

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-85

回転翼の線型理論(II)

—揚力線理論—

市川輝雄

1965年3月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-60 変厚平板翼の振動について  
On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness 1964年1月 塙 武敏, 越出慎一  
戸川隼人, 川井忠彦
- TR-61 後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究  
Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45° 1964年2月 中井暎一, 小原 瑛
- TR-62 超音速における翼端板効果  
The Effects of End-plates at Supersonic Speeds 1964年2月 尾形吉和
- TR-63 非定常流中の円柱に作用する空気力について  
Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow 1964年3月 小橋安次郎, 遠藤 浩  
北村清美
- TR-64 航空力学における磁わい計器の応用  
Some Developments of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics 1964年3月 幸尾治朗
- TR-65 非定常境界層の安定に関する実験  
An Experimental Investigation of Stability Characteristics of Unsteady Laminar Boundary Layer 1964年7月 小橋安次郎, 恩地 瑛
- TR-66 変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の場合)  
Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates) 1964年6月 川井忠彦, 塙 武敏  
越出慎一, 戸川隼人  
落合 薫
- TR-67 プラズマ発生装置の諸特性  
Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator 1964年4月 井上建二, 野村茂昭
- TR-68 回転翼の線型理論 (I)  
—揚力面理論—  
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I)  
—Lifting Surface Theory— 1964年6月 市川輝雄
- TR-69 高速軸流タービンの研究 (I)  
—タービンノズル円環翼列の研究—  
An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)  
—An Investigation of the Annular Turbine-nozzle Cascade— 1964年7月 鳥崎忠雄, 能瀬弘幸  
森田光男
- TR-70 汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性  
Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory 1965年1月 松浦陽恵, 樋口一雄  
池谷光榮, 堀川勇壯  
村上 力, 百名盛之  
三好範子, 岡部正典
- TR-71 塑性の三方せん断理論  
塑性変形による異方性  
塑性流動に及ぼす中間主応力の影響  
応力状態と塑性変形の形  
Three Shear Theory of Plasticity  
Anisotropy Due to Plastic Deformation  
Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow  
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation 1964年7月 中西不二夫, 佐藤和郎
- TR-71T Three Shear Theory of Plasticity  
Anisotropy Due to Plastic Deformation  
Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow  
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation  
Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity September 1964 Fujio NAKANISHI  
Yasuo SATO
- TR-72 補助翼バズに関する一実験  
Some Experiments on Control-Surface Buzz 1965年1月 中村泰治, 田辺義一
- TR-72T Some Experiments on Control-Surface Buzz November 1964 Yasuharu NAKAMURA  
Yoshikazu TANABE

# 回転翼の線型理論\* (II)

—揚力線理論—

市川輝雄\*\*

## Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (II)

—Lifting-Line Theory—

By Teruo ICHIKAWA

Lifting-line integral equations of the rotor blade are derived from the lifting-surface equation that has been obtained in the previous report. Approximations of the same degree as those in Weissinger's lifting-line theory of the fixed wing are used. The lifting-line equations consist of two equations: an equation of circulation and an equation of "circulation moment". The boundary condition is expressed in a form suitable to the lifting-line theory. The section aerodynamic loading can be expressed by the circulation and the circulation moment.

Finally, the case of steady vertical flight is considered in which a part of the kernel function can be expressed by the same series of modified Bessel functions as that in the propeller theory.

