

UDC 518.6

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-78

二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法

三 好 甫

1965 年 1 月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 既 刊 報 告

TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963 年 8 月	林 二 識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究 (Ⅲ) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (Ⅲ)	1963 年 9 月	松 木 正 勝, 宮 地 敏 雄 大 山 耕 一, 吉 田 晃 雄 西 脇 英 夫, 岩 部 柱 相
TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction	1963 年 9 月	樋 口 一 雄, 能 美 力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unstable System	1963 年 9 月	武 田 峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pebble-Bed Heater	1963 年 9 月	林 二 識
TR-53	円管流の非定常熱伝達 (第Ⅰ報) 一壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963 年 10 月	林 二 識
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963 年 10 月	三 好 甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor Which Has a Boss	1963 年 11 月	佐 藤 和 郎, 永 井 文 雄
TR-56	亜音速および遷音速における二次元非定常空気力の測定 (第Ⅰ報) Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I)	1963 年 11 月	中 村 泰 治, 田 辺 義 一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度 500 フィートないし 10,000 フィートにおける上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of Gust Velocities from 500 to 10,000 Feet Altitude	1964 年 1 月	竹 内 和 之, 小 野 幸 一 山 根 皓 三 郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Data Reduction System and Its Performance	1964 年 1 月	田 畑 浄 治, 中 正 夫 山 本 芳 樹, 三 浦 雅 男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964 年 1 月	塙 武 敏, 越 出 慎 一 戸 川 隼 人, 川 井 忠 彦
TR-61	後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964 年 2 月	中 井 暎 一, 小 原 瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964 年 2 月	尾 形 吉 和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964 年 3 月	小 橋 安 次 郎, 遠 藤 浩 北 村 清 美
TR-64	航空力学における磁歪計器の応用 Some Developements of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964 年 3 月	幸 尾 治 朗
TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of Stability Characteristics of Unsteady Laminar Boundary Layer	1964 年 7 月	小 橋 安 次 郎, 恩 地 瑛

# 二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法\*

三 好 甫\*\*

## Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems

By Hajime MIYOSHI

The numerical solution of two-dimensional quasi-linear hyperbolic systems is studied, by the characteristic method. A general method for constructing the approximate equations for the numerical solution and a proof for the local convergence of its solution are presented here. Some numerical examples are given.

### 1. 緒 言

二次元準線型双曲系の補間法に基づく数値解法は大別すれば二つに分類できる。一つは矩形格子を導入し、その上で微分方程式をなんらかの方法で差分方程式により近似する方法であり、他の一つは本報告で取り扱うように原方程式を特性方程式系に変換し、これを特性曲線上の常微分方程式に帰着させ、これに対する数値積分を考える方法である\*\*\*。

前者の方法に関しては、最近、種々の近似差分方程式を構成し、得られる近似解の原方程式の解への収束を証明する研究が V. Thomée, H.B. Keller, R. Albrecht-W. Urich 等によりなされている。後者に関してはこれまで多くの工学家が、たとえば、棒の振動の方程式<sup>11)</sup>、平面塑性問題の方程式<sup>12)</sup>、流体力学の方程式<sup>13), 14), 15)</sup>等の近似解を求めるために数多く使用してきたにもかかわらず、近似方程式の統一的構成法、近似方程式の解の原方程式の解への収束に関しては、特殊な形の方程式に対する場合を除いてまったく研究されていない\*\*\*\*。

\* 昭和 39 年 12 月 21 日

\*\* 計測部

\*\*\* 二次元準線型双曲線方程式系の補間法に基づく数値解法は二つに分類できるが、両者の区別はそれほどはっきりしたものではなく、まず、方程式とは独立に格子を導入し（矩形格子でなくてもよい）、その格子点から特性曲線を下し、その上で常微分方程式の数値解法を考える方法が<sup>8), 9)</sup>行なわれている。これらは両者の混合ともいうべきである。そこで本報告において特性曲線法といった場合、格子点はすべて解に依存して定まるような場合に限定することにする。このようにして考えると R. Ansorge の結果<sup>6)</sup>すらも特性曲線法とはいいい難くなる。

\*\*\*\* 方程式の特性曲線の数が 2 であるような場合については L. H. Thomas<sup>4)</sup> が Adams の方法を適用することにより高精度近似式を得た。J. Stetter<sup>5)</sup> はこの方法をさらに一般化して種々の型の近似方程式を得ており、その近似解の収束の証明を行なっている。

特性曲線の数が 2 以上の場合には R. Ansorge<sup>6)</sup> が方程式を半線型なものに限ることにより Adams の方法の適用が可能であることを示し、同時に近似解の原方程式の解への収束も示した。

そこで本報告においては、近似方程式を統一的に導くための式を示し、それにより一般の準線型系に対する近似方程式を構成し、同時に特殊な方程式に対しては成功した高精度近似式の構成法は一般の場合にはいずれも適用困難であることを指摘する。さらに、ここで構成された近似解の原方程式の解への収束を証明し、数値例を示すことにする。

## 2. 近似方程式系の構成

### 2.1 標準系への変換

二次元準線型双曲系の一般形は

$$\sum_{i=1}^n (A^{ij} u_x^i + B^{ij} u_t^i) = D^j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

と表わされ、この方程式系に対する初期条件は、 $(x, t)$ -空間において、その接線方向がいたるところ特性方向でないような初期曲線  $\Gamma_0$  の上で

$$u^i(x, t) = w^{0i}(x, t) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (x, t) \in \Gamma_0 \quad (2.2)$$

と表わされる。

ここで  $A^{ij}$ ,  $B^{ij}$ ,  $D^j$  はそれぞれ  $x, t, u^1, \dots, u^n$  の関数である。(2.1), (2.2) は  $(A^{ij})=A$ ,  $(B^{ij})=B$ ,  $(D^j)=D$ ,  $(u^i)=U(w^{0i})=W_0$  とおくとそれぞれ

$$AU_x + BU_t = D \quad (2.1)'$$

$$U(x, t) = W^0(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma_0 \quad (2.2)'$$

と表わされる。ここで  $A$ ,  $B$  はそれぞれ  $n \times n$  の行列,  $D$ ,  $U$ ,  $W_0$  は  $n$  次の列ベクトルである。

方程式 (2.1) は考えている領域で双曲型であるから  $|A - CB| = 0$  はこの領域で  $n$  個の相異なる実根をもち、それを  $c^1, \dots, c^n$  とする。行列  $C$  を  $c^1, \dots, c^n$  を対角元とする  $n \times n$  の対角行列とすると  $TA = CTB$  により行列  $T$  が定まり  $TB = A^* = (a^{ij})$ ,  $TD = D^* = (d^j)$  とすれば (2.1) は

$$\sum_{i=1}^n a^{ij} (u_t^i + c^i u_x^i) = d^j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

と変換される。 $A$ ,  $B$ ,  $D$  がそれぞれ  $x, t, u^1, \dots, u^n$  の関数であることから  $a^{ij}$ ,  $c^i$ ,  $d^j$  もまた  $x, t, u^1, \dots, u^n$  の関数である。

方程式 (2.1) の  $n$  個の特性曲線群は微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = c^j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

により定められ、この特性曲線に沿って (2.3) は、

$$\sum_{i=1}^n a^{ij} du^i = d^j dt \quad (2.5)$$

となる。

次に考えている領域の一点  $P$  から Fig. 2.1 のごとく  $P$  よりも初期曲線  $\Gamma_0$  の側にあり、その接

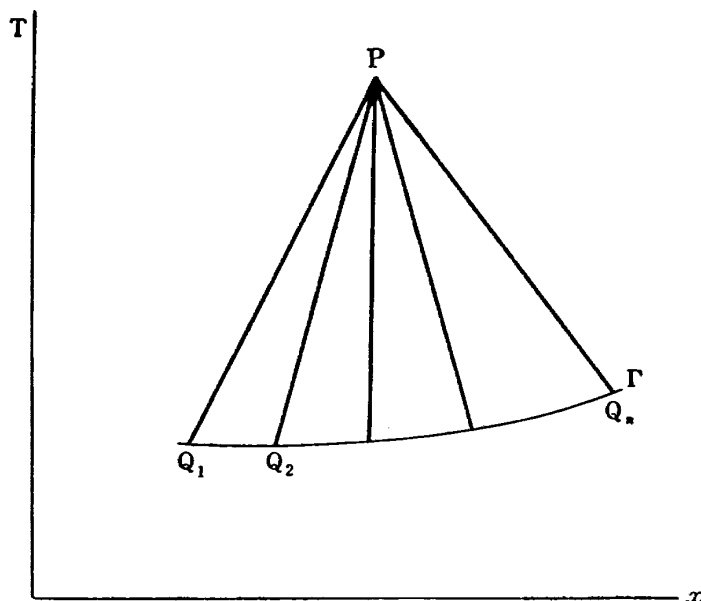


図 2.1

線方向がいたるところ特性方向でないような曲線  $\Gamma$  に向って  $P$  より  $n$  個の特性曲線を下し、それと  $\Gamma$  との交わりを  $Q_1, \dots, Q_n$  とする。ここで (2.4), (2.5) をそれぞれ  $\widehat{PQ_j}$  に沿って積分すると (2.4) は

$$x_P = x_Q + \int_{t_{Q_j}}^{t_P} c^j dt \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.4)'$$

(2.5) は部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a^{ij}(P, U(P)) u^i(P) &= \sum_{j=1}^n a_j^j(Q_j U(Q_j)) u^i(Q_j) \\ &+ \int_{t_{Q_j}}^{t_P} d^j dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_{Q_j}}^{t_P} u^i da^{ij} \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)'$$

となる。

方程式 (2.1) に対する近似方程式は (2.4) または (2.4)' および (2.5) または (2.5)' に対する種々の数値積分公式を適用することにより得られる。

