$$

ここで、

$$\bar{w}(\xi, 0) = \frac{\partial Z(\xi, 0)}{\partial \xi} + ikZ(\xi)$$

(36) で $M=1$ とおけば、Nelson and Berman¹⁴⁾、Rott²²⁾ によって得られた解と同じものになる。このように簡単な形でマッハ数に関して、非定常遷音速流の相似則がなりたっている。

$M=1$ でフラッタ解析をして得られる結果は、この相似則によって、マッハ数 1 付近の結果に換算することができるから、今後はすべて $M=1$ として解析を進める。

今後の計算を容易ならしめるために、 $x-\xi$ を改めて ξ と記し、積分変数を変えると、(36) は、

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\varphi} &= \frac{1}{2} \int_0^x F(x-\xi) g(\xi|k) d\xi \\
 F(x-\xi) &= \frac{\partial Z(x-\xi)}{\partial(x-\xi)} + ikZ(x-\xi), \\
 g(\xi|k) &= e^{-i\frac{k}{2}\xi} / \sqrt{i\pi\frac{k}{2}\xi}
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

圧力係数 \bar{c}_p は線型理論では

$$\bar{c}_p = -2(\bar{\varphi}_x + ik\bar{\varphi}) \quad (38)$$

と与えられる。これに (37) を代入すると、

$$\bar{c}_p(x, 0) = \int_0^x \{F'(x-\xi) + ikF(x-\xi)\} g(\xi|k) d\xi + Z'(0)g(x) \quad (39)$$

ここで、

$$F'(x-\xi) = \frac{\partial F(x-\xi)}{\partial(x-\xi)}, \quad Z'(0) = \left[\frac{\partial Z}{\partial x} \right]_{x=0}$$

なお、(39) を導びくに際し、パネルが前縁で支持されていることを考慮し、 $Z(0)=0$ を用いた。

空気力として、(39) の表現のまま、板の振動方程式 (2) の右辺に代入すると、これは微積分方程式となり解くことはきわめて困難である。そこで、パネルの振動形として、フーリエ無限級数の形を用いると、かなり容易になるので、その方法を以下に展開する。

境界条件 (3) 式はあらかじめみたとすように考慮し、パネルの振動形をフーリエ正弦級数で

$$Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x) \quad (40)$$

とあらわす。ただし A_n は複素数、 $f_n(x) \equiv \sin(n\pi x)$ 。

(40) を (39) の \bar{c}_p の表現に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_p(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \{ (k^2 + n^2\pi^2) A_n \int_0^x f_n(x-\xi) g(\xi|k) d\xi \} \\
 &\quad + 2ik \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \int_0^x f_n^{(1)}(x-\xi) g(\xi|k) d\xi \right\} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n) g(x)
 \end{aligned} \quad (41)$$

をうる。ここで

$$f_n^{(1)} \equiv \frac{\partial f_n}{\partial x}.$$

(41) には次の二つのめんどろな不定積分が含まれている。

<p style="text-align: center;">第 一</p> $I_3(x) = \int_0^{\infty} f_n(x-\xi)g(\xi k)d\xi$ $= \int_0^{\infty} \sin n\pi(x-\xi) \frac{e^{-i\frac{k}{2}\xi}}{\sqrt{i\pi\frac{k}{2}\xi}} d\xi$		<p style="text-align: center;">第 二</p> $I_4(x) = \int_0^{\infty} f_n^{(1)}(x-\xi)g(\xi k)d\xi$ $= \int_0^{\infty} n\pi \cos n\pi(x-\xi) \frac{e^{-i\frac{k}{2}\xi}}{\sqrt{i\pi\frac{k}{2}\xi}} d\xi$
---	--	--

$g(\xi|k)$ の項を、実部と虚部に分離してのち、適当な操作を繰り返せば、この積分は Fresnel 積分を用いて、closed form であらわすことができる。最終形のみを示すと、

$$\begin{aligned}
 I_3(x) = & \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \left[(1-i) \frac{1}{2} \left[\sin(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) + \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) \pm \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right] \right. \\
 & \left. - (1+i) \frac{1}{2} \left[\sin(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) \mp \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right] \right] \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(x) = & n\sqrt{\frac{\pi}{k}} \left[(1-i) \frac{1}{2} \left[\cos(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) + \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) \pm \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right] \right. \\
 & \left. - (1+i) \frac{1}{2} \left[\cos(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) \mp \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin(n\pi x) \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{|Q_n|}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} |Q_n| x}\right) \right\} \right] \right] \quad (43)
 \end{aligned}$$

複号は Q_n が負のとき、下側の記号をとる。 P_n は常に正。ここで $P_n \equiv n\pi + \frac{k}{2}$, $Q_n \equiv n\pi - \frac{k}{2}$

$$\left. \begin{aligned}
 S(x) & \equiv \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \\
 C(x) & \equiv \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt
 \end{aligned} \right\} \text{Fresnel 積分の定義(注 6)}$$

[Galerkin 法によって、振動方程式を解くこと]

(42) (43) を (41) の \bar{c}_p の式に代入し、さらにこれを (2) の振動方程式の右辺に代入し、実部と虚部を分離した形で記すと次のごとくなる。

(注 6) Fresnel 積分には別の定義もあり、その方が広く使われているようである。ここで定義したものとの関係や、ここで必要とする特殊な積分については付録 B を参照。

$$\text{左辺} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^4}{Q_n} \{n^4(1+ig) + sn^2\} - \mu k^2 \right] A_n \sin(n\pi x)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} = & -\sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + n^2\pi^2) A_n \sqrt{\frac{1}{2k}} \left[\sin(n\pi x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos(n\pi x) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \mp \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

[備考] $-\sum (k^2 + n^2\pi^2) A_n \int_0^{\infty} f_n(x-\xi) g(\xi|k) d\xi$ より出る実部

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=0}^{\infty} k n \pi A_n \sqrt{\frac{2}{k}} \left[\sin(n\pi x) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \mp \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos(n\pi x) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

[備考] $+2ik \sum A_n \int_0^1 f_n^{(1)}(x-\xi) g(\xi|k) d\xi$ より出る実部

$$+\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n A_n \left[\frac{\cos \frac{k}{2} x - \sin \frac{k}{2} x}{\sqrt{kx}} \right]$$

[備考] $\pi \sum n A_n g(x|k)$ より出る実部

$$\begin{aligned} & -i \sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + n^2\pi^2) A_n \sqrt{\frac{1}{2k}} \left[\sin(n\pi x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \mp \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos(n\pi x) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

[備考] $-\sum (k^2 + n^2\pi^2) A_n \int_0^{\infty} f_n(x-\xi) g(\xi|k) d\xi$ より出る虚部

$$\begin{aligned} & +i \sum_{n=1}^{\infty} k n \pi A_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sin(n\pi x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) - \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos(n\pi x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{P_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{Q_n}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) + \frac{1}{\sqrt{P_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_{nx}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{Q_n}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_{nx}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

[備考] $+2ik \sum A_n \int_0^1 f_n^{(1)}(x-\xi) g(\xi|k) d\xi$ より出る虚部

$$-i \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \left[\frac{\cos \frac{k}{2} + \sin \frac{k}{2}}{\sqrt{kx}} \right]$$

[備考] $\pi \sum n A_n g(x|k)$ より出る虚部

(44)

(注) 備考中、「実部」というのは、形式上 i を含まぬ項のこと、「虚部」というのは、形式上 i を含む項のことを意味する。

(44) 式を Galerkin 法によって解くことにする。すなわち、振動方程式 (44) の解として、フーリエ無限級数 (40) のうち、有限項 (N 項) のみをとって、

$$Z_N(x) = \sum_{n=1}^N A_n f_n(x)$$

と近似させる。その際、上の N 項近似解を (44) に代入して、(左辺) と (右辺) の差を求め、それを ε としたとき、 ε^2 を考慮している x の範囲 $[0, 1]$ で積分した値が最小となるように A_n を決定する。

すべての $n(1, 2, \dots, N)$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \left(\int_0^1 \varepsilon^2 dx \right) = 0$$

とすることであって、この条件は、形式的には次のごとき数学的操作となることが、“Galerkin Method in Mechanics and Differential Equations” by Duncan et al, R & M No. 1798 に示されている。

「もとの微分方程式の全体に仮定した特定のモード (この場合、 $f_m = \sin m\pi x$ で $m=1, 2, \dots, N$) を乗じ、 x について考慮している x の全域 $[0 \sim 1]$ にわたって、積分した式と、上の $\partial(\)/\partial A_n = 0$ の条件は同等」

さて、この Galerkin の原理にしたがって、(44) の両辺に、ある特定の振動モード $\sin m\pi x$ を乗じて、 x について $[0 \sim 1]$ の定積分を行なうことを考えよう。そうすると、下記のごとき積分があらわれる。

略記号

$$\frac{1}{\sqrt{P_n}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x} \right) dx \equiv (S.S.P.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{P_n}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x} \right) dx \equiv (S.C.P.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|P_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \cos(n\pi x) S \left(\sqrt{\frac{1}{\pi} P_n x} \right) dx \equiv (C.S.P.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|P_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \cos(n\pi x) C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} P_n x} \right) dx \equiv (C.C.P.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|Q_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} Q_n x} \right) dx \equiv (S.S.Q.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|Q_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} Q_n x} \right) dx \equiv (S.C.Q.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|Q_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \cos(n\pi x) S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi} Q_n x} \right) dx \equiv (C.S.Q.)_{mn}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|Q_n|}} \int_0^1 \sin(m\pi x) \cos(n\pi x) C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} Q_n x}\right) dx \equiv (C.C.Q.)_{mn}$$

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \begin{cases} \cos \frac{k}{2} x \\ \text{または} \\ \sin \frac{k}{2} x \end{cases} \frac{1}{\sqrt{kx}} dx \equiv \begin{cases} (C/\sqrt{\quad})_m \\ (S/\sqrt{\quad})_m \end{cases}$$

ただし
$$P_n = n\pi + \frac{k}{2}, \quad Q_n = n\pi - \frac{k}{2}$$

$m \neq n$ の場合と、 $m = n$ の場合についてこの積分を行なわなければならない。この積分はきわめてめんどろなものであるが、最後のものを除いては、各積分の間はかなり共通な部分が生じ、かなり systematic な方法で求められる。そして、最終的には、Fresnel 積分を用いて、closed form で表わすことができる。 $(S.C.P.)_{mn}$ 等の最終形のみを付録 C に示した。またこの積分に必要な特殊な公式も示してある。

しかし、この最終形の exact な形を知らなくとも、以下の議論をさしつかえなく進めることができるように記述する。

(44) 式の左辺に Galerkin の定積分をほどこすと、 $n = m$ なる時のみ 0 でなく、左辺は

$$\frac{1}{2} \left[\frac{-\pi^4}{Q_n} \{(1+ig)m^4 + sm^2\} + \mu k^2 \right] A_m, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (45)$$

となることは容易にわかる。

一方、(44) 式の右辺に Galerkin の定積分をほどこした後は、どの項をとってみても、 A_n を係数にもった k, m, n のみの函数（ただし、複素函数）となることは容易にわかるであろう。Galerkin の N 項近似によって、振動モードは仮定されたとおりの“given”であるから、モードの index である m, n はパラメータとみなし、 k のみの函数であるということを強調するために、各項を $A_n R_{mn}(k)$ と記すことにする。そうして、さらに、 $R_{mn}(k)$ は複素であるから、今後の便宜上、これを実部と虚部に分けて、

$$R_{mn}(k) = R_{mn}^R(k) + iR_{mn}^I(k)$$

と記す。そこで (44) 式の右辺から得られる式は、

$$\sum_{n=1}^N A_n R_{mn}^R(k) + i \sum_{n=1}^N A_n R_{mn}^I(k), \quad m=1, 2, \dots, N \quad (46)$$

と書ける。

$R_{mn}^R(k)$, $R_{mn}^I(k)$ の数値は図 7~図 12 に示した。なお、非定常流の Reversal Flow Theorem から $R_{mn}(k) = (-1)^{m+n} R_{nm}(k)$ なる関係のあることが導びかれるので、 R_{mn} のうち $m \leq n$ のものだけを示した。

けっきょく、(44) 式に Galerkin の積分をほどこした後の形としては、(45)=(46) とおくこと
によって、

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{\pi^4}{Q_a} \{(1+ig)m^4 + sm^2\} + \mu k^2 \right] A_m = \sum_{n=1}^N A_n \{R_{mn}^R(k) + iR_{mn}^I(k)\}$$

$$m=1, 2, \dots, N. \quad (47)$$

をうる。これはまた、

$$\sum_{n=1}^N A_n [\delta_{mn} \{X((1+ig)m^4 + sm^2) - Yk^2\} + R_{mn}^R(k) + iR_{mn}^I(k)] = 0$$

$$m=1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

ただし、

$$X \equiv \frac{\pi^4}{2Q_a}, \quad Y \equiv \frac{\mu}{2}.$$

δ_{mn} は Kronecker のデルタ

と書くこともできる。

はじめに仮定した振動解 $Z(x, t) = \sum A_n f_n(x) e^{i\omega t}$ が意味をもったものであるためには、すべての n に対して $A_n = 0$ であってはならない。このことは、つまり (48) の作る Determinant が零ということである。

この Determinant は五つの無次元パラメタからなっている。すなわち、空気力のパラメタ k 、構造のパラメタ g, s 、空気力と構造の結合パラメタ X, Y の合計五つである(注7)。複素 Determinant であるから、原理的には、任意の三つのパラメタを fix すれば、残りの二つは実の固有値として決定される。

フラッタ問題として興味があるのは、フラッタ限界 (または Neutral Stability) を求めることであるから、 $\text{Imag}(\omega) = 0$ すなわち $\text{Imag}(k) = 0$ としよう。そして、特に k を正の実数と仮定する(注8)。

Determinant を解く簡便さからいえば、 k, g, s を正の実数に fix して、 X, Y を決定するのが最も容易である。しかし、 X, Y が共に正の実数として得られなければ、 X, Y の定義から明らかのように、これは物理的に意味をもったものではない。つまり、この場合には、フラッタは起こらないと考えるべきである。以上の考え方にしたがって、いくつかの例についてフラッタ限界を次に求める。

数値解析例

[例 1: $N=1$ とした場合の考察]

(注7) 一般にはマッハ数 M も一つのパラメタとして入るので、合計六つとなるのであるが、ここでは $M=1$ としているので、おもてには現われていない。

(注8) k を負の実数としても、結果は変わらない。

軸力が作用していない場合 ($s=0$) で、かつ構造減衰を零 ($g=0$) とした場合をまず考えよう。振動モードとして、 j 番目のモードのみをとる。(48) は

$$A_j[(R_{jj}^R + X - k^2 Y) + iR_{jj}^I] = 0 \tag{49}$$

となるが、 $A_j \neq 0$ でなければならぬから、(49) 式の $[\quad] = 0$ であるべきである。 $[\quad]$ の中の実数部=0 かつ虚数部=0 が要求されるが、虚数部すなわち R_{jj}^I は k のみの関数であるから、 $R_{jj}^I(k) = 0$ となるような k を求めれば、フラッタの振動数 k_f を与える。この k_f を用いて、実数部 $R_{jj}^R + X - k_f^2 Y$ の中の R_{jj}^R を求めれば、実数部=0 とおくことによって、フラッタ限界での X, Y の関係、すなわち

$$\frac{1}{Q_a} \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b^3}$$

$$\mu \equiv \frac{\rho_s h}{\rho b}$$

の関係が求められる。

計算結果

$k=0.1 \sim 2.0$ の範囲で、 $R_{11}^I = 0$ となる点はない。(図7参照) なお $k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ とした両極限では $R_{11}^I \rightarrow \infty$ となる。

第2モードだけの場合も、また第3モードだけの場合にも $R_{22}^I = 0, R_{33}^I = 0$ となる点はない。(図10, 図12) これらも $k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ とした両極限で無限大になる。

したがって、ただ、1個のモードだけをとったような Standing wave の形ではフラッタは起こらないと考えるべきである。構造減衰があれば ($g > 0$)、(48) 式から明らかのように、これは R_{jj}^I の曲線を上方に移動させることに相当するから、一層フラッタは起きにくくなることを意味している。物理的にも当然な結果である。

軸力は実数部のみに影響を与え、虚数部には影響を持たないから、この場合にも、上記の結論は変わらない。

[例 2: $N=3$ とした場合の考察 ($s=0, g=0$)]

$N=3$ とし、第1モード、第2モード、第3モードをとる。

(48) は

$$\left. \begin{aligned} A_1\{(R_{11}^R + X - Yk^2) + iR_{11}^I\} + A_2\{R_{12}^R + iR_{12}^I\} + A_3\{R_{13}^R + iR_{13}^I\} &= 0 \\ A_2\{R_{21}^R + iR_{21}^I\} + A_2\{(R_{22}^R + X - Yk^2) + iR_{22}^I\} + A_3\{R_{23}^R + iR_{23}^I\} &= 0 \\ A_3\{R_{31}^R + iR_{31}^I\} + A_2\{R_{32}^R + iR_{32}^I\} + A_4\{(R_{33}^R + X - Yk^2) + iR_{33}^I\} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

となる。前と同様に、仮定した振動解が意味を持つためには、(50) 式の Determinant=0 でなければならない。この Determinant の実部と虚部を求めると、実部は X, Y に関する三次式となり、

一方、虚部は X, Y に関する二次式となる。各項の係数はもちろん、 R_{mn}^R, R_{mn}^I の多項式で表わされるから、無次元振動数のみの函数である。そこで実部を

$$\begin{aligned} \Re(k) = & 1296X^3 - 1393X^2(k^2Y) + 98X(k^2Y)^2 - (k^2Y)^3 + BX^2 + BX^2 \\ & + CX(k^2Y) + D(k^2Y)^2 + E(k^2Y) + FX + G = 0 \end{aligned} \quad (51a)$$