### まえがき

前報<sup>1)</sup>では線型化の仮定の下で厳密な、回転翼の揚力面としての積分方程式を導出した。それは回転翼の理論の第一段階としてであって、揚力面の方程式をそのままの形で解くことは考えていなかった。本報では実際の計算を目的とする揚力線理論を展開する。

揚力線の方程式は揚力面の方程式から数学的近似によって導かれる。これは定常の固定矩形翼の場合に確立されている手法<sup>2)</sup>の拡張である。従来の代表的なプロペラ理論<sup>3),4),5)</sup>は固定翼の Prandtl の揚力線理論と同程度の近似であるが、一般の回転翼では流れがブレードの翼幅方向に必ずしも垂直でないので、後退翼におけると同じ理由によって上の近似は使えない。したがって本理論では後退翼にも有効な Weissinger の揚力線理論と同程度の近似を採用する。さらに、単位翼幅の揚力を求める際に、循環のほか、流れの非定常性のために“循環モーメント”ともよぶべき量が必要である。それゆえ揚力線の方程式は循環の方程式と循環モーメントの方程式の二つからなる。

\* 昭和 40 年 2 月 12 日受付

\*\* 飛行実験部

最後に特別の場合として垂直飛行の場合を考える。この場合の方程式はプロペラの理論のそれと直接比較しうるもので、核関数の一部をプロペラの理論におけると同様な変形されたベッセル関数の無限級数で表わすことができる。

## 記 号

本報で新たに導入したもののみを記す。

$$\tau'_{1m} = \tau_{1m}(r', \psi), \quad \tau'_{2m} = \tau_{2m}(r', \psi)$$

$$E_0 = E(P_0)|_{\tau=0}, \quad F_0 = F(P_0)|_{\tau=0}, \quad H_0 = H(P_0)|_{\tau=0}$$

$$b = [\tau_{20}(r) - \tau_{10}(r)]/2$$

$$\bar{\tau} = [\tau_{10}(r) + \tau_{20}(r)]/2$$

$$G_p(r) \quad \Gamma_0(r, \psi) \text{ の } p \text{ 次の高調波成分 (複素形)}$$

$$k_p = pb/2 \quad p \text{ 次の高調波に対する無次元振動数 (reduced frequency)}$$

$A(k_p), B(k_p), B_1(k_p)$  非定常効果を表わす関数

$$\Delta(r, \psi) = \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \tau \gamma_{B0}(\tau, r, \psi) d\tau \quad \text{循環モーメント}$$

$\theta$  ブレードのピッチ角

$\beta$  ブレードのフラッピング角

$e$  フラッピング・ヒンジの偏心量

$L(r, \psi)$  単位翼幅の揚力

$T(r, \psi)$  単位翼幅の推力

$c(r)$  ブレード弦長

$\mu = r/h, \mu' = r'/h$  (垂直飛行の場合)

### 1. 揚力面の方程式の簡略化

前報<sup>1)</sup>で導出した揚力面の方程式は (I.4.18)\* により

$$w_n(P_0) = \frac{1}{4\pi H(P_0)} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{1m}'}^{+\infty} \frac{G_1(P_0, P_m') \gamma(P_m') + D_1(P_0, P_m') \delta(P_m')}{R^3(P_0, P_m')} d\tau' dr' \quad (1.1)$$

と書くことができる。ここに

$$\left. \begin{aligned} G_1(P_0, P_m') &= G(P_0, P_m') \cdot R^3(P_0, P_m') \\ D_1(P_0, P_m') &= D(P_0, P_m') \cdot R^3(P_0, P_m') \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$\tau'$  による積分の下限を  $\tau_{1m}'$  としたのは、それが  $r'$  なる半径位置における値であることを明確に示すためである。(I.4.16), (I.4.17) から  $G_1, D_1$  を計算すると