初期条件 (2.2) に対しては  $\Gamma_0$  上に適当な数の分点を取り (等間かくである必要はない。), それを  $(x_m^0, t_m^0)$  とすると

$$u^i(x_m^0, t_m^0) = w^{0i}(x_m^0, t_m^0) \quad i=1, 2, \dots, n \quad m=1, 2, \dots, M^0 \quad (2.6)$$

を近似初期条件として用いる。

## 2.2 高精度近似方程式の構成に関する注意

特性曲線法は (2.4), (2.5), (2.4)', (2.5)' から明らかなように、偏微分方程式 (2.1) を (2.4) または (2.4)' により決定される (これがまた常微分方程式である。) 特性曲線の上での常

微分方程式に帰着させるのであるから、すべての常微分方程式の数値積分法が適用できるように思える。そしてこのことのゆえに種々の高精度近似式の可能性があり、これまで<sup>4),5),6)</sup>においても特殊な方程式に対して、種々の高精度な常微分方程式の数値解法が適用されてきた。そこで本節においては、常微分方程式の数値解法に用いられる種々の数値積分法が、一般の準線型系に適用できるかどうかを検討してみることにする。

H. Moor<sup>7)</sup> は方程式  $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$  の Goursat 問題に Runge-Kutta 型の数値解法が適用できることを示した。彼の方法は方程式が 2 階の標準系であることを利用しており、本報告におけるように解に依存する  $n$  個の特性曲線をもつ方程式には適用できない。Runge-Kutta 型の近似方程式は方程式の特性曲線が 2 個の場合には、一般化された Riemann invariants<sup>1)</sup> を用いることにより適用できる。この場合、通常の Runge-Kutta 法とは異なり計算過程に反復操作が必要となる。特性曲線の数  $n$  が 2 より大きい一般の場合にはこの方法は適用できない。

W.E. Milne は常微分方程式の数値解法に predictor-corrector 法を適用したが、最近になって V. Thomée この方法を双曲型方程式系の矩形格子を用いた差分法による数値解法に適用し、J. Douglas は W.E. Milne と異なった観点からこれを放物型方程式に適用した。この方法を一般の準線型系の特性曲線法に適用する場合、predictor により計算される特性曲線網と corrector により計算される特性曲線網が異なるために不可能である。この方法が適用可能になるためには、したがって方程式が半線型系であることが必要である。

W.H. Thomas<sup>4)</sup> は特性曲線の数  $n$  が 2 の場合に Adams の方法を用いて高精度な近似方程式が multi-level を用いれば構成できることを示した。(彼は近似解の原方程式の解への収束については証明を与えていない。) J. Stetter<sup>5)</sup> はこの方法を発展させ、方程式  $\sum_{i=1}^{K'} a_i^k \partial_{x_i} u^k = 0$   $i=1 \cdots K'$   $\sum_{i=1}^{K'} a_i^k \partial_{y_i} u^k = 0$   $i=K'+1 \cdots K$  に対する任意の精度の近似方程式を構成し、その収束を証明した。彼はこの方法がさらに、一般的な  $n$  個の特性曲線をもつ方程式に対しても適用できるかもしれないといっているが、彼の方法は特性曲線の数  $n$  が 2 で解に依存しないことにその根拠をもっており、彼の方法を一般の準線型に適用することはできない [特性曲線の数  $n$  が 2 から 3 以上にふえる場合に生ずる困難については文献 1), 2) をみよ]。

R. Ansorge<sup>6)</sup> は  $n$  個の特性曲線をもつ半線型系にたいして、J. Stetter とは全く異なる方法で特性曲線網を構成することにより、Adams の方法を適用し、高精度近似式を得た。彼の方法は方程式の半線型性を利用して特性曲線網を構成することに成功の根拠をもっており、この方法も一般の準線型系には適用できない。特性曲線法を本報告におけるように狭義に考えた場合、Adams の方法により高精度近似式を構成することは困難である。

以上の検討を通じてこれまで特殊な方程式に対しては、成功してきた種々の高精度近似式の構成法が失敗した理由は、第 1 に特性曲線の数  $n$  であること、第 2 に特性曲線網が解に依存すること

である。これらの理由は全て原理的なものであるために、一般の準線型系の方程式に対する近似式の構成は困難事である。

さらに、高精度近似式に関する実際計算上の困難が存在する。すなわち、特殊な方程式に対して成功した高精度近似式は、Runge-Kutta 型のものを除いては特性曲線の数が 2 つの場合でも一般に multi-level である。multi-level の近似式を準線型系の特性曲線に適用すれば、近似式は複雑となり、出発値の設定のための [このためには文献 6) のごとく Taylor 展開を行なうか、self-start な近似式を用いるかせねばならない。] 計算量は増大する。このことから特性曲線の数 2 の場合でも、実用的見地からは高精度近似式としては Runge-Kutta 型のものか高々 3-level formula の近似式の構成が望ましい。

### 2.3 近似方程式

2.2 で述べた理由から、ここでは一般の準線型系に対する近似度が高々 2 の近似式を構成することにする。

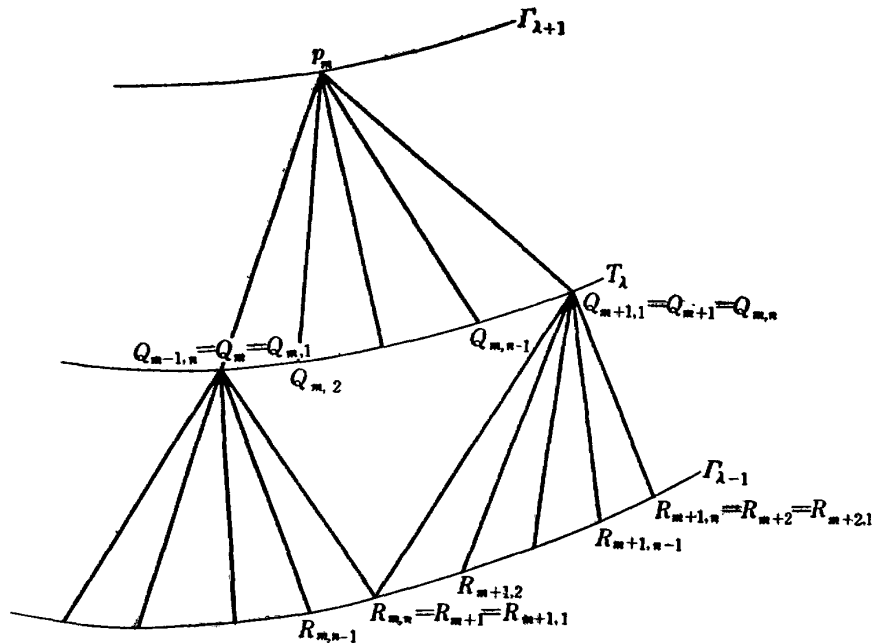


図 2.2

近似方程式に対する特性曲線網は図 2.2 のように構成する。近似初期条件 (2.2) とそれに対する真の特性曲線網の各格子点における方程式の真の解に対して列ベクトル

$$\begin{pmatrix} t_{m,j}^1 \\ x_{m,j}^1 \\ w_{m,j}^{1,1} \\ \vdots \\ w_{m,j}^{n,1} \end{pmatrix} = W_{m,j}^1$$

と導入する。また、これに関して記号を

$$\begin{aligned}
 t_{pm} - t_{Qmj} &= t_{m1}^{i+1} - t_{mj}^i = h_{imj}^i & x_{pm} - x_{Qmj} &= x_{m1}^{i+1} - x_{mj}^i = h_{xmj}^i \\
 m &= 1, 2, \dots, M^{i+1}; j = 1, 2, \dots, n; \lambda = 1, 2, \dots \\
 t_{Qmj} - t_{Qm1} &= t_{m1}^i - t_{m1}^i = l_{imj}^i & x_{Qmj} - x_{Qm1} &= x_{imj}^i - x_{m1}^i = l_{xmj}^i \\
 m &= 1, 2, \dots, M^i - 1; j = 2, 3, \dots, n; \lambda = 1, 2, \dots \\
 w^i(Q_{mj}) &= w_{mj}^i & i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, M^i - 1; \lambda = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

とする。さらに、近似初期条件 (2.2) とそれに対する近似方程式の解の作る近似方程式の解の作る近似特性曲線網の各格子点の上の近似解に対して列ベクトルを

$$\begin{pmatrix} \dot{t}_{mj}^i \\ \dot{x}_{mj}^i \\ w_{mj}^{1i} \\ \vdots \\ w_{mj}^{ni} \end{pmatrix} = U_{mj}^i$$

と導入する。そして (2.7) に対応して

$$\begin{aligned}
 \dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{mj}^i &= \dot{h}_{imj}^i & \dot{x}_{m1}^{i+1} - \dot{x}_{mj}^i &= \dot{h}_{xmj}^i \\
 m &= 1, 2, \dots, M^{i+1} & j &= 1, 2, \dots, n & \lambda &= 1, 2, \dots \\
 \dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^i &= \dot{l}_{imj}^i & \dot{x}_{mj}^i - \dot{x}_{m1}^i &= \dot{l}_{xmj}^i \\
 m &= 1, 2, \dots, M^i - 1; j &= 2, \dots, n; \lambda &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

と定義する。また、 $P_m Q_{mj}$  に対応する特性曲線を  $c^j$  というように表わす。ここに  $M^i, M^{i+1}$  等は  $\Gamma_i, \Gamma_{i+1}$  における分点の数である。