虚部を

$$(k^2Y)^2 + (HX + K)(k^2Y) + JX^2 + LX + M = 0 \quad (51b)$$

と記す。係数 $B(k), C(k) \cdots M(k)$ の値を図 13~図 18 に示した。

無次元振動数 k を仮定しておいて、(51a), (51b) を X, Y について解き、 X, Y が共に正の実数であれば、それがフラッタの中立安定を与える点である。もし、二組以上の正の実数解が得られたならば、 X の値の大きい方の組をとるのが合理的である。なぜなら、それがより小さい方の限界動圧を与えるからである(注 9)。実際に (51) を数値的に解くには、(51b) を k^2Y の二次式とみなして、仮定した一連の X の値に対する根 k^2Y_1, k^2Y_2 を求め、次にこれを (51a) に代入して、 $\Re(k)$ を計算し $\Re(k)=0$ となる X の値と k^2Y の値を図式的に求めた。実験結果から予想される X の値は 10 程度なので、 $X=0.0 \sim 80.0$ の範囲を間隔 $\Delta X=0.5$ で計算した。無次元振動数 k は 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 の 13 ケースである。この計算の数例を図 19 に示す。上記の各無次元振動数 k に対する実固有値 X, Y の値を図 20, 21 に示した。与えられたパネル材料と、与えられた飛行大気高度でフラッタ限界は次のようにして、容易に求められる。

定義により、 h/b (板厚と板の長さの比) は、 X, Y よりそれぞれ次のごとく与えられる。

$$Y \text{ からは} \quad h/b = Y \cdot \rho / \rho_s \quad (52)$$

$$X \text{ からは} \quad h/b = \{X(24/\pi^4)(1-\nu^2)\rho U^2/2E\}^{1/3} \quad (53)$$

この両者から与えられる、 h/b は当然等しくなければならぬから、右辺同志等しいとおくことによって、

$$\frac{Y^3}{X} = \frac{12}{\pi^4} \frac{\rho_s^3(1-\nu^2)}{E} \frac{U^2}{\rho^2} \quad (54)$$

を得る。

(54) 式の右辺はパネルの構成材料が与えられると決まる因子 $\rho_s^3(1-\nu^2)/E$ と、飛行大気高度が与えられると決まる因子 U^2/ρ^2 とからなっている。($M=1$ の場合を取り扱っているので、 U はその高度での音速に等しいから、高度のみで決る。)

したがって、材料 (E, ρ_s, ν) と高度 ($\rho, U=a$) が与えられたときのフラッタ限界の板厚比 h/b は次の手順によって求めることができる。

(注 9) 計算の範囲内では二組の正の実値が得られた。(図 19 参照)

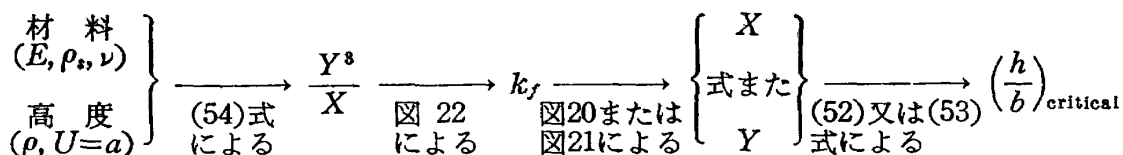


図 23 にはこうして求めた、ジュラルミン，鋼，チタンの各材料について，高度 0~20 km までの限界板厚を示した。

[例 3: $s=0, g=0, M \neq 1.0$]

空気力に関する章ですでに述べたように，((34) または (36) 参照) 音速点以外の空気力係数は，音速点での値を $1/M$ 倍して得られるという相似則がなりたつから，音速での $R_{mn}(k)$ を $1/M$ 倍すれば，当該マッハ数における値に変換される。また，(48) 式から容易にわかるように，固有値 X, Y も，音速点の値の $1/M$ 倍になる。

Q_a の定義にあらわれる一様流の速度 U は音速の値を M 倍したものをを用いる。このことに留意すれば，音速の場合と同様にして，音速点以外のマッハ数におけるフラッタ限界が得られる。図 24 には，海面上の $M=0.8 \sim 1.2$ に対するフラッタ限界を他の理論，実験ならびにわれわれの実験と共にまとめて示した。

亜音速側では板厚が減少するのが特徴的であるが，さらにマッハ数の低い亜音速領域とどのように接続されるかは今後の研究に待たねばならない。

結 論

- (1) 非定常超音速空気力，ないし準定常超音速空気力で二次元パネルフラッタの限界板厚を Galerkin 法で求めると，無限大に発散するので，音速付近がパネルフラッタに対してクリティカルであると推論されていたが，線型化された非定常遷音速空気力を用いて解析した結果，限界板厚は有限であり，しかも音速より高いマッハ数の方でよりクリティカルであることを示した。
- (2) (1) の解析結果は，両端固定の二次元板について，さきに著者が行なった実験結果と定性的(傾向的)に合うことが明らかになった。
- (3) 従来，亜音速流中ではパネルフラッタは起こらないとされていたが，この説も再検討の余地がある。しかし，双曲型の音速流非定常線型方程式の解を，マッハ数に関する相似則によって，本質的にだ円型である亜音速領域に変換させた結果についても亜音速側からの空気力学的検討を要する。
- (4) 音速付近の実験は，パネル上の不安定な衝撃波の振動によって，攪乱されるのでフラッタの開始点を，純亜音速，純超音速の場合のように，正確にとらえることはむずかしい。この方面の新技術の開発が望まれる。
- (5) パネルフラッタは起きて，振幅が直ちに発散する性質のものではなく，板の変位にともな

う、引張り軸力の効果で、リミットサイクルに落ちついてしまうものである。したがって、長時間、連続的にフラッタの状態が持続すると板の疲労、特に固定点の疲労を招いて破壊に至るものであることが実験をとおしてわかった。

[付 録 A]

これはすでに、宇宙科学技術シンポジウム（1961年7月）の前刷に、「遷音速パネルフラッタの実験」として掲載したものであるが、その中から主要な事項のみを改めて記す。

[装 置]

長さ $b=171$ mm, 幅 $=100$ mm, 厚さ $h=0.4, 0.6, 0.8, (1.0)$ mm の4種の鋼板パネル模型を前縁, 後縁が固定されるように, 図1Aのごとく模型支持枠に取り付けた。後縁はスライドしてパネルに加わる軸力をのがすことができるようにくふうしてある。

パネルの変位検出器には温度特性の一樣なこと, またパネルに付加質量ないし付加剛性を与えぬこと, さらに, 風洞気温度 $80\sim 90^\circ\text{C}$ の温度に耐えることなどを考慮して, 静電気容量変化を利用した。すなわち, パネルの中心線下6か所に直径 11 mm の真ちゅう円板をおき (パネルの平均位置より 5 ± 0.01 mm 下方) これとパネル間の静電容量変化を検出記録した。

パネル上の境界層の影響を小さくするために, 風洞壁にとりつけず, 図1Aのごとき取付枠を用いた。パネルの後縁を変位させる軸力装置 (遠隔操作) をとりつけ, 変位は駆動モーターの回転数から, カウンター付セルシンモーターで読みとった。

気流のよどみ点温度は $80\sim 90^\circ\text{C}$ で一方パネルの座屈温度は $h=0.4, 0.6, 0.8$ mm に対して, それぞれ $1.7, 3.8, 6.7^\circ\text{C}$ である。このため, パネルの熱による座屈をできる限り避け, “平板の状態” に近似させるように次の手段をとった。すなわち, 一度風洞をスタートさせ, 風洞およびパネルが熱的に平衡状態に達した後, 風洞を急停止させ, パネルの後縁を変位させることによって, 熱膨張を除き, パネルの固有振動数をあらかじめ求めておいた平板の固有振動数と一致させることによって, 平板であることを確かめた。(電磁石による共振法を用い, 振動数はデジタルカウンターで読む。)

[実験方法]

よどみ点圧力および抽気量を変化させて, マッハ数と動圧を制御し, ブラウン管上にあらわれたパネルの“ふるまい”からフラッタであることを一応確認し, さらにオッシロペーパーに記録して, そのデータから, フラッタ限界点を求めた。

[結 果]

[a] 翼, 胴等の従来のフラッタと異なり, 振幅が大きくなると,

$$\text{membrane stress} = (Eh/2b) \int_0^b \left(\frac{\partial Z_p}{\partial x} \right)^2 dx$$

が, 復元力として作用するため, 振幅が有限に抑えられ, いわゆるリミットサイクルとなる。

そのうえ、本文で述べたように、空気の中には、衝撃波と境界層の干渉に基づく、ランダムな fluctuation による励振も加わっているので、これに対する板の応答と、フラッタ振動の識別がしばしば困難な場合があったが、フラッタはじめの付近では membrane stress の項が他の剛性の項、慣性の項に比して小さいため、調和振動となるはずであることから、オッシロの記録を注意深く観察すると、フラッタに入る付近では、かん欠的に調和振動が起こり、さらに動圧を増加させると、かなり連続的に調和振動に近いものが、続いて起こっていることが認められた。

[b] フラッタはきわめてゆるやかな見かけ上の進行波を呈する。しかし、かん欠的にモードの急激な変化が起こることがある。

[c] 板のフラッタの振動数は平板の三次の振動数よりやや高い振動である。(文献 23) の中には特にこのことについて記していないが、与えられたデータから逆算すると同じことがわかる。)

[d] フラッタ限界を越えて動圧を増加させると、モードが変わり振幅が小さくなることがある。(図 2A 中の+印)

[e] 長時間フラッタを継続させると、板の固定端が破壊し、板は飛散する。

[f] 振動の記録中には場合によっては、きわめて局所的な進行波 (traveling impulse) が生ずることがある。(東京大学、航空学科小林助教授の超音速実験でも同様の現象があらわれ、これによる曲げ応力は弾性限界を越えて(概略の計算)表面にクリープの形跡が認められたと述べている。(私信) この現象も全く不可解である。

[g] マッハ数対 $\log_{10}\rho U^2 b^3/D$ 面で、遷音速の限界点は超音速の限界点群のほぼ直線的延長にある。これを破線のごとくとると、(図 2A 参照) 実験式として

$$\frac{\rho U^2 b^3}{D} = 1.22 \times 10^{2+0.284M}, \quad (M \geq 1)$$

を得る。

[結 論]

(a) フラッタ限界は $M \sim \log_{10}(\rho U^2 b^3/D)$ 面上でほぼ直線である。したがって、これまで予想されていた遷音速でクリティカルであるということはない。

(b) 複雑な higher mode の振動である。

(c) パネルフラッタは従来の翼、胴のフラッタと異なり、それ自身は破壊的ではないが外板の疲労を招き、これによって破壊に至らしめる。また、航空機内部に対し騒音源となるであろう。

(d) 実際の二次元パネルの模型は理論仮定のごとく、完全に二次元ふるまいをするものでなく、span 方向にも振動すると考えられる。したがって、chord 方向および span 方向に振動するパネルとして、三次元空気力を考慮する必要がある。span 方向の振動モードの影響を考慮すると、空

気力減衰が変化し、二次元仮定の場合と異なった結果が得られるのではないか(注10)。

[付 記]

閉じた風洞測定部におかれた flexible な (または、弾性支持された) 模型は風洞共鳴を起こすことがある²⁴⁾。これは図 8A のごとく、模型と風洞壁間にできる定常波の振動数が、マッハ数 M と風洞壁高さ H で

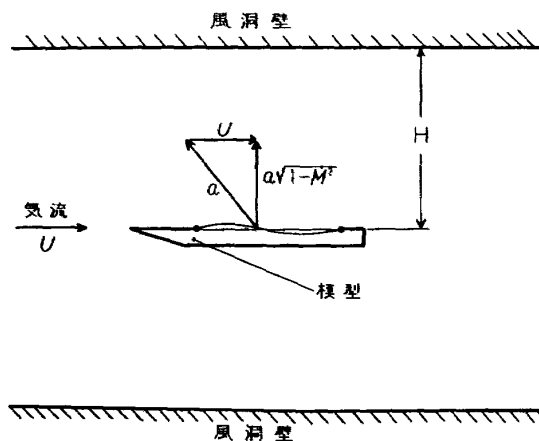


図 8 A

$$f_0 = \frac{\sqrt{1-M^2}}{2Ha}, \quad a = \text{音速}$$

と与えられ、これが模型の固有振動数と一致したとき激しく共鳴を起こす。

風洞共鳴の実測マッハ数と計算値では、実測値の方が 15% 程度高めであったが、次のような二つの理由から、フラッタではなかったと推定している。

(i) 側壁から抽気を行なえば、直ちに振動は停止する。つまり、側壁で反射されていた圧力波が大部分吸収されてしまい、反射波のエネルギーが弱められたと考えることができる。

(ii) 共鳴点のマッハ数 (実測) からわずかにずれたマッハ数では振動がビートになる。(図 7A 参照) これは気流の擾乱とか、風洞の振動等によって励振されている板が、その固有振動数で自由振動している上に、それと、わずかにずれた振動数の風洞共鳴が重畳されたものと考えている。

(注 10) 板の三次元的変形が空気力減衰におよぼす影響を調べるために、著者は有限の chord 長さをもち、span 方向には無限に長い板が等間隔で、単純支持されている場合をモデル的に想定して、解析を試みた²⁵⁾。板に対して空気力のなす仕事が、span 方向の変化を考えない場合 (二次元の場合) と、考えた場合では著しく変化するか、否かを検討すれば、三次元的変形を考慮する重要さの指標が得られると考えたからである。結果として、chord 方向ならびに span 方向に各種のモードを組み合わせた 1 自由度振動を考えたとき、span 方向のモードによって、仕事量が著しく変ることは明らかになったが、このような、一自由度の仮定の範囲内では空気力が正の仕事をして、フラッタを起こすということにはなかった。その後 Cunningham²⁶⁾ によって、厳密な超音速三次元パネルフラッタの数値解が得られたので、定量的に正確な結論はこれにゆずるべきであると考えている。

[付 録 B]

本報告で定義した Fresnel 積分は森口・宇田川・一松著「数学公式Ⅲ」(岩波全書)によったものであるが、Fresnel 積分には他の定義もある。たとえば Johnke-Emde-Lösch 著 Tables of Higher Functions.

前者の定義を $S(x)$, $C(x)$ とし、後者のものを $S_J(x)$, $C_J(x)$ とすると、両者には次のごとき関係がある。

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = S_J\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \\ S_J(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin^2 t dt = S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) \\ C(x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = C_J\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \\ C_J(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos^2 t dt = C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) \end{aligned}$$

(42) (43) で必要とした積分の値

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin a\xi}{\sqrt{\xi}} d\xi &= \pm \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|a|}} S\left(\sqrt{\frac{2|a|x}{\pi}}\right) \\ \int_0^x \frac{\cos a\xi}{\sqrt{\xi}} d\xi &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|a|}} C\left(\sqrt{\frac{2|a|x}{\pi}}\right) \end{aligned}$$

a は実数, ただし $a < 0$ のときは複号の下側の記号をとる。

[付 録 C]

$$R_{mn}^R \equiv K_{mn}^R + L_{mn}^R + M_{mn}^R$$

$$R_{mn}^I \equiv K_{mn}^I + L_{mn}^I + M_{mn}^I$$

ただし

$$\begin{aligned} K_{mn}^R &\equiv -\frac{(k^2 + n^2\pi^2)}{\sqrt{2k}} [-(SSP)_{mn} + (SCP)_{mn} \pm (SSQ)_{mn} + (SCQ)_{mn} \\ &\quad - (CSP)_{mn} - (CCP)_{mn} \mp (CSQ)_{mn} + (CCQ)_{mn}] \\ L_{mn}^R &\equiv -n\pi\sqrt{2k} [-(SSP)_{mn} + (SCP)_{mn} \mp (SSQ)_{mn} - (SCQ)_{mn} \\ &\quad - (CSP)_{mn} - (CCP)_{mn} \pm (CSQ)_{mn} - (CCQ)_{mn}] \\ M_{mn}^R &\equiv +\sqrt{\pi}n[(c/\sqrt{})_m - (S/\sqrt{})_m] \end{aligned}$$

$$K_{mn}^I \equiv + \frac{k^2 + n^2 \pi^2}{\sqrt{2k}} [(SSP)_{mn} + (SCP)_{mn} \mp (SSQ)_{mn} + (SCQ)_{mn} \\ - (CSP)_{mn} + (CCP)_{mn} \mp (CSQ)_{mn} - (CCQ)_{mn}]$$

$$L_{mn}^I \equiv -n\pi\sqrt{2k} [+ (SSP)_{mn} + (SCP)_{mn} \pm (SSQ)_{mn} - (SCQ)_{mn} \\ - (CSP)_{mn} + (CCP)_{mn} \pm (CSQ)_{mn} + (CCQ)_{mn}]$$

$$M_{mn}^I \equiv -\sqrt{\pi} n [(C/\sqrt{\quad})_m + (S/\sqrt{\quad})_m]$$

複号は $Q_n \equiv n\pi - \frac{k}{2}$ の値が負のとき、下側の符号をとる。

ただし、 $m \neq n$ のとき

$$(SSP)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_n}} (-\textcircled{3}_p + \textcircled{7}_p), \quad (SCP)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_n}} (-\textcircled{4}_p + \textcircled{8}_p)$$

$$(CSP)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_n}} (\textcircled{1}_p + \textcircled{5}_p), \quad (CCP)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_n}} (\textcircled{2}_p + \textcircled{6}_p)$$

$$(SSQ)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_n}} (-\textcircled{3}_q + \textcircled{7}_q), \quad (SCQ)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_n}} (-\textcircled{4}_q + \textcircled{8}_q)$$

$$(CSQ)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_n}} (\textcircled{1}_q + \textcircled{5}_q), \quad (CCQ)_{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_n}} (\textcircled{2}_q + \textcircled{6}_q)$$

$m = n$ のとき

$$(SSP)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_m}} (\overset{=}{\textcircled{1}}_p), \quad (SCP)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_m}} (\overset{=}{\textcircled{2}}_p)$$

$$(CSP)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_m}} (\overset{=}{\textcircled{3}}_p), \quad (CCP)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{P_m}} (\overset{=}{\textcircled{4}}_p)$$

$$(SSQ)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_m}} (\overset{=}{\textcircled{1}}_q), \quad (SCQ)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_m}} (\overset{=}{\textcircled{2}}_q)$$

$$(CSQ)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_m}} (\overset{=}{\textcircled{3}}_q), \quad (CCQ)_{mm} \equiv \frac{1}{\sqrt{Q_m}} (\overset{=}{\textcircled{4}}_q)$$

①_p, ②_p...①_q, ②_q... 等の略記号で表わされたものは $m \neq n$ のときには、下表 (表1) に示された値 a, b を代入することによって、それぞれ以下の式で表わされる。

表 1 ($m \neq n$)

