NAL TR-77

UDC 518.6

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-77

Galerkin 法の収束性について

鳥 海 良 三

1965年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既　刊　報　告

TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林　二識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究（Ⅲ） An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (Ⅲ)	1963年9月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction	1963年9月	樋口一雄, 能美力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unstable System	1963年9月	武田峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pebble-Bed Heater	1963年9月	林　二識
TR-53	円管流の非定常熱伝達（第I報） —壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963年10月	林　二識
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963年10月	三好甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor Which Has a Boss	1963年11月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-56	亜音速および遷音速における二次元非定常空気力の測定（第I報） Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I)	1963年11月	中村泰治, 田辺義一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度500フィートないし10,000フィートにおける上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of Gust Velocities from 500 to 10,000 Feet Altitude	1964年1月	竹内和之, 小野幸一 山根晧三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Data Reduction System and Its Performance	1964年1月	田畑浄治, 中正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964年1月	塙武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角45°，テーパ比0.6の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964年2月	中井暎一, 小原瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964年2月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964年3月	小橋安次郎, 遠藤浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁わい計器の応用 Some Developements of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964年3月	幸尾治朗
TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of Stability Characteristics of Unsteady Laminar Bounday Layer	1964年7月	小橋安次郎, 恩地瑛

Galerkin 法の収束性について*

鳥　海　良　三**

On the Convergence of Galerkin's Method

By Ryozo TORIUMI

The convergence of Galerkin's method is studied for the Dirichlet problem of linear elliptic partial differential equations and for the initial-boundary value problem of linear parabolic partial differential equations. We show that these problems may be dealt with as linear equations in Hilbert space by extened operators; the generalized Dirichlet problem and the abstract intial value problem respectively.

In the former, a proof for the convergence of Galerkin's methed, which is not based on symmetricity, is presented. In the latter, a modified Galerkin's method and a proof for its convergence are presented.

1. 緒　　　言

Galerkin 法は Reyleigh-Ritz の方法と同じクラスに属する解法であるが，問題が変分問題と結びつかない場合でも適用できるところにその特徴がある。その定式化は単純であり，平板の撓み，振動および座屈問題に応用されて，実用上十分有効であることが確かめられている[6)]。

しかし理論的な収束性の問題は，わが国ではほとんど研究されておらず，また V.I. Krylov 流の古典的方法が文献[4)]で紹介されている以外は十分知られてはいない。この問題は Hilbert 空間の理論を使うことによって十分有効に研究されるのであり，主にソ連において発展せしめられた。

Hilbert 空間における線型方程式 $Lu=f$ において L が対称な場合には，変分問題に同等に移され，Galerkin 法は Reyleigh-Ritz の方法と境界の問題を除いて一致する。この場合は S.G. Michlin によって詳細に研究されている[13)]。L が非対称のときは二つの方向から考察される。一つは対称の概念を拡張してゆく方向で，A. E. Мартынюк[10)]，V. A. Shachnev[17)] 等によってなされた。他の一方は Galerkin 法の収束性を直接証明することである。Michlin は L が $L=A+T$ (Aは正値対称，$A^{-1}T$ はある空間で完全連続，楕円型の Dirichet 問題では必ずこのように分解される。) という場合に，Galerkin 法の収束性を証明した[13)]。このA が上に述べた拡張された意味での対称

* 昭和 39 年 12 月 21 日受付
** 計測部

性をもつ場合まで許して，Reyleigh-Ritz 法，Galerkin 法，最小二乗法等を統一的に論じたのは，A. E. Мартнынюк[11]，W. V. Petryshyn[15] である。

このように従来の証明はなんらかの意味での対称性に基づいていた。本報告では，楕円型偏微分作用素を $L=S+T$ (S は正値，$S^{-1}T$ は完全連続）というように分解して収束性を証明する。しかし，対称性に基づかない証明は N.I. Pol'skiĭ[16] による幾何学的方法を用いて V. A. Medvedev[12] によってもなされた。

Galerkin 法は放物型偏微分方程式の解法にも用いられる[18] がその収束性は明らかではない。そこで Galerkin 法を少し修正した方法を提示し，A. E. Мартынюк, V. A. Shachnev による拡張された意味での対称性を用いて，その収束性を証明する。

以下 2. で楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題を扱い，3. で放物型偏微分方程式の初期値境界値問題を扱う。応用上の観点からは，まず § 2.2, § 3.2 および § 3.4 を見られたい。

§ 2. 楕円型偏微分方程式

2. 1 弱方程式および抽象積分方程式

楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題は弱方程式を通して抽象積分方程式に導かれる。§ 2.3 ではこの抽象積分方程式の解，元の方程式のいわゆる弱解への収束性を論ずる。方程式の係数および非斉次項の十分なめらかさを仮定すれば，弱解も十分なめらかであり[14]，また，古典的な解が存在すればそれが弱解になるので，このような接近の妥当性が主張できる。

n 次元 Euclid 空間内の有界開領域を G, その境界を $\dot{G}$ で示す。$G\ni x$ を $x=(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ とし，

$$D_s=\frac{\partial}{\partial x_s} \qquad s=1, 2, \cdots n,$$

とおく。n 個の非負の整数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の組み合わせベクトル $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ に対し，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ を導入する。そして

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

とおく。

$G\ni x$ で定義された実関数を $u=u(x)$ とし，G で二乗可積分な u の全体を $L^2[G]$ で示す。そして次のように内積とノルムを定義する。

$$(u, v)=\int_G u(x)v(x)dx, \qquad u,\ v\in L^2[G]$$

$$||u||^2=(u, u) \qquad u\in L^2[G]$$

G で k 回連続微分可能な $u(x)$ の全体を $C^k[G]$ と記し，さらに $C^k[G]\ni u(x)$ に対し，

$\overline{\{x;u(x)\neq 0\}}=\mathrm{supp}\ u$ とおくとき，$\mathrm{supp}\ u\subset G$ なら，$u\in C_0^k[G]$ と書く。今後，考えている領域が変らなく，意味の明瞭さを失わない限り，すべて G を省く。

$a_{\alpha,\beta}(x)\in C^m$ とし，$2m$ 階の偏微分作用素 L を，次式で定義する。

$$L=\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_{\alpha,\beta}D^\beta$$

また L の共役偏微分作用素 L^* は

$$L^*=\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{|\beta|}D^\beta a_{\alpha,\beta}D^\alpha$$

で定義される。

Lの特性方程式 $\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha a_{\alpha,\beta}\xi^\beta$ が任意の実ベクトル $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\neq(0,0,\cdots,0)$ $(\xi^\alpha=\xi_1{}^{\alpha_1}\xi_2{}^{\alpha_2}\cdots\xi_n{}^{\alpha_n})$ に対して 0 にならないなら，L は楕円型といわれるが，さらに，次の式を仮定する。

ある正数λが存在して，

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha a_{\alpha,\beta}\xi^\beta\geqq\lambda|\xi|^{2m} \tag{2.1.1}$$

