

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR- 80

変分法直接解法において解に及ぼす
束縛の数値的影響

— 薄肉開断面片持梁の純振り振動の例 —

埴 武 敏・越 出 慎 一

1965 年 1 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

変分法直接解法において解に及ぼす 束縛の数値的影響*

— 薄肉開断面片持梁の純振り振動の例 —

埜 武 敏**・越 出 慎 一**

Numerical Effect of Constraints in Calculus of the Direct Variational Method

—in Case of Pure Torsional Vibration of Thin Walled
Beams of Open Cross Section—

By Taketoshi HANAWA and Shinichi KOSHIDE

In the previous paper TR-12, the free coupled vibration of the thin walled beams of open cross section with various end conditions were carried out.

There, in the case of the cantilevered pure torsional vibration the numerical convergence was not good than the other cases.

In this paper this convergence problem was examined, and compared with the results obtained by general variational method, numerically. Also, the effect of the constraint for the test function was obtained numerically.

1. 緒 言

さきに発表された航技研報告 TR-12⁵⁾においては、薄肉開断面梁の自由振動一般について論じられているが、そのなかで片持梁の純振り振動の場合の近似解は収束がよくないことが示され、この理由について簡単に述べられている。ここではこの問題を中心に TR-12 で用いた計算法の吟味と、片持梁の純振り振動の例について近似解の数値的な吟味とを行なったものである。

変分法直接解法を利用する場合、用いる試験関数に課せられる束縛は与えられた束縛条件と、場合によっては変分法で誘導される自然境界条件とであるが、これら以外の束縛を余分に課すと一般に別の解となり、求める解の停留値より高い値になるという基本的な定理を例示した。ただ問題によっては、別の問題の解を利用して解とすることもよく行なわれる方法であり、問題の性質上別の問題との偏差が物理的に少ないと予想されるときにはその結果もあまり大差ないと思われるが、一般に異なった問題の解を利用するときには、求める問題と別の問題との違いを明確にし、もしできれば別の問題を利用する場合には、その数値的な影響を吟味しておくことは必要であろう。そして

* 昭和 39 年 12 月 28 日受付

** 機体第二部

このことはまた計算の近似を高めるため項数を増して計算する場合、どの程度まで意味があるものであるかという問題に関係した重要なことであろうと思われる。

梁および板の解法では均一梁の各種境界条件の固有関数を用いて、解をこの関数の和、または積和にして解く方法が普通に用いられる方法である。ここではこの方法を吟味することにする。

この方法を吟味するために基礎方程式の厳密解が容易な場合にはこれと比較し、一般には x の冪級数による試験関数を用いたエネルギー法による近似解と比較した。近似解と比較する場合にはその相違が明確にわかるところまで項数を上げ、数値解の収束の傾向をみて判定することにした。

2. 問題と航技研報告 TR-12 の解法

本論では TR-12 の薄肉開断面片持梁の純振り振動の場合の解法を例に吟味するのが目的であるが、同様な論法で吟味の対称となる M. V. Barton 等^{1),2)} の行なった片持板の曲げ振動の解法についてさきに略記することにする。

Barton の解法は図 1 のような板の振動を解くにあたって、一般には斜交座標を用いて、 ξ 方向に片持梁の固有関数 $\phi(\xi)$ 、 η 方向に両端自由梁の固有関数 $\psi(\eta)$ 、を用いて試験関数を

$$w(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n A_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\eta) \quad (1)$$

なる級数に展開してエネルギー法によって求めている。ここで $\phi_m(\xi)$ 、 $\psi_n(\eta)$ は梁の固有関数であるので

$\xi=0$ で

$$w(0, \eta) = \sum \sum A_{mn} \phi_m(0) \psi_n(\eta) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial w(0, \eta)}{\partial \xi} = \sum \sum A_{mn} \frac{d\phi_m(0)}{d\xi} \psi_n(\eta) = 0 \quad (3)$$

および

$\xi=a$ で

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \sum \sum A_{mn} \frac{d^2 \phi_m(a)}{d\xi^2} \psi_n(\eta) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = \sum \sum A_{mn} \frac{d^3 \phi_m(a)}{d\xi^3} \psi_n(\eta) = 0 \quad (5)$$

また $\eta=0, b$ で

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \sum \sum A_{mn} \phi_m(\xi) \frac{d^2 \psi_n}{d\eta^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} = \sum \sum A_{mn} \phi_m(\xi) \frac{d^3 \psi_n}{d\eta^3} = 0 \quad (7)$$

を満たす関数であるが Barton もことわっているように自然境界条件は満たしていない。もっとも

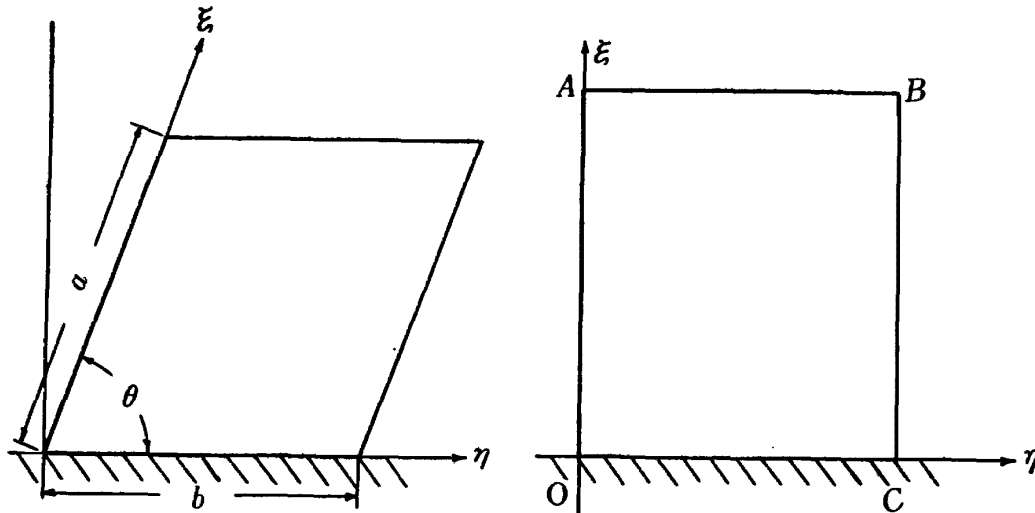


図 1 片持板振動解析の座標系

Barton はこの解法で項数を多く取れば厳密解に収束するとは言っておらず、その適用例を一組が 5 個の梁の固有関数からなる二組の固有関数を用いて解いたとき、 30° 以上の後退角となると第 2 モード以上は実用的でないことを示している。

板の自由辺の境界条件は周知のように、矩形板の場合に限っても図 1 の \overline{AB} 辺において

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0 \quad (9)$$

なる条件を満たさねばならない。いま ξ 方向の片持梁の固有関数 $\phi_m(\xi)$ を用いるとすると、 $\xi=a$ 端で (3) 式より、(8) 式の第 1 項は零となるが第 2 項の $\nu \partial^2 w / \partial \eta^2$ が残る。