略 記 号	略記号の下添が p のときは a, b はそれぞれ下の値をとる。	略記号の下添が q のときは a, b はそれぞれ下値をとる。
①, ②, ③, ④	$a = (m+n)\pi, \quad b = \frac{2}{\pi} P_n$	$a = (m+n)\pi, \quad b = \frac{2}{\pi} Q_n $
⑤, ⑥, ⑦, ⑧	$a = (m-n)\pi, \quad b = \frac{2}{\pi} P_n$	$a = (m-n)\pi, \quad b = \frac{2}{\pi} Q_n $

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ または } \textcircled{5} &\equiv -\frac{\cos a}{2a} S(\sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} \mp \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \\ \textcircled{2} \text{ または } \textcircled{6} &\equiv -\frac{\cos a}{2a} C(\sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} + \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \\ \textcircled{3} \text{ または } \textcircled{7} &\equiv \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} - \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \\ \textcircled{4} \text{ または } \textcircled{8} &\equiv -\frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} \pm \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \end{aligned}$$

複号は $\frac{2a}{\pi}-b < 0$ のとき、下側をとる。

$m=n$ のときには、下表 (表 2) に示された値、 a, b を代入することによって、それぞれ以下の式であらわされる。

表 2 ($m=n$)

略 記 号	添記号の下添が p のときは a, b はそれぞれ下の値をとる。	略記号の下略が q のときは a, b はそれぞれ下の値をとる。
$\bar{\textcircled{1}}, \bar{\textcircled{2}}, \bar{\textcircled{3}}, \bar{\textcircled{4}}$	$a=2m\pi, \quad b=\frac{2}{\pi}P_m$	$a=2m\pi, \quad b=\frac{2}{\pi} Q_m $

$$\begin{aligned} \bar{\textcircled{1}} &\equiv \frac{1}{2} \left[S(\sqrt{b}) - \frac{1}{\pi b} C(\sqrt{b}) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{b}} \cos\left(\frac{\pi}{2}b\right) \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} - \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \\ \bar{\textcircled{2}} &\equiv \frac{1}{2} \left[C(\sqrt{b}) + \frac{1}{\pi b} S(\sqrt{b}) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{b}} \sin\left(\frac{\pi}{2}b\right) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi}+b\right)}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} \pm \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \equiv -\frac{1}{2a} S(\sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} \mp \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right]$$

$$\textcircled{4} \equiv -\frac{1}{2a} C(\sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{4a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} + \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right]$$

複号は $\frac{2a}{\pi} - b < 0$ のとき、下側をとる。

上の式の誘導にあたり、必要となった積分の値。(以下ではすべての場合 $a, b > 0$ とする。)

$$\int \sin ax S(\sqrt{bx}) dx = -\frac{\cos ax}{a} S(\sqrt{bx}) + \frac{\sqrt{b}}{2a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi}+b\right)x}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} \mp \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|x}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right]$$

$2a - \pi b \neq 0$, $2a - \pi b < 0$ のときは複号の下側をとる。

$$= -\frac{\cos ax}{a} S\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right) + \frac{S\left(\frac{4ax}{\pi}\right)}{2\sqrt{2a}}, \quad 2a = \pi b$$

$$\int \cos ax S(\sqrt{bx}) dx = \frac{\sin ax}{a} S(\sqrt{bx}) + \frac{\sqrt{b}}{2a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi}+b\right)x}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}-b}} - \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|x}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}+b\right|}} \right]$$

$2a - \pi b \neq 0$

$$= \frac{\sin ax}{a} S\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right) + \frac{C\left(\sqrt{\frac{4ax}{\pi}}\right)}{2\sqrt{2a}} - \sqrt{\frac{x}{2\pi a}}, \quad 2a = \pi b$$

$$\int \sin ax C(\sqrt{bx}) dx = -\frac{\cos ax}{a} C(\sqrt{bx}) + \frac{\sqrt{b}}{2a} \left[\frac{C\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi}+b\right)x}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi}+b}} + \frac{C\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|x}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi}-b\right|}} \right]$$

$2a - \pi b \neq 0$

$$= -\frac{\cos ax}{a} C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right) + \frac{C\left(\sqrt{\frac{4ax}{\pi}}\right)}{2\sqrt{2a}} + \sqrt{\frac{x}{2\pi a}}, \quad 2a = \pi b$$

$$\int \cos ax C(\sqrt{bx}) dx = \frac{\sin ax}{a} C(\sqrt{bx}) - \frac{\sqrt{b}}{2a} \left[\frac{S\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi} + b\right)x}\right)}{\sqrt{\frac{2a}{\pi} + b}} \pm \frac{S\left(\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi} - b\right|x}\right)}{\sqrt{\left|\frac{2a}{\pi} - b\right|}} \right]$$

$2a - \pi b \neq 0$, $2a - \pi b < 0$ のときは複号の下側をとる。

$$= \frac{\sin ax}{a} C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right) - \frac{S\left(\sqrt{\frac{4ax}{\pi}}\right)}{2\sqrt{2a}}, \quad 2a = \pi b$$

$$\int_0^{\infty} S(\sqrt{ax}) dx = xS(\sqrt{ax}) - \frac{1}{\pi a} C(\sqrt{ax}) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{2} ax\right)$$

$$\int_0^{\infty} C(\sqrt{ax}) dx = xC(\sqrt{ax}) + \frac{1}{\pi a} S(\sqrt{ax}) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2} ax\right)$$

文 献

- 1) P. F. Jordan; The Physical Nature of Panel Flutter, Aero Digest, Feb. (1956), p. 34.
- 2) E. E. Kordes, R. B. Noll; Flight Flutter Result for Flat Rectangular Panels, NASA-TN-D-1058.
G. H. Jordan, N. J. McLeod, L. D. Guy; Structural Dynamic Experiences of the X-15 Airplane, NASA-TN-D-1158.
H. L. Bohon; Panel Flutter Tests on Full-Scale X-15 Lower Vertical Stabilizer at Mach Number of 3.0, NASA-TN-D-1385.
- 3) H. C. Nelson, H. J. Cunningham; Theoretical Investigation of Two-Dimensional Flat Panels with One Surface Exposed to Supersonic Potential Flow, NACA TR 1280.
- 4) J. G. Eisley; Panel Flutter in Supersonic Flow, Ph. D thesis, Cal Tech. (1956).
- 5) S. Kobayashi; Two Dimensional Panel Flutter, I. Simply Supported Panel, II. Clamped Panel, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 5, No. 8, (1962).
- 6) Y. C. Fung; On Two Dimensional Panel Flutter, Jr. of Aeronaut. Sci. Vol. 25, No. 3, (1958).
- 7) J. G. Eisley, G. Luessen; Flutter of Thin Plates under Combined Shear and Normal Edge Forces. AIAA Jr., March (1963).
- 8) J. M. Hedgepeth; Flutter of Rectangular Simply Supported Panels at High Supersonic Speeds, Jr. of Aero. Sci. Vol. 24, No. 8, August (1957).
- 9) H. Ashley, G. Zartarian; Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, Jr. of Aero. Sciences, Vol. 23, No. 12, (1956).
- 10) J. D. McClure; Stability of Finite Chord Panels Exposed to Low Supersonic Flow with Turbulent Boundary Layer, IAS Paper No. 63-21, (1963).
- 11) M. Tucker; Approximate Calculation of Turbulent Boundary Layer Development in Compressible Flow, NACA TN 2337, (1951).
- 12) 平木 一・石井孝雄・大島信彦; 遷音速風洞測定部に関する予備実験, 航技研報告 TR-1, (昭和 35)
- 13) 石井孝雄・柳沢三憲; 遷音速パネルフラッタの実験, 宇宙科学技術シンポジウム前刷, (昭和 36)
- 14) H. C. Nelson, J. H. Berman; Calculation of the Forces and Moments for an Oscillating Wing-Aileron

- Combination in Two-Dimensional Potential Flow at Sonic Speed, NACA TN 2590, (1952).
- 15) 中井・小原・高木・安藤; 後退角 45° , テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究, 第 14 回応用力学連合講演会前刷, (昭和 39 年 9 月), または, 航技研報告 TM-13, (昭和 38)
 - 16) Y. C. Fung; Some Recent Contributions to Panel Flutter Research, IAS Paper No. 6326, (1963).
 - 17) L. Trilling; Oscillating Shock Boundary Layer Interaction, Jr. of Aero. Sci. May, (1958).
 - 18) 小林繁夫; 超音速パネルフラッタ (講座): 日本航空学会誌, 第 11 巻, 第 108 号, (昭和 38)
 - 19) C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien; On Two-Dimensional Nonsteady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid, Jr. of Math. and Phys., Vol. 27, pp. 220-231, (1948).
 - 20) M. T. Landahl; Theoretical Study of Unsteady Transonic Flow, FFA Rep. 77, 1958.
 - 21) J. R. Spreiter; On Alternative Forms for the Basic Equation of Transonic Flow Theory, Jr. of Aero. Sci. pp. 70-72, (1954).
 - 22) N. Rott; Oscillating Airfoils at Mach Number 1. Jr. of Aero. Sci. Vol. 16, pp. 380-381, (1949).
 - 23) M. A. Sylvester; Experimental Studies of Flutter of Buckled Rectangular Panels at Mach Number 1.2 to 3.0 Including Effect of Pressure Difference and of Panel Width—Length Ratios, NACA-RM-L 55 I 30, (1955).
 - 24) 鷲津久一郎; フラッターの空気力学 (講座), 日本航空学会誌, (昭和 34)
 - 25) T. Ishii, T. Nomi; On the Aerodynamic Instability of Panels in Supersonic Flow, Proceedings of the 11th Japan National Congress for Applied Mechanics, (1961), p. 179.
 - 26) H. J. Cunningham; Analysis of the Flutter of Flat Rectangular Panels on the Basis of Exact Three Dimensional Linearized Supersonic Potential Flow, IAS Paper No. 63-22, (1963).
 - 27) M. T. Landahl; Unsteady Transonic Flow, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, (1961).
 - 28) J. W. Miles; Dynamic Chordwise Stability at Supersonic Speeds, Report AL-1140, North American Aviation, Inc., October 18, (1950).