ここに $|\xi|^2=\sum_{i=1}^n\xi_i{}^2$

境界 $\dot{G}$ 上で，与えられた関数 g をとる Dirichlet 問題は，$\bar{g}\in C^m[G]$ で $\dot{G}$ 上で $\bar{g}=g$ なる $\bar{g}$ が存在すれば，$u-\bar{g}$ を新たな未知関数として選べば，境界値 0 の Dirichlet 問題に帰着されるので，一般性を失うことなく，境界値 0 の Dirichlet 問題を扱う。すなわち，与えられた f に対し，

$$G\ \text{の内部で}\quad Lu=f \tag{2.1.2}$$

$$\dot{G}\ \text{上で}\qquad D^\alpha u=0\qquad(|\alpha|\leq m-1) \tag{2.1.3}$$

次に Dirichlet 問題 (2.1.2), (2.1.3) に対する弱方程式を定義する。その前に L の弱い拡張を定義する。ある $u\in L^2$ に対し，

$$(u,\ L^*\varphi)=(v,\ \varphi)\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty \tag{2.1.4}$$

なる $v\in L^2$ が存在するとき，$\tilde{L}u=v$ とかき，この $\tilde{L}$ を L の拡張という，この $\tilde{L}$ の定義域を $D(\tilde{L})$ と書く。$u\in C^m$ なら

$$(u,\ L^*\varphi)=(Lu,\ \varphi)\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty$$

であるから，当然 (2.1.4) が成立し，したがって $C^m\subset D(\tilde{L})$ で，$C^m\ni u$ に対し $\tilde{L}u=Lu$ である。この $\tilde{L}$ も，同じ L で示し，特にことわらない限り L は弱い拡張を示すことにする。L は閉作用素である[14)]。この L を用いて，

$$B[u,\ v]\equiv(Lu,\ v)$$

とおくと，(2.1.2), (2.1.3) に対する弱方程式は，

$$B[u,\ \varphi]=(f,\ \varphi)\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty \tag{2.1.5}$$

で定義される。

問題 (2.1.2), (2.1.3) の代りに，(2.1.5) を解くことを問題とする。そのために，次のような内積とノルムを導入する。

$$(u,\ v)_m=\sum_{|\alpha|\leq m}(D^\alpha u,\ D^\alpha v)$$

$$\|u\|_m^2=(u,\ v)_m$$

この $\|u\|_m$ により C_0^∞ を完備化した空間を H_0^m で示すと H_0^m は実 Hilbert 空間になる。

定理 2.1 係数 $a_{\alpha,\beta}$ が有界で，(2.1.1) が成立すれば，正数 λ, γ, δ が存在して，

$$\varphi\in C_0^\infty \quad \text{に対して,}\quad B[\varphi,\varphi]+\lambda\|\varphi\|^2\geqq\delta\|\varphi\|_m^2 \tag{2.1.6}$$

(Gårding の不等式)

$$\varphi,\psi\in C_0^\infty \quad \text{に対して,}\quad B[\varphi,\psi]+\lambda(\varphi,\psi)\leqq\gamma\|\varphi\|_m\|\psi\|_m \tag{2.1.7}$$

が成立する[19]。

そこでいま $B'[\varphi,\psi]=B[\varphi,\psi]+\lambda(\varphi,\psi)$ とおくと，$B'[\varphi,\psi]$ は (2.1.7) により，極限移行によって H_0^m 全体で定義されるように拡張できる。

定理 2.2 (Lax-Milgram) $B(u,v)$ は実 Hilbert 空間 H における双一次汎関数，すなわち任意の実定数 a_i, b_j と u_i, $v_j\in H$ について，

$$B(\sum_i a_iu_i,\ \sum_j b_jv_j)=\sum_{i,j}a_ib_jB(u_i,\ v_j),$$

任意の $u,v\in H$ について，(H におけるノルムで)

$$B(u,u)\geq\delta\|u\|^2,\ \delta>0,\ |B(u,v)|\leq\gamma\|u\|\,\|v\|$$

なる定数 δ, γ が存在すれば，このとき任意の $v\in H$ に対し，

$$B(w,u)=(v,u)\qquad \forall u\in H$$

となる w が存在し，$w=Kv$ とおくと K は有界であり，また H 全体で定義される有界な逆作用 K^{-1} をもつ[14]。

定理 2.1 の H_0^m, $(u,v)_m$ および $\|u\|_m$ をそれぞれ定理 2.2 の H, (u,v) および $\|u\|$ と考えれば，$B'[u,v]$ に対して定理 2.2 が応用できる。定理 2.1 において，$\lambda=0$ ととれるとき，したがって B' が B と一致するときは弱解の存在が次のようにしてわかる。

C_0^∞ は H_0^m でちゅう密だから (2.1.5) は

$$B[u,v]=(f,\ v)\qquad \forall v\in H_0^m$$

と同値になる。ところで $|(f,v)|\leqq\|f\|\,\|v\|\leqq\|f\|\,\|v\|_m$ より，f を固定すると (f,v) は H_0^m における有界汎関数であり，したがって Tf が存在して $(f,v)=(Tf,v)_m$ となる。また，定理 2.2 より $(Tf,v)_m=B[KTf,v]$ なる KTf が存在する。この KTf は当然，

$$B[KTf,\varphi]=(f,\varphi)\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty$$

を満足するから，弱方程式 (2.1.5) の解である。

次に $\lambda\neq 0$ なるときは，

$$B[u,\varphi]=B'[u,\varphi]-\lambda(u,\varphi)$$

となり，したがって弱方程式 (2.1.5) は

$$B'[u,\varphi]-\lambda(u,\varphi)=(f,\varphi) \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty \tag{2.1.8}$$

となる。定理 2.2 の K^{-1} に相当するものを S とおくと，定理 2.2 により，$B'[u,\varphi]=(Su,\varphi)_m$ となり，また上の T によって，(2.1.8) は

$$(Su,\varphi)_m-\lambda(Tu,\varphi)_m=(f',\varphi)_m$$

となる。ただし　$f'=Tf$

ゆえに

$$(Su-\lambda Tu,\varphi)_m=(f',\varphi)_m$$

C_0^∞ は H_0^m でちゅう密だから，(2.1.5) は H_0^m において，

$$Su-\lambda Tu=f' \tag{2.1.9}$$

なる方程式に転換されたことになる。ところで，(2.1.6)，(2.17) により

$$(Su,u)_m\geqq\delta||u||_m^2 \qquad \forall u\in H_0^m \tag{2.1.10}$$

$$|(Su,v)_m|\leqq\gamma||u||_m||v||_m \tag{2.1.11}$$

が成立する。

(2.1.10) は S の正値性を示しており $|(Su,u)_m|\leqq||Su||_m||u||_m$ と (2.1.10) から

$$||Su||_m\geqq\delta||u||_m \tag{2.1.12}$$

(2.1.11) から

$$||Su||_m\leqq\gamma||u||_m \tag{2.1.13}$$

が得られる。

また T の定義より，$(u,v)=(Tu,v)_m \qquad \forall v\in H_0^m$，

ゆえに

$$|(Tu,v)_m|=|(u,v)|\leqq||u||\ ||v||\leqq||u||\ ||v||_m$$

よって

$$||Tu||_m\leqq||u|| \tag{2.1.14}$$

を得る。

このとき T は H_0^m における完全連続作用素である[19]。また $S^{-1}=K$ を (2.1.9) に作用させて，

$$u-\lambda KTu=Kf' \tag{2.1.15}$$

K は (2.1.12) により $||K||_m\leqq\delta^{-1}$，したがって有界である。このことから KT は完全連続であり，したがって問題 (2.1.2)，(2.1.3) が抽象積分方程式に転換されたことになる。なお

$$B'[KTu,\ \varphi]=(u,\varphi)$$

より KT は $\lambda I+L$ の逆作用素になっている。

2.2 Galerkin 法

たとえば Poisson 方程式

$$-\Delta u=f$$

を単位正方形 $G(x=y=0,\ x=y=1$ で囲まれる領域) の中で，境界値0で解くことを考える。いま試験関数として $\varphi_{ij}(x,y)=x(x-1)y(y-1)x^{i-1}y^{j-1}(i,j=1,2,\cdots)$ を選び，$\varphi_{ij}(x,y)$ の一次結合 $u_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{ij}$ を作る。そして，u_{mn} が次の式を満足するように a_{ij} を決定する。

$$\int_0^1\int_0^1-\Delta u_{mn}(x,y)\cdot\varphi_{\mu\nu}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\varphi_{\mu\nu}(x,y)dxdy \tag{2.2.1}$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m,\ \ \nu=1,2,\cdots,n)$$