\* (I.4.18) は文献 (1) の (4.18) 式を示す。以下においても同様。

$$\begin{aligned}
 G_1(P_0, P_m') = & \frac{1}{2} \left\{ r^2 \sin\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) + h^2 \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \right. \\
 & + (h \sin \chi) r \left[ \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \sin\left(\psi - \frac{\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) + \sin\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \right] \\
 & \left. - (h \sin \chi)^2 \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \cos\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(\psi - \frac{\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \right\} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1(P_0, P_m') = & \frac{1}{4} \left\{ r(h^2 - r'^2) + (r^2 - h^2)r' \cos\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) - h^2 r' \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \right. \\
 & \times \sin\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) + (h \sin \chi) \left[ (r^2 - r'^2) \sin\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) - r r' \cos\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) \right. \\
 & \times \sin\left(\frac{\tau-\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) + r r' \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \cos\left(\psi - \frac{\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \left. \right] \\
 & + (h \sin \chi)^2 \cos\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) \left[ -r \cos\left(\psi - \frac{\tau}{2}\right) + r' \cos\left(\psi - \frac{\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \right. \\
 & \left. \left. + r' \left(\frac{\tau-\tau'}{2} + \frac{m\pi}{N}\right) \sin\left(\psi - \frac{\tau'}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \right] \right\} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

$G_1$  は  $r'$  に無関係なことがわかる。

(1.1) の右辺を五つの部分に分け、これらを  $I_1, I_2, \dots, I_5$  と書く。すなわち

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{+\infty} \frac{G_1(P_0, P_0') \gamma(P_0')}{R^3(P_0, P_0')} d\tau' dr' \\
 I_2 &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{+\infty} \frac{D_1(P_0, P_0') \delta(P_0')}{R^3(P_0, P_0')} d\tau' dr' \\
 I_3 &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{1m}'}^{+\infty} \frac{G_1(P_0, P_m') \gamma_{Bm}(P_m') + D_1(P_0, P_m') \delta_{Bm}(P_m')}{R^3(P_0, P_m')} d\tau' dr' \\
 I_4 &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{2m}'}^{+\infty} \frac{G_1(P_0, P_m') \gamma_{Wm}(P_m')}{R^3(P_0, P_m')} d\tau' dr' \\
 I_5 &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{2m}'}^{+\infty} \frac{D_1(P_0, P_m') \delta_{Wm}(P_m')}{R^3(P_0, P_m')} d\tau' dr'
 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

であって、それぞれ

$I_1$ :  $\gamma_{B0}$  と  $\gamma_{W0}$  の寄与

$I_2$ :  $\delta_{B0}$  と  $\delta_{W0}$  の寄与

$I_3$ : 基準ブレード以外の  $\gamma_{Bm}$  と  $\delta_{Bm}$  の寄与

$I_4$ : 基準ブレード以外の  $\gamma_{Wm}$  の寄与

$I_5$ : 基準ブレード以外の  $\delta_{Wm}$  の寄与

を表わす。

### 1.1 $I_1$ の簡略化

ブレードの前縁より前方では  $\gamma(P_0')=0$  であり、 $G_1$  が  $r'$  に無関係なことを考慮すると

$$I_1 = \frac{1}{4\pi H(P_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(P_0, P_0') \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma(P_0')}{R^3(P_0, P_0')} dr' d\tau' \quad (1.6)$$

と書ける。 $r'=r_1$  および  $r'=r_2$  において  $\gamma(P_0')=0$  となることを考慮して、 $r'$  に関して部分積分すると

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{4\pi H(P_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_1(P_0, P_0')}{S(P_0, P_0')} \int_{r_1}^{r_2} \frac{T(P_0, P_0')}{R(P_0, P_0')} \frac{\partial \gamma(P_0')}{\partial r'} dr' d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi H(P_0)} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{+\infty} \frac{T(P_0, P_0') G_1(P_0, P_0')}{S(P_0, P_0') R(P_0, P_0')} \frac{\partial \gamma(P_0')}{\partial r'} d\tau' dr' \end{aligned} \quad (1.7)$$

ここに

$$S(P_0, P_0') = (h \cos \chi)^2 \left( \frac{\tau - \tau'}{2} \right)^2 + \left[ r \sin \left( \frac{\tau - \tau'}{2} \right) + (h \sin \chi) \left( \frac{\tau - \tau'}{2} \right) \sin \left( \psi - \frac{\tau'}{2} \right) \right]^2 \quad (1.8)$$

$$T(P_0, P_0') = r' - r \cos \left( \frac{\tau - \tau'}{2} \right) - (h \sin \chi) \left( \frac{\tau - \tau'}{2} \right) \cos \left( \psi - \frac{\tau'}{2} \right) \quad (1.9)$$