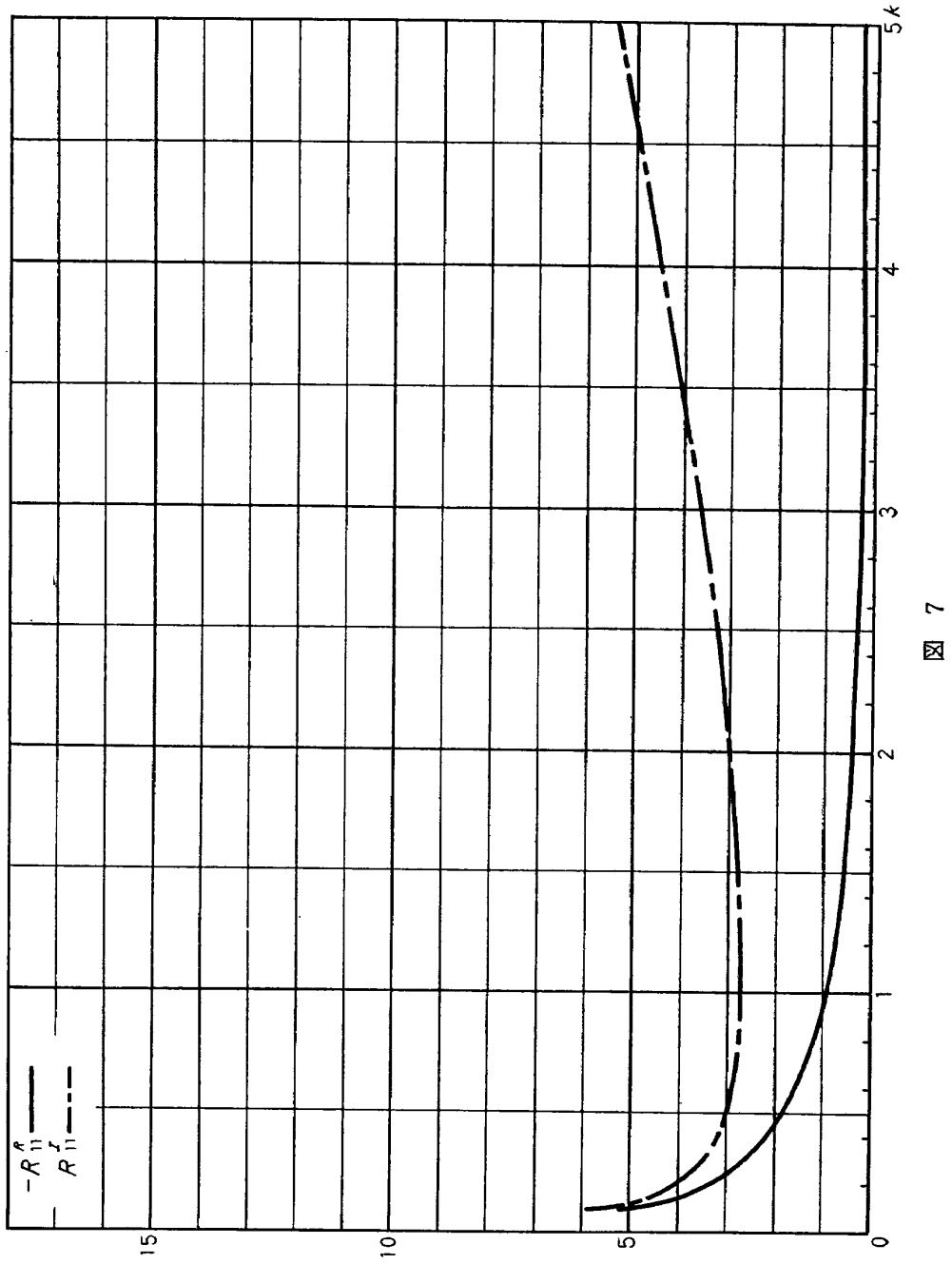


図 7

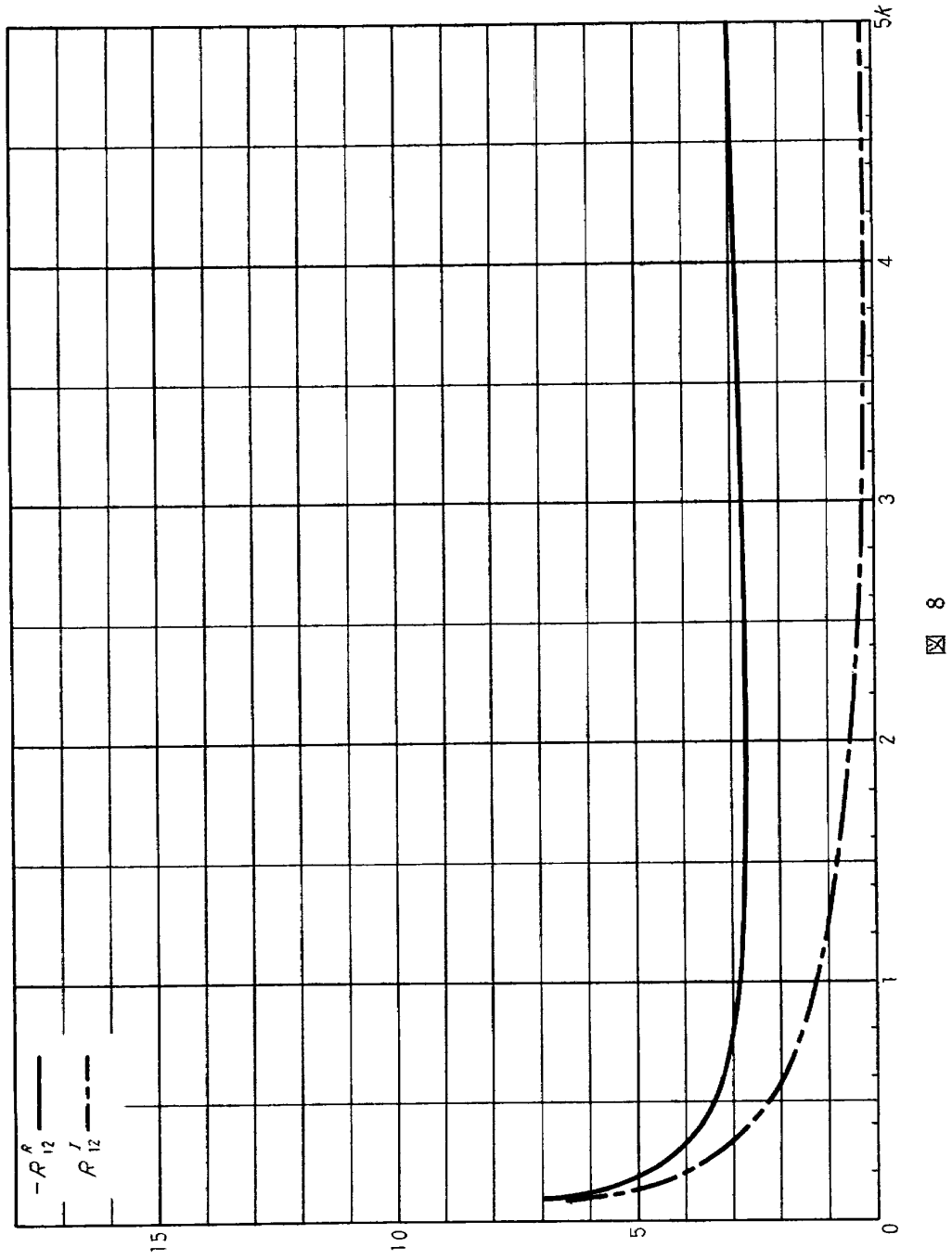


図 8

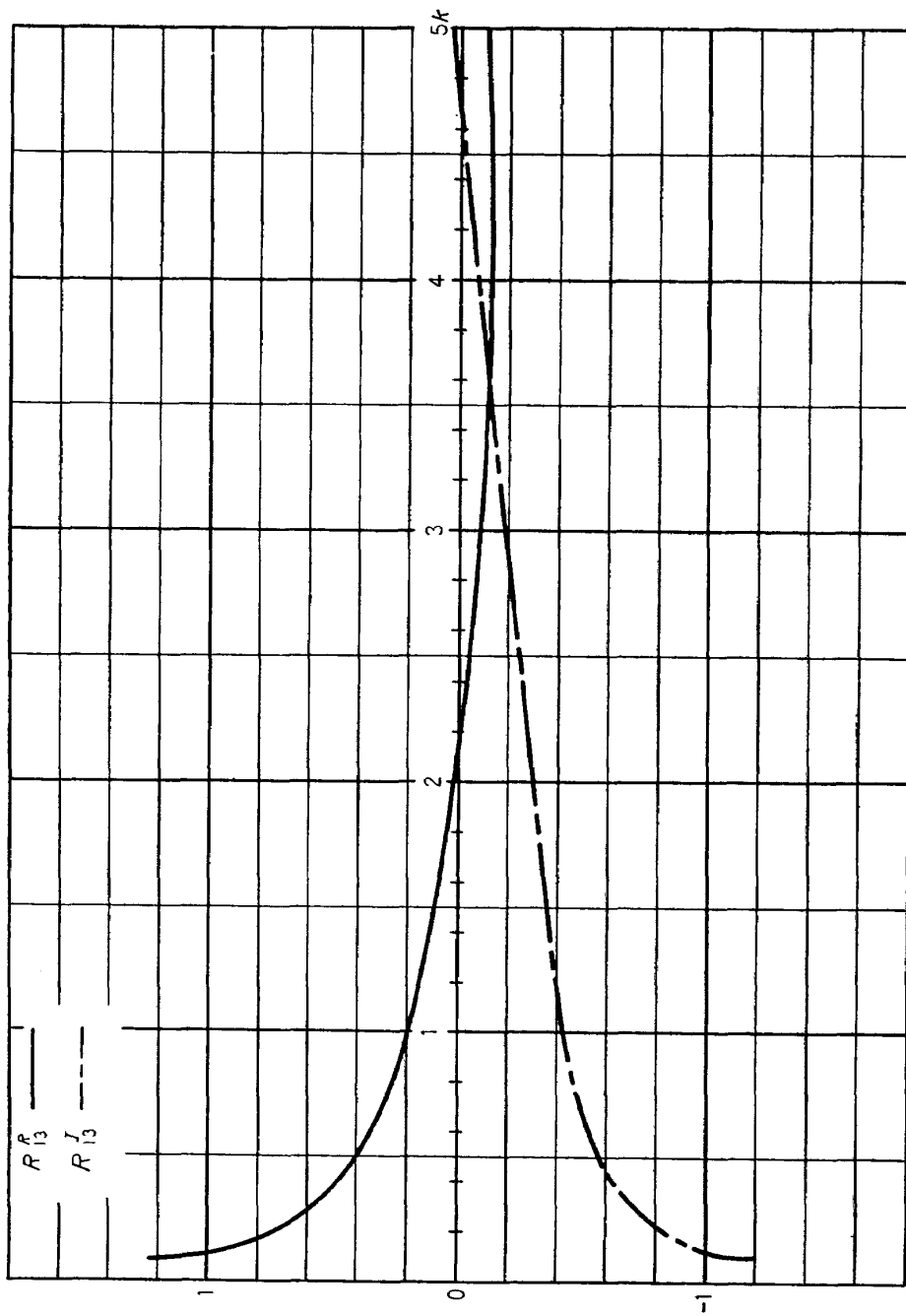
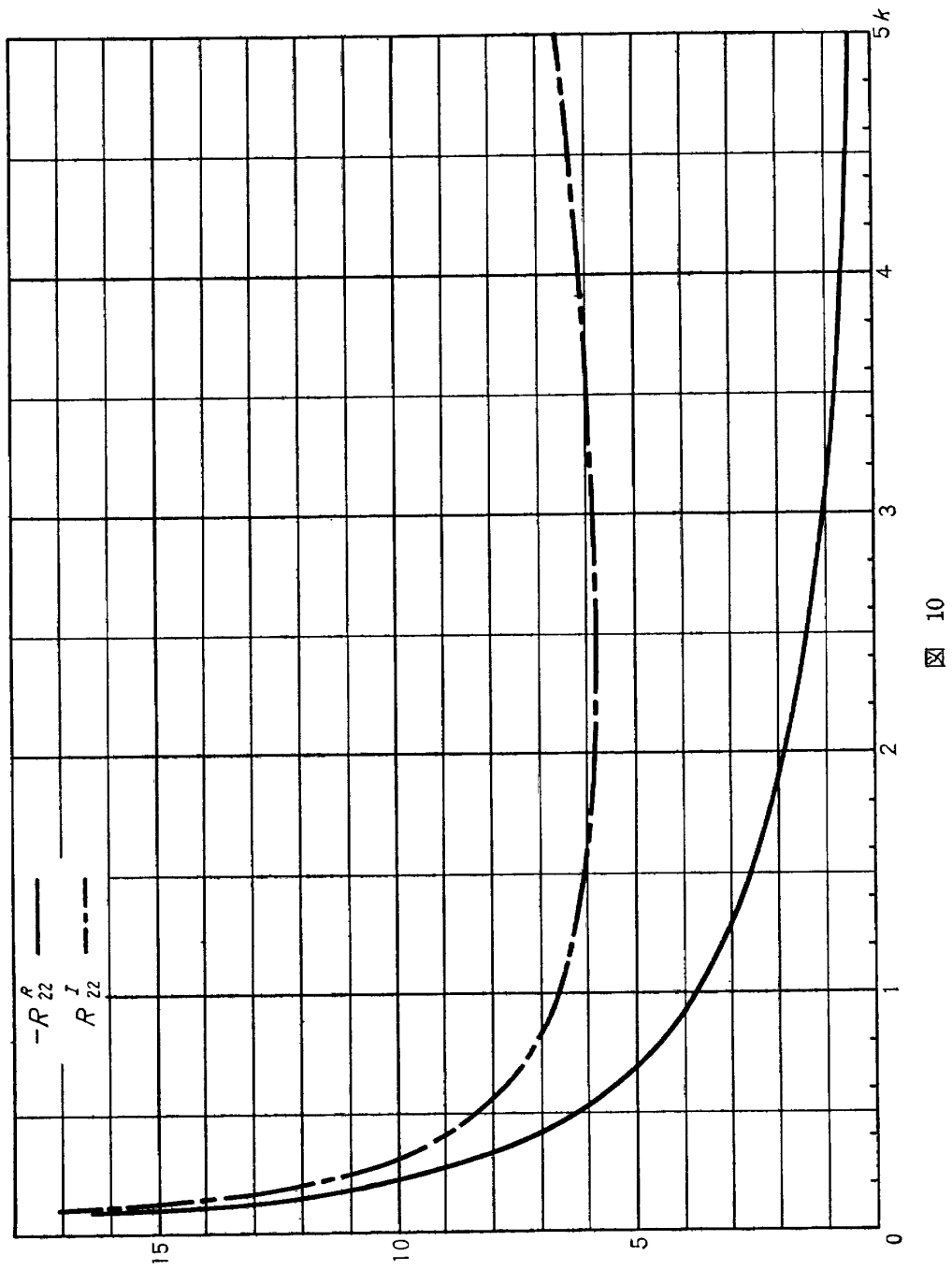