### 近似式 I

(2.4) より

$$\begin{aligned}
 x_{m1}^{i+1} &= x_{m1}^i + (t_{m1}^{i+1} - t_{m1}^i) c^1(W_{m1}^i) + 0(h_{imj}^{i2}) \\
 x_{m1}^{i+1} &= x_{m1}^i + (t_{m1}^{i+1} - t_{m1}^i) c^n(W_{m1}^i) + 0(h_{imn}^{i2})
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 x_{mj}^i &= x_{m1}^{i+1} + (t_{mj}^i - t_{m1}^{i+1}) c^j(W_{m1}^i) + 0(h_{imj}^i(l_{imj}^i + l_{xmj}^i)) \\
 x_{mj}^i &= x_{m1}^i + (t_{mj}^i - t_{m1}^i) c_m^i + 0(l_{imj}^i l_{imn}^i)
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで  $c_m^i = (x_{mn}^i - x_{m1}^i) / (t_{mn}^i - t_{m1}^i)$

$$\begin{aligned}
 w_{mj}^{i1} &= w_{m1}^{i1} + (w_{mn}^{i1} - w_{m1}^{i1})(x_{mj}^i - x_{m1}^i) / (x_{mn}^i - x_{m1}^i) \\
 &\quad + 0(l_{imj}^i l_{imn}^i + h_{imj}^i(l_{imj}^i + l_{xmj}^i) + l_{xmj}^{i2})
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.5) より

$$\sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) w_{m1}^{i+1} = \sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) w_{mj}^{i1} + h_{imj}^i d^j(W_{mj}^i) + 0(h_{imj}^{i2}) \quad (2.12)$$

(2.9) ~ (2.12) より近似方程式がそれぞれ



$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{m1}^{i+1} &= \dot{x}_{m1}^i + (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{m1}^i) c^1(U_{m1}^i) \\ \dot{x}_{m1}^{i+1} &= \dot{x}_{mn}^i + (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{mn}^i) c^n(U_{mn}^i) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{m1}^{i+1} \quad \dot{t}_{m1}^{i+1} \quad m=1, 2, \dots, M^{i+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{mj}^i &= \dot{x}_{m1}^{i+1} + (\dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^{i+1}) c^j(U_{m1}^i) \\ \dot{x}_{mj}^i &= \dot{x}_{m1}^i + (\dot{t}_{m1}^i) c_m^i \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ここで  $\dot{c}_m^i = (\dot{x}_{mn}^i - \dot{x}_{m1}^i) / (\dot{t}_{mn}^i - \dot{t}_{m1}^i)$  である。

$$\Rightarrow \dot{x}_{mj}^i, \dot{t}_{mj}^i \quad m=1, 2, \dots, M^i-1; j=2, 3, \dots, n-1$$

$$u_{m1}^{ij} = u_{m1}^{i1} + (u_{mn}^{i1} - u_{m1}^{i1})(\dot{x}_{mj}^i - \dot{x}_{m1}^i) / (\dot{x}_{mn}^i - \dot{x}_{m1}^i) \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow u_{mj}^{ij} \quad m=1, 2, \dots, M^i-1; i=1, 2, \dots, n; j=2, \dots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^n (U_{mj}^i) u_{m1}^{i1} = \sum_{i=1}^n a^{ij}(U_{mj}^i) u_{mj}^{ij} + h_{imj}^i d^j(U_{mj}^i) \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow u_{m1}^{i1} \quad m=1, 2, \dots, M^{i+1}; i=1, 2, \dots, n$$

と構成される。

## 近似式 II

(2.4)' より

$$\left. \begin{aligned} x_{m1}^{i+1} &= x_{m1}^i + \frac{1}{2} (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{m1}^i) \{c^1(W_{m1}^{i+1}) + c^1(W_{m1}^i)\} + 0(h_{im1}^{i8}) \\ x_{m1}^{i+1} &= x_{mn}^i + \frac{1}{2} (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{mn}^i) \{c^n(W_{m1}^{i+1}) + c^n(W_{mn}^i)\} + 0(h_{imn}^{i8}) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$x_{mj}^i = x_{m1}^{i+1} + \frac{1}{2} (\dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^{i+1}) \{c^j(W_{m1}^{i+1}) + c^j(W_{mj}^{i*})\} + 0(h_{imj}^{i8} + l_{imj}^i l_{imn}^i + l_{xmj}^{i2})$$

$$x_{mj}^i = x_{m1}^i + (\dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^i) c_m^i + 0(l_{imj}^i l_{imn}^i) \quad (2.18)$$

$$c_m^i = (x_{mn}^i - x_{m1}^i) / (\dot{t}_{mn}^i - \dot{t}_{m1}^i)$$

$$w_{mj}^{ij*} = w_{m1}^{i1} + (w_{mn}^{i1} - w_{m1}^{i1})(x_{mj}^i - x_{m1}^i) / (x_{mn}^i - x_{m1}^i) + 0(l_{imj}^i l_{imn}^i + l_{xmj}^{i2}) \quad (2.19)$$

(2.5)' より

$$\sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{m1}^{i+1}) w_{m1}^{i1} = \sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) w_{mj}^{ij} + \frac{1}{2} h_{imj}^i \{d^j(W_{m1}^{i+1}) + d^j(W_{mj}^i)\}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{a^{ij}(W_{m1}^{i+1}) - a^{ij}(W_{mj}^i)\} (w_{m1}^{i1} + w_{mj}^{ij}) + 0(h_{imj}^{i8}) \quad (2.20)$$

(2.17)~(2.20) より近似方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{m1}^{i+1} &= \dot{x}_{m1}^i + \frac{1}{2} (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{m1}^i) \{c^1(U_{m1}^{i+1}) + c^1(U_{m1}^i)\} \\ \dot{x}_{m1}^{i+1} &= \dot{x}_{mn}^i + \frac{1}{2} (\dot{t}_{m1}^{i+1} - \dot{t}_{mn}^i) \{c^n(U_{m1}^{i+1}) + c^n(U_{mn}^i)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{m1}^{i+1} \dot{t}_{m1}^{i+1} \quad m=1, 2, \dots, M^{i+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{mj}^i &= \dot{x}_{m1}^{i+1} + \frac{1}{2}(\dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^{i+1})\{c^j(U_{m1}^{i+1}) + c^j(U_{mj}^i)\} \\ \dot{x}_{mj}^i &= \dot{x}_{m1}^i + (\dot{t}_{mj}^i - \dot{t}_{m1}^i)c_m^i \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$c_m^i = (\dot{x}_{mn}^i - \dot{x}_{m1}^i) / (\dot{t}_{mn}^i - \dot{t}_{m1}^i)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{mj}^i \dot{t}_{mj}^i \quad m=1, 2, \dots, M^i-1; j=2, \dots, n-1$$

$$u_{mj}^{i+1} = u_{m1}^{i+1} + (u_{mn}^{i+1} - u_{m1}^{i+1})(\dot{x}_{mj}^i - \dot{x}_{m1}^i) / (\dot{x}_{mn}^i - \dot{x}_{m1}^i) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a(U_{m1}^{i+1})u_{m1}^{i+1} &= \sum_{i=1}^n a^{ij}(U_{mj}^i)u_{mj}^{i+1} + \frac{1}{2}h_{imj}^i\{d^j(U_{m1}^{i+1}) + d^j(U_{mj}^i)\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum\{a^{ij}(U_{m1}^{i+1}) - a^{ij}(U_{mj}^i)\}(u_{m1}^{i+1} + u_{mj}^i) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow u_{m1}^{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n; m=1, 2, \dots, M^{i+1}$$

と構成する。

### 近似式 III

近似式 II の (2.21), (2.22), (2.24) 式中の  $\{c^j(U_{m1}^{i+1}) + c^j(U_{mj}^i)\}/2$  を  $c^j((U_{m1}^{i+1} + U_{mj}^i)/2)$  で  $(d^j(U_{m1}^{i+1}) + d^j(U_{mj}^i))/2$  を  $d^j((U_{m1}^{i+1} + U_{mj}^i)/2)$  でおきかえた式を用いる。この場合、式の精度は近似式 II と同じである。

### 近似式の精度に関する注意

i) 近似式 I の (2.14) 式の第 1 式右辺の  $c^j(U_{m1}^i)$  は  $\sigma, \rho > 0$   $\sigma + \rho = 1$  として  $\sigma c^j(U_{m1}^i) + \rho c^j(U_{mn}^i)$  または  $c^j(\sigma U_{m1}^i + \rho U_{mn}^i)$  でおきかえてもよいし、また 1 度 (2.14), (2.15) を用いて  $U_{mj}^i$  を計算し、これを用いて (2.14), (2.15) を計算しなおしてもよい。あるいは、さらにこの過程を反復してもよい。このようにしても、式の打ち切り誤差の近似度は上がらないが、実質的精度は上がるはずである。

ii) 近似式 II および III において近似式の近似度は (2.18), (2.19) 式のために 1 だけ下がっている。この式の精度を他の式とそろえるためには (2.18) 式の第 2 式を

$$x_{mj}^i = x_{m1}^i + a(t_{mj}^i - t_{m1}^i)^2 + b(t_{mj}^i - t_{m1}^i) + 0(l_{imn}^i l_{im-1n}^i l_{mj}^i) \quad (2.25)$$

$$a = \frac{l_{im-1n}^i l_{imn}^i - l_{imn}^i l_{im-1n}^i}{l_{im-1n}^i l_{imn}^i (l_{im-1n}^i + l_{imn}^i)} \quad b = \frac{l_{im-1n}^i l_{imn}^i + l_{imn}^i l_{im-1n}^i}{l_{imn}^i l_{im-1n}^i (l_{imn}^i + l_{im-1n}^i)}$$

すると  $x_{mj}^i$   $t_{mj}^i$  はそれぞれ

$$x_{mj}^i = \frac{c^2}{2a} \left\{ -A \pm \sqrt{A^2 - \frac{4a}{c^2} B} \right\} \quad t_{mj}^i = \frac{1}{2a} \{ -D \pm \sqrt{D^2 - 4aE} \}$$