いま

$$\int_0^1\int_0^1-\Delta\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{\mu\nu}(x,y)dxdy=(-\Delta\varphi_{ij},\varphi_{u\nu})$$

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\varphi_{\mu\nu}(x,y)dxdy=(f,\varphi_{\mu\nu})$$

とおけば，a_{ij} は次の連立方程式を解くことによって求められる。すなわち

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-\Delta\varphi_{\mu\nu},\varphi_{ij})a_{ij}=f_{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

$$(\mu=1,2,\cdots m,\ \ \nu=1,2,\cdots,n)$$

この方程式の係数行列の行列式は0にならない。なんとなれば Friedrichs の不等式によって，$\dot{G}$ で0になる u に対して，

$$\int_G-\Delta u\cdot udxdy=\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdy\geqq\delta\int_G u^2dxdy, \tag{2.2.3}$$

なる正定数 δ が存在する。また $\varphi_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ は一次独立である。そこで行列式が0になるとすれば

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-\Delta\varphi_{\mu\nu},\varphi_{ij})a_{ij}=0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m,\ \ \nu=1,2,\cdots,n)$$

なるすべては0でない a_{ij} が存在することになり，各式に $a_{\mu\nu}$ をかけて加えれば，

$$(-\Delta\sum_{\mu\nu}a_{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu},\sum_{ij}a_{ij}\varphi_{ij})=0$$

よって (2.2.3) より $\sum_{ij}a_{ij}\varphi_{ij}=0$ となって，φ_{ij} の一次独立性に矛盾する。したがって (2.2.2) は一意的に解ける。また (2.2.3) からわかるように $-\Delta$ は (2.1.6) が $\lambda=0$ で成立する場合であり，$-\Delta\varphi_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots)$ が L^2 で完全，すなわち $L^2\ni\forall u$ が，$-\Delta\varphi_{ij}$ の有限個の一次結合でいくらでも近く近似される。したがって定理 2.3，定理 2.4 により (2.2.2) から求まる u_{mn} は，m，n を無限に大きくするとき，厳密解に収束する。

次に一般の場合に移る。問題 (2.1.2)，(2.1.3) を Galerkim 法で解くことを弱方程式 (2.1.5) との関連のもとに考えると，近似解の意味が明瞭になる。(2.1.5) において，任意の φ の代り

に，境界条件を満足する試験関数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ をとり，u を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ の一次結合で求める。すなわち，$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ として，

$$B[u_n, \varphi_j] = (Lu_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.2.4}$$

より $a_1, a_2 \cdots, a_n$ を求める。したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} (L\varphi_i, \varphi_j) a_i = (f, \varphi_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.2.5}$$

なる連立方程式を解けばよい。問題 (2.1.2), (2.1.3) が一意的な解を持つときは，この連立方程式も，n を十分大きくすれば，一意的に解ける。また n を無限にもっていくとき，厳密解に収束するためには，試験関数列 $\varphi_1, \varphi_2 \cdots$ が一次独立であること，および $A = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{\alpha|} D^{2\alpha}$ として，

$$A\varphi_1, A\varphi_2 \cdots\cdots$$

が L^2 で完全であることの二つが要求される。

2.3 収 束 性

まず L の双一次汎関数 $B[u, v]$ が $\lambda = 0$ で (2.1.6), (2.1.7) を満足する場合を考える。

定理 2.3 L の双一次汎関数 $B[u, v]$ が $\lambda = 0$ で (2.1.6), (2.1.7) 満足するとする。$\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ は C^∞ に属し，(2.1.3) を満足する関数列で，H_0^m で完全そして一次独立とする。 このとき Galerkin 法による近似解は，任意の n に対して存在し，弱解に収束する。（証明は補足にゆずる）

関数列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ が H_0^m で完全であるための条件を考えるには，次の補題が必要になる。

補題 2.1 $j < k$ に対して定数 c^{jk} が定まって，$\varphi \in C_0^\infty$ なるとき，

$$\sum_{|\alpha|=j} ||D^\alpha \varphi||^2 \leqq c^{jk} \sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha \varphi||^2 \tag{2.3.1}$$

である[19]。

この補題 2.1 を使うと，次の定理が成立する。

定理 2.4 C^∞ に属し，$\dot{G}$ 上で (2.1.3) を満足する関数列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ が H_0^m で完全であるためには，$A = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$ とするとき $A\varphi_1, A\varphi_2, \cdots$ が L^2 で完全であることが十分である。（証明は補足にゆずる）

定理 2.3 から一般の場合に移るには Hilbert 空間における二つの定理を必要とする。

定理 2.5 H を Hilbert 空間とし，$H \ni \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ を H での完全正規直交系とし，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ で張られる部分空間への射影を P_n とする。 そして T を H での完全連続作用素とするとき，P_nT は T にノルム収束する。すなわち，

$$||P_nT - T|| \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2.3.2}$$

ここに $P_nTu = \sum_{j=1}^{n} (Tu, \varphi_j) \varphi_j$ であることはもちろんである[13]。

定理 2.6 T_n を Hilbert 空間 H における完全連続作用素で T にノルム収束するとする。すなわち,

$$\|T_n-T\|\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{2.3.3}$$

さらに $f_n\in H$ はあるきまった H の元 f に強収束するとする。すなわち

$$\|f_n-f\|\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{2.3.4}$$

このとき λ が方程式

$$u-\lambda Tu=f \tag{2.3.5}$$

の正則値ならば,十分大きな n に対して,λ は

$$u_n-\lambda T_nu_n=f_n \tag{2.3.6}$$

に対しても,また正則値であり,(2.3.6) の解 u_n は (2.3.5) の解に強収束する[13]。

問題 (2.1.2), (2.1.3) は弱方程式 (2.1.5) を通して,抽象積分方程式 (2.1.15), すなわち (2.3.5) の形に転換された。そこで一般の場合における Galerkin 法の近似解が (2.3.6) の形で求められるなら,収束性は証明されたことになる。(それは補足にゆずる)

定理 2.7 問題 (2.1.2), (2.1.3) の一意的な解が存在するとする。$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は C^∞ に属し,(2.1.3) を満足する関数列で,H_0^m で完全そして一次独立とする。このとき Galerkin 法による近似解は十分大きな n に対して存在し,弱解に収束する。

なお,固有値問題に対しては次の定理が成立する。

定理 2.8 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は定理 2.7 の仮定を満足するとする。このとき $Lu-\lambda u=0$ の Galerkin 法による近似固有値はほんとうの固有値に収束する。