図 9



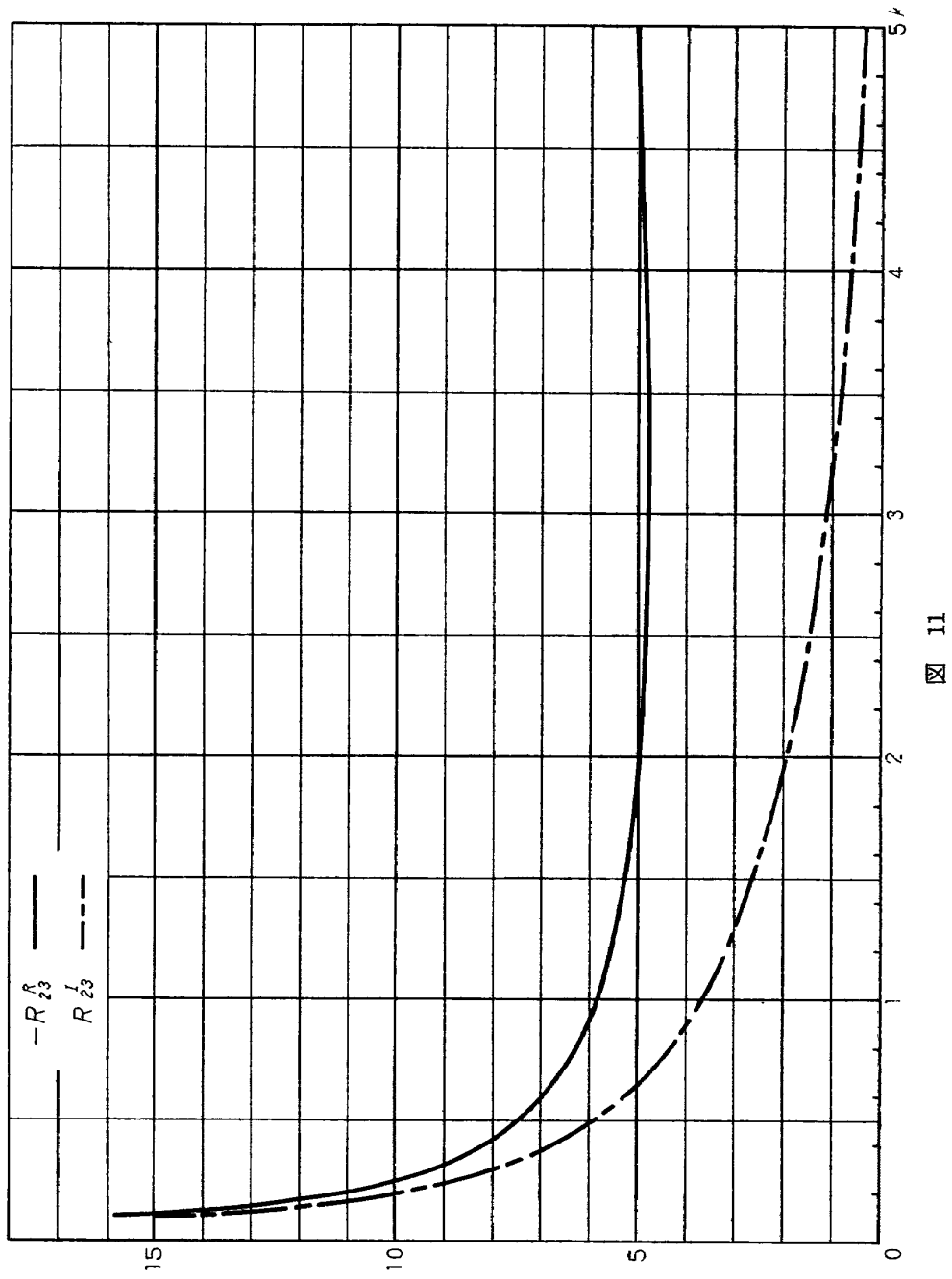


図 11

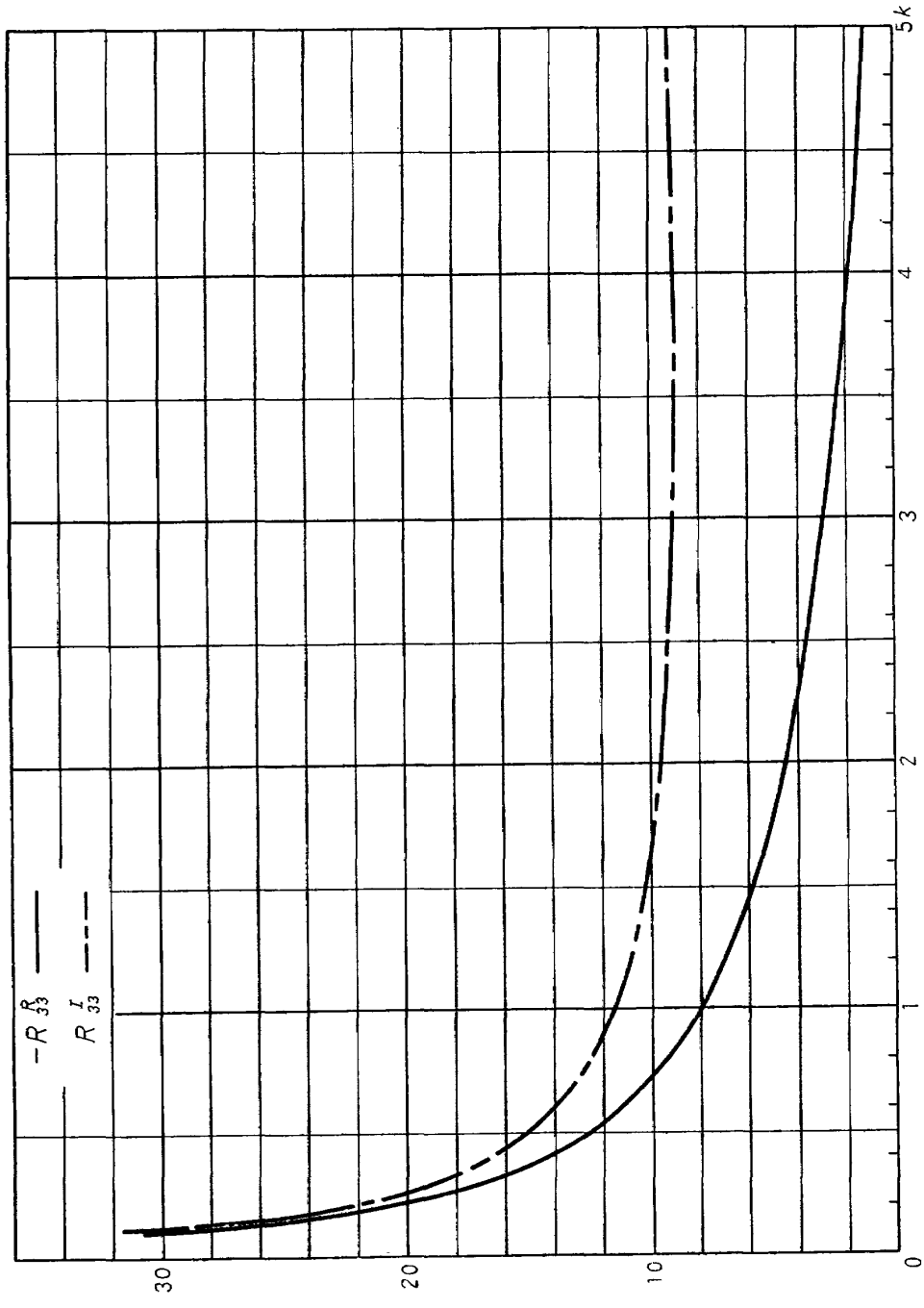


図 12

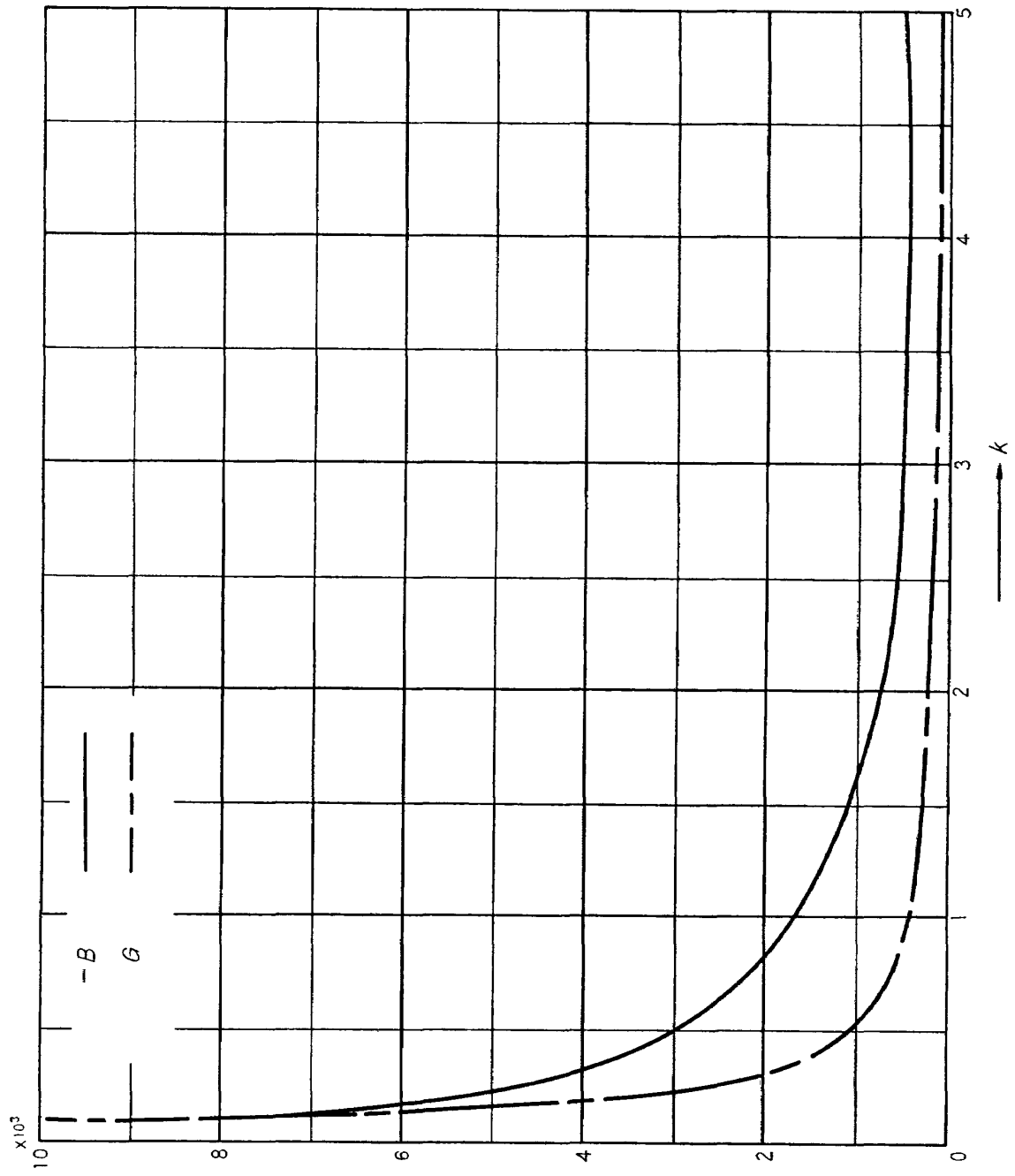


図 13

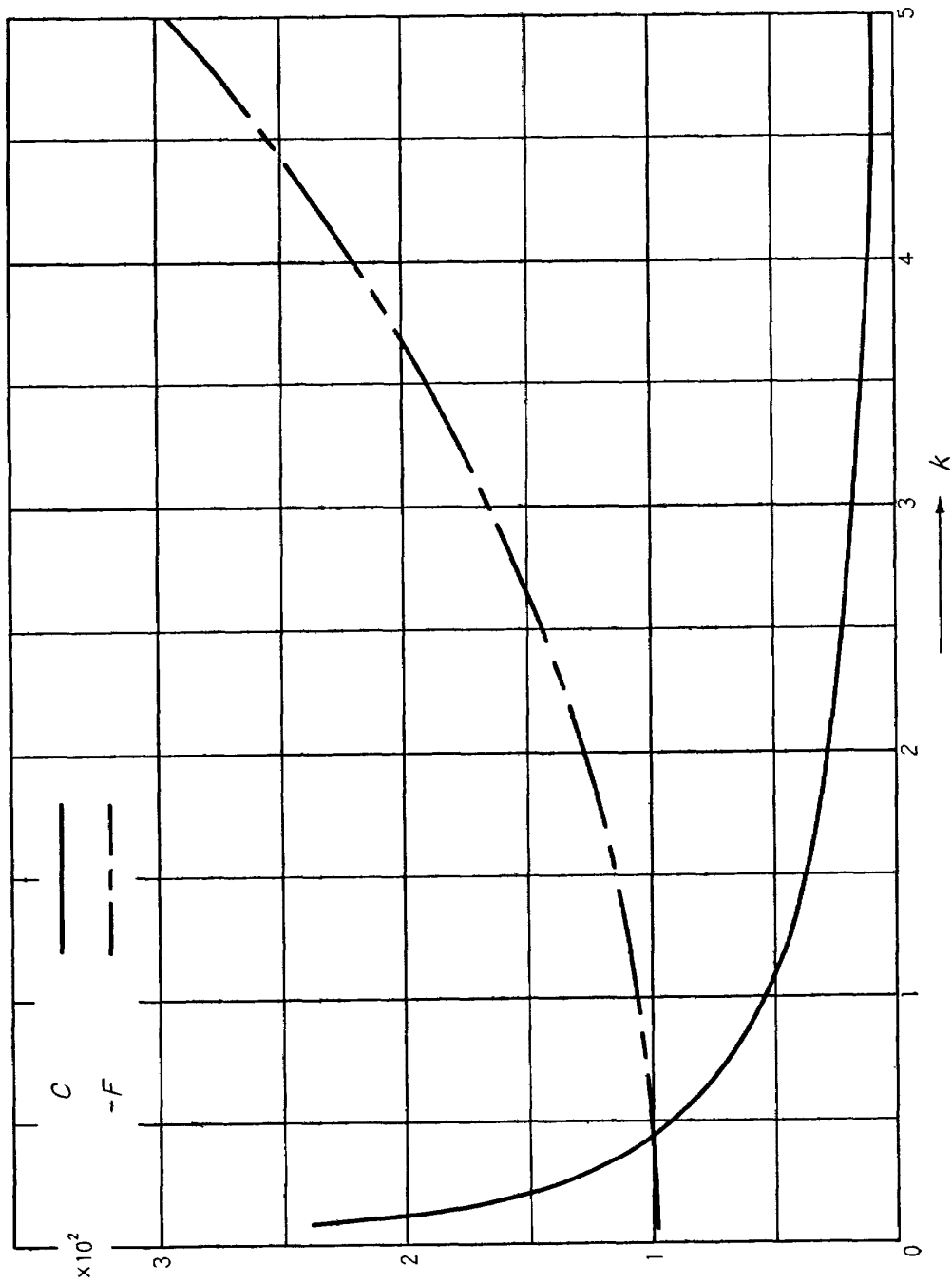


図 14

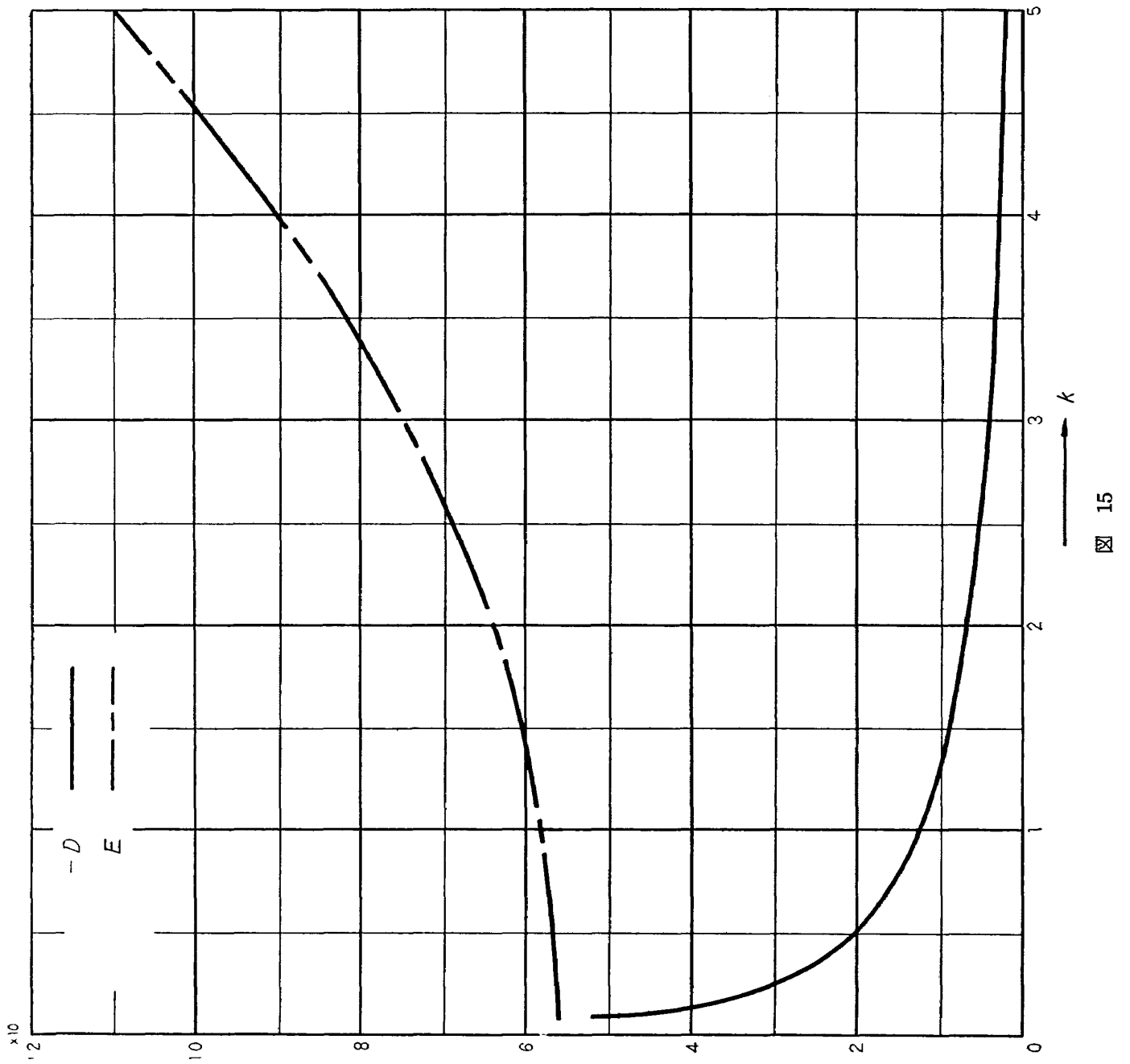


図 15