となる。ここで

$$A = \left[ b + \frac{2a}{c} \left( h_{im1}^i - \frac{x_{m1}^i}{c} \right) - 1 \right], \quad B = x_{m1}^i \left( 1 - \frac{2a}{c} h_{im1}^i - b + \frac{a}{c^2} x_{m1}^i \right) + h_{im1}^i (a h_{im1}^i + b)$$

$$D = b - 2a t_{m1}^i - c$$

$$E = c t_{m1}^{i+1} + a t_{m1}^{i2} - b t_{m1}^i - h_{xm1}^i$$

$c$  は近似式 II の場合は  $c = (c^j(W_{m1}^{i+1}) + c^j(W_{mj}^i))/2$ , 近似式 III の場合は  $c = c^j((W_{m1}^{i+1} + W_{mj}^i)/2)$  である。この場合根は 2 つあるが、そのうち適当なほうを取る。また、(2.19) の代りに

$$w_{mj}^{i1} = dl_{xmj}^{i1} + bl_{xmj}^{i1} + w_{m1}^{i1} + 0(l_{xm-1n}^{i1} l_{xmn}^{i1} l_{xmj}^{i1}) \quad (2.26)$$

$$d = \frac{l_{xm-1n}^{i1}(w_{mn}^{i1} - w_{m1}^{i1}) - l_{xmn}^{i1}(w_{m1}^{i1} - w_{m-1n}^{i1})}{l_{xm-1n}^{i1} l_{xmn}^{i1} (l_{xm-1n}^{i1} + l_{xmn}^{i1})} \quad e = \frac{l_{xm-1n}^{i2}(w_{mn}^{i2} - w_{m1}^{i2}) + l_{xmn}^{i2}(w_{m1}^{i2} - w_{m-1n}^{i2})}{l_{xm-1n}^{i2} l_{xmn}^{i2} (l_{xm-1n}^{i2} + l_{xmn}^{i2})}$$

を用いる。

### 近似式の計算法に関する注意

i) 計算の順序は式の番号順に行なう。近似式 II, III は未知関数に関して非線型であるので、第1近似を近似式を用いて計算し、反復法を用いる。

ii) (2.13), (2.21) 式において  $c^1, c^n$  の選定は  $c^1, c^n$  が同一の特性曲線族に属していなければよいが、ここでは便宜的に次のようにして定める。

$$c^1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{c^j(U_{mj}^1)\} \quad (2.27)$$

$$c^n = \min_{1 \leq j \leq n} \{c^j(U_{mn}^1)\}$$

このように  $c^1, c^n$  を選べば近似解  $U$  が真の解  $W$  に収束する限り、方程式の双曲性から  $l_{xmn}^1 l_{tmn}^1$  を十分小さく取ることにより、したがって、初期曲線上に近似初期条件を十分密にとることにより  $c^1, c^n$  が同一の特性曲線族から選ばれることはない。近似式 II, III においては (2.27) において  $c^j(U_{m1}^1), c^j(U_{mn}^1)$  の代りにそれぞれ  $(c^j(U_{m1}^{1+1}) + c^j(U_{m1}^1))/2, (c^j(U_{m1}^{1+1}) + c^j(U_{mn}^1))/2$  および  $c^j(U_{m1}^{1+1} + U_{m1}^1)/2, c^j(U_{m1}^{1+1} + U_{mn}^1)/2$  を入れて考える。 $c^1, c^n$  がこのように選ばれば  $(x_{mj}^1, t_{mj}^1)$  すなわち (2.14), (2.22) の解はすべて  $(x_{m1}^1, t_{mn}^1)$  と  $(x_{mn}^1, t_{mn}^1)$  の間に落ちる。

iii) (2.14), (2.22) 式において  $c_m^1 = \infty$  の場合  $x_{mj}^1, t_{mj}^1$  は  $t_{mj}^1 = t_{m1}^1$  としてそれぞれ (2.14) 式 (2.22) 式の第1式により計算する。(2.25) 式において  $a=b=\infty$  となる場合も  $t_{mj}^1 = t_{mj}^1$  とおき同様に計算できる。

iv) 近似解  $U$  が真の解  $W$  に収束すれば  $l_{xmn}^1 l_{tmn}^1$  を十分小さくとれば  $c^1(U_{m1}^1) \approx c^n(U_{mn}^1), \{c^1(U_{m1}^{1+1}) + c^1(U_{m1}^1)\} \approx \{c^n(U_{m1}^{1+1}) + c^n(U_{mn}^1)\}/2, c^1((U_{m1}^{1+1} + U_{m1}^1)/2) \approx c^n((U_{m1}^{1+1} + U_{mn}^1)/2)$  となり (2.13), (2.21) は解をもつ。さらに  $\Gamma_1$  はその上でいたるところ特性方向でなく (2.14), (2.22) は必ず解をもつ。また (2.16), (2.24) も双曲性の条件,  $|\det a^{ij}| > d > 0$  から解をもつことがわかる。

## 3. 近似解の原解への収束

方程式 (2.1) に対する初期値問題 (2.2) の解の存在, 一意性, 微分可能性, 初期条件への連続的依存性については<sup>1), 2), 3)</sup> の他に H. Lewy., J. Schauder, P. Hartman-A. Wintner, P.D. Lax. R. Courant 等の論文があるが、これらの中で微分可能性という観点からみて最良の結果は次に示す A. Douglis<sup>3)</sup> による定理である。

定理 [A. Douglis]

一般性を失なうことなく初期曲線  $\Gamma_0$  を

$$\Gamma_0 = \{(x, t); t=0, X_- \leq x \leq X_+, X_- < X_+\}$$

とする。方程式 (2.1) と初期条件 (2.2) に対し、領域

$$R(\delta, B) = \{(x, t); 0 \leq t \leq \delta, X_- + Bt \leq x \leq X_+ - Bt, B > 0, \delta > 0\}$$

$$R_\Omega(\delta, B) = \{(x, t, u); (x, t) \in R(\delta, B), |u^i - w^{0i}| \leq \Omega\}$$

を定める。 $B$  は  $c^j$ ,  $w^{0i}$  に依存し,  $\delta, \Omega$  は  $A, B$  および  $w^{0i}$  に依存して定められる。

いま,

1.  $w^{0i}(x, 0) \in c^s(\Gamma_0)$
2.  $a^{ij}(x, t, W), d^j(x, t, W) \in c^s(R_\Omega)$
3.  $|\det(a^{ij})| > d > 0 \quad (x, t, u) \in R_\Omega$

すると (2.1) の初期値問題 (2.2) の解が  $R_\Omega$  で一意的に存在して

$$w^i(x, t) \in c^s(R_\Omega)$$

である。

本報告において方程式 (2.1), 初期条件 (2.2) は定理の条件を満足し,  $s$  は差分方程式の必要とする数とする。

まず, 誤差関数ベクトル  $V$  を  $U_{mj}^\lambda = W_{mj}^\lambda + V_{mj}^\lambda$ , すなわち

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{l}_{mj}^\lambda \\ \overset{\circ}{x}_{mj}^\lambda \\ u_{mj}^{1\lambda} \\ u_{mj}^{2\lambda} \\ \vdots \\ u_{mj}^{n\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{mj}^\lambda \\ x_{mj}^\lambda \\ w_{mj}^{1\lambda} \\ w_{mj}^{2\lambda} \\ \vdots \\ w_{mj}^{n\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{mj}^\lambda \\ v_{xmj}^\lambda \\ v_{mj}^{1\lambda} \\ v_{mj}^{2\lambda} \\ \vdots \\ v_{mj}^{n\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda = 0, 1, 2, \dots \\ i, j = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, \dots, M^\lambda \end{matrix} \quad (3.1)$$

により導入する。また  $V$  に関する norm を

$$\begin{aligned} \|V\|_{mj}^\lambda &= \max(|v_{imj}^\lambda|, |v_{xmj}^\lambda|, |v_{mj}^{1\lambda}|, \dots, |v_{mj}^{n\lambda}|) \\ \|V\|_m^\lambda &= \max(\|V\|_{m1}^{\lambda-1}, \|V\|_{m2}^\lambda, \|V\|_{m2}^{\lambda-1}, \|V\|_{m3}^{\lambda-1}, \dots, \|V\|_{mn}^{\lambda-1}) \\ \|V\|^\lambda &= \max_{1 \leq m \leq M^\lambda} (\|V\|_m^\lambda) \end{aligned}$$

とする。

定義より

$$\|V\|_m^0 = 0 \quad (3.2)$$

である。さらに

$$\begin{aligned} h_{im}^\lambda &= \max(h_{imn}^\lambda, l_{imn}^\lambda) & h_{xm}^\lambda &= \max(h_{xmn}^\lambda, l_{xmn}^\lambda) \\ h_m^\lambda &= \max(h_{im}^\lambda, h_{xm}^\lambda) \\ h^\lambda &= \max_{1 \leq m \leq M^\lambda} (h_m^\lambda) \\ h &= \max_\lambda (h^\lambda) \end{aligned}$$

とする。

双曲型の条件から, 初期曲線  $\Gamma_0$  上で  $l_{xmn}^0, l_{xmn}^0 \rightarrow 0$  とすれば,  $R(\delta, B)$  に属するすべての  $\Gamma_\lambda$

に関して  $h^i \rightarrow 0$  すなわち,  $h \rightarrow 0$  となる。

この章の目的は近似方程式 I, II, III の初期値問題 (2.6) に対して

$$\|V\|^2 = O(h^p) \quad (p \geq 1) \quad (3.3)$$

なることを証明し

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|V\|^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \|V\|^2 = 0 \quad \lambda = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

なることを示すことにある。

### (1) 近似式 I の解の原方程式の解への収束の証明

まず (2.13) より生ずる誤差関数に関する次の補題を証明する。

#### 補題 3.1.1

(2.13) において

$$\left. \begin{aligned} |v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i| &= v_{x1}^i \\ |v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i| &= v_{xm}^i \\ |v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i| &= v_{i1}^i \\ |v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i| &= v_{in}^i \end{aligned} \right\} = O(h_{im}^i \|V\|_m^2 + \|V\|_m^2 + \|V\|_m^2 \|V\|_m^{i+1} + h_{im}^2) \quad (3.5)$$