これは Hilbert 空間における次の定理に基づいている。

定理 2.9 T, T_n は完全連続で $\|T-T_n\|\to 0$ (($n\to\infty$) なるとき,

$$u_n-\lambda T_nu_n=0$$

の固有値は

$$u-\lambda Tu=0$$

の固有値へ収束する[13]。

この証明は定理 2.7 の定理 2.6 への関係を考えれば明らかであろう。

§ 3. 放物型偏微分方程式

記号は特にことわらない限り §2. と同じ意味を表わすものとする。次のような放物型偏微分方程式の初期値境界値問題を考える。u を $u=u(t,x)$ なる実関数として,

Gの内部で

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-Lu=-\sum_{|\alpha|=|\beta|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_{\alpha\beta}D^\beta u \tag{3.1}$$

$\dot{G}$ の上で

$$D^{\alpha}u=0 \qquad (|\alpha|\leq m-1) \tag{3.2}$$

$$t=0 \text{ のとき } \quad u(0,x)=g(x) \qquad (\forall x\in G) \tag{3.3}$$

方程式 (3.1) の係数 $a_{\alpha\beta}$ は空間変数 x のみに依存し，時間 t に依存しないとする。また少なくも $a_{\alpha\beta}\in C^m$ であり，$g(x)$ は (3.2) を満足するとする。

3. 1 Semi-group

§2. では弱方程式とそれから導かれる抽象積分方程式が基礎になっていたが， ここでは semi-group の理論が基礎になる。

Hilbert 空間 H から H への有界作用素の系 $\{T(t)\}$, $0\leq t<\infty$ が次の条件を満足するとき，$\{T(t)\}$ を semi-group という。

(i) $T(t+s)=T(t)T(t) \qquad T(o)=I \quad (t,s\geq 0) \quad I$ は恒等作用素。

(ii) $\underset{t\to t_0}{s\text{-}\lim}\, T(t)u=T(t_0)u \qquad (u\in H,\ t_0\geq 0)$

ここに極限は H のノルムで $||T(t)u-T(t_0)u||\to 0\ (t\to t_0)$，したがって強連続の意味である。

(iii) $||T(t)||\leqq e^{\omega t} \quad (t\geqq 0)$ なる $\omega\geq 0$ が存在する。

この semi-group$\{T(t)\}$ の生成作用素 A を，

$$\underset{h\to 0}{s\text{-}\lim}\, h^{-1}(T(h)-I)u=Au$$

によって定義する。すなわち $\underset{h\to 0}{s\text{-}\lim}\, h^{-1}(T(h)-I)u$ の存在するような $u\in H$ の全体を A の定義域 $D(A)$ とし，$Au=\underset{h\to 0}{s\text{-}\lim}\, h^{-1}(T(h)-I)u$ によって定義された作用素 A を $\{T(t)\}$ の生成作用素と呼ぶのである。

定理 3.1 $D(A)$ が H でちゅう密でかつ $u\in D(A)$ ならば，

$$\frac{d}{dt}T(t)u=\underset{h\to 0}{s\text{-}\lim}\, h^{-1}(T(t+h)-T(t))u=AT(t)u \tag{3.1.1}$$

である[19]。

この定理によって $-L$ がある semi-group$\{T(t)\}$ の生成作用素になれば，$T(t)g$ が強収束の意味で (3.1) を満足する。しかし係数 $a_{\alpha,\beta}$ および $g(x)$ が十分なめらかならば，$T(t)g$ も十分なめらかであり[7]，したがって (3.1) を厳密に満足している。$T(o)=I$ より (3.3) は成立する。また (3.2) をも満足する解，すなわち古典的な解が存在すれば，それはもちろん $T(t)g$ と一致するのである。

定理 3.2 ちゅう密な定義域をもつ線型閉作用素 A が semi-group の生成作用素であるための必要十分な条件は次のことである。すなわち，ある実数 ω が存在して $\lambda>\omega$ なる λ に対して $(\lambda I-A)^{-1}$ が有界作用素になり，かつ $||(\lambda I-A)^{-1}||\leqq(\lambda-\omega)^{-1} \quad \lambda>\omega$[19]。

Lを (3.1) の L の弱い拡張とすると，$-L$ がある semi-group の生成作用素になる。なんとなれば，$-L$ は閉作用素であり，ある ω ((2.1.6) が成立する λ の最小値。) が存在して $\lambda>\omega$ に対

して $\lambda I+L$ の値域が L^2 全体なることは § 2.1 で示した。そして $D(L)\ni u$ に対して，

$$((\omega I+L)u,\ u)\geqq\delta\|u\|_m{}^2\geqq 0$$

ゆえに，$\lambda>\omega$ に対して

$$((\lambda I+L)u,\ u)\geqq(\lambda-\omega)\|u\|^2 \qquad \lambda>\omega$$

したがって $(\lambda I+L)^{-1}$ は有界作用素で，$\|(\lambda I+L)^{-1}\|\leqq(\lambda-\omega)^{-1}$ になる。したがって定理 3.2 より $-L$ がある semi-group$\{T(t)\}$ を生成し，問題 (3.1)，(3.2)，(3.3) が一般化された意味で解かれる。

定理 3.3 Semi-group$\{T(t)\}$ の生成作用素を A とすると，$u\epsilon H$ を定めたとき，任意の有限閉区間に属する t に関して一様に

$$T(t)u=s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty}\exp[t\lambda(\lambda I-A)^{-1}A]u$$

が成立する[19]。

$\lambda(\lambda I-A)^{-1}A$ は有界作用素である。$\dfrac{du}{dt}=Au,\ u(0)=g$ の解は，A が有界なら，当然 $\exp(tA)g$ であるから，A が有界でないときの解 $T(t)g$ は，

$$\frac{du}{dt}=\lambda(\lambda I-A)^{-1}Au, \qquad u(0)=g$$

の解によって λ を十分大きくしたとき近似されることになる。これが次の修正 Galerkin 法に対する根拠を与える。

3. 2 修正 Galerkin 法

前節の終わりで述べたように，

$$\frac{du}{dt}=-Lu, \qquad u(o)=g \tag{3.2.1}$$

の解は，

$$\frac{du}{dt}=-\lambda(\lambda I+L)^{-1}Lu, \qquad u(o)=g \tag{3.2.2}$$

で近似される。そこで前者ではなく，後者を λ を十分大きくして，普通の Galerkin 法で解く。具体的な example については §3.4 で述べるとして，一般的に書いておく。L が対称のときをまず考える。$(\lambda I+L)^{-1}L$ は explicit には与えられないので，$\lambda I+L$ を両辺にかける。試験関数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ としては境界条件 (3.2) を満足し，$H_0{}^m$ で完全，そして一次独立なものを選ぶ。$\psi_i(t)$ を未知関数として，$u_n(t,x)=\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\varphi_i(x)$ とおく，そして

$$\left((\lambda I+L)\frac{du_n}{dt},\varphi_j\right)=-\lambda(Lu_n,\varphi_j) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.3}$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n}((\lambda I+L)\varphi_i,\ \varphi_j)\frac{d\psi_i(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\lambda(L\varphi_i,\ \varphi_j),\ j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.3$'$}$$