また同様に (9) 式では $(2-\nu) \partial^3 w / \partial \xi \partial \eta^2$ が残ることになる。Barton の行なったように梁の固有関数で級数を仮定することは $\partial^2 w / \partial \xi^2 = 0$, $\partial^3 w / \partial \xi^3 = 0$, 等の余分な束縛を与えたことになり、自然境界条件として $\nu \partial^2 w / \partial \eta^2 = 0$, $(2-\nu) \partial^3 w / \partial \xi \partial \eta^2 = 0$, 等をその未定係数間で零になる (または零に近くなる。) ように直接法で求めたことになる。このため解は求める値より高い値に収束しているはずである。さきに述べたように Barton は二組の梁の固有関数を用いても 30° 位の後退角になると実用性が薄くなると言っているだけで、固有関数の個数を増していったときの固有値の収束の様子は示していないので不明であるが、この収束点が高いところにきているのではないかと思う。もちろん実験値との比較のみで、厳密解が求まらないこの種の計算ではその判定は困難であろうが、近似を増した場合の収束の様子と実験値との比較をして確かめる必要があるのではないかと思う。

次に薄肉開断面片持梁の吟味を行なうことにする。数値的吟味に入るまえに前報告の解法を略記する。

方程式の誘導については TR-12 に論じてあるので省略するが⁶⁾、純振り振動において曲げ振り剛性を考慮した場合の薄肉開断面梁の片持自由振動の方程式は

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \varphi_0}{dx^4} - GK \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} - mI_0 p^2 \varphi_0 = 0 \quad (10)$$

ここに

I_{ω} : 断面の曲げ振り剛性

E : ヤング率

K : 断面の振り剛性

G : 剪断剛性率

I_0 : 極慣性能率

m : 梁の質量分布

φ_0 : 断面の回転角

境界条件としては

$x=0$ で

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad (11), (12)$$

$x=L$ で

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} = 0 \quad (13)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^3 \varphi_0}{dx^3} - GK \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \quad (14)$$

で解く問題であった。TR-12 で用いた解法は、解として

$$\varphi_0 = \sum_n c_n u_n(x) \quad (15)$$

なる級数を用いている。

ここで $u_n(x)$ なる関数は

$$EI_{\omega} \frac{d^4 u_0}{dx^4} - mI_0 p^2 u_0 = 0 \quad (16)$$

なる方程式を満足し

$x=0$ で

$$u_0 = \frac{du_0}{dx} = 0 \quad (17)$$

$x=L$ で

$$\frac{d^3 u_0}{dx^3} = \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0 \quad (18)$$

なる境界条件を満たす均一梁の曲げ振動と同じ形の解で固定～自由の振動の固有関数とする。このような関数で展開すると自由端の一つの境界条件 (14) 式のうち $GK(d\varphi_0/dx)$ が残るのでこれを見かけの外力として方程式 (10) に δ -関数を用いて含ませ、次の式を導く。

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi_0}{dx^4} - GK \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} - mI_0 p^2 \varphi_0 + GK \left(\frac{d\varphi_0}{dx} \right)_{x=L} \delta(x-L) = 0 \quad (19)$$

この式の φ_0 に (15) 式を代入し $u_n(x)$ を乗じ、積分して $u_n(x)$ の直交性を利用して整理すると次のような c_n に関する連立方程式が得られる。

$$c_n \left(\frac{\gamma_n^4 EI_\omega}{L^4} - mI_0 p^2 \right) + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A'_{mn} = 0 \quad (20)$$

ここに γ_n は (16)～(18) 式の第 n 固有値で

$$A'_{mn} = \int_0^L \frac{du_m(x)}{dx} \frac{du_n(x)}{dx} dx \quad (21)$$

である。 $u_n(x)$ を 4 個とって p^2 を求め、 $GK \gg EI_\omega$ の場合の値を厳密解と比較したのが TR-12 (10 ページ (6) 表) に示した値である。

3. 変分法による c_n に関する連立方程式の誘導

さて、ここで 2 節に示した前報告の解法を変分法により吟味し (20) 式を誘導してみる。

ポテンシャルエネルギーおよび運動エネルギーはそれぞれ次式で与えられる。

$$U = \frac{EI_\omega}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{GK}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (22)$$

$$T = \frac{mI_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (23)$$

ゆえに空間座標に関する汎関数としては

$$\Pi = EI_\omega \int_0^L \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} \right)^2 dx + GK \int_0^L \left(\frac{d\varphi_0}{dx} \right)^2 dx - mI_0 p^2 \int_0^L \varphi_0^2 dx \quad (24)$$

となる。試験関数として完全関数系をなし、撓みを表わす ϕ_n なる関数の級数からなる φ_0 を用いる。

$$\varphi_0 = \sum a_n \phi_n(x) \quad (25)$$

本報告では自由端の問題が吟味の中心なのであるが、前報告の (20) 式を誘導したとき用いた束縛を $\phi_n(x)$ に加えてゆき、その束縛を吟味する。(25) 式を (24) 式に代入して a_n に関して偏微

分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = & \left| EI_\omega \frac{d\phi_n}{dx} \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} \right|_0^L + \left| GK\phi_n \frac{d\varphi_0}{dx} \right|_0^L - \left| EI_\omega \phi_n \frac{d^3\varphi_0}{dx^3} \right|_0^L \\ & + \int_0^L \left(EI_\omega \frac{d^4\varphi_0}{dx^4} - GK \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - mI_0 p^2 \varphi_0 \right) \phi_n dx \end{aligned} \quad (26)$$

いま

$$\phi_n(0) = 0 \quad (27)$$

$$\phi_n'(0) = 0 \quad (28)$$

$$\phi_n''(L) = 0 \quad (29)$$

なる条件を満たす関数系 ϕ_n を用いると (26) 式は

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = \left\{ \phi_n \left(-EI_\omega \frac{d^3\varphi_0}{dx^3} + GK \frac{d\varphi_0}{dx} \right) \right\}_{x=L} + \int_0^L \left(EI_\omega \frac{d^4\varphi_0}{dx^4} - GK \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - mI_0 p^2 \varphi_0 \right) \phi_n dx \quad (30)$$

となる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0 \quad (31)$$

が n に関して無関係に成立するためには

$$\left(-EI_\omega \frac{d^3\varphi_0}{dx^3} + GK \frac{d\varphi_0}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (32)$$

$$L(\varphi_0) = 0 \quad (33)$$

が成立する。

TR-12 で

$$\phi_n'''(L) = 0 \quad (34)$$

なる条件を用いているので、この条件も用いることにすれば (30) 式は

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = \left\{ \phi_n GK \frac{d\varphi_0}{dx} \right\}_{x=L} + \int_0^L L(\varphi_0) \phi_n dx \quad (35)$$

となる。いま右辺の第 1 項を δ -関数を用いて第 2 項に含ませる操作を行なうと (35) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = & \int_0^L L(\varphi_0) \phi_n dx + GK \int_0^L \phi_n \frac{d\varphi_0}{dx} \delta(x-L) dx \\ = & \int_0^L \left\{ EI_\omega \frac{d^4\varphi_0}{dx^4} - GK \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - mI_0 p^2 \varphi_0 + GK \frac{d\varphi_0}{dx} \delta(x-L) \right\} \phi_n dx \end{aligned} \quad (36)$$