なる評価式が成立する。

証明

誤差関数の導入により (2.13) は

$$\begin{aligned} x_{m1}^{i+1} + v_{xm1}^{i+1} &= x_{m1}^i + v_{xm1}^i + \{(t_{m1}^{i+1} + v_{im1}^{i+1}) - (t_{m1}^i + v_{im1}^i)\} c^1 (W_{m1}^i + V_{m1}^i) \\ x_{m1}^{i+1} + v_{xm1}^{i+1} &= x_{m1}^i + v_{xm1}^i + \{(t_{m1}^{i+1} + v_{im1}^{i+1}) - (t_{m1}^i + v_{im1}^i)\} c^n (W_{m1}^i + V_{m1}^i) \end{aligned}$$

上式から (2.9) を引けば

$$\begin{aligned} v_{xm1}^{i+1} &= v_{xm1}^i + (v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i) c^1 (W_{m1}^i) + O(h_{im1}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + v_{im1}^i V_{m1}^i + h_{im1}^2) \\ v_{xm1}^{i+1} &= v_{xm1}^i + (v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i) c^n (W_{m1}^i) + O(h_{im1}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + v_{im1}^i V_{m1}^i + h_{im1}^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

いま,

$$\begin{aligned} O(h_{im1}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + v_{im1}^i V_{m1}^i + h_{im1}^2) &= D_1 \\ O(h_{im1}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + v_{im1}^i V_{m1}^i + h_{im1}^2) &= D_2 \end{aligned}$$

とおき  $c^1(W_{m1}^i) = c^1$ ,  $c^n(W_{m1}^i) = c^n$  とかけば (3.6) から

$$\left. \begin{aligned} v_{im1}^{i+1} &= \frac{v_{xm1}^i - v_{xm1}^i + c^n v_{im1}^i - c^1 v_{im1}^i + D_1 - D_n}{c^n - c^1} \\ v_{xm1}^{i+1} &= \frac{c^n v_{xm1}^i - c^1 v_{xm1}^i + c^1 c^n (v_{im1}^i - v_{im1}^i) + c^n D_1 - c^1 D_n}{c^n - c^1} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

双曲型の条件から  $c^n - c^1 \neq 0$  である。(3.7) において

$$v_{xm1}^i - v_{xm1}^{i+1} = (v_{xm1}^i - v_{xm1}^{i+1}) + (v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i)$$

$$v_{im1}^i - v_{im1}^{i+1} = (v_{im1}^i - v_{im1}^{i+1}) + (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i)$$

を用いれば  $v_{x1}^i v_{xn}^i v_{i1}^i v_{in}^i$  に関して

$$\begin{bmatrix} c^n - c^1 + 1 & -1 & -c^n & c^n \\ 1 & c^n - c^1 - 1 & -c^1 & c^1 \\ c^1 & -c^1 & c^n - c^1 - c^1 c^n & c^1 c^n \\ c^n & -c^n & -c^1 c^n & c^n - c^1 + c^1 c^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{xn} \\ v_{i1} \\ v_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - D_n \\ D_1 - D_n \\ c^n D_1 - c D_n \\ c^n D_1 - c^1 D_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

が (3.7) から導かれる。(3.8) の左辺の行列式は 0 でないから補題の証明ができた。

この補題から  $v_{xm1}^{i+1}, v_{im1}^{i+1}$  に関する次の評価式

$$\left. \begin{aligned} |v_{xm1}^{i+1}| &\leq |v_{xm1}^i| + 0(h_{im}^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^{i2} + h_{im}^{i2}) \\ |v_{im1}^{i+1}| &\leq |v_{im1}^i| + 0(h_{im}^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^{i2} + h_{im}^{i2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

が求まる。

次に (2.14) において生ずる誤差関数に関して次の補題を証明する。

補題 3.1.2

(2.14) において

$$\left. \begin{aligned} |v_{xmj}^i - v_{xm1}^i| \\ |v_{imj}^i - v_{im1}^i| \end{aligned} \right\} = 0(h_{im}^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + h_{im}^{i2}) \quad (3.10)$$

$$j=2, 3, \dots, n-1$$

なる評価式が成立する。

証明

誤差関数の導入により (2.14) は

$$x_{mj}^i + v_{xmj}^i = x_{m1}^{i+1} + v_{xm1}^{i+1} + \{(t_{mj}^i + v_{imj}^i) - (t_{m1}^{i+1} + v_{im1}^{i+1})\} c^j (W_{m1}^i + V_{m1}^i)$$

$$x_{mj}^i + v_{xmj}^i = x_{m1}^i + v_{xm1}^i + \{(t_{mj}^i + v_{imj}^i) - (t_{m1}^i + v_{im1}^i)\} \{c_m^i + V_{cm}^i\}$$

上式から (2.10) を引けば

$$\left. \begin{aligned} v_{xmj}^i &= v_{xm1}^{i+1} + (v_{imj}^i - v_{im1}^i) c^j (W_{m1}^i) + 0(h_{imj}^i V_{m1}^i + v_{imj}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + h_{imj}^i (l_{imj}^i + l_{xmj}^i)) \\ v_{imj}^i &= v_{im1}^i + (v_{imj}^i - v_{im1}^i) c_m^i + 0(l_{imj}^i V_{cm}^i + v_{imj}^i V_{cm}^i + v_{im1}^i V_{cm}^i + l_{imj}^i l_{imn}^i) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

(3.11) から  $v_{xmj}^i v_{imj}^i$  を求めると  $c_m^i = c^j (W_{m1}^i) = c^j$  とし,

$$0(h_{im1}^i V_{m1}^i + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^i + v_{imj}^i V_{m1}^i + h_{imj}^i (l_{imj}^i + l_{xmj}^i)) = D_1$$

$$0(h_{imj}^i V_{cm}^i + v_{imj}^i V_{cm}^i + v_{im1}^i V_{cm}^i + l_{imj}^i l_{imn}^i) = D_2$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} v_{xmj}^i &= \frac{c^j v_{xm1}^i - c v_{xm1}^{i+1} + c c^j (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) + c^j D_2 - c D_1}{c^j - c} \\ v_{imj}^i &= \frac{v_{xmj}^i - v_{xm1}^{i+1} + c^j v_{im1}^{i+1} - c v_{im1}^i + D_2 - D_1}{c^j - c} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここに  $\Gamma_1$  がいたる所特性方向でないという双曲性の条件から  $c^j - c \neq 0$  である。(3.12) は次の形にかける。

$$\left. \begin{aligned} v_{xmj}^i &= v_{xm1}^i + \frac{c(v_{xm1}^i - v_{xm1}^{i+1}) + c c^j (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) + c^j D_2 - c D_1}{c^j - c} \\ v_{imj}^i &= v_{im1}^i + \frac{v_{xm1}^i - v_{xm1}^{i+1} + c^j (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) + D_2 - D_1}{c^j - c} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

さらに  $D_2$  において  $\dot{c}_m^i$  が  $x_{m1}^i, x_{mn}^i, t_{m1}^i, t_{mn}^i$  の連続関数であることから

$$\dot{c}_m^i - c_m^i = V_{cm}^i = 0(|v_{xm1}^i| + |v_{xm1}^{i+1}| + |v_{im1}^i| + |v_{im1}^{i+1}|) = 0(\|V\|_m^i)$$

これと補題 3.1.1 の  $v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i, v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i$  の評価式を用いれば (3.13) から

$$\left. \begin{aligned} v_{xmj}^i - v_{xm1}^i \\ v_{imj}^i - v_{im1}^i \end{aligned} \right\} = 0(h_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^i + h_m^{i+1}) \quad (3.14)$$

補題 3.1.2 から  $v_{xmj}^i, v_{imj}^i$  に関する評価式

$$\left. \begin{aligned} |v_{xmj}^i| &\leq |v_{xm1}^i| + 0(h_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^i + h_m^{i+1}) \\ |v_{imj}^i| &\leq |v_{im1}^i| + 0(h_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^i + h_m^{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

が導かれる。

近似式 (2.15) に対しても同様な補題が成立する。

補題 3.1.3

(2.15) において

$$|v_{mj}^{i+1} - v_{m1}^{i+1}| = 0(h_m^i \|V\|_m^i + h_m^i \|V\|_{mj}^i + \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^i + \|V\|_{mj}^{i+1} + h_m^{i+1})$$