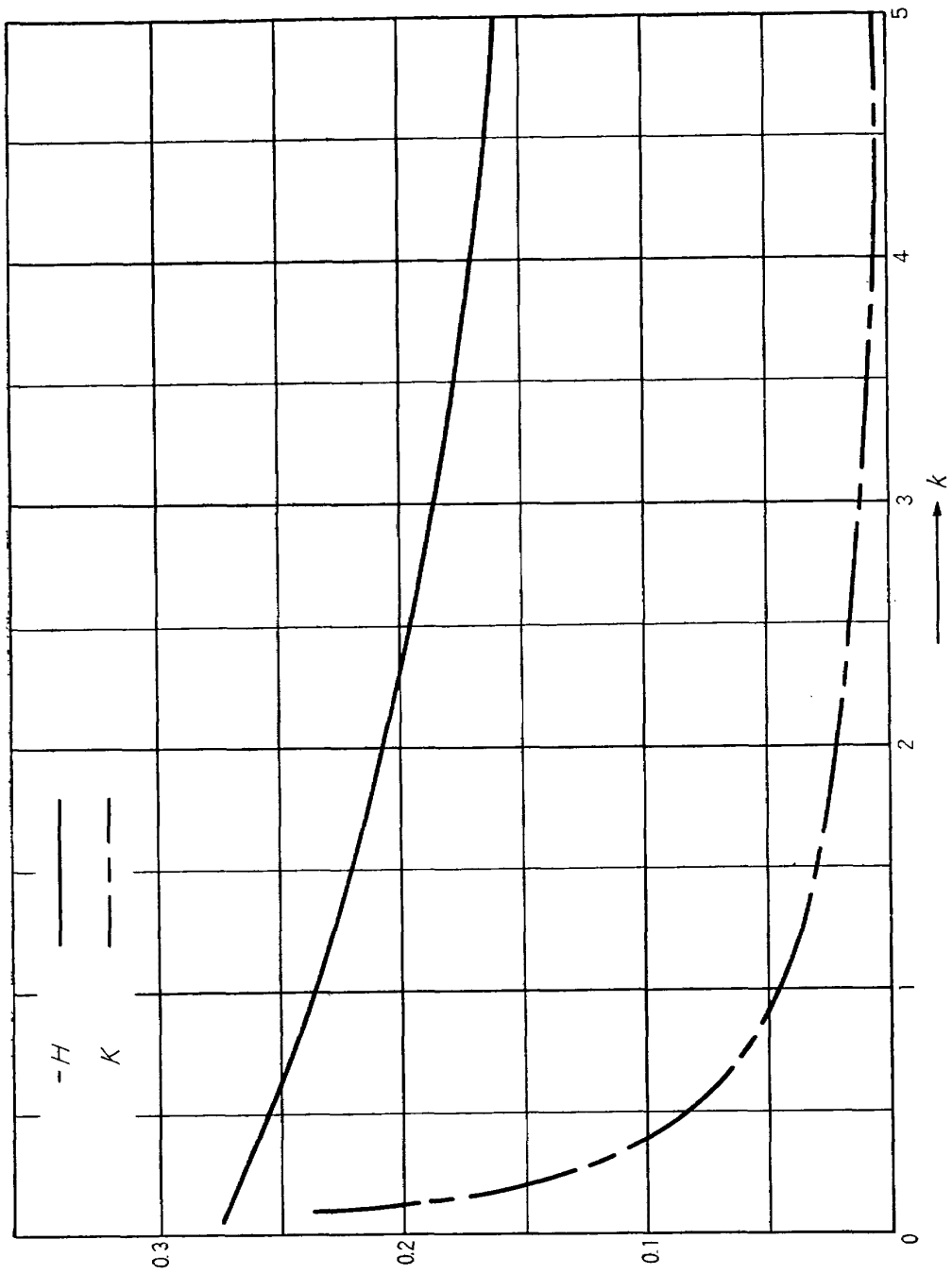


図 16

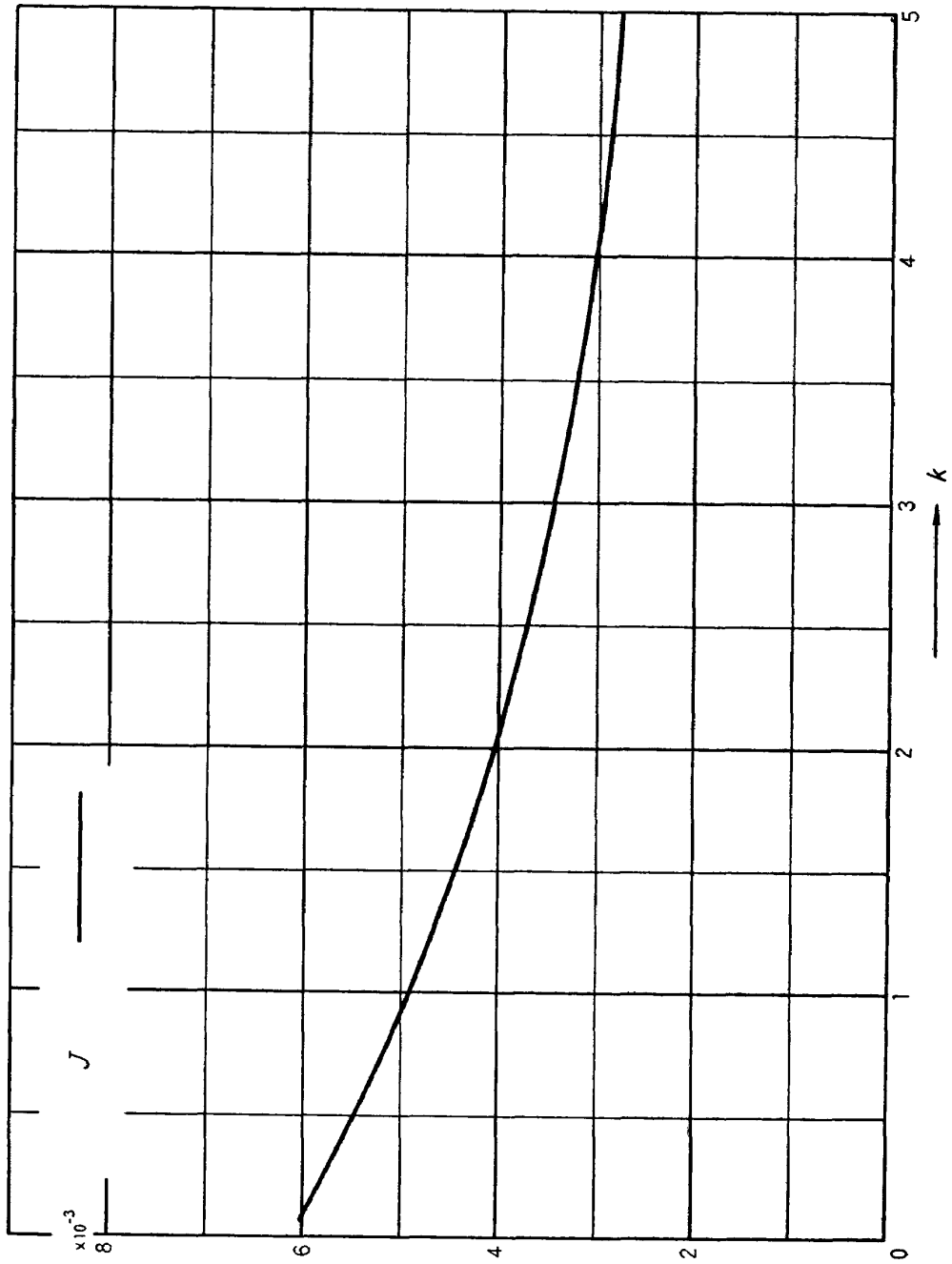


図 17

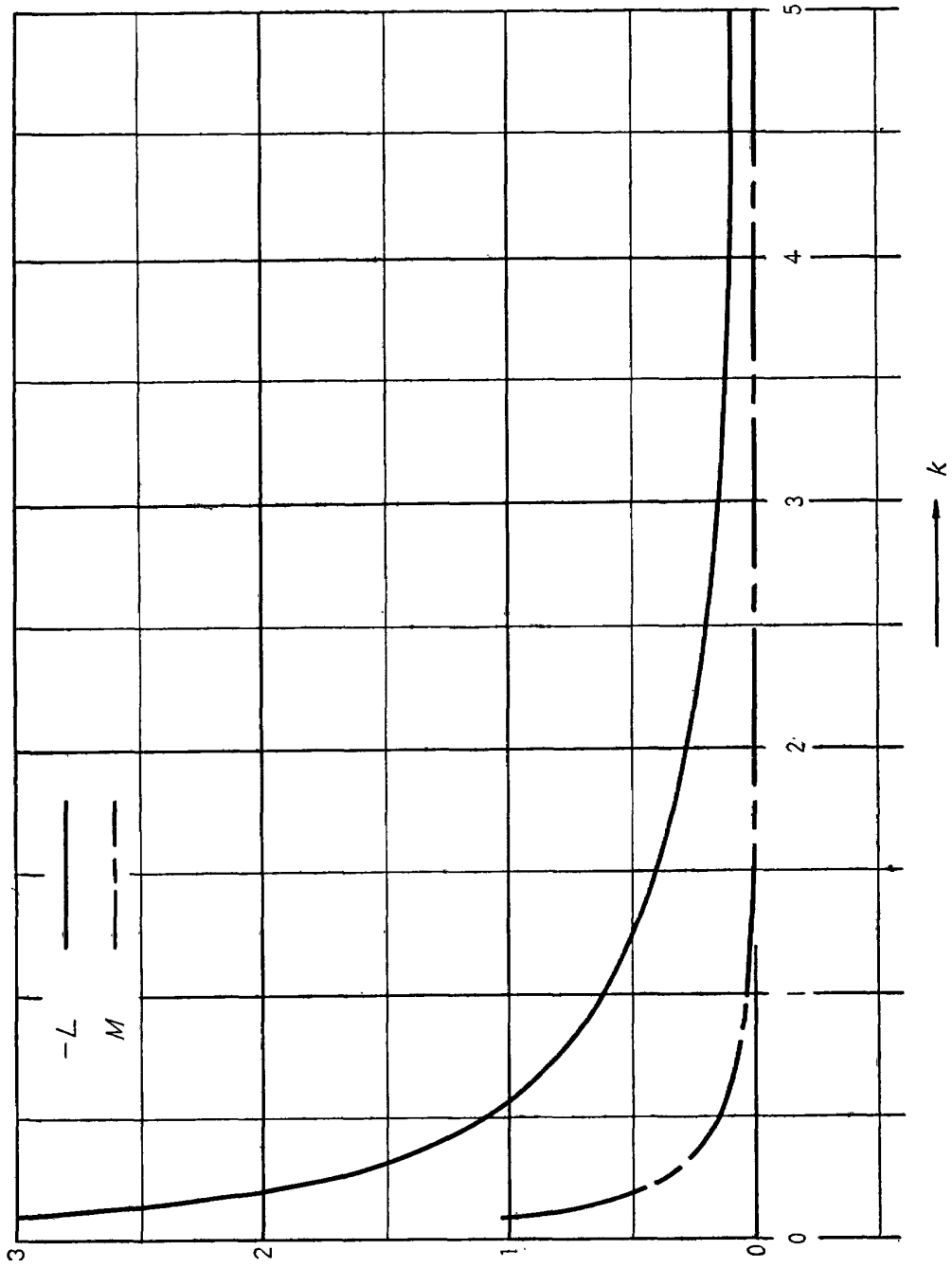
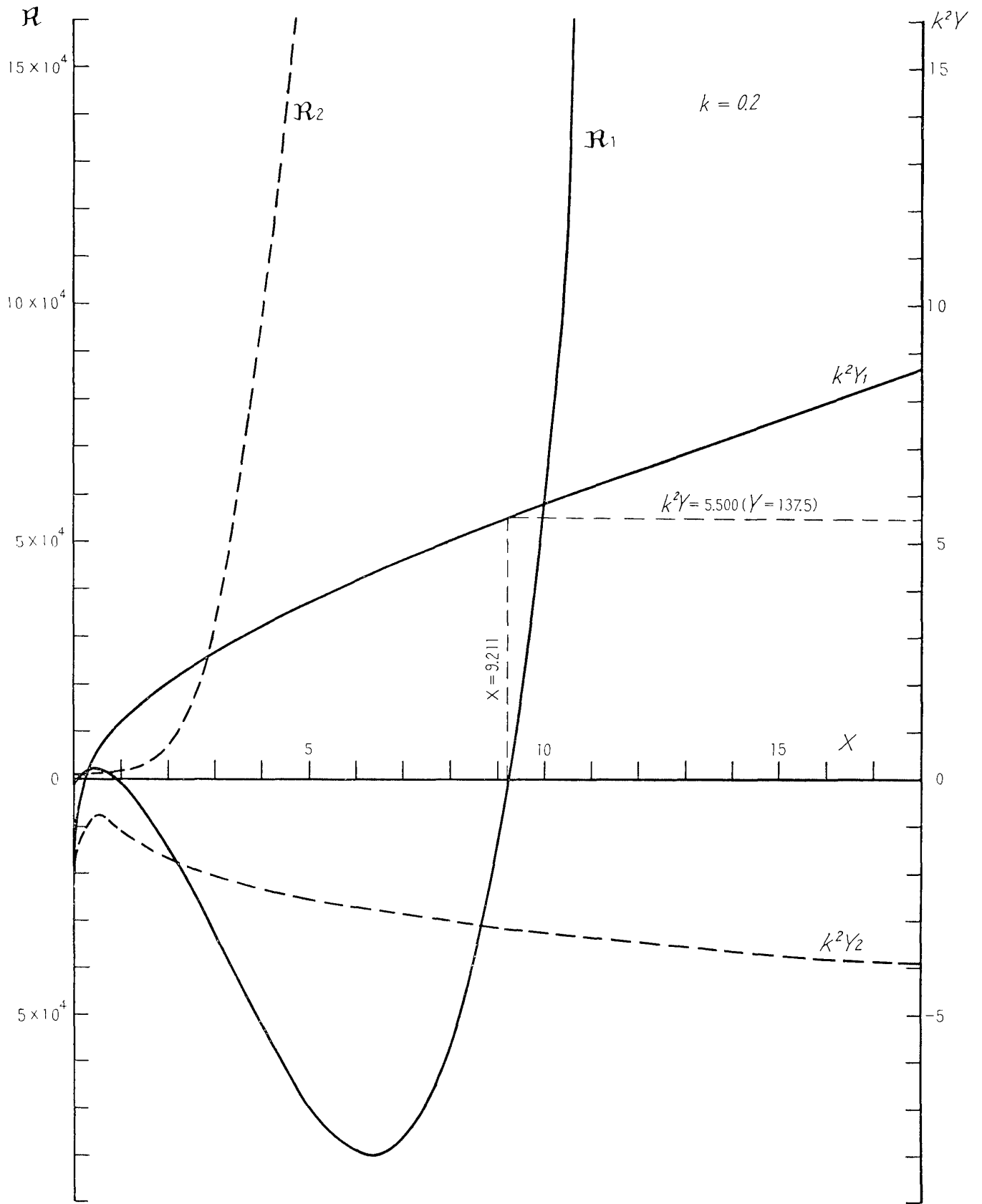


図 18



☒ 19 a

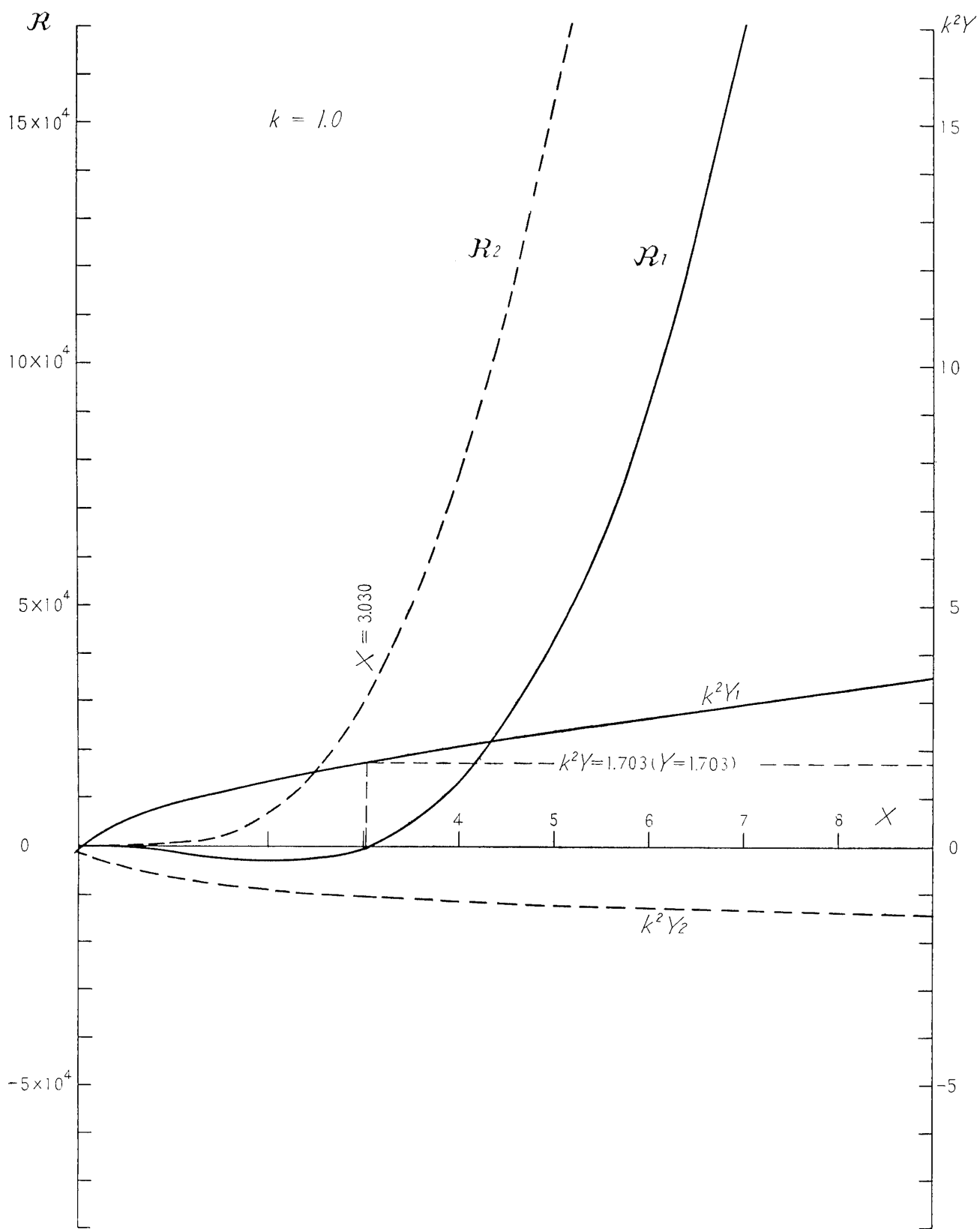
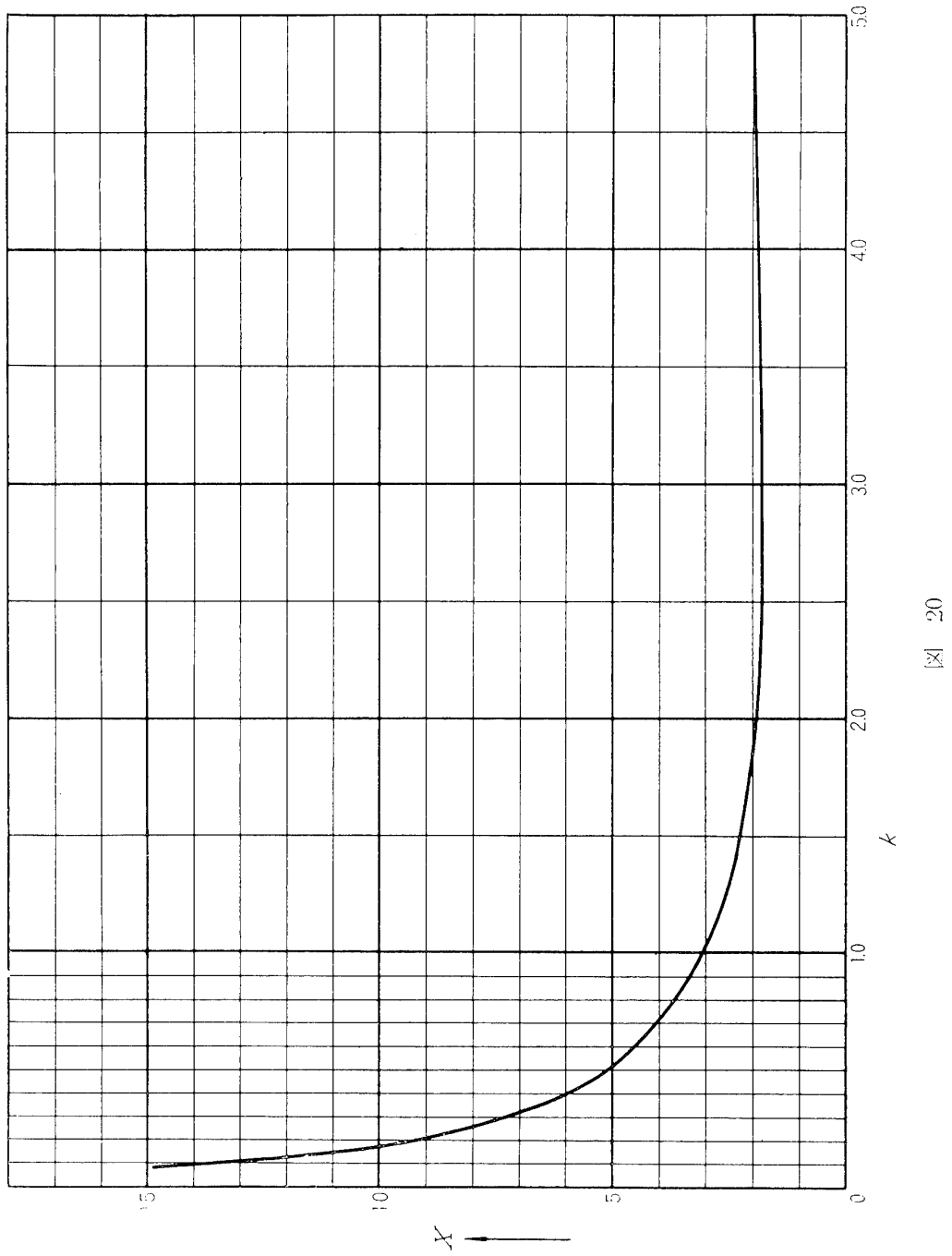