となる。また ϕ_n が (16) 式の解とすれば

$$\frac{d^4\phi_n}{dx^4} = \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 \phi_n \quad (37)$$

を満たす。これらの ϕ_n に課した条件は梁の固有関数であることになる。 ϕ_n は直交性がありこれを用いて (36) 式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} &= \int_0^L \left\{ EI_\omega \sum a_i \left(\frac{\gamma_i}{L} \right)^4 \phi_i \phi_n - GK \sum a_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \phi_n - mI_0 p^2 \sum a_i \phi_i \phi_n \right\} dx \\ &\quad + GK \int_0^L \sum a_i \frac{d\phi_i}{dx} \phi_n \delta(x-L) dx \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ EI_\omega \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 - mI_0 p^2 \right\} a_n - GK \sum a_i \int_0^L \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \phi_n dx + GK \sum a_i \left(\frac{d\phi_i}{dx} \phi_n \right)_{x=L} \\ &= a_n \left\{ EI_\omega \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 - mI_0 p^2 \right\} + GK \sum a_i \left\{ (\phi_i' \phi_n)_L - \int_0^L \phi_i'' \phi_n dx \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

また

$$\int_0^L \phi_i'' \phi_n dx = \left| \phi_i' \phi_n \right|_0^L - \int_0^L \phi_i' \phi_n' dx \quad (40)$$

$$(\phi_i' \phi_n)_{x=0} = 0 \quad (41)$$

より

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = a_n \left\{ \frac{EI_\omega \gamma_n^4}{L^4} - mI_0 p^2 \right\} + GK \sum a_i A'_{in} = 0 \quad (42)$$

となり (20) 式が誘導できる。

4. 見かけの外力法の変分法的吟味

2節, 3節において誘導したように, 見かけの外力を方程式に加える方法の変分法的な経過は一応たどれたわけである。つまり変分法で誘導される自由端の自然境界条件の (32) 式で, $\phi_0'''(L)=0$ なる関数を取ったときには $GK\varphi_0'(L)$ の項が残ってしまうので, これを方程式に含ませたことに相当するといえよう。(32) 式の第1項 $\varphi_0'''(L)=0$, を束縛としたことには理由はない。これは $\varphi_0'(L)=0$, を取っても同様である。数学的には (32) 式の $x=L$ における和の形で零となることが必要である。したがって試験関数に過度の束縛を与えたことになる。もちろん (30) 式の右辺第1項全体を δ -関数で方程式の中に含ませれば試験関数には $\varphi_0(0)=0$, $\varphi_0'(0)=0$, および $\varphi_0''(L)=0$, の束縛のみとなり梁の固有関数を用いるわけにはいかない。ただし $k=\sqrt{LGK/EI_\omega}=0$ の場合には問題は生じない。

以上の理由により $k \neq 0$ の場合には TR-12 の解法は過度の束縛を与えた解, つまり

$$\begin{aligned} x=0 \text{ で} \quad & \phi_n=0, \quad d\phi_n/dx=0 \\ x=L \text{ で} \quad & d^2\phi_n/dx^2=0, \quad d^3\phi_n/dx^3=0 \end{aligned}$$

なる束縛のある関数で解を展開した形で与えて

$$\varphi_0 = \sum a_n \phi_n(x) \quad (43)$$

を作り、これより求められるポテンシャルエネルギーを最小にするように a_n 間の係数を定めたものである。すなわち $L(\varphi_0)=0$, を $\varphi_{0x=0}=\varphi'_{0x=0}=0$, $\varphi_0''_{x=L}=0$, $\varphi_0'''_{x=L}=0$ なる束縛で自然境界条件 $(GKd\varphi_0/dx)_{x=L}=0$, を満たすように求めたことになる可言えよう。この解が微分方程式の解として与えられた条件で解けるか、変分法として解けるかの問題は数学的な問題なのでここでは除外し、数値的に求まった解について吟味することにした。

5. 数値計算法の比較

次に以上の結果を数値的にみるために、束縛を種々の形で入れた直接解法の近似計算法を行なってみたのでその結果を示す。

- (1) これは前報告 TR-12 で行なった方法
- (2) 試験関数として x の冪級数によるもので

$$\varphi_0 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (44)$$

とし、これは $x=0$ での束縛条件を持った関数で $x=L$ での条件は汎関数を停留させることにより自然に満たされるものとして束縛条件としては入れてないもの。

(3) 試験関数としては (2) の (44) 式と同じ関数であるが (1) と比較する意味で (2) の束縛以外に $x=L$ で $\varphi_0'''(L)=0$ なる束縛の入った関数とした場合で、他の自由端の境界条件は (2) と同様に自然境界条件として落したものである。 $\varphi_0'''(L)=0$ なる条件は Lagrange の乗法または消去法によった。つまり $x=0$ での束縛条件を持った関数で $x=L$ では $\varphi_0'''(L)=0$ と無限大項数においては $\varphi_0'(L)=0$, $\varphi_0''(L)=0$, を満たすような関数ということになる。

- (4) 試験関数としては x の冪級数で

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (45)$$

なる一般的な関数を用い

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ で } \quad \varphi_0=0 \\ \quad \quad \quad \varphi_0'=0 \\ x=L \text{ で } \quad \varphi_0''=0 \\ \quad \quad \quad EI_{\omega}\varphi_0''' - GK\varphi_0'=0 \end{array} \right\} \quad (46)$$

なる束縛を Lagrange の乗法で入れたもの (付録参照)。

以上 4 種の直接法による近似解法を示した。基底関数の種類の相違もあり厳密な数値的吟味は不

可能であるが予想としては (2) と (4) の場合がよく, (1) と (3) の場合は束縛が入った高い値を示すであろう。

数値計算結果を図 2~図 4 に示した。数値計算は手計算によったもので精確でないところもあるが, 予想のような傾向を示すことがわかる。

図 6 は $k=L\sqrt{GK/EI_\omega}=\infty$ の場合を示したもので, (10) 式および (14) 式からわかるように $k=\infty$ の場合は Saint-Venant の振り剛性のみによる振り振動となり, これには厳密解が求められているのでそれと比較をした。

図 2 は k が変化したときに解を両端支持梁の解 (これは厳密解が求まる。) と比較した値 p_n/p_{ns} の変化を示したもので, 図よりわかるように $k=0$ から $k=\infty$ と変化するにつれて p_n/p_{ns} の値に束縛の影響が増してくる。

図 7 と図 3 は $k=0$ 近傍の値を吟味したもので有限項の場合 TR-12 の方法では $k=0$ では厳密解と一致するが冪級数による関数では厳密解と一致しない。