が成立する。

証明

(2.15) から (2.11) を引けば誤差関数を用いて

$$\begin{aligned} (v_{mj}^{i+1} - v_{m1}^{i+1}) - (v_{mn}^{i+1} - v_{m1}^{i+1}) c_{mj}^i &= 0((l_{xmj}^i + l_{imj}^i) V_{cmj}^i + (v_{mn}^{i+1} - v_{m1}^{i+1}) V_{cmj}^i \\ &\quad + l_{imj}^i l_{imn}^i + h_{imj}^i (l_{imj}^i + l_{xmj}^i) + l_{xmj}^{i+1}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで

$$c_{mj}^i - c_{mj}^i = V_{cmj}^i$$

とする。

(3.16) は行列形で





$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -c^1(W_{m1}^1) & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & -c^n(W_{mn}^1) & & & \\ & & a^{11}(W_{m1}^1) & a^{12}(W_{m1}^1) & \dots & a^{1n}(W_{m1}^1) \\ & & a^{21}(W_{m2}^1) & a^{22}(W_{m2}^1) & \dots & a^{2n}(W_{m2}^1) \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a^{n1}(W_{mn}^1) & a^{n2}(W_{mn}^1) & \dots & a^{nn}(W_{mn}^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xm1}^{i+1} \\ v_{im1}^{i+1} \\ v_{m1}^{i1+1} \\ v_{m1}^{i2+1} \\ \dots \\ v_{m1}^{inm1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -c^1(W_{m1}^1) & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & -c^n(W_{mn}^1) & & & \\ & & a^{11}(W_{m1}^1) & a^{12}(W_{m1}^1) & \dots & a^{1n}(W_{m1}^1) \\ & & a^{21}(W_{m2}^1) & a^{22}(W_{m2}^1) & \dots & a^{2n}(W_{m2}^1) \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a^{n1}(W_{mn}^1) & a^{n2}(W_{mn}^1) & \dots & a^{nn}(W_{mn}^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xm1}^i \\ v_{im1}^i \\ v_{m1}^{i1} \\ v_{m1}^{i2} \\ \vdots \\ v_{m1}^{in1} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 \\ v_{xm1}^i - v_{xm1}^i + c^n(W_{im1}^1 - v_{im1}^i) \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n a^{i2}(W_{m2}^1)(v_{m2}^{i1} - v_{m1}^{i1}) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a^{in}(W_{mn}^1)(v_{mn}^{i1} - v_{m1}^{i1}) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0(h_{im1}^1 V_{m1}^1 + v_{im1}^1 V_{m1}^1 + v_{im1}^{i+1} V_{m1}^1 + h_{im1}^{i2}) \\ 0(h_{imn}^1 V_{mn}^1 + v_{imn}^1 V_{mn}^1 + v_{imn}^{i+1} V_{mn}^1 + h_{imn}^{i2}) \\ \dots \\ d^j(W_{mj}^1)(v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i) + h_{imj}^1 \cdot 0(V_{mj}^1) + 0(V_{mj}^1) \{ (v_{mj}^{i1} - v_{m1}^{i1+1}) + (v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i) \} \\ \dots \\ \dots \\ + 0(h_{imj}^{i2} + l_{imj}^1 l_{mn}^1 + h_{nmj}^1 (l_{imj}^1 + l_{xmj}^1) + l_{xmj}^{i2}) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

(3.21) の右辺第2項に現われる  $v_{xm1}^i - v_{xm1}^i$ ,  $v_{im1}^i - v_{im1}^i$  は

$$v_{xm1}^i - v_{xm1}^i = (v_{xm1}^i - v_{xm1}^{i+1}) + (v_{xm1}^{i+1} - v_{xm1}^i) \quad (v_{im1}^i - v_{im1}^i = (v_{im1}^i - v_{im1}^{i+1}) + (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i))$$

と補題 3.1.1 の評価式を用いて評価し,  $v_{mj}^{i1} - v_{m1}^{i1}$  は補題 3.1.3 を用いて評価する。

第2項においては  $v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i$  が現われるが, これは  $v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i = (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) + (v_{im1}^i - v_{imj}^i)$  とすることにより補題 3.1.1 と補題 3.1.2 を用いて評価できる。

さらに, 左辺および右辺第1項の行列が等しく, かつ双曲性の性質から正則であることを用いれ

ば  $\|V\|_{m+1}^{i+1}$  に関して次の評価式が導かれる。

$$\begin{aligned} \|V\|_{m+1}^{i+1} \leq & \|V\|_m^i + 0(h_m^2 \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_{m+1}^{i+1} + \|V\|_{m+1}^i \|V\|_m^i \\ & + h_m^2 \|V\|_{m+1}^i + \|V\|_{m+1}^{i2} + \|V\|_{m+1}^i \|V\|_{m+1}^{i+1} + h_m^{i2}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.15), (3.18), (3.22) より  $\|V\|_{m+1}^{i+1}$  に対して十分大きい  $\alpha$  を考えれば

$$\begin{aligned} \|V\|_{m+1}^{i+1} \leq & \|V\|_m^i + \alpha(h \|V\|_m^i + h \|V\|_{m+1}^{i+1} + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_{m+1}^{i+1} + \|V\|_{m+1}^i \|V\|_m^i + h^2) \\ & m=1, 2, \dots, M^{i+1}; \lambda=0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

が成立する。ゆえに

$$\begin{aligned} \|V\|^{i+1} \leq & \|V\|^i + \alpha\{h(\|V\|^i + \|V\|^{i+1}) + \|V\|^{i2} + \|V\|^i \|V\|^{i+1} + \|V\|^{i+12} + h^2\} \\ = & (1 + \alpha h + \alpha \|V\|^i + \alpha \|V\|^{i+1}) + \|V\|^i + \alpha h \|V\|^{i+1} + \alpha \|V\|^{i+12} + \alpha h^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで  $\|V\|^0=0$  であったが  $\|V\|^0=\beta h^2$  とおく。

上式と独立に

$$F_{i+1} = (1 + 3\alpha h)F_i + 3\alpha h^2 \quad F_0 = \beta h^2 \quad (3.25)$$

を考える。すると

$$F_{i+1} = (1 + 3\alpha h)^i \beta h + \sum_{k=0}^{i-1} (1 + 3\alpha h)^k \cdot 3\alpha h^2$$

$1 + 3\alpha h < e^{3\alpha h}$  から

$$F_{i+1} < e^{3i\alpha h} \beta h^2 + h\{(1 + 3\alpha h)^i - 1\} < h[e^{3i\alpha h}\{\beta h + 1\} - 1]$$

ここで

$$M(\lambda h) = e^{3i\alpha h}(\beta h + 1) - 1 \quad (3.26)$$

とおくと  $M(\lambda h)$  は  $\lambda=0$  のとき  $\beta h$  となる  $\lambda$  の増加関数であって

$$\Delta = \max\{\lambda; M(\lambda h) < 1\}$$

とすると  $\lambda \leq \Delta$  なる限り  $F_{i+1} < h$  ゆえに  $\lambda \leq \Delta$  なる限り

$$(1 + 3\alpha h)F_i + 3\alpha h^i > (1 + \alpha h + \alpha F_i + \alpha F_{i+1})F_i + \alpha h F_{i+1} + \alpha F_{i+1}^2 + \alpha h^2$$

この関係式を考慮して (3.25) と (3.24) を比較すれば

$$\|V\|^{i+1} \leq F_{i+1} < h \quad (3.27)$$

ゆえに  $\lambda \leq \Delta$  ならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|V\|^{i+1} = 0 \quad (3.28)$$

である。しかしながら、証明はこれでは完結しない。近似解  $U$  が定理 [A. Douglis] における  $R_\Omega(\delta B)$  に属することが必要である。

そこで  $R_\Omega$  の部分領域  $R_{\Omega-\epsilon}$  を

$$R_{\Omega-\epsilon} = \{(x, t, u); (x, t) \in R(\delta B), |u^i - w^{0i}| \leq \Omega - \epsilon\}$$

により定義する。この部分領域はもちろん初期曲線  $\Gamma_0$  を含む。いま、 $n+2$  次元空間の点  $W^i$  が  $\lambda \leq \Delta$  を満足し、かつ  $R_{\Omega-\epsilon}$  に属するとすると

$$|W^0 - W_m^1| < \Omega - \epsilon$$

また, (3.27) より

$$|W_m^1 - U_m^1| < h$$

したがって

$$|W^0 - U_m^1| < k - \epsilon + h$$

ゆえに  $h \leq \epsilon$  ならば  $W_m^1$  に対応する近似解  $U_m^1$  は確かに  $R_\Omega$  属し, 第2章の近似式の計算法に関する注意 ii), iv) は成立する\*. よって次の定理が証明された。

定理 3. 1

方程式 (2.1), 初期条件 (2.2) が定理 [A. Douglis] の条件を満足して  $s \geq 2^{**}$  ならば,  $\lambda \leq 4$  なる限り, 近似方程式 I の解は存在し

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|V\|^1 = 0$$

となり近似解は原方程式の解に収束する。

## (2) 近似式 II, III の解の原方程式の解への収束の証明

近似式 I の補題 3.1.1 と同様な補題が (2.21) に対して成立する。

補題 3.2.1

(2.21) において

$$\left. \begin{aligned} &|v_{x_{m1}}^{i+1} - v_{x_{mn}}^i| \\ &|v_{x_{m1}}^{i+1} - v_{x_{mn}}^i| \\ &|v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{m1}}^i| \\ &|v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{mn}}^i| \end{aligned} \right\} = 0(h_{i_{mn}}^1(\|V\|_m^1 + \|V\|_m^{1+1}) + \|V\|_m^{12} + \|V\|_m^1 \|V\|_m^{1+1} + \|V\|_m^{1+12} + h_{i_{mn}}^3) \quad (3.29)$$

が成立する。

証明

(2.21) から (2.17) を引けば

$$\begin{aligned} v_{x_{m1}}^{i+1} &= v_{x_{m1}}^i + \frac{1}{2}(v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{m1}}^i)\{c^1(W_{m1}^{i+1}) + c^1(W_{m1}^i)\} + h_{i_{m1}}^1(0(V_{m1}^{i+1} \\ &\quad + V_{m1}^i)) + (v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{m1}}^i) \cdot 0(V_{m1}^{i+1} + V_{m1}^i) + 0(h_{i_{m1}}^3) \\ v_{x_{m1}}^{i+1} &= v_{x_{mn}}^i + \frac{1}{2}(v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{mn}}^i)\{c^n(W_{m1}^{i+1}) + c^n(W_{i_{mn}}^i)\} + h_{i_{mn}}^1(0(V_{m1}^{i+1} \\ &\quad + V_{i_{mn}}^i)) + v_{i_{m1}}^{i+1} - v_{i_{mn}}^i \cdot 0(V_{m1}^{i+1} + V_{i_{mn}}^i) + 0(h_{i_{mn}}^3) \end{aligned} \quad (3.30)$$

\*  $s \geq 1$  ならば  $a^{ij}c^j d^j$  等はその変数に関して微分できるので  $a^{ij}(W+V) = a^{ij}(W) + 0(V)$  のような操作が可能になる。