$S(P_0, P_0')$  も  $r'$  に無関係である。

$I_1$  を二つの部分に分けて

$$I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \quad (1.10)$$

$$I_1^{(1)} = -\frac{1}{4\pi H} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{T G_1}{SR} \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr' \quad (1.11)$$

$$I_1^{(2)} = -\frac{1}{4\pi H} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{T G_1}{SR} \frac{\partial \gamma_{W0}}{\partial r'} d\tau' dr' \quad (1.12)$$

とする。 $I_1^{(1)}$  は基準ブレード上の積分で、付録 A の考察によって被積分関数を構成する  $R$ ,  $G_1$ ,  $S$ ,  $T$  を次のように近似する。すなわち

$$R^2(P_0, P_0') \doteq E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2 \quad (1.13)$$

$$G_1(P_0, P_0') \doteq -H_0^2 \cdot (\tau' - \tau) \quad (1.14)$$

$$S(P_0, P_0') \doteq H_0^2 \cdot (\tau' - \tau)^2 \quad (1.15)$$

$$T(P_0, P_0') \doteq F_0 \cdot (\tau' - \tau) + (r' - r) \quad (1.16)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= E(P_0)|_{\tau=0} \\ F_0 &= F(P_0)|_{\tau=0} \\ H_0 &= H(P_0)|_{\tau=0} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

また積分の外にある  $H(P_0)$  も  $H_0$  で近似する。このとき

$$I_1^{(1)} \doteq \frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{F_0 \cdot (\tau' - \tau) + (r' - r)}{(\tau' - \tau) \sqrt{E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}} \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr' \quad (1.18)$$

$I_1^{(2)}$  については、まず  $|\tau|$  を小さいと考えて次の近似を行なう。すなわち

$$(1) \quad H(P_0) \doteq H_0$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad R(P_0, P_0') &\doteq R_1(P_0, P_0') \\
 &\equiv \left\{ h^2 \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2(h \sin \chi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \left[ r \cos \psi - r' \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad G_1(P_0, P_0') &\doteq G_2(P_0, P_0') \\
 &\equiv -\frac{1}{2} \left\{ r^2 \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) + h^2 \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right. \\
 &\quad + (h \sin \chi) r \left[ \sin \psi \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) + \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \sin \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right] \\
 &\quad \left. - (h \sin \chi)^2 (\cos \psi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right\} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad S(P_0, P_0') &\doteq S_1(P_0, P_0') \\
 &\equiv (h \cos \chi)^2 \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right)^2 + \left[ r \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) + (h \sin \chi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \sin \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right]^2 \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad T(P_0, P_0') &\doteq T_1(P_0, P_0') \\
 &\equiv r' - r \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) + (h \sin \chi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

$R_1, G_2, S_1, T_1$  においては  $\tau$  と  $\tau'$  は  $\tau' - \tau$  の形でのみ含まれる。上の近似によって

$$I_1^{(2)} \doteq -\frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \frac{\partial \gamma_{w0}}{\partial r'} d\tau' dr' \quad (1.23)$$

次に仮定の積分

$$I_1^{(3)} = -\frac{1}{2\pi H_0} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} \frac{\gamma_{w0}(r)}{\tau' - \tau} d\tau' \quad (1.24)$$

を考える。これは付録 B に示すように  $\gamma_{w0}$  が二次元的に分布しているときの誘導速度に相当する。 $\gamma_{w0}(r)$  および  $\tau_{20}(r)$  はそれぞれ ( $r'$  ではなく)  $r$  における  $\gamma_{w0}, \tau_{20}$  の値を表わす。

$$\gamma_{w0}(r) = -\frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' - r}{|r' - r|} \frac{\partial \gamma_{w0}}{\partial r'} dr' \quad (1.25)$$