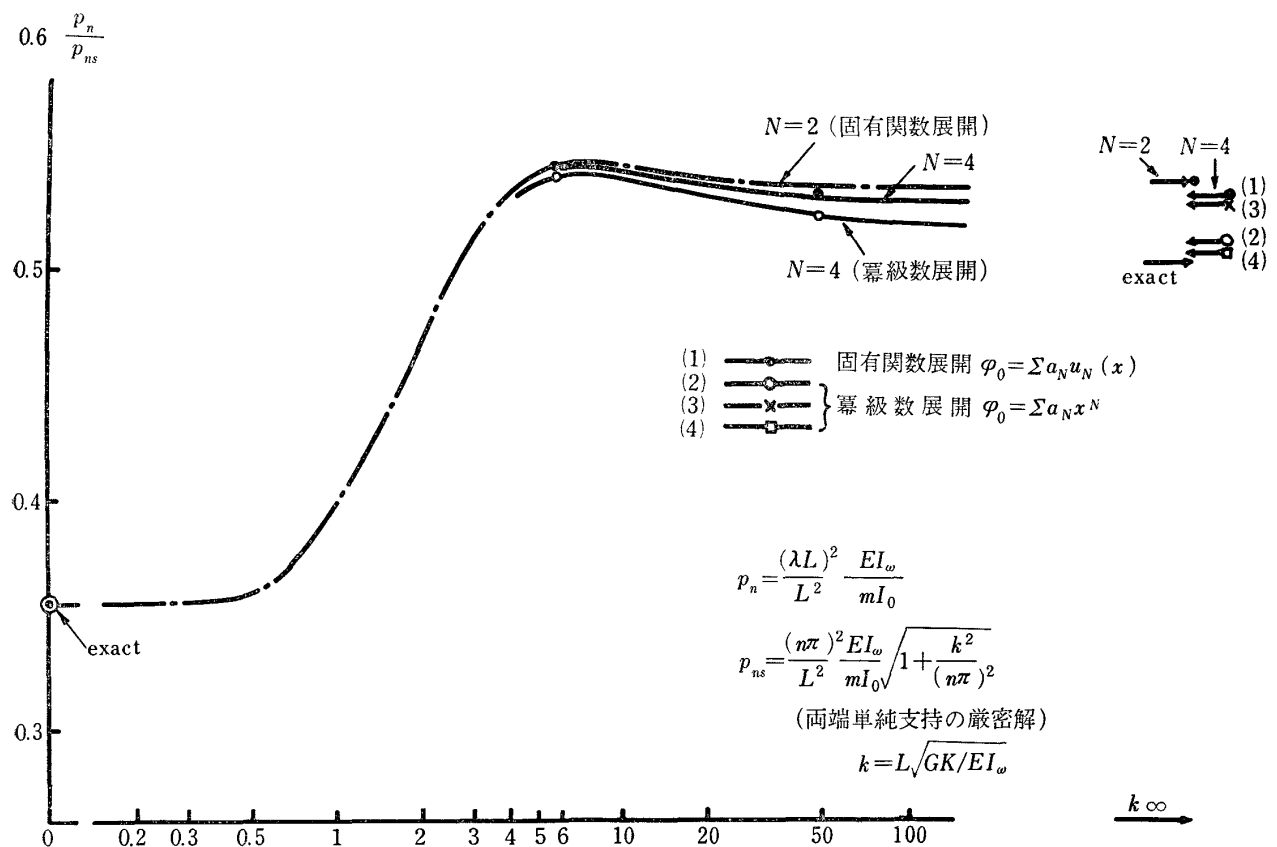


図 2 k の変化した時の振動数の変化の様子 (1st Mode)

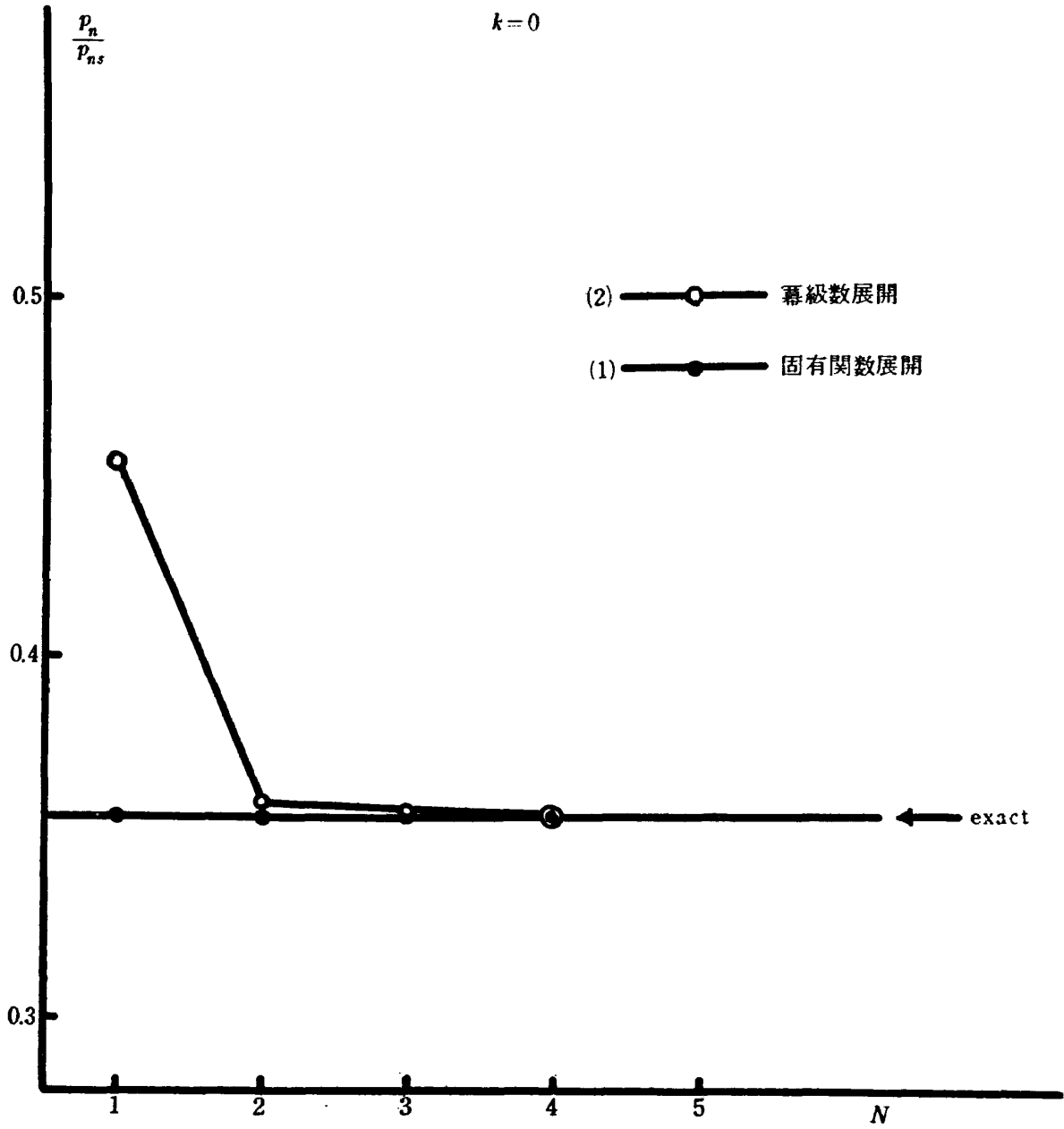


図 3 $k=0$ での近似項数の増加による振動数の変化 (1st Mode)