\*\* 近似式が成立するためには  $s \geq 2$  が必要。

後は補題 3.1.1 と同様に証明できる。

(3.29) より  $|v_{x_{m1}}^{i+1}|, |v_{i_{m1}}^{i+1}|$  の評価式

$$\left. \begin{aligned} |v_{x_{m1}}^{i+1}| &\leq |v_{x_{m1}}^i| + 0(h_{i_m}^i(|V|_m^i + |V|_m^{i+1}) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^{i+12} + h_{i_m}^{i2}) \\ |v_{i_{m1}}^{i+1}| &\leq |v_{i_{m1}}^i| + 0(h_{i_m}^i(|V|_m^i + |V|_m^{i+1}) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^{i+12} + h_{i_m}^{i2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

が導かれる。(2.22) 式に関しても (2.14) 式に関する補題と同様に補題 3.2.2 が成立する。

補題 3.2.2

$$\left. \begin{aligned} |v_{x_{mj}}^i - v_{x_{m1}}^i| \\ |v_{i_{mj}}^i - v_{i_{m1}}^i| \end{aligned} \right\} = 0(h_{i_m}^i(|V|_m^i + |V|_m^{i+1}) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+12} + h_{i_m}^{i2}) \quad (3.32)$$

および  $|v_{x_{mj}}^i|, |v_{i_{mj}}^i|$  に関する評価式

$$\left. \begin{aligned} |v_{x_{mj}}^i| &\leq |v_{x_{m1}}^i| + 0(h_{i_m}^i(|V|_m^i + |V|_m^{i+1}) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+12} + h_{i_m}^{i2}) \\ |v_{i_{mj}}^i| &\leq |v_{i_{m1}}^i| + 0(h_{i_m}^i(|V|_m^i + |V|_m^{i+1}) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i+12} + h_{i_m}^{i2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

が成立する。

(2.2.3) に対しては

補題 3.2.3

$$|v_{mj}^{i2} - v_{m1}^{i2}| = 0(h_{i_m}^i \|V\|_m^i + h_{i_m}^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + h_{i_m}^{i2}) \quad (3.34)$$

$$|v_{mj}^{i2}| \leq |v_{m1}^{i2}| + 0(h_{i_m}^i \|V\|_m^i + h_{i_m}^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^{i2} + h_{i_m}^{i2}) \quad (3.35)$$

が成立する。

最後に (2.20), (2.24) を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a^{ij} (W_{m1}^{i+1}) \left( \frac{1}{2} w_{m1}^{i2+1} - \frac{1}{2} w_{mj}^{i2} \right) &= \sum_{i=1}^n a^{ij} (W_{mj}^i) \left( \frac{1}{2} w_{mj}^{i2} - \frac{1}{2} w_{m1}^{i2+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} h_{i_{mj}} \{ d W_{m1}^{i+1} \} + d^j (W_{mj}^i) \{ + 0(h_{i_{mj}}^i) \} \end{aligned} \quad (2.20)'$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a^{ij} (U_{m1}^{i+1}) \left( \frac{1}{2} u_{mj}^{i2+1} - \frac{1}{2} u_{m1}^{i2} \right) &= \sum_{i=1}^n a^{ij} (U_{mj}^i) \left( \frac{1}{2} u_{mj}^{i2} - \frac{1}{2} u_{m1}^{i2+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} h_{i_{mj}} \{ d^j (U_{m1}^{i+1}) + d^j (U_{mj}^i) \} \end{aligned} \quad (2.24)'$$

(2.24)' から (2.20)' を引けば

$$\begin{aligned} &\sum a^{ij} (W_{m1}^{i+1}) \left( \frac{1}{2} v_{m1}^{i2+1} - v_{mj}^{i2} \right) + 0(V_{m1}^{i+1}) \left\{ \frac{1}{2} (w_{m1}^{i2+1} - w_{mj}^{i2}) + \frac{1}{2} (v_{m1}^{i2+1} - v_{mj}^{i2}) \right\} \\ &= \sum a^{ij} (W_{mj}^i) \left( \frac{1}{2} (v_{mj}^{i2} - v_{m1}^{i2+1}) \right) + 0(V_{mj}^i) \left\{ \frac{1}{2} w_{mj}^{i2} - w_{m1}^{i2+1} + \frac{1}{2} (v_{mj}^{i2} - v_{m1}^{i2+1}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} h_{imj}^i \{0(V_{m1}^{i+1}) + 0(V_{mj}^i)\} + \frac{1}{2} (v_{m1}^{i+1} - v_{mj}^i) \{d^j(W_{m1}^{i+1}) + d^j(W_{mj}^i)\} \\
& + 0(V_{mj}^i) + 0(V_{m1}^{i+1})\} + 0(h_{imj}^{i8})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

上式において左辺第1項は

$$\begin{aligned}
\sum a^{ij}(W_{m1}^{i+1}) \left( \frac{1}{2} (v_{m1}^{i+1} + v_{mj}^{i+1}) \right) &= \sum \{a^{ij}(W_{m1}^{i+1}) - a^{ij}(W_{mj}^i)\} \left\{ \frac{1}{2} (v_{m1}^{i+1} - v_{mj}^i) \right\} \\
&+ \sum a^{ij}(W_{mj}^i) \left\{ \frac{1}{2} (v_{m1}^{i+1} - v_{m1}^i) + \frac{1}{2} (v_{m1}^i - v_{mj}^i) \right\}
\end{aligned}$$

右辺第1項は

$$\sum a^{ij}(W_{mj}^i) \left( \frac{1}{2} (v_{mj}^i - v_{m1}^{i+1}) \right) = \sum a^{ij}(W_{mj}^i) \left\{ \frac{1}{2} (v_{m1}^i - v_{m1}^{i+1}) + \frac{1}{2} (v_{mj}^i - v_{m1}^i) \right\}$$

以上を考慮すれば (3.35) は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) v_{m1}^{i+1} &= \sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) v_{m1}^i + 0(h_{m1}^i) (v_{m1}^i - v_{m1}^{i+1}) + \sum_{i=1}^n a^{ij}(W_{mj}^i) (v_{mj}^i - v_{m1}^i) \\
&+ 0(h_{m1}^i) \{0(V_{m1}^{i+1}) + 0(V_{mj}^i)\} + \{0(V_{mj}^i) - 0(V_{m1}^{i+1})\} \left\{ \frac{1}{2} (v_{mj}^i - v_{m1}^{i+1}) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} (v_{m1}^{i+1} - v_{mj}^i) (d^j(W_{m1}^{i+1}) + d^j(W_{mj}^i) + 0(V_{m1}^{i+1}) + 0(V_{mj}^i)) \\
&+ 0(h_{imj}^{i8} + l_{imj}^{i2} + l_{imj}^i l_{imn}^i)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.30) と (3.37) を行列形でかけば

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}\{c^1(W_{m1}^{i+1}) + c^1(W_{m1}^i)\} & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 1, -\frac{1}{2}\{c^n(W_{m1}^{i+1}) + c^n(W_{mn}^i)\} & & & & \\ & & a^{11}(W_{m1}^i) & \dots\dots & a^{1n}(W_{m1}^i) \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & a^{n1}(W_{mn}^i) & \dots\dots & a^{nn}(W_{mn}^i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m1}^{i+1} \\ v_{m1}^i \\ v_{m1}^{1i+1} \\ \vdots \\ v_{m1}^{ni+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}\{c^1(W_{m1}^{i+1}) + c^1(W_{m1}^i)\} & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 1, -\frac{1}{2}\{c^n(W_{m1}^{i+1}) + c^n(W_{mn}^i)\} & & & & \\ & & a^{11}(W_{m1}^i) & \dots\dots & a^{1n}(W_{m1}^i) \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & a^{n1}(W_{mn}^i) & \dots\dots & a^{nn}(W_{mn}^i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m1}^i \\ v_{m1}^i \\ v_{m1}^{1i} \\ v_{m1}^{2i} \\ \vdots \\ v_{m1}^{ni} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ v_{xmn}^i - v_{xmi}^i + \frac{1}{2} \{ c^n(W_{mi}^{i+1}) + c^n(W_{mn}^i) \} (v_{xmn}^i - v_{xmi}^i) \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum a^{ij}(W_{mj}^i)(v_{mj}^{i2} - v_{mi}^{i2}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{c} h_{im1}^i(0(V_{m1}^{i+1} + V_{m1}^i)) + (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) \cdot 0(V_{m1}^{i+1} + V_{m1}^i) + 0(h_{im1}^{i2}) \\ h_{imn}^i(0(V_{m1}^{i+1} + V_{mn}^i)) + (v_{im1}^{i+1} - v_{imn}^i) \cdot 0(V_{m1}^{i+1} + V_{mn}^i) + 0(h_{imn}^{i2}) \\ \dots\dots\dots \\ 0(h_m^i + V_{mj}^i - V_{m1}^{i+1})(v_{mj}^i - v_{m1}^{i+1}) + 0(h_m^i + v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i)(V_{m1}^i + V_{m1}^{i+1}) + 0(v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i) + 0(h_m^{i2}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.38) 式右辺第 2 項, 第 3 項中の  $(v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i)$  は  $v_{im1}^{i+1} - v_{imj}^i = (v_{im1}^{i+1} - v_{im1}^i) + (v_{im1}^i - v_{imj}^i)$  を用いて補題 3.2.1, 3.2.2 により評価できる。 $(v_{mj}^{i2} - v_{mi}^{i2})$  は補題 3.2.3 を用いて評価できる。したがって (3.38) より

$$\begin{aligned}
\|V\|_m^{i+1} & \leq \|V\|_m^i + 0(h_m^i \|V\|_m^i + \|V\|_m^i) + \|V\|_m^{i2} + \|V\|_m^i \|V\|_m^{i+1} + \|V\|_m^{i+12} \\
& \quad + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^i + \|V\|_{mj}^i \|V\|_m^{i+1} + h_m^{i2}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