と書けるから、 $I_1^{(3)}$  はまた

$$I_1^{(3)} = \frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} \frac{r' - r}{|r' - r|} \frac{1}{\tau' - \tau} \frac{\partial \gamma_{w0}}{\partial r'} d\tau' dr' \quad (1.26)$$

と書くことができる。

(1.23) において  $\tau'$  による積分の下限  $\tau_{20}'$  を近似的に  $\tau_{20}(r)$  で置き換え、(1.26) との差をとると

$$I_1^{(2)} - I_1^{(3)} = -\frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_{20}(r)}^{+\infty} \left( \frac{T_1}{S_1} \frac{G_2}{R_1} + \frac{r'-r}{|r'-r|} \frac{1}{\tau'-\tau} \right) \frac{\partial \gamma_{w0}}{\partial r'} d\tau' dr'$$

$\tau'$  に関する積分を

$$\int_{r_{20}(r)}^{+\infty} = \int_{\tau}^{+\infty} - \int_{\tau}^{\tau_{20}(r)}$$

と書くと、最後の積分では  $|\tau'-\tau|$  は小さいと考えることができ、このとき付録 B に示すように被積分関数は小さいからこの積分を省略する (Reissner の手法<sup>6)</sup>)。

$\Gamma_0$  は方位角  $\psi$  の周期関数であるから

$$\Gamma_0(r', \psi) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_p(r') e^{ip\psi} \quad (1.27)$$

とおき、(1.5.10) を用いると

$$\begin{aligned} \gamma_{w0}(\tau', r', \psi) &= -\frac{i}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r') e^{ip(\psi - \frac{\tau' - \tau_{20}}{2})} \\ &\doteq -\frac{i}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r') e^{ip(\psi - \frac{\tau' - \tau}{2})} \end{aligned} \quad (1.28)$$

結局

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} - I_1^{(3)} &\doteq \frac{i}{8\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\psi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_{\tau}^{+\infty} \left( \frac{T_1}{S_1} \frac{G_2}{R_1} + \frac{r'-r}{|r'-r|} \frac{1}{\tau'-\tau} \right) e^{-ip(\frac{\tau'-\tau}{2})} d\tau' dr' \\ &= \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\psi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_0^{+\infty} \left( \frac{T_1}{S_1} \frac{G_2}{R_1} + \frac{r'-r}{|r'-r|} \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \end{aligned} \quad (1.29)$$

ここに

$$\lambda = \frac{\tau' - \tau}{2} \quad (1.30)$$

なる置換えを行なった。

(1.24) に含まれる  $\gamma_{w0}(r)$  は (1.28) と同様に

$$\gamma_{w0}(r, \tau', \psi) = -\frac{i}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r) e^{ip(\psi - \frac{\tau' - \tau_{20}(r)}{2})} \quad (1.31)$$

したがって

$$I_1^{(3)} = \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r) e^{ip(\psi + \frac{\tau_{20}(r)}{2})} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} \frac{e^{-ip(\tau'/2)}}{\tau' - \tau} d\tau' \quad (1.32)$$

結局簡略化された  $I_1$  は

$$I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(3)} + (I_1^{(2)} - I_1^{(3)}) \quad (1.33)$$

の形となる。ここに  $I_1^{(1)}$  は (1.18),  $I_1^{(3)}$  は (1.32),  $(I_1^{(2)} - I_1^{(3)})$  は (1.29) で与えられる。

(1.29) は  $\tau$  に無関係である。

## 1.2 $I_2$ の簡略化

$I_2$  を二つの部分に分けて



$$I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \quad (1.34)$$

$$I_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi H} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{D_1 \delta_{B0}}{R^3} d\tau' dr' \quad (1.35)$$

$$I_2^{(2)} = \frac{1}{4\pi H} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{D_1 \delta_{W0}}{R^3} d\tau' dr' \quad (1.36)$$