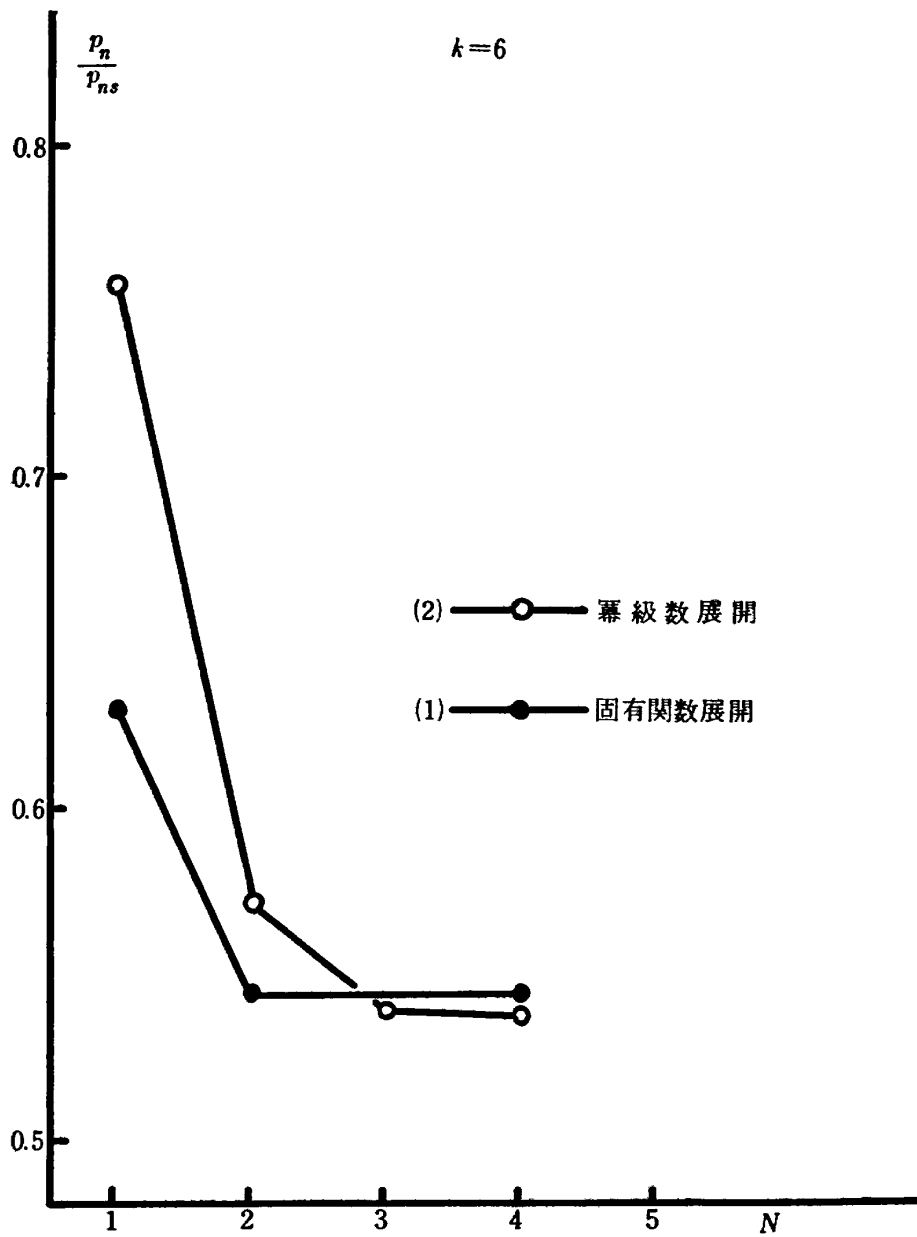


図 4 $k=6$ での近似項数の増加による振動数の変化 (1st Mode)

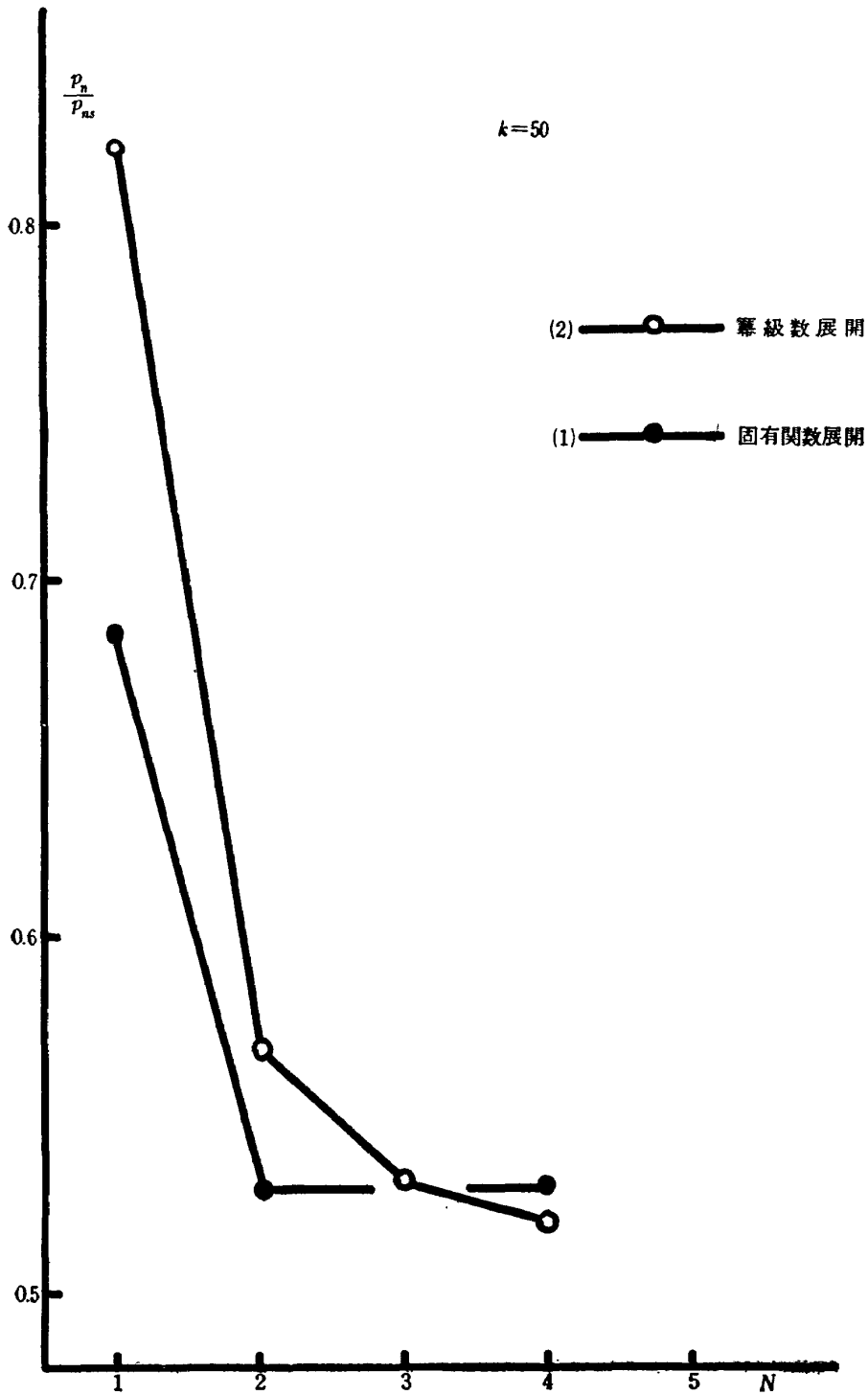


図 5 $k=50$ での近似項数の増加による振動数の変化 (1st Mode)