が導かれる。ゆえに (3.33), (3.35), (3.39) よりすべての  $m$  に対して十分大きな  $\alpha$  をとれば

$$\begin{aligned}
\|V\|^{i+1} & \leq \|V\|^i + \alpha \{ h(\|V\|^i + \|V\|^{i+1}) + \|V\|^{i2} + \|V\|^i \|V\|^{i+1} + \|V\|^{i+12} + h^{i2} \} \\
\|V\|^0 & = \beta h^2 \quad \lambda = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

が成立する。これは (3.23) と同じであるから近似式 II に関する定理 3.2 が定理 3.1 と同様に証明される。

### 定理 3.2

方程式 (2.1), 初期条件 (2.2) が定理 [A. Douglis] の条件を満足して  $s \geq 3^*$  ならば  $\lambda \leq \lambda$  なる限り近似方程式 II の解は存在し

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|V\|^i = 0$$

となり近似解は原方程式の解に収束する。

近似式 III については式の構成と収束の証明法から明らかなように, その近似解の収束は近似式 II とまったく同様であり, したがって, その近似度はやはり 1 である。もし, 近似式 II または III において, (2.18), (2.19) の代りに (2.25), (2.26) を用いるならば, 近似式の近似度は 2 となることが証明される。(2.18), (2.19) の代りに (2.25), (2.26) を用いた場合, 誤差関数の評価式

\* 近似式が成立するために必要である。

4は打ち切り誤差項の次数が一つ上ることと、右辺に  $\|V\|_{m-1}^2$  の項が現われるだけで評価式全体の形式は不変である。その結果 (3.40) の不等式の右辺の  $h^{12}$  は  $h^{13}$  となり,  $\|V\|^0 = \beta h^8$  とする。

#### 4. 数 値 例

Divergent Nozzle をもつ極超音速衝撃波管の流れの方程式は航技研欧文報告 TR-37 T<sup>14)</sup> に示されている。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= -\frac{1}{A}(\rho u - \rho A_t) \\ \rho u_t + \rho u u_x &= -P_x \\ s_t + us_x &= 0 \\ (\nu-1)T \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

この方程式は  $c^1$ ;  $(dx/dt)=u+a$  に沿って

$$du + sd\rho = -au \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} dt \quad (4.2)$$

$c^2$ ;  $(dx/dt)=u$  に沿って

$$s = \text{const} \quad (4.3)$$

$c^3$ ;  $(du/dt)=u-a$  に沿って

$$-du + sd\rho = -au \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} dt \quad (4.4)$$

と変換される。ここで  $A=0.5382x+0.004$  とする。初期条件を  $x=0$  で

$$a-1 = \frac{0.005}{6t} \quad p=5a \quad u=6-p \quad s=1 \quad (4.5)$$

と与えた場合,  $t$  が十分大きければ  $x=0.55$  で  $u/a=0.650$  となることがわかっている<sup>14)</sup>。

そこで  $x=0$  における初期分点の間かくを  $h=0.02, 0.015, 0.01, 0.005, 0.0025$  と変化させそれぞれの場合について近似式 I, II, III を適用し解を求めた。そして十分大きな  $t$  ( $u/a$  が一定になるような値。) に対して  $x=0.55$  における  $u/a$  を計算した。その結果は表 4.1 と図 4.1 に示されている。

表 4.1

近似式 \ $h$	0.02	0.015	0.01	0.005	0.0025
I	—	—	8.19	7.36	6.92
II	8.97	7.43	6.93	6.61	6.54
III	6.09	—	6.35	6.47	6.50

$x=0.55$  における  $u/a$  の定常値

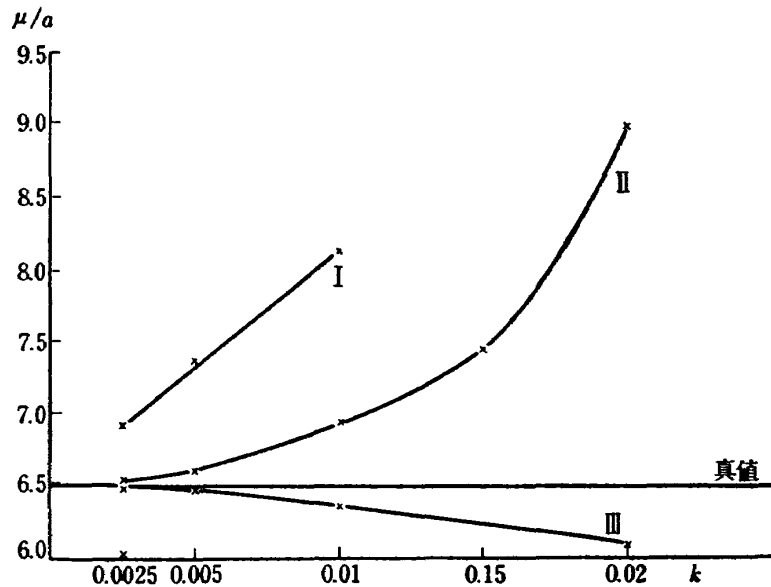


図 4.1

得られた結果からは I の誤差は理論どおり  $h$  の一次関数であり II, III は一次以上の関数であることがわかる。II, III の誤差が  $h$  の高次関数であることは方程式 (4.2)~(4.4) において (4.3) が const であることと  $x=0$  で  $s=1$  であることから (2.18), (2.19) が不要になることを考えればこれも理論どおりである。

## 5. 結 言

二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法に関して研究した結果、次のことが結論としていえる。まず、近似方程式系の構成に関して

(1) 一般の準線型系に関して高精度近似式を構成するために、従来、特殊な方程式に対して成功した構成法は、ことごとく重大な困難にぶつかり成功しない。

(2) 従来、主として用いられてきた方法の一般化により構成される近似式はすべて近似度 1 の近似式であって、これを 2 に上げるためには (2.18), (2.19) の代りに (2.25), (2.26) を用いなければならない。

(3) 特性曲線の数が 2 本ならば実用にたえる高精度近似式の構成可能である。

近似解の原方程式の解への収束に関して

(1) 近似解の収束領域は局所的なものであって、初期曲線からのある有限な領域内部でのみ収束する。

(2) 近似解の収束から逆に近似方程式の解の存在が結論される。

(3) 収束の証明に関して使用した条件は、方程式に解が存在するために必要な条件のみである。

報告を終わるにあたり、問題研究きっかけを与え、4. の数値例に関して種々討論をしていただい



た空気力学第一部和田技官にお礼申し上げる。また、計算研究室高島（久）技官には 4. の数値解のためのプログラムをくんでいただいたことを感謝します。

## 文 献

- 1) P.D. Lax; Contribution to the Theory of Partial Differential Equations Princeton Press, (1952) pp. 211~229
- 2) K.O. Friedrichs; Amer. J. Math. Vol.70 (1948) pp. 555~589
- 3) A. Douglis; C.P.A.M., Vol.5 (1952) pp. 119~154
- 4) L.H. Thomas; C.P.A.M., Vol.7 (1954) pp. 195~206
- 5) J. Stetter; Numer. Math., Math., Vol.5 (1964) pp. 399~424
- 6) R. Ansorge; Numer Math., Vol.7 (1963) pp. 443~460
- 7) P. Hmoor; Arch. Rat. Mech. Anal. Vol.7 (1960) pp. 37~63
- 8) R. Courant, E. Isaacson, M Lee; C.P.A.M. Vol.5 (1952) pp. 240~255
- 9) H. Keller; C.P.A.M., Vol.14 (1961) pp. 447~456
- 10) V . Thonicee; J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol11 (1963) pp. 964~975
- 11) F. Pfeiffer; 2AMM, (1947) pp. 83~91
- 12) P.D. Hodge; Quart. Appl. Math. (1951)
- 13) R. Sauer; P.I.C.C. Synip. (1961)
- 14) 和田勇; Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer, 航技研欧文報告 TR-37 T (昭和 38)

TR-66	変分法による平板翼の撓み, 振動解における 自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の 場合) Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates)	1964 年 6 月	川井忠彦, 塙武敏 越出慎一, 戸川隼人 落合薫
TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964 年 4 月	井上建二, 野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論 (I) Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I)	1964 年 6 月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究 (I) An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964 年 7 月	島崎忠雄, 能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造およ び特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory	1965 年 1 月	松浦陽恵, 樋口一雄 池谷光栄, 堀川勇壮 村上力, 百名盛之 三好範子, 岡部正典
TR-71	塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deforma- tion	1964 年 7 月	中西不二夫, 佐藤和郎
TR-71T	Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deforma- tion Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity	September 1964	Fujio NAKANISHI Yasuo SATO
TR-72	補助翼バズに関する一実験 Some Experiments on Control-Surface Buzz	1965 年 1 月	中村泰治, 田辺義一
TR-72T	Some Experiments on Control-Surface Buzz	November 1964	Yasuharu NAKAMURA Yoshikazu TANABE
TR-73	軸対称濃み点付近の溶融層の安定性 Stability of the Melted Layer near the Axi- symmetric Stagnation Point	1964 年 11 月	相原康彦
TR-74	遷音速パネルフラッタの研究 The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter	1964 年 11 月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-75	統計流体力学の初期値問題について On the Initial-Value Problem in Statistical Hydromechanics	1964 年 12 月	細川 巖
TR-76	高速軸流圧縮機の研究 (IV) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV)	1965 年 1 月	大山耕一, 松木正勝 西脇英夫, 岩部柱相 片山泰治
TR-77	Galerkin 法の収束性について On the Convergence of Galerkin's Method	1965 年 1 月	鳥海良三

## 航空宇宙技術研究所報告78号

昭和40年1月発行

発行所	航空宇宙技術研究所
	東京都調布市深大寺町1,880
	電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)
印刷所	笠井出版印刷社
	東京都港区芝南佐久間町1の53