図 19 b



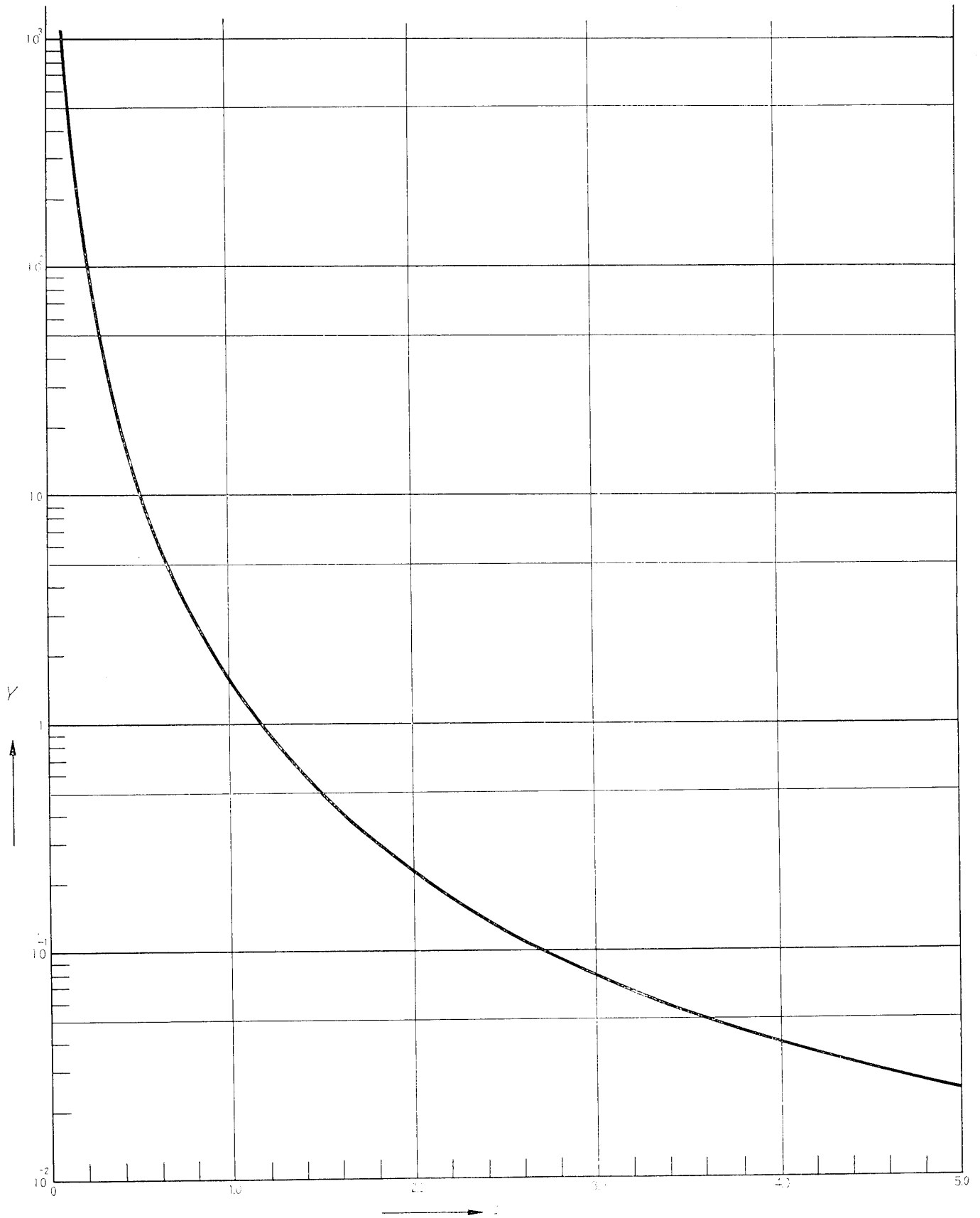


図 21

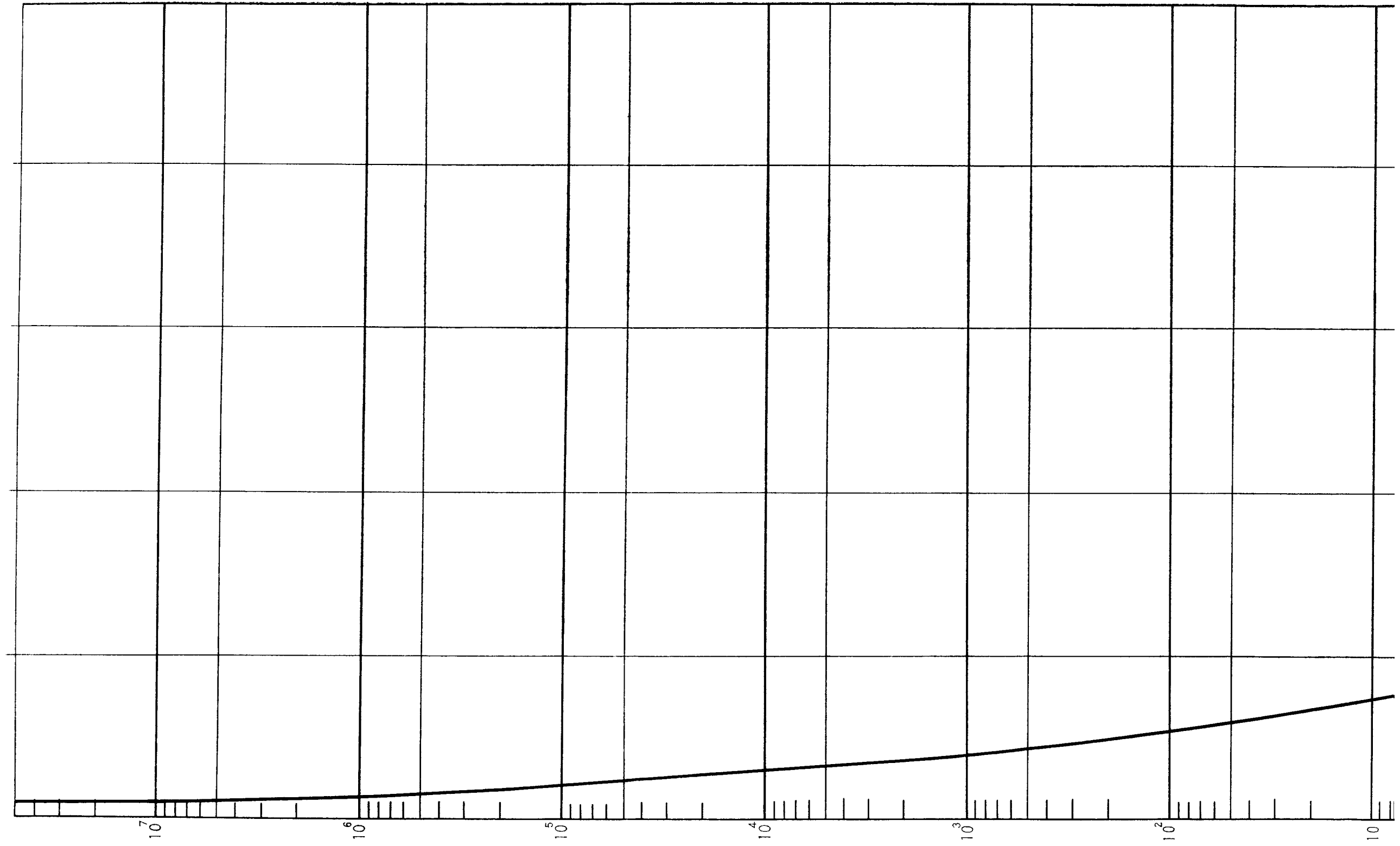


図 22

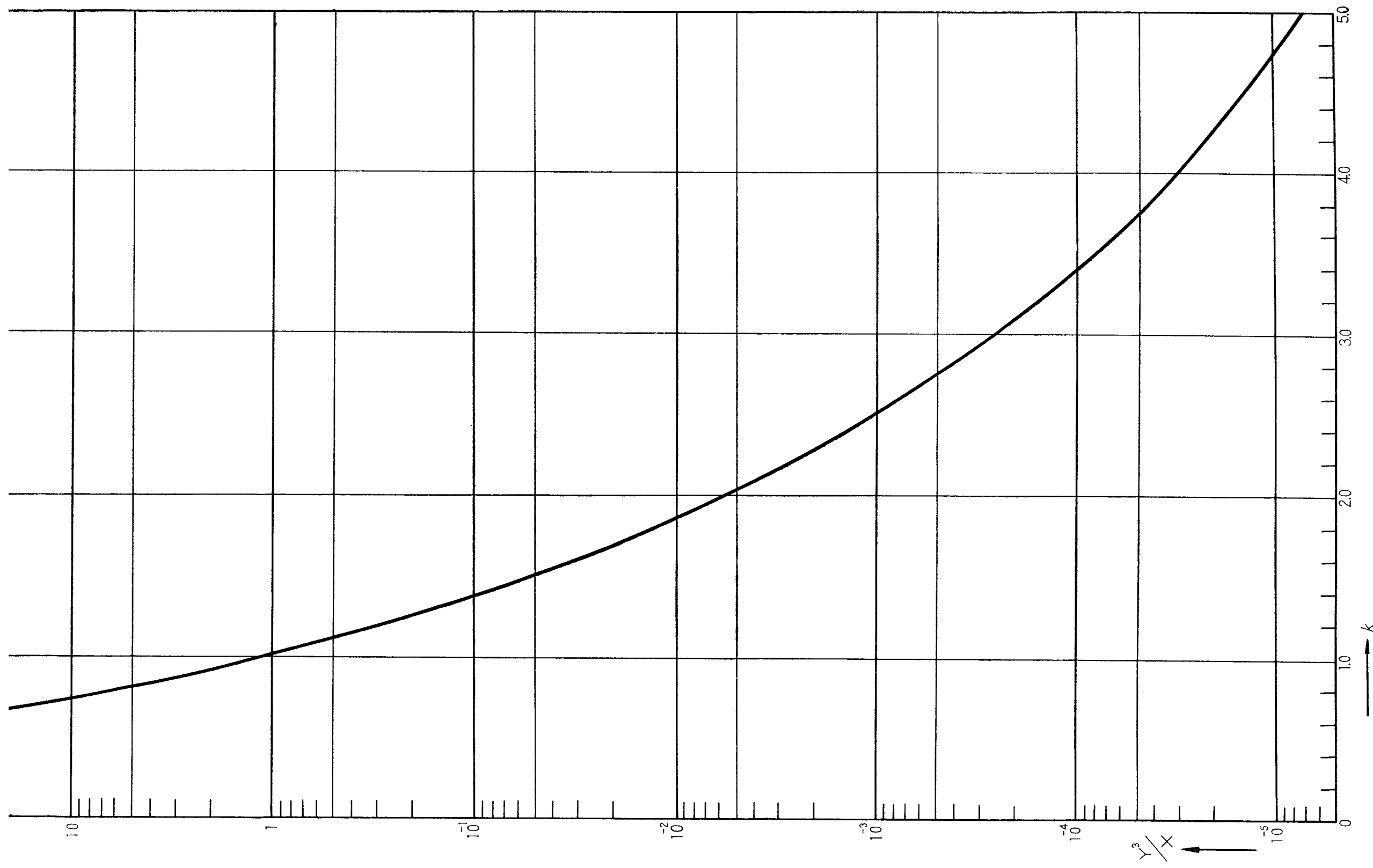


図 22

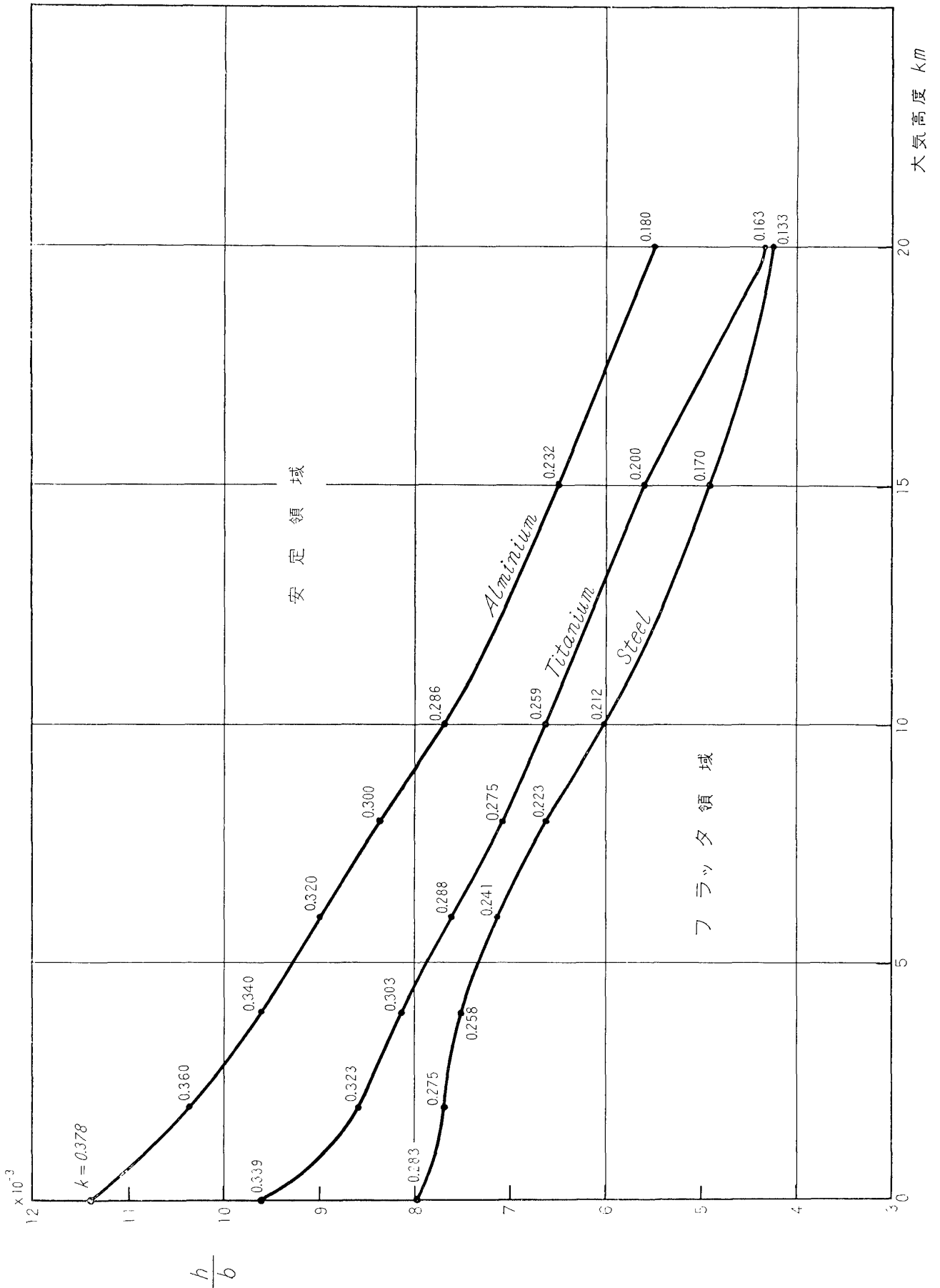


図 23

理 論
 単紀支持
 固定支持

実 験

- Sylvester and Baker
- Lock and Fung
- 石井, 柳沢
- Easley
- ◎ 小林

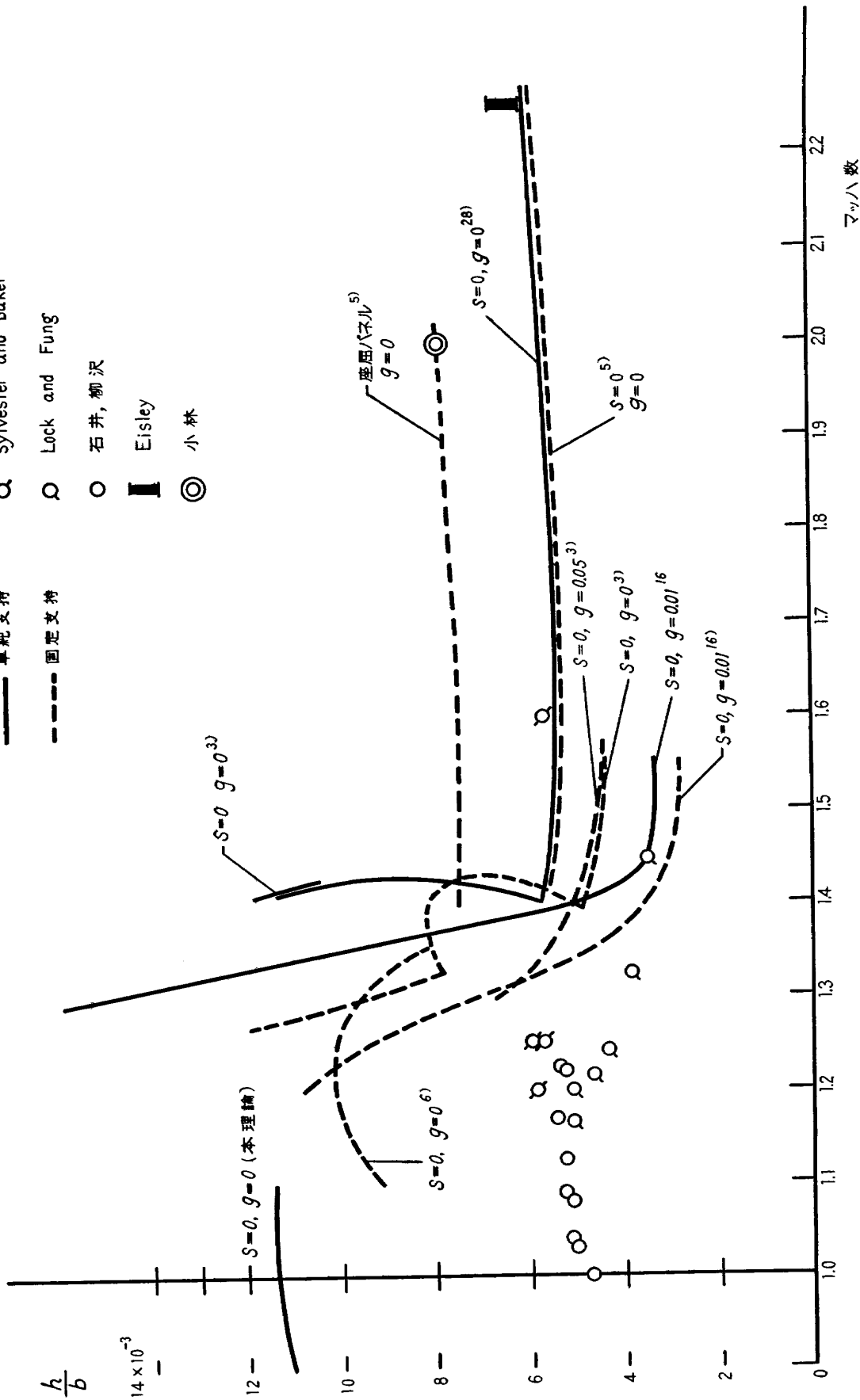
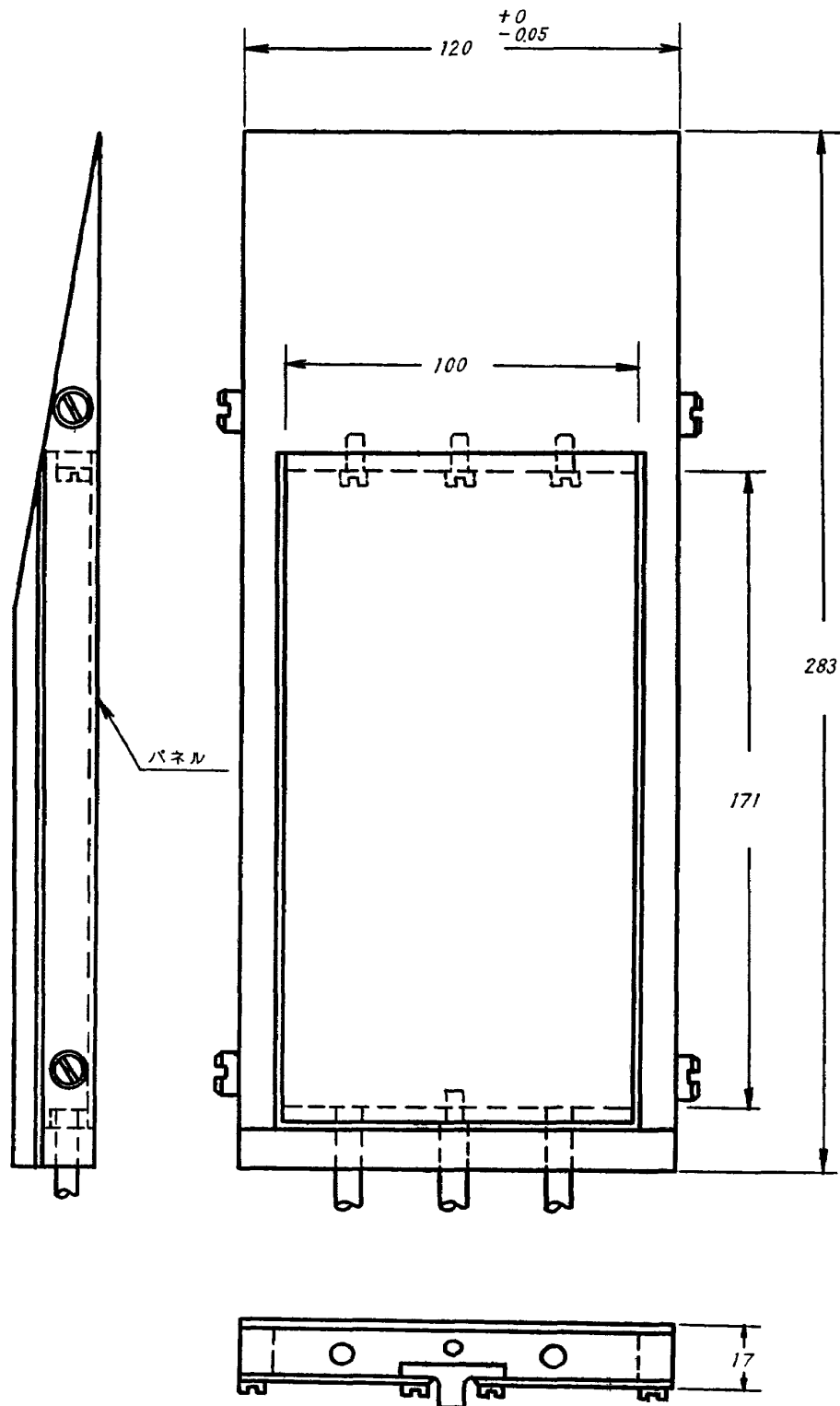