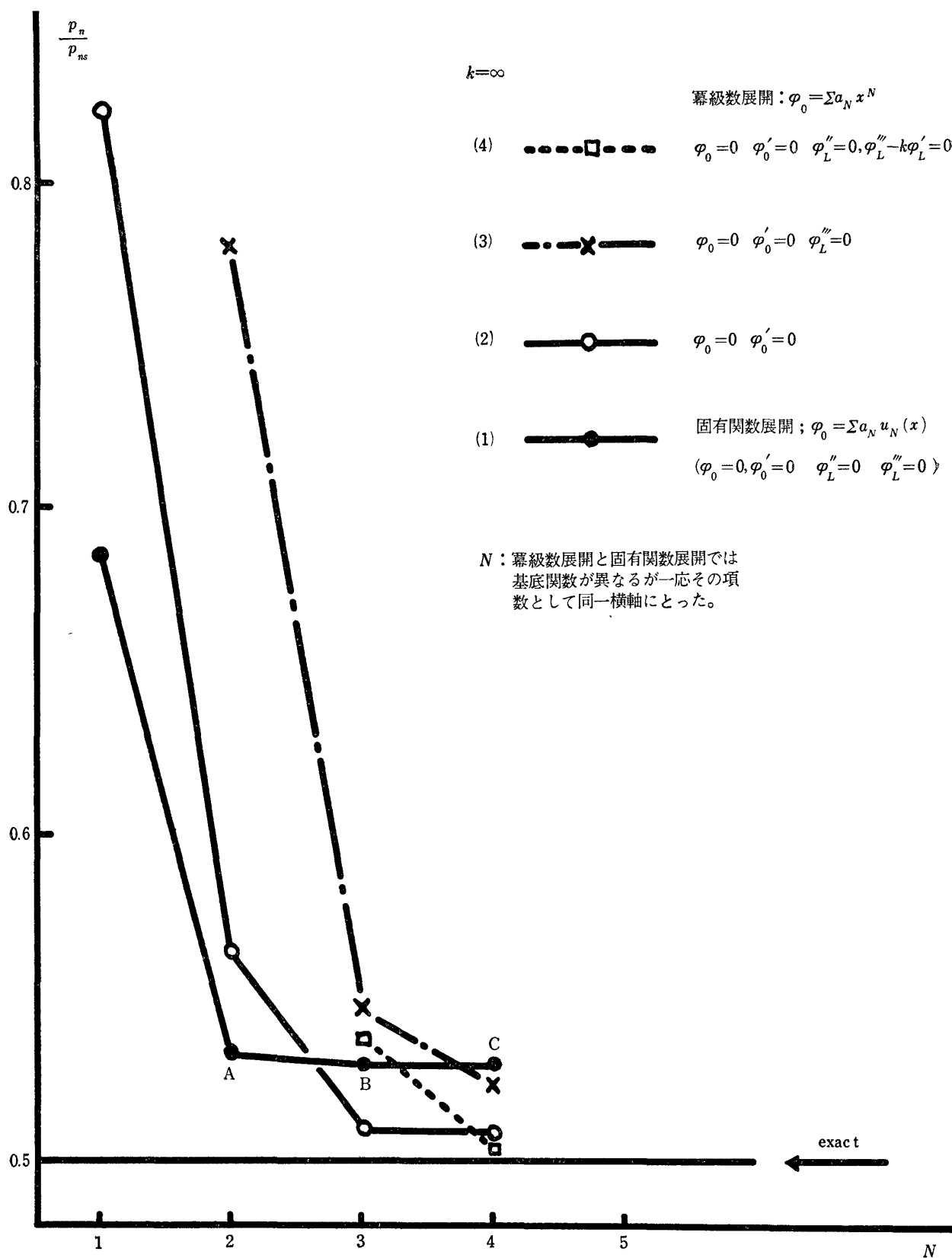
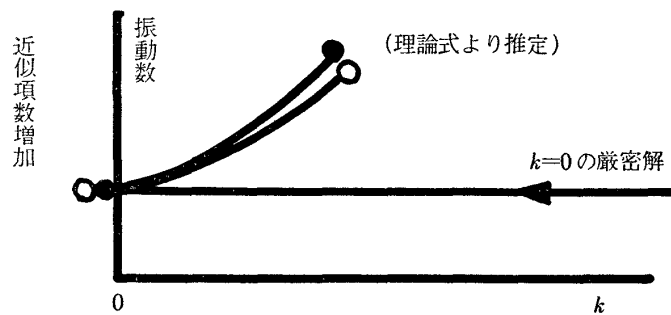
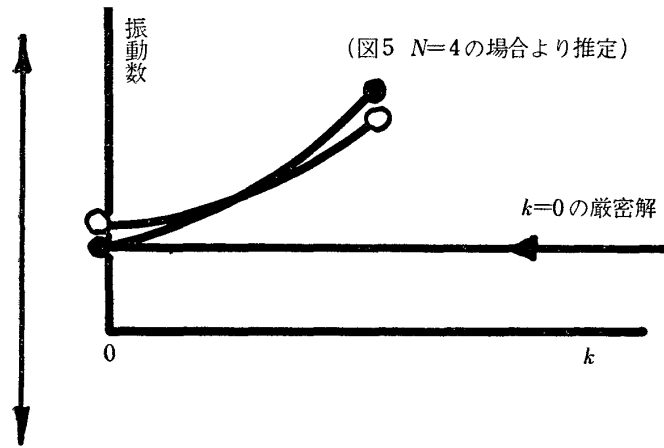
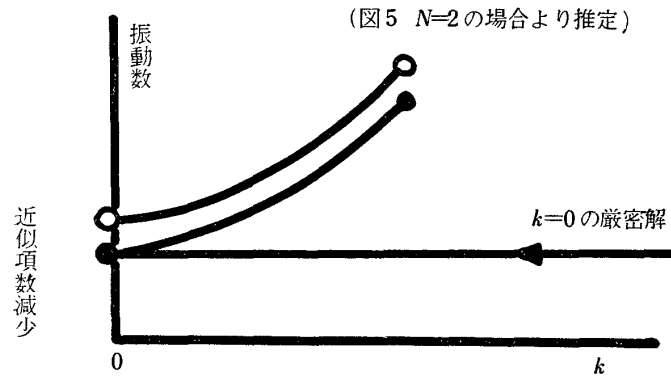


図 6 $k = \infty$ での近似項数の増加による振動数の変化 (1st Mnde)



- (1) —●— 固有関数展開
- (2) —○— 冪級数展開

図7 $k=0$ 近傍での近似項数の増加による図1の細部変化 (1st Mode)