とする。\$I\_2^{(1)}\$ においては、\$I\_1^{(1)}\$ におけると同様付録 A によって、\$R^2\$ は (1.13) で、また \$D\_1\$ は

$$D_1 \doteq -H_0^2 \cdot (r' - r) \quad (1.37)$$

で近似する。さらに \$H(P\_0)\$ を \$H\_0\$ で置き換えると

$$I_2^{(1)} = -\frac{H_0}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} (r' - r) \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{\delta_{B0}}{[E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2]^{\frac{3}{2}}} d\tau' dr' \quad (1.38)$$

(I.5.3) と (I.5.5) を参照すると

$$\delta_{B0}|_{\tau'=\tau_{20}'} = \frac{\partial \Gamma_0(r')}{\partial r'} \quad (1.39)$$

\$\delta\_{B0}\$ が前縁より前方で零であることと (1.39) と (I.5.2) を考慮して、(1.38) を \$\tau'\$ に関して部分積分すると

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} = & -\frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{E_0 \cdot (\tau_{20} - \tau) + F_0 \cdot (r' - r)}{(r' - r) \sqrt{E_0 \cdot (\tau_{20} - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau_{20} - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\ & + \frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{E_0 \cdot (\tau' - \tau) + F_0 \cdot (r' - r)}{(r' - r) \sqrt{E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}} \frac{\partial \Gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr' \end{aligned} \quad (1.40)$$

\$I\_2^{(2)}\$ においては、\$I\_1^{(2)}\$ の場合と同様に \$|\tau|\$ を小さいと考えて次の近似を行なう。

$$(1) \quad H(P_0) \doteq H_0$$

$$(2) \quad R(P_0, P_0') \doteq R_1(P_0, P_0')$$

$$(3) \quad D_1(P_0, P_0') \doteq D_2(P_0, P_0')$$

$$\begin{aligned} & \equiv \frac{1}{4} \left\{ r(h^2 - r'^2) + (r^2 - h^2)r' \cos\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) - h^2 r' \left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \right. \\ & \quad + (h \sin \chi) \left[ (r^2 - r'^2) \sin \psi + r r' \cos \psi \sin\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. \left. - r r' \left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \cos\left(\psi - \frac{\tau' - \tau}{2}\right) \right] \right. \\ & \quad + (h \sin \chi)^2 (\cos \psi) \left[ -r \cos \psi + r' \cos\left(\psi - \frac{\tau' - \tau}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. \left. - r' \left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \sin\left(\psi - \frac{\tau' - \tau}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.41)$$

\$D\_2\$ においては \$\tau\$ と \$\tau'\$ は \$\tau' - \tau\$ の形でのみ含まれる。

\$\delta\_{W0}\$ は (I.5.11) と (1.27) によって

$$\begin{aligned}
\delta_{W0}(\tau', r', \psi) &= \frac{\partial}{\partial r'} \Gamma_0 \left( r', \psi - \frac{\tau' - \tau_{20}'}{2} \right) \\
&\doteq \frac{\partial}{\partial r'} \Gamma_0 \left( r', \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{dG_p}{dr'} e^{ip(\psi - \frac{\tau' - \tau}{2})}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

以上の近似によって

$$I_2^{(2)} = \frac{1}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip(\frac{\tau' - \tau}{2})} d\tau' dr' \tag{1.43}$$

次に  $I_1$  の場合と同様に仮定の積分

$$I_2^{(3)} = -\frac{H_0}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} (r' - r) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{1}{[E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0(\tau - \tau')(r - r') + (r' - r)^2]^{\frac{3}{2}}} d\tau' dr' \tag{1.44}$$

を考える。この積分の被積分関数は点  $P_0$  の近傍で (1.36) のそれを近似しており、 $\partial \Gamma_0 / \partial r'$  なる渦が  $P_0$  におけるブレード軌跡面の接平面上に分布しているときの誘導速度と解釈されることは、(1.36), (1.37), (1.13) を参照することによりわかるであろう。 $\tau'$  による積分を実行すると

$$I_2^{(3)} = -\frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \sqrt{E_0} - \frac{E_0 \cdot (\tau_{20}' - \tau) + F_0 \cdot (r' - r)}{\sqrt{E_0 \cdot (\tau_{20}' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau_{20}' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}} \right\} \frac{1}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \tag{1.45}$$