図 24



実験に使用した模型

図 1 A

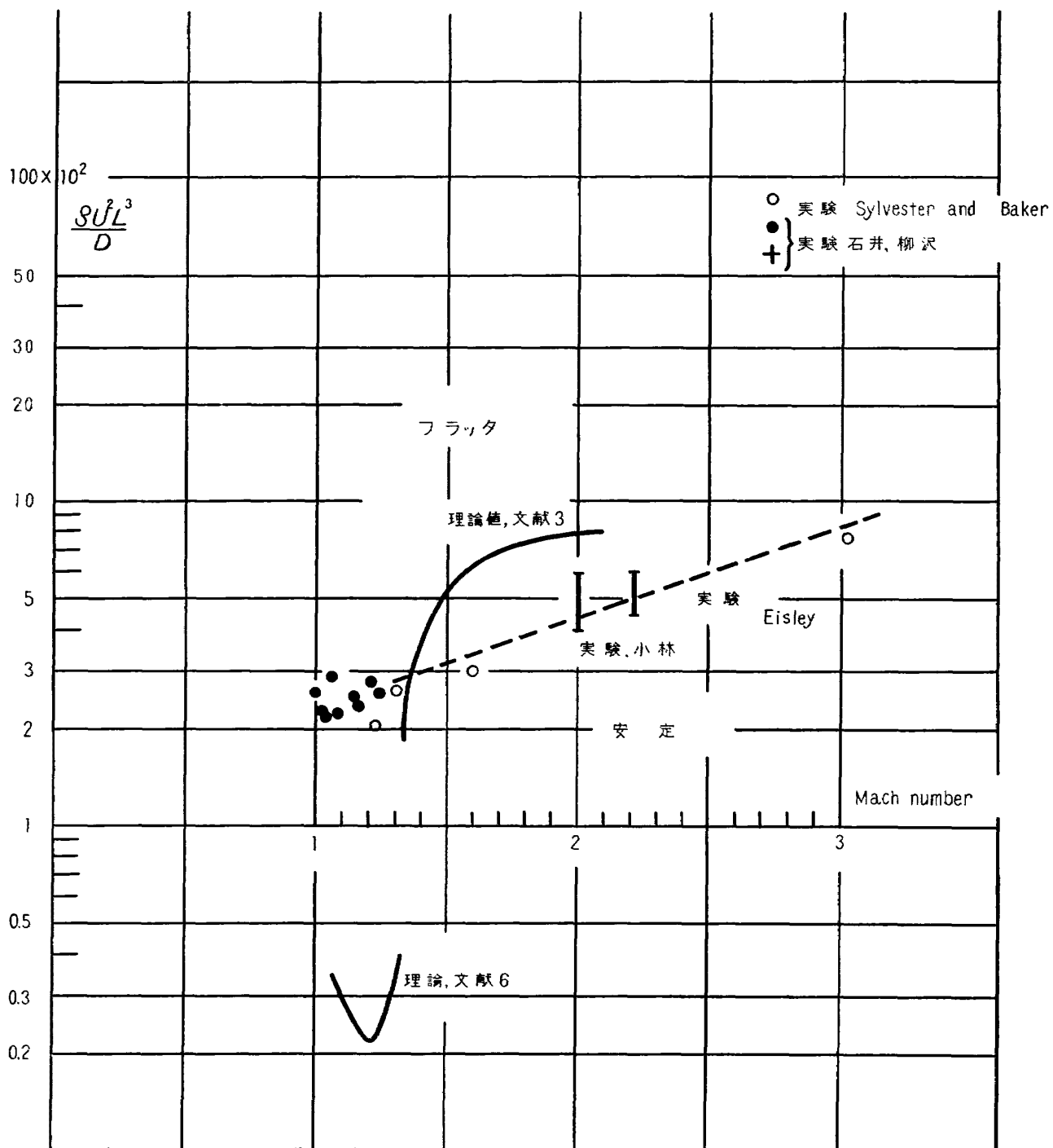


図 2 A

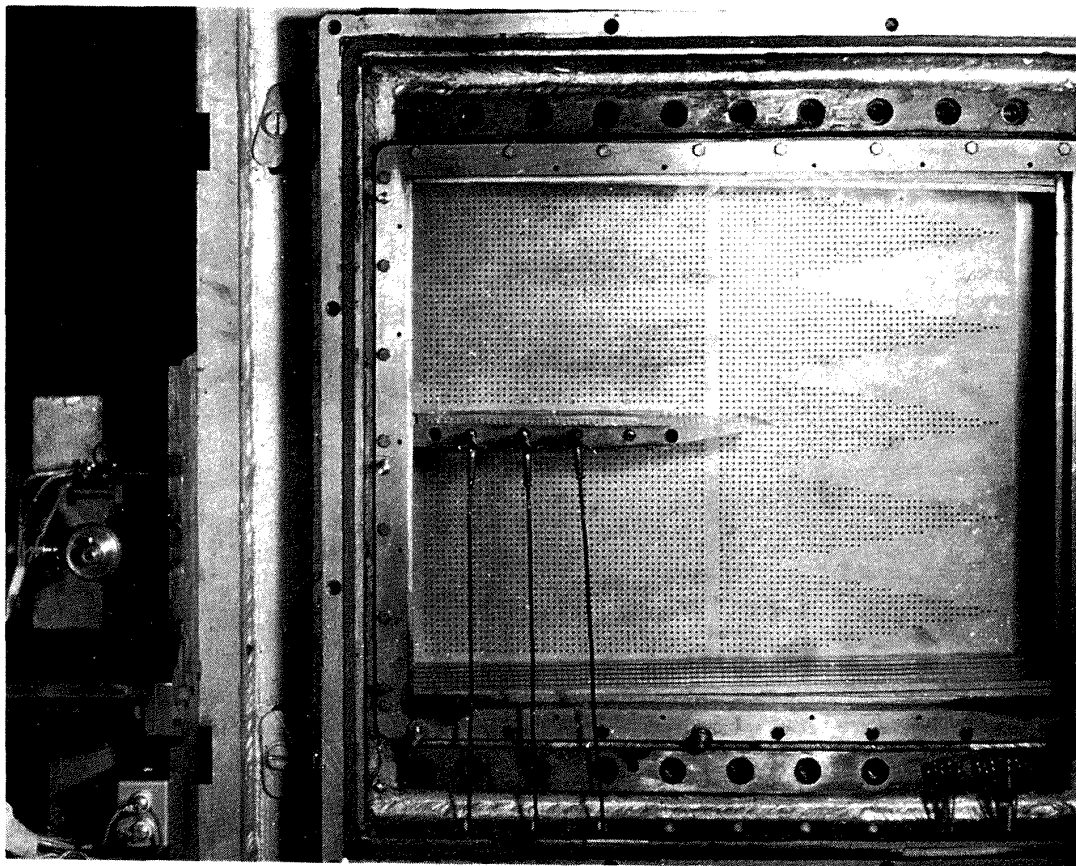


図 3 A 風洞と模型取付

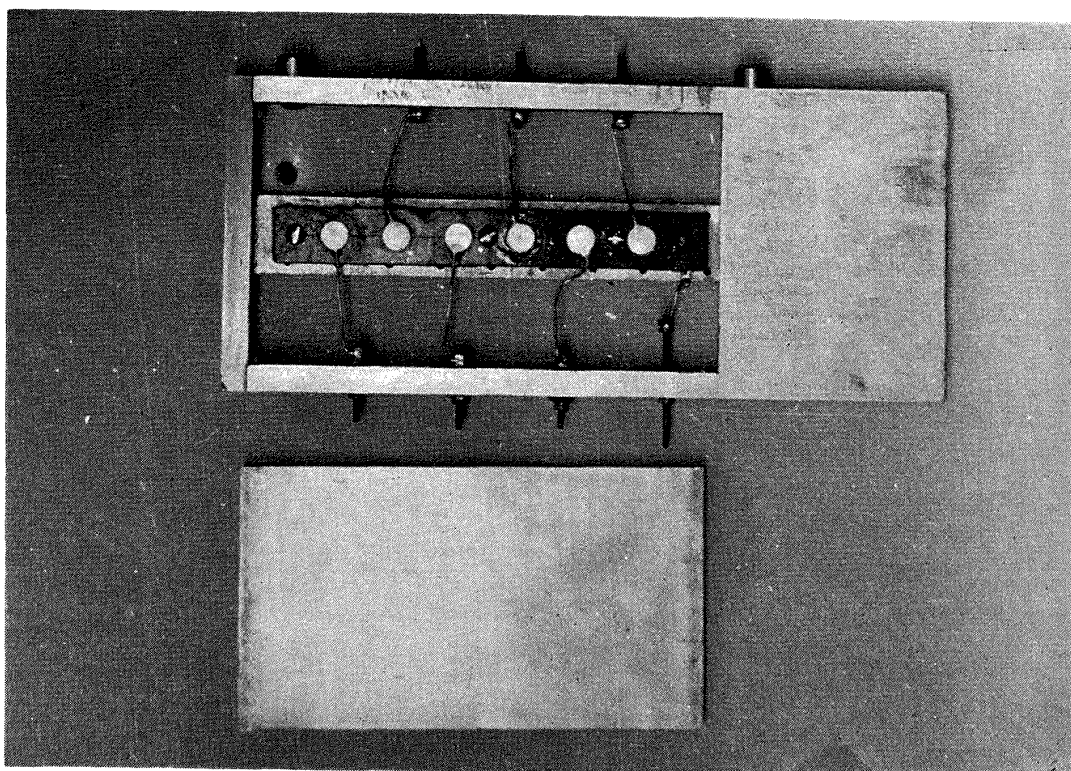


図 4 A 模型の分解

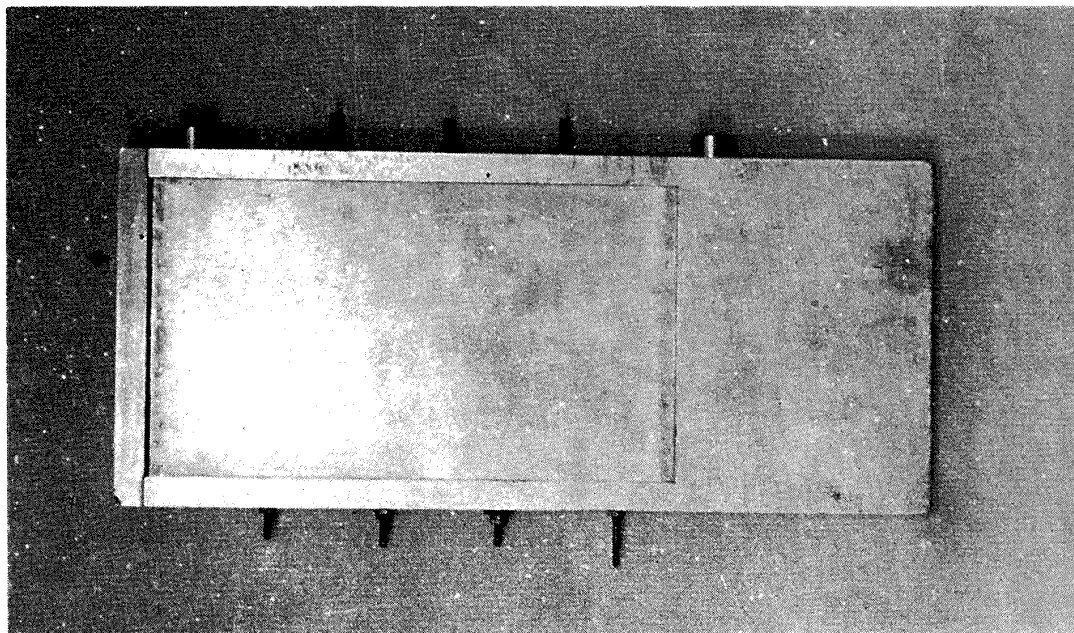


図 5 A 模型の組立

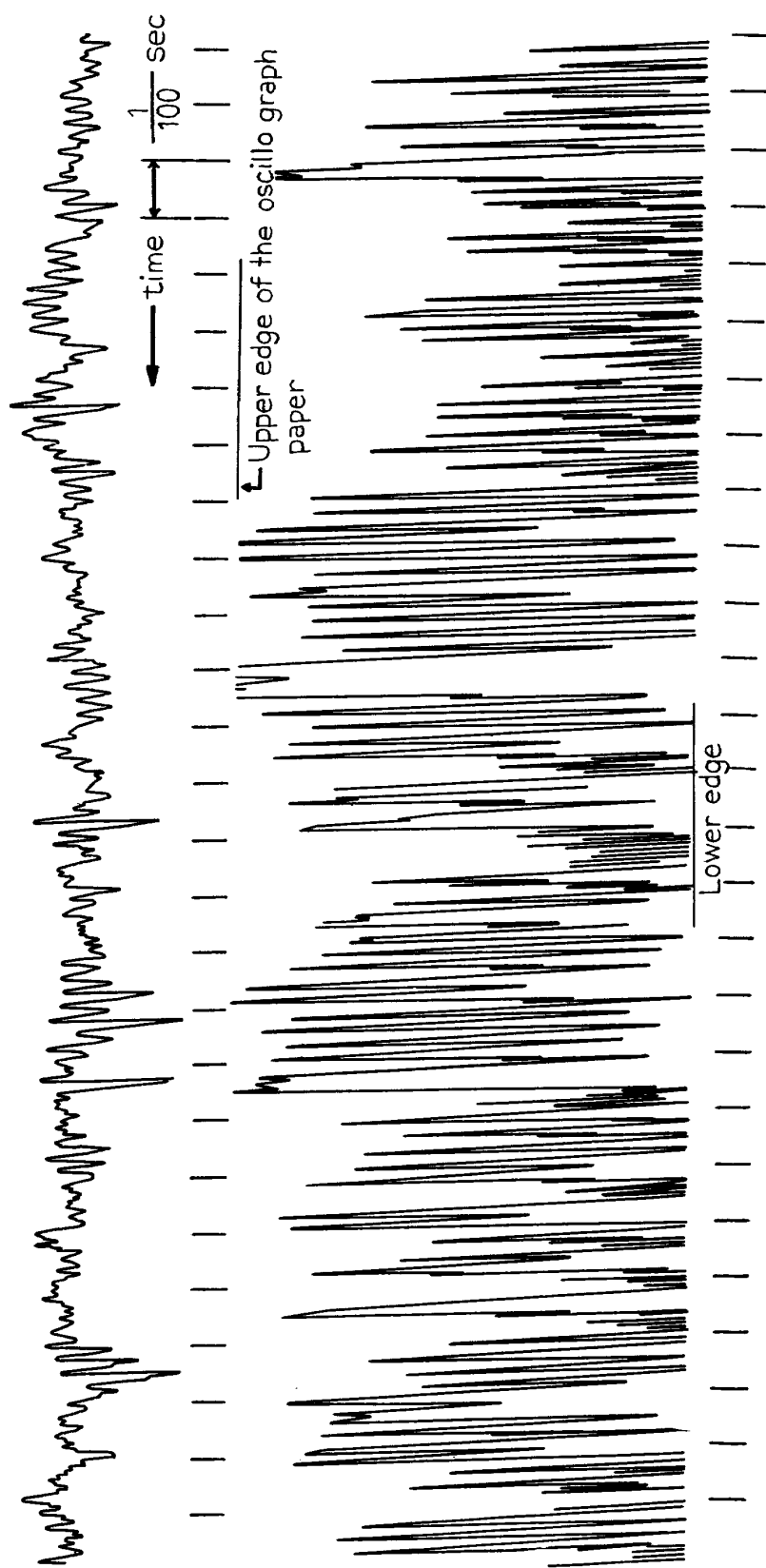


図6Aa (上) フラッタ前のランダム振動 (下) 十分に発達したフラッタの記録 (このあと破損, 飛散した。)

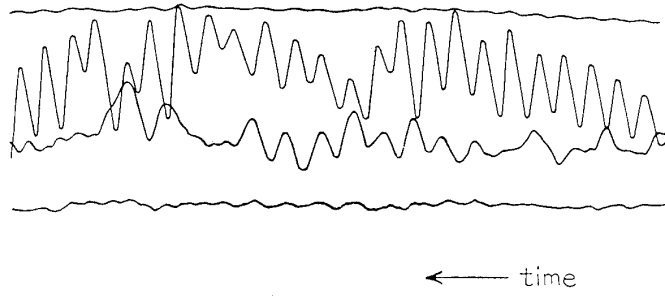


図6 A b フラッタ開始時のかん欠的調和振動

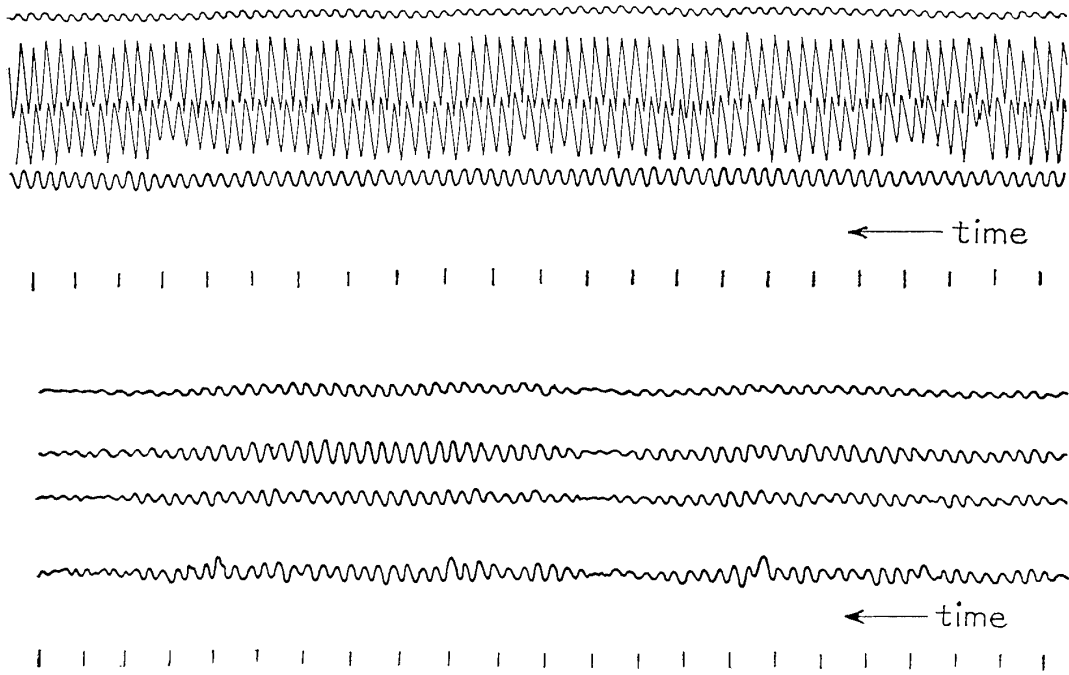


図7 A (上) 風洞共鳴と推定されている振動例

(下) 共鳴マッハ数よりわずかに低いマッハ数におけるビート現象例

TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964年2月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力につ いて Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964年3月	小橋安次郎, 遠藤 浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁歪計器の応用 Some Developements of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964年3月	幸尾治朗
TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of the Stability Characteristics of the Unsteady Laminar Bounday Layer	1964年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-66	変分法による平板翼の撓み, 振動解における 自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の 場合) Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates)	1964年6月	川井忠彦, 埴武敏 越出慎一, 戸川隼人 落合 薫
TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964年4月	井上建二, 野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論 (I) —揚力面理論— Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I) ——Lifting Surface Theory——	1964年6月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究 (I) An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964年7月	鳥崎忠雄, 能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造およ び特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory		松浦陽恵, 樋口一雄 池谷光栄, 堀川勇壯 村上 力, 百名盛之 三好範子, 岡部正典
TR-71	塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deforma- tion	1964年7月	中西不二夫, 佐藤和郎
TR-71T	Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deforma- tion Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity	September 1964	Fujio NAKANISHI Yasuo SATO
TR-72T	Some Experiments on Control-Surface Buzz	November 1964	Yasuharu NAKAMURA Yoshikazu TANABE
TR-73	軸対称激み点付近の溶融層の安定性	1964年11月	相原康彦

航空宇宙技術研究所報告74号

昭和39年11月発行

発 行 所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1,880
電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)

印 刷 所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53