なる連立一階常微分方程式を

$$((\lambda I+L)u_n(0,x),\ \varphi_j(x))=((\lambda I+L)g,\ \varphi_j)\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.4}$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n}((\lambda I+L)\varphi_i,\ \varphi_j)\psi_i(0)=((\lambda I+L)g,\ \varphi_j),\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.4}'$$

から求められる $\psi_i(0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を初期値として解いて，$\psi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を決定する。いま

$$\Psi_n(t)=\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\\ \vdots\\ \psi_n(t)\end{pmatrix},\quad \Phi_n=\begin{pmatrix}(\varphi_1,\varphi_1)\cdots\cdots(\varphi_n,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_2)\cdots\cdots(\varphi_n,\varphi_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\varphi_1,\varphi_n)\cdots\cdots(\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix},\quad \widetilde{\Phi}_n=\begin{pmatrix}(L\varphi_1,\varphi_1)\cdots\cdots(L\varphi_n,\varphi_1)\\ (L\varphi_1,\varphi_2)\cdots\cdots(L\varphi_n,\varphi_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (L\varphi_1,\varphi_n)\cdots\cdots(L\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

とおくと，十分大きな λ に対して，$\det|\lambda\Phi_n+\widetilde{\Phi}_m|\neq 0$，ゆえに (3.2.4)′ が一意的に解けて，$n\to\infty$ のとき，

$$u_n(0,x)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(0)\varphi_i(x)\to g(x)$$

は定理 2.3 よりわかる。また初期値 $\Psi_n(0)$ に対する (3.2.3)′ の解は

$$\Psi_n(t)=\exp\{-t\lambda(\lambda\Phi_n+\widetilde{\Phi}_n)^{-1}\widetilde{\Phi}_n\}\Psi_n(0) \tag{3.2.5}$$

となることは常微分方程式の理論より明らかである。この $\Psi_n(t)$ から作られる $u_n(t,x)$ が $\lambda\to\infty$, $n\to\infty$ のとき，任意の閉区間の中の t に関して一様に (3.2.1) の解に収束することは § 3.3 で証明する。

次に L が対称でないとき，次の条件を満足する線型作用素 K が存在すると仮定する。

i) $D(K)\supset D(L)$, $D(L)\ni u$ に対し，

$$((\lambda I+L)u,\ Kv)=(Ku,\ (\lambda I+L)v)$$

ここに L は弱い拡張を行なう前の L。

ii) ある正定数 ω と k が存在して，

$$((\lambda I+L)u,\ Ku)\geqq k\|Ku\|^2,\quad \lambda>\omega$$

iii) $\|Ku\|\geqq\gamma\|u\|$, $\gamma>0$, $u\in D(K)$

iv) K の $D(L)$ における値域は H でちゅう密である。たとえば (2.1.6) を成立せしめる λ に対して，$\lambda I+L$ がそのような K の例になっているわけである。

このとき，$((\lambda I+L)u,\ Ku)=\|u\|_K$ なるノルムを作って $D(L)$ を完備化する。その空間を H_K で示す。H_K で完全で一次独立，しかも境界条件を満たす試験関数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots$ を選んで (3.2.3)′, 3.2.4)′ に対応して，

$$\sum_{i=1}^{n}((\lambda I+L)\varphi_i, K\varphi_j)\frac{d\psi_i(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\lambda(L\varphi_i, K\varphi_j)\psi_i(t) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}((\lambda I+L)\varphi_i, K\varphi_j)\psi(0)=((\lambda I+L)g, K\varphi_j) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.7}$$

を作る。$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ が H_K で完全であるためには，$\{(\lambda I+L)\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ が L^2 で完全であることが十分である[15]。(3.2.6) を (3.2.7) の $\psi_i(0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を初期条件として解く。その収束性については § 3.3 で論ずる。

3.3 収束性

まず，ある Hilbert 空間 H で定義された有界作用素 $L(||Lu||\leqq C||u||)$ に対して，抽象的初期値問題

$$\frac{du(t)}{dt}=-Lu(t), \qquad u(0)=g, \qquad u(t)\in H \tag{3.3.1}$$

を考える。これを普通の意味の Galerkin 法で解く。すなわち，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を H での完全系で，一次独立とし，$\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots\cdots$ を未知関数とする。

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i, \varphi_j)\frac{d\psi_i(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}(L\varphi_i, \varphi_j)\psi_i(t), \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.3.2}$$

を

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i, \varphi_j)\psi_i(0)=(g, \varphi_j) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.3.3}$$

より求められる $(\psi_1(0), \psi_2(0), \cdots, \psi_n(0))$ を初期値として解く，そして $u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\varphi_i$ を近似解とする。(3.3.1) の解は $\exp(-tL)g$ であり，(3.3.2), (3.3.3) の解は § 3.2 の行列記号を使うと，

$$\Psi_n(t)=\exp-t\Phi_n^{-1}\tilde{\Phi}_n\Psi_n(0)$$

である。このとき次の補題が成立する。

補題 3.1 $u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\varphi_i$ とおくと，任意の閉区間に属する t に関して一様に，

$$||u_n(t)-\exp(-tL)g||\rightarrow 0 \qquad (n\rightarrow\infty)$$

ここに $||\ \ ||$ は H におけるノルムである。(証明は補足にゆずる)

問題 (3.2.3)′, (3.2.4)′, あるいは問題 (3.2.6), (3.2.7) をこの補題に帰着せしめ，定理 3.3 を使うと，次の定理が成立する。

定理 3.4 問題 (3.2.6), (3.2.7) から得られる近似解は，任意の閉区間に属す t に関して一様に (3.2.1) の解へ収束する。(証明は補足にゆずる)

問題 (3.2.3)′, (3.2.4)′ は $K=I$ ととれる場合であるから，その収束性は定理 3.4 に含まれている。

3.4 例 題

$$u_t=u_{xx} \qquad |x|<1,\ t>0$$

$$u(x,o)=\cos\frac{\pi}{2}x \qquad |x|\leq 1$$

$$u(-1,t)=u(1,t)=0$$

なる問題を § 3.2 の修正 Galerkin 法を使って，当研究所 Datatron 205 電子計算機で解いてみた。

試験関数としては $\varphi_i(x)=(x^2-1)x^{i-1}$ $(i=1,2,\cdots)$ を選んだ。$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ は対称であるから，(3.2.3)′ を (3.2.4)′ の初期条件のもとに解くことになる。すなわち，それらはそれぞれ，

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\lambda-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi_i,\ \varphi_j\right\}\frac{d\psi_i(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2},\varphi_j\right)\psi_i(t) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\lambda-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi_i,\ \varphi_j\right\}\psi_i(0)=\left\{\left(\lambda-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\frac{\pi}{2}x,\varphi_j\right\} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{3.4.2}$$

となる。$\lambda=10^{10}$，t のきざみ $\Delta t=0.01$ とし，$n=3,5,8$ の場合について Runge-Kutta によって求めた結果を下表に示す。

Datatron 205 による計算結果

	x \ t	0	0.1	0.25	0.5	
真の値	−0.9	0.156434	0.122229	0.0844185	0.0455558	
	0	1.0	0.781344	0.539641	0.291213	
	0.9	0.156434	0.122229	0.0844186	0.0455558	

	x \ t	0	0.1	0.25	0.5	t =0.5 までに要した時間
n =3	−0.9	0.155554	0.121771	0.0841186	0.045398	27 分
	0	0.999416	0.780639	0.539134	0.290936	
	0.9	0.155554	0.121771	0.0841186	0.0453938	

	x \ t	0	0.1	0.25	0.5	t =0.5 までに要した時間
n =5	−0.9	0.156404	0.122231	0.0844201	0.0455565	45 分
	0	0.999978	0.781335	0.539636	0.291210	
	0.9	0.156425	0.122231	0.0844200	0.0455565	

	x \ t	0	0.1	0.25	0.5	
n =8	−0.9	0.160476	2.652933	50371.	計算中止	
	0	0.998932	0.781338	0.539641		
	0.9	0.155494	−2.408473	−50370.		