6. 結 語

計算結果によって薄肉開断面片持梁の純捩り振動の例に関して次のような結論が得られる。

(1) TR-12 の見かけの外力によって方程式に補正項を加え、均一梁の固有関数で展開する方法は $k=0$ 以外では項数を増しても正解に収束しないであろう。

(2) 大略の計算結果からみて $\phi_n'''(L)=0$ の束縛により $k=\infty$ で第 1 mode において 4 個の固有関数を用いたとき、約 5% 高い値になり図 6 A, B, C 点よりみてほぼ収束している。

(3) 自然境界条件として自由端の条件を落す冪級数を用いた直接法によれば 4 項近似で $k=\infty$ で 1.5% くらいまでに求められる。

以上の理由から TR-12 の解法では項数 (固有関数) を増すことは、収束の点から、また固有関数の高次のもので求めることの困難な点から限度があると思われる。これは板の場合の Barton の解法にも同様なことが言えるであろう。しかしながら結局は近似を取ることを考えると、この計算法は上限を与えるもので、多少束縛が入ってもその上限が高くなり安全側であることを考えれば連成振動の場合の拡張などを考えると便利な点があろう。 k が大きな場合でより精密な解を得たい場合には問題となる。

最後に本報告を作るにあたって TR-12 の主筆者、東京大学、川井助教授のご激励があったことを深く感謝いたします。

文 献

- 1) M.V. Barton; Vibration of Rectanglar and skew Cantilever Plates. Jour. Applied Mechanics 1951. Joun.
- 2) D. Young; Vibration of Rectanglar Plates by the Ritz's Method Jour. Applied Mechanics 1950. December.
- 3) 林 毅, 村 外志夫; 変分法 (応用数学講座, 第 13 巻), コロナ社
- 4) 寺沢 寛一; 数学概論 (応用編), 岩波書店
- 5) 川井 忠彦, 埴 武敏; 薄肉開断面梁の自由振動について, 航技研報告 TR-12 (昭和 36)
- 6) J. Gere; Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section Jour. Applied Mechanics, 1954/12.

(付録) Lagrange の乗法による解法

(45) 式の試験関数を (24) 式に代入してポテンシャルエネルギーとして

$$J = \sum \sum \frac{i(i-1)s(s-1)}{(i+s-1)} a_i a_s + k^2 \sum \sum \frac{is}{(i+s-1)} a_i a_s - \lambda^2 \sum \sum \frac{1}{(i+s+1)} a_i a_s \quad (47)$$

(46) 式の束縛条件は (45) 式を用いて、係数間の関係式として

$$\varphi_0(0) = a_0 = 0; N_{01} \quad (48)$$

$$\varphi_0'(0) = a_1 = 0; N_{02} \quad (49)$$

$$\varphi_0''(L) = \sum n(n-1)a_n = 0; N_{11} \quad (50)$$

$$\varphi_0'''(L) - k^2 \varphi_0'(L) = \sum n\{(n-1)(n-2) - k^2\}a_n = 0; N_{12} \quad (51)$$

となるから Lagrange の乗法により停留値となるべき汎関数としては

$$I = J + \lambda_{01} N_{01} + \lambda_{02} N_{02} + \lambda_{11} N_{11} + \lambda_{12} N_{12} \quad (52)$$

なる自由変分問題となる。I を a_n および λ_{pq} に関して偏微分して零とすると

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 2 \sum \left[\frac{i(i-1)s(s-1)}{i+s-3} + k^2 \frac{is}{i+s-1} - \lambda^2 \frac{1}{i+s+1} \right] a_s = A_i \quad (53)$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} A_i + \lambda_{01} \frac{\partial N_{01}}{\partial a_i} + \lambda_{02} \frac{\partial N_{02}}{\partial a_i} + \lambda_{11} \frac{\partial N_{11}}{\partial a_i} + \lambda_{12} \frac{\partial N_{12}}{\partial a_i} &= 0 \\ \dots\dots\dots &= 0 \\ \dots\dots\dots &= 0 \\ N_{01} &= 0 \\ N_{02} &= 0 \\ N_{11} &= 0 \\ N_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

を得る。(54) 式から a_n λ が零でなく求まる条件より λ^2 を与える振動数方程式として (55) 式が得られる。

表 1

∂	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_{01}	A_{02}	A_{11}	A_{12}
A_0	$-x$	$-0.500000x$	$-0.333333x$	$-0.250000x$	$-0.200000x$	$-0.166667x$	0.5	0	0	0
A_1	$-0.500000x$	k^2	k^2	k^2	k^2	k^2	0	0.5	0	$-0.5k^2$
A_2	$-0.333333x$	k^2	$4+1.333333k^2$	$6+1.500000k^2$	$8+1.600000x$	$10+1.66667k^2$	0	0	1	$-k^2$
A_3	$-0.250000x$	k^2	$6+1.500000k^2$	$12+1.800000k^2$	$18+2.000000k^2$	$24+2.142855k^2$	0	0	3	$3-1.5k^2$
A_4	$-0.200000x$	k^2	$8+1.600000k^2$	$18+2.00000k^2$	$28.8+1.714284k^2$	$40+2.5k^2$	0	0	6	$12-2k^2$
A_5	$-0.166667x$	k^2	$10+1.666666k^2$	$24+2.142855k^2$	$40+2.5k^2$	$57.142800+2.777778k^2$	0	0	10	$30-2.5k^2$
A_{01}	0.500000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_{02}	0	0.500000	0	0	0	0	0	0	0	0
A_{11}	0	0	1	3	6	10	0	0	0	0
A_{12}	0	$-0.500000k^2$	$-k^2$	$3-1.500000k^2$	$12-2k^2$	$30-2.5k^2$	0	0	0	0

(55)

$P \sim 1.581$
Pexact (1.57)

$x = 2.5$

$k^2 = \infty$

$= 0$

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|---|-------------|----------------------------|
| TR- 1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験
Preliminary Investigation of N.A.L. Transonic
Wind-Tunnel Test-Section | 1960 年 2 月 | 平 木 一, 石井孝雄
大島信彦 |
| TR- 2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機
I. 模型送風機による性能試験
22.5 MW Main Blower for N.A.L. Transonic
Wind Tunnel
I. Performance Test of the Model Blower | 1960 年 5 月 | 山内正男, 松木正勝
塩入淳平, 富永守之 |
| TR- 3 | 風洞用角度計の試作実験
An Experiment on Angle Measuring Instru-
ments of Airplane Models in Wind Tunnel Test | 1960 年 8 月 | 小橋安次郎, 長洲秀夫
高島一明, 波木井 潔 |
| TR- 4 | 回転円板の強度
Strength of Rotating Discs | 1960 年 9 月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR- 5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音速
フラッタ試験設備の計画と整備試験
Design and Development of N.A.L. 60 cm×60
cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for
Flutter Testing | 1960 年 12 月 | 中井暎一, 橋瓜 宏
中村泰治 |
| TR- 6 | 高温歪ゲージの温度特性
Temperature Characteristics of High Tempera-
ture Strain Gage | 1960 年 12 月 | 竹中幸彦 |
| TR- 7 | 遷音速風洞の測定部
On the Transonic Test Section | 1961 年 1 月 | 村崎寿満 |
| TR- 8 | 繰返し荷重試験装置の予備試験
Preliminary Study for Development of Repeat-
ed Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft
Structures | 1961 年 3 月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR- 9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance Theory of
Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory— | 1961 年 3 月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades | 1961 年 3 月 | 松木正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild Steel | 1961 年 4 月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-12 | 薄肉開断面梁の自由振動について
On the Natural Vibration of Thin-Walled Bea-
ms of Open Cross Section | 1961 年 5 月 | 川井忠彦, 埴 武敏 |
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての実験的研究
Experimental Results of the Interaction between
Shock Wave and Turbulent Boundary Layer | 1961 年 7 月 | 須郷道也, 伝田幸雄 |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層
On Compressible Boundary Layer in Magneto-
dynamics | 1961 年 7 月 | 須郷道也, 小沢五郎 |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・校正
Miniature Pressure Pickups for Measuring the
Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic
Flow | 1961 年 8 月 | 石井孝雄, 柳沢三憲 |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法
による数値解法
On the Difference Method Solutions of the
Mixed Boundary Value Problems of Parabolic
Partial Differential Equations | 1961 年 11 月 | 樋口一雄, 三好 甫 |

TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge-Beam Method of Measuring Gas Density	1961 年 12 月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の二 次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961 年 11 月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength on High-Speed Rotor	1961 年 12 月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の 数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962 年 1 月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962 年 1 月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962 年 2 月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモ ンテカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differen- tial Equations	1962 年 2 月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン要 素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962 年 2 月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の計画と構 造 Desing and Construction of the 2m×2m Transonic Wind Tunnel at the National Aeronautical Laboratory	1962 年 3 月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962 年 3 月	河崎俊夫, 岡部裕二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962 年 7 月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao HOSOKAWA
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962 年 8 月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962 年 10 月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962 年 10 月	川井忠彦, 塙 武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定とその微小振り振動 について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962 年 11 月	川井忠彦, 林 洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962 年 11 月	川井忠彦, 江川幸一

TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田宗四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田勇, 松崎利一
TR-37T	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu WADA
TR-38	鑄鉄のような脆性材料からなる円板の回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究 (第1報) —その性能におよぼす各種因子の影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full-Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川敏一
TR-42	非定常境界層の相似解とその安定 A Similar Solution of Unsteady Laminar Boundary Layer and Its Stability Characteristics	1963年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤 博, 藪田光弘 坂口 一, 山崎紀雄
TR-45	固有値問題 ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦, 泉 日出夫 戸川隼人, 林 洋一
TR-47	鑄鉄円板の回転破壊におけるコリオリの力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年7月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林 二 謙
TR-49	高速軸流圧縮機の研究 (III) —翼の厚さの影響— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (III) —Effects of Blade Thickness—	1963年9月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相

TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の 数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction	1963年9月	樋口一雄, 能美 力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unstable System	1963年9月	武田 峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pabble-Bed Heater	1963年9月	林 二謙
TR-53	円管流の非定常熱伝達 (第1報) 一壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963年10月	林 二謙
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による 数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963年10月	三好 甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor which Has a Boss	1963年11月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-56	垂音速および遷音速における二次元非定常空気 力の測定 (第1報) Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I)	1963年11月	中村泰治, 田辺義一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of an Oscillating Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度 500 フィートないし 10,000 フィートにおける 上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of Gust Velocities from 500 to 10,000 feet Altitude	1964年1月	竹内和之, 小野幸一 山根皓三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Date Reduction System and Its Performance	1964年1月	田畑浄治, 中 正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964年1月	堀 武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音 速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数 の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964年2月	中井暎一, 小原 瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964年2月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964年3月	小橋安次郎, 藤 藤 浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁歪計器の応用 Some Developments of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964年3月	幸尾治朗

- TR-65 非定常境界層の安定に関する実験
An Experimental Investigation of Stability
Characteristics of Unsteady Laminar Boundary
Layer 1964年7月 小橋安次郎, 恩地 瑛
- TR-66 変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の場合)
Numerical Examination on the Fulfilment of
Natural Boundary Conditions by the Approximate
Solutions for Bending and Vibration
of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-
Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered
Wing Plates) 1964年6月 川井忠彦, 埴 武敏
越出慎一, 戸川隼人
落合 薫
- TR-67 プラズマ発生装置の諸特性
Characteristics of a Vortex Stabilized
Plasma Generator 1964年4月 井上建二, 野村茂昭
- TR-68 回転翼の線型理論 (I) —揚力面理論—
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor
Blades (I) —Lifting Surface Theory— 1964年6月 市川輝雄
- TR-69 高速軸流タービンの研究 (I)
An Investigation of the High Speed Axial Flow
Turbine (I) 1964年7月 鳥崎忠雄, 能瀬弘幸
森田光男
- TR-70 汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性
Design, Construction and Characteristics of Flight
Simulator at National Aerospace Laboratory 1965年1月 松浦陽恵, 樋口一雄
池谷光栄, 堀川勇壮
村上 力, 百名盛之
三好範子, 岡部正典
- TR-71 塑性の三方向せん断理論
塑性変形による異方性
塑性流動に及ぼす中間主応力の影響
応力状態と塑性変形の形
Three-Shear Theory of Plasticity
Anisotropy Due to Plastic Deformation
Influence of Intermediate Principal Stress on
Plastic Flow
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation 1964年7月 中西不二夫, 佐藤和郎
- TR-71T Three Shear Theory of Plasticity
Anisotropy Due to Plastic Deformation
Influence of Intermediate Principal Stress on
Plastic Flow
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation
Internal Shearing Resistances in the Three Shear
Theory of Plasticity September 1964 Fujio NAKANISHI
Yasuo SATO
- TR-72 補助翼バズに関する実験
Some Experiments on Control-Surface Buzz 1965年1月 中村泰治, 田辺義一
- TR-72T Some Experiments on Control-Surface Buzz November 1964 Yasuharu NAKAMURA
Yoshikazu TANABE
- TR-73 軸対称凝み点付近の溶融層の安定性
Stability of the Melted Layer near the Axisym-
metric Stagnation Point 1964年11月 相原康彦
- TR-74 遷音速パネルフラッタの研究
The Experimental and Theoretical Studies of
Transonic Panel Flutter 1964年11月 石井孝雄, 柳沢三憲
- TR-75 統計流体力学の初期値問題について
On the Initial-Value Problem in Statistical
Hydromechanics 1964年12月 細川 巖

- | | |
|---|---|
| <p>TR-76 高速軸流圧縮機の研究 (IV)
An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV)</p> | <p>1965 年 1 月 大山 耕一, 松木 正勝
西脇 英夫, 岩部 柱相
片山 泰治</p> |
| <p>TR-77 Galerkin 法の収束性について
On the Convergence of the Galerkin's Method</p> | <p>1965 年 1 月 鳥海 良三</p> |
| <p>TR-78 二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法
Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems</p> | <p>1965 年 1 月 三好 甫</p> |
| <p>TR-79 引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の大振幅振動の影響について
Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates under Initial Tension or Compression</p> | <p>1965 年 1 月 田寺 木一, 古関 昌次
泉 日出夫</p> |

航空宇宙技術研究所報告 80 号

昭和 40 年 1 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1,880
電話 武蔵野 (0422) (4) 9171 (代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町 1 の 53