$t=0$ のときの値は $-\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=\left\{\lambda+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right\}\cos\dfrac{\pi}{2}x$ を $u(-1)=u(1)=0$ なる境界条件のもとに，Galerkin 法で解いた近似解になっているわけである。$n=5$ のときは，四桁程度正確である

が，$n=8$ のときは初期値でもうすでに二桁程度しか求まっていない。消去法，Runge-Kutta 法における数値計算上の誤差の集積のためであり，注意を要する。

§ 4. 結　　言

楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題および放物型偏微分方程式の，初期値境界値問題の Galerkin 法による近似解の収束性を論じたわけだが，その収束性は導入されたノルムの意味での収束性であり，普通の意味の各点における収束あるいは一様収束ではないことに注意しなくてはならない。導入されたノルムでの収束から普通の意味での収束，あるいは一様収束を導く問題は別の問題として考察されなくてはならない。

微分方程式の Galerkin 方による近似解法上の問題としては，収束性のほかに

1. 誤差の評価
2. 試験関数列の選択

等の問題がある。そして 2. は i) 収束率の観点からおよび ii) 計算上の観点からの二つの問題に分かれる。これらの問題に対してはほとんど文献を見ないが，1. に関しては，常微分方程式の特殊なタイプに対しての V. I. Krylov 流の誤差評価がいくつか報告されている[1),2),7)]。また 2. の ii) は数値計算上の誤差の観点から重要である。§ 3.4 の例題からわかるように，特に初期値を求める連立一次方程式の係数行列が悪条件にならないようなものが望ましい。

補　　足

定理 2.3 の証明

(2.2.4) によって

$$(Su_n,\ \varphi_j)_m=(f,\ \varphi_j)\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{A1}$$

が成立する。これは S の正値性 (2.1.10) と $\{\varphi_j\}$ の一次独立性とによって，§ 2.2 の例で示したように，任意の n に対して一意的に解ける。ところで $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $H_0{}^m$ で完全であるから，弱方程式 (2.1.5) の解 u_0 は，

$$(Su_0,\ \varphi_j)_m=(f,\ \varphi_j)\qquad j=1,2,\cdots\cdots \tag{A2}$$

と特徴づけられる。いま $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を Schmidt の直交化法によって $H_0{}^m$ における正規直交系 $\{\varphi_j'\}_{j=1}^{\infty}$ に変換すると，その作り方から，(A1)，(A2) はそれぞれ

$$(Su_n,\ \varphi_j')_m=(f,\ \varphi_j')\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{A1$'$}$$

$$(Su_0,\varphi_j')_m=(f,\ \varphi_j')\qquad j=1,2,\cdots \tag{A2$'$}$$

と同等である。よって

$$(S(u_0-u_n),\ \varphi_j')_m=0\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{A3}$$

u_n は $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{n}$ の一次結合であるから

$$(S(u_0-u_n),\ u_n)_m=0 \tag{A4}$$

したがって，$\forall u\in H_0{}^m$ に対して，

$$(S(u_0-u_n),\ u)_m\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{A5}$$

を示せば，(A4) と合わせて

$$(S(u_0-u_n),\ u_0-u_n)_m\to 0$$

ところで，(2.1.10) によって

$$\delta||u_0-u_n||_m\leqq(S(u_0-u_n),\ u_0-u_n)$$

であるから，$||u_0-u_n||_m\to 0\quad(n\to\infty)$ を得る。

もちろん $||u_0-u_n||_m\geqq||u_0-u_n||\to 0\quad(n\to\infty)$ である。

次に (A 5) を示す。$\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $H_0{}^m$ における完全正規直交系であるから，

$$u=\sum_{j=1}^{\infty}(u,\ \varphi_j')_m\varphi_j'$$

と展開できる。(A 3) によって，

$$(S(u_0-u_n),\ u)_m=\left(S(u_0-u_n),\ \sum_{j=n+1}^{\infty}(u,\ \varphi_j')_m\varphi'_j\right)_m$$

Schwartz の不等式によって

$$|(S(u_0-u_n),\ u)_m|\leqq||S(u_0-u_n)||_m\left|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}(u,\varphi_j')_m\varphi_j'\right|\right|_m$$

$$\leqq(||Su_0||_m+||Su_n||_m)\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|(u,\varphi_j')_m|^2\right)^{1/2} \tag{A6}$$

ところで $\{Su_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。なんとなれば，

$$\delta||u_n||_m{}^2\leqq(Su_n,u_n)_m=(f,\ u_n)\leqq||f||\ ||u_n||\leqq||f||\ ||n_n||_m$$

より

$$||u_n||_m\leq\delta^{-1}||f||$$

(2.1.13) より

$$||Su_n||_m\leq\gamma\delta^{-1}||f||$$

そして Bessel の不等式より，

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|(u,\varphi_j')_m|^2\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

であるから，(A5) が示され，よって定理の証明を完了する。

定理 2. 4 の証明

$C_0^\infty\ni\varphi$ なるとき，$A\varphi\in L^2$ であるから，仮定によって，$\left|\left|A\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_iA\varphi_i\right|\right|<\varepsilon$ なる $a_1, a_2,\cdots,a_n$

が存在する。

$$|(Au,\ u)|\leqq\|u\|\,\|Au\|$$

より

$$\sum_{|\alpha|=m}\left\|D^{\alpha}\left(\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right)\right\|^2\leqq\varepsilon\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|$$

(2.3.1) によって，$C=\sum_{j=0}^{m}e^{jm}$ とおけば，

$$\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|_m^2\leqq\varepsilon C\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|\leqq\varepsilon C\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|_m$$

ゆえに，

$$\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|_m\leqq\varepsilon C$$

また $H_0^m\ni\forall u$ に対しては $\|u-\varphi\|_m<\varepsilon$，なる $\varphi\in C_0^\infty$ が存在するから，証明を完了する。

定理 2.7 の証明

定理 2.3 における近似解 u_n を $u_n=(KT)_nf$ とおき，$\{\varphi_j'\}_{j=1}^n$ で張られる部分空間への射影を P_n とおくと，(A6) により，

$$\delta\|(KT-(KT)_n)f\|_m^2\leqq(\|Su_0\|_m+\|Su_n\|_m)\|(KT-P_nKT)f\|_m$$

また

$$\|Su_0\|\leqq\gamma\delta^{-1}\|f\|$$

であるから，

$$\|(KT-(KT)_n)f\|_m^2\leqq2\gamma\delta^{-2}\|f\|\,\|(KT-P_nKT)f\|_m$$

定理 2.5 により，$\|KT-P_nKT\|_m\to0\quad(n\to\infty)$ であるから，

$$\|(KT-(KT)_n)f\|_m^2\leqq2\gamma\delta^{-2}\varepsilon\|f\|\,\|f\|_m\leqq2\gamma\delta^{-2}\varepsilon\|f\|_m{}^2$$

ゆえに，

$$\|KT-(KL)_n\|_m\to0\qquad(n\to\infty)$$

そして

$$\|(KT)_nf\|_m\leqq\delta^{-1}\|f\|$$

であるから $(KT)_n$ も H_0^m における完全連続作用素である。そこで，(2.2.5) が

$$u_n-(KT)_nu_n=(KT)_nf$$

と同等なら，定理 2.6 より証明を完了する。いま $(KT)_n$ が行列によって，どのように表現されるかを考えてみる。

$$\begin{pmatrix} (S\varphi_1,\varphi_1)_m\cdots(S\varphi_n,\varphi_1)_m \\ (S\varphi_1,\varphi_2)_m\cdots(S\varphi_n,\varphi_2)_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (S\varphi_1,\varphi_n)_m\cdots(S\varphi_n,\varphi_n)_m \end{pmatrix}\equiv[S],\quad \begin{pmatrix} (f,\varphi_1) \\ (f_1,\varphi_2) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}\equiv[f_n],\quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}\equiv[\varphi_n],\quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\equiv[a_n]$$

とおくと，(A 1) より

$$[a_n]=[S]^{-1}[f_n]$$

ゆえに，

$$(KT)_nf=[a_n]^T[\varphi_n]=[f_n]^T([S]^T)^{-1}[\varphi_n]\quad (T \text{ は転置を表わす}) \tag{A7}$$

一方 (2.2.4) より，

$$((L+\lambda I)u_n,\varphi_j)-\lambda(u_n,\varphi_j)=(f,\varphi_j)\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{A8}$$

λ を十分大きくすれば，$L+\lambda I$ は定理 2.3 の仮定を満足するから，$((L+\lambda I)u_n,\varphi_j)=(Su_n,\varphi_j)_m$ とかける。よって，(A8) は

$$[S][a_n]-\lambda[(u_n)_n]=[f_n]$$

とかける。$[S]^{-1}$ を両辺に左からかけて，

$$[a_n]-\lambda[S]^{-1}[(u_n)_n]=[S]^{-1}[f_n]$$

ところで　$u_n=[a_n]^T[\varphi_n]$　であるから，

$$u_n-\lambda[(u_n)_n]^T([S]^T)^{-1}[\varphi_n]=[f_n]^T([S]^T)^{-1}[\varphi_n]$$

したがって，(A7) より

$$u_n-\lambda(KT)_nu_n=(KT)_nf$$

であるから，証明を完了する。

補題 3. 1 の証明

(3.3.2)，(3.3.3) の解 $\Psi_n(t)$ からつくられる近似解を $u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\varphi_i$ とおき，$\{\varphi_i\}$ を正規直交化したものを $\{\varphi_i'\}$ として，この $\{\varphi_i'\}$ に関して (3.3.2) と (3.3.3) を作り，それより得られる近似解を $u_n'(t)$ とおく。$u_n'(t)$ は $u_n(t)$ に一致することを示そう。$u_n(o)=u_n'(0)$ であることは定理 2.3 の証明において述べた。(3.3.2) より

$$\left(\frac{d}{dt}u_n(t),\ \varphi_j\right)=-(Lu_n(t),\ \varphi_j)\qquad j=1,2,\cdots,n$$

$\{\varphi_j'\}_{j=1}^n$ は $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ の一次結合だから，上式より

$$\left(\frac{d}{dt}u_n(t),\ \varphi_j'\right)=-(Lu_n(t),\ \varphi_j')\qquad j=1,2,\cdots,n$$

いま $u_n(t)$ を $\{\varphi_j'\}_{j=1}^n$ の一次結合で書き直したものを，$u_n''(t)$ とおくと，

$$\left(\frac{d}{dt}u_n''(t),\ \varphi_j'\right)=-(Lu_n''(t),\ \varphi_j')\qquad j=1,2,\cdots,n$$

となる。 $u_n(0)=u_n'(0)$ であるから，線型常微分方程式の初期値への一意的依存性によって $u_n''(t)=u_n'(t)$ ゆえに $u_n(t)=u_n'(t)$。

よって $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ は，初めから完全正規直交系であると仮定してよい。そうすると，(3.3.2), (3.3.3) の解は § 3.2 の記号を使うと，$\Phi=I$（単位行列）であるから，

$$\Psi(t)=\exp-t\tilde{\Phi}_n\Psi_n(0)$$

ここに

$$\Psi_n(0)=\begin{pmatrix}(g,\varphi_1)\\ \vdots \\ (g,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は正規直交系であるから，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i$ とベクトル $(a_1,\cdots,a_n)$ を同一視しても，不つごうは起こらない。したがって $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ で張られる n 次元部分空間 $H^{(n)}$ への射影を P_n とおくと $\Psi_n(0)=P_ng$ になる。

$$H\ni u \text{ に対し，}\quad L_nu\equiv\tilde{\Phi}_nP_nu$$

で L_n を定義すると，

$$L_nu=\begin{pmatrix}(LP_nu,\varphi_1)\\ \vdots \\ (LP_nu,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

よって $L_nu=P_nLP_nu$, そして $H^{(n)}\ni u$ に対しては

$$L_nu=\tilde{\Phi}_nu$$

で，L_nu はまた $H^{(n)}$ に属するから，$u\in H^{(n)}$ のとき

$$\exp-tL_nu=\exp-t\tilde{\Phi}_nu$$

$H\ni u$ を任意に固定して，$[0,T]\ni t$ に関して一様に，

$$||\exp(-tL_n)u-\exp(-tL)u||\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{A9}$$

を示す。

$$\begin{aligned}||L_nu-Lu||&=||P_nLP_nu-P_nLu||+||P_nLu-Lu||\\ &\leqq C||P_nu-u||+||P_nL-Lu||\to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$$1\leq l\leq k \quad \text{について} \quad ||L_n^lu-L^lu||\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

と仮定すると，$||L_nu||\leqq||LP_nu||\leqq C||P_nu||\leqq C||u||$ に注意して，

$$\begin{aligned}||L_n^{k+1}u-L^{k+1}u||&\leqq||L_n(L_n^ku-L^ku)||+||L_nL^ku-LL^ku||\\ &\leqq C||L_n^ku-L^ku||+||(L_n-L)L^ku||\to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

よって任意の k について

$$||L_n^ku-L^ku||\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{A10}$$

$\forall\varepsilon>0$ に対して，l を十分大きくして，

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k!}T^kC^k<\frac{1}{3}\varepsilon/||u||$$

(A10) によって，n を十分大きくして，

$$\sum_{k=0}^{l}\left\|\frac{1}{k!}T^k(L_n{}^k-L^k)u\right\|<\frac{1}{3}\varepsilon$$

とできる。そうすると，

$$\begin{aligned}||(\exp-tL_n-\exp-tL)u||&\leqq\left\|\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}(-t)^k(L_n{}^k-L^k)u\right\|\\&+\left\|\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^kL_n{}^k\right\|||u||+\left\|\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^kL^k\right\|||u||\\&\leqq\sum_{k=0}^{l}\left\|\frac{1}{k!}T^k(L_n{}^k-L^k)u\right\|+2\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k!}T^kC^k||u||\\&<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=\varepsilon\end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}&||\exp(-tL_n)\Psi_n(0)-\exp(-tL)g||\leqq||\exp(-tL_n)\Psi_n(0)-\exp(-tL_n)g||\\&\quad+||\exp(-tL_n)g-\exp(-tL)g||\leqq||\exp-tL_n||\;||\Psi_n(0)-g||\\&\quad+||\exp(-tL_n)g-\exp(-tL)g||\\&\quad||\exp-tL_n||\leqq\exp TC\qquad t\in[0,T]\end{aligned}$$

であるから，$||\Psi_n(0)-g||\to0\quad(n\to\infty)$ と (A 9) によって，$[0,T]\ni t$ に関して一様に，

$$||\exp(-tL_n)\Psi_n(0)-\exp(-tL)g||\to0$$

が証明できた。

定理 3. 4 の証明

(3, 2. 2) において，$(\lambda I+L)^{-1}=T$ とおくと，$L=\lambda I+L-\lambda I$ より $(\lambda I+L)^{-1}L=I-\lambda T$ を得る。よって (3. 2. 2) は，

$$\frac{du}{dt}=-\lambda(I-\lambda T)u,\qquad u(0)=g\tag{A11}$$

と表わされる。

ところで，$u,v\in H_K$ のとき，§ 3. 2 の仮定 (ii) によって

$$|(u,\ Kv)|\leqq||u||\;||Kv||\leqq||u||\cdot k^{-1/2}||v||_K\tag{A12}$$

よって Riesz の定理によって，

$$(u,\ Kv)=(T'u,\ v)_K$$

となる。$T'=T$ であることは $(\ ,\ )_K$ の定義より明らかであり，(A 12) より

$$||Tu||_K\leqq k^{-1/2}||u||,\qquad ||u||\leqq\gamma^{-1}k^{-1/2}||u||_K$$

より

$$||Tu||_K \leqq \gamma^{-1}k^{-1}||u||_K$$

となって T の H_K における有界性を得る。

したがって，(3.2.6) 式は

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i, \varphi_j)_K \frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\lambda((I-\lambda T)\varphi_i, \varphi_j)_K \psi_i(t), \qquad j=1,2,\cdots,n$$

となり，(3.2.7) 式は

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i, \varphi_j)_K \psi_i(0) = (g, \varphi_j)_K \qquad j=1,2,\cdots,n$$

となる。よって (3.2.6), (3.2.7) は (A 11) を H_K において，普通の意味の Galerkin 法で解いたことと同値である。したがって $g \in H_k$ ならば解は存在する。その近似解を $T_{\lambda n}(t)\Psi_n(0)$ とし，(A 11) の解を $T_\lambda(t)g$ とすると，

$$||T(t)g - T_{\lambda n}(t)\Psi_n(0)|| \leqq ||T(t)g - T_\lambda(t)g|| + ||T_\lambda(t)g - T_\lambda n(t)\Psi_n(0)||$$

第一項は定理 3.3 より 0 にゆき，第二項は，

$$||T_\lambda(t)g - T_{\lambda n}(t)\Psi_n(0)|| \leqq \gamma^{-1}k^{-1/2}||T_\lambda(t)g - T_{\lambda n}(t)\Psi_n(0)||_K$$

であるから，補題 3.1 より 0 にゆく。よって証明を完了する。

文　　献

1) Bertram, G.; Verschärfung einer Fehlerabschätzung zum Ritz-Galerkinschen Verfahren von Kryloff für Randwertaubgaben, Num. Math. 1, (1959).
2) Börsch-Supan, W.; Bemerkungen zur Fehlerabschätzung beim Ritz-Galerkin-Verfahren nach Krylow, Num. Math. 2 (1960).
3) Gaisarian, S.S.; A Proob of Galerkin's Method for Equations with a Retarding Argument, PMM Vol. 25, No. 3 (1961).
4) 林　毅・村　外志夫; 変分法, (昭和 33) コロナ社.
5) Kantorovich, L.V. & Krylov, V.I.; Approximate Methods of Higher Analysis, (1958).
6) 川井忠彦・多田保夫; 周辺固定平板の曲げ，振動，座屈問題に対する Galerkin 法の応用について，航技研所内研究発表会資料，昭和 39 年 9 月.
7) Lax, P.D. & Milgram, A.N.; Parabolic Equations, Ann. of Math. 33 (1954)
8) Lehmann, N.J.; Eine Fehlerabschätzung zum Ritzschen Verfahren für inhomogene Randwertaufgaben, Num. Math., 2 (1960).
9) Leipholz, H.; Uber die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwert problemen, ZAMP, Vol. 14 (1963).
10) Мартынюк, А.Е.; О некоторои обобщении вариационного метода, ДАН СССР, т 117, No. 3, (1957).
11) Мартынюк, А.Е.; Некоторые новые приложения методов типа Галёркина, Матем сб., т. 49 (91), No. 1, (1959).
12) Medvedev, V.A.; On the Convergence of the Bubnov-Galerkin Method, PMM Vol. 27, No. 6 (1963).

13) Michlin, S. G.; Variationsmethoden der Mathematischen Physik, Akademie-Verlag Berlin, (1962).
14) 南雲道夫; 近代的偏微分方程式論, (昭和 32) 共立出版.
15) Petryshyn, W. V.; Direct and Iterative Methods for the Solution of Linear Operator Equations in Hilbert Space, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 105, No. 1 (1962).
16) Pol'skiĭ, N. I.; Projective Methods in Applied Mathematics, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962).
17) Shachnev, V.A.; Variational Solution of the Axisymmetric Problem of Thermoelasticity, PMM Vol. 26, No. 6 (1962).
18) Stanisic, M.M. & Mckinley, R.M.; On the Vibration of Trapezoidal Plate Clamped along Each Edge with Damping Considered, ZAMM 41 (1961).
19) 吉田耕作; 位相解析 I. II, 岩波現代応用数学講座, (昭和 32).

TR-66	変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味（片持平板翼の場合） Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates)	1964年6月	川井忠彦，塙　武敏 越出慎一，戸川隼人 落合　薫
TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964年4月	井上建二，野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論（I） Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I)	1964年6月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究（I） An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964年7月	鳥崎忠雄，能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画，構造および特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory	1965年1月	松浦陽恵，樋口一雄 池谷光栄，堀川勇壮 村上　力，百名盛之 三好範子，岡部正典
TR-71	塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation	1964年7月	中西不二夫，佐藤和郎
TR-71T	Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity	September 1964	Fujio NAKANISHI Yasuo SATO
TR-72	補助翼バズに関する一実験 Some Experiments on Control-Surface Buzz	1965年1月	中村泰治，田辺義一
TR-72T	Some Experiments on Control-Surface Buzz	November 1964	Yasuharu NAKAMURA Yoshikazu TANABE
TR-73	軸対称澱み点付近の溶融層の安定性 Stability of the Melted Layer near the Axi-symmetric Stagnation Point	1964年11月	相原康彦
TR-74	遷音速パネルフラッタの研究 The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter	1964年11月	石井孝雄，柳沢三憲
TR-75	統計流体力学の初期値問題について On the Initial-Value Problem in Statistical Hydromechanics	1964年12月	細川　巌
TR-76	高速軸流圧縮機の研究（IV） An Investigation of High Speed Axial Flow Compreser (IV)	1965年1月	大山耕一，松木正勝 西脇英夫，岩部柱相 片山泰治

航空宇宙技術研究所報告77号

昭和40年1月　発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1,880
電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)

印刷所　笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53