(1.40) と (1.45) の和をとると

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)} + I_2^{(3)} &= -\frac{\sqrt{E_0}}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\
&\quad + \frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{E_0 \cdot (\tau' - \tau) + F_0 \cdot (r' - r)}{(r' - r) \sqrt{E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}} \frac{\partial \Gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr'
\end{aligned} \tag{1.46}$$

(1.44) に (1.27) を適用し、(1.43) との差をとると

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)} - I_2^{(3)} &= \frac{1}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \left\{ \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip(\frac{\tau' - \tau}{2})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{H_0^2 \cdot (r' - r)}{[E_0 \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\tau' dr'
\end{aligned}$$

$I_1$  の場合と同様に  $\tau'$  による積分の下限  $\tau_{20}'$  を  $\tau$  まで延長し、(1.30) の置換えを行なうと

$$I_2^{(2)} - I_2^{(3)} \doteq \frac{1}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \left\{ 2 \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda + \frac{\sqrt{E_0}}{r' - r} - \frac{F_0}{|r' - r|} \right\} dr' \tag{1.47}$$

結局簡略化された  $I_2$  は

$$I_2 = (I_2^{(1)} + I_2^{(3)}) + (I_2^{(2)} - I_2^{(3)}) \tag{1.48}$$

の形となり、 $(I_2^{(1)}+I_2^{(3)})$  は (1.46)、 $(I_2^{(2)}-I_2^{(3)})$  は (1.47) で与えられる。(1.47) は  $\tau$  に無関係である。

### 1.3 $I_3$ の簡略化

$I_1$  と  $I_2$  は基準ブレード上の渦の寄与であった。 $I_3$  は基準ブレード以外のブレード上の渦の寄与を表わす。ここでは  $\gamma_{Bm}$  がブレードの軸、すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{2m\pi}{N} \\ \tau &= \frac{2m\pi}{N} \end{aligned} \right\} (m=1, 2, \dots, N-1) \quad (1.49)$$

なる直線に沿って集中して存在するモデルを考える。 $\delta_{Bm}$  の寄与は小さいと考えられる。このモデルに相当する近似は (1.5) の第3式において

(1)  $H(P_0) \doteq H_0$

(2)  $\delta_{Bm} \doteq 0$

(3)  $R$  および  $G_1$  において

(a)  $P_0(\tau, r, 0) \longrightarrow (0, r, 0)$

(b)  $P_m'(\tau', r', 2m\pi/N) \longrightarrow (2m\pi/N, r', 2m\pi/N)$

とすればよい。このとき

$$R(P_0, P_m') \doteq r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N} \quad (1.50)$$

$$G_1(P_0, P_m') \doteq -\frac{1}{2}r[r + (h \sin \chi) \sin \psi] \sin \frac{2m\pi}{N} \quad (1.51)$$

となり、これらは  $\tau'$  に関係しないから、(1.5.5) を用いて

$$I_3 \doteq -\frac{r[r + (h \sin \chi) \sin \psi]}{8\pi H_0} \sum_{m=1}^{N-1} \sin \frac{2m\pi}{N} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Gamma_m}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(2m\pi/N)]^{3/2}} dr'$$

(1.5.12) と (1.27) とから

$$\Gamma_m(r', \psi) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_p(r') e^{ip(\psi - \frac{2m\pi}{N})} \quad (1.52)$$

と書けるから

$$I_3 = -\frac{r[r + (h \sin \chi) \sin \psi]}{8\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \sin \frac{2m\pi}{N} \int_{r_1}^{r_2} \frac{G_p(r')}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N}\right)^{3/2}} dr' \quad (1.53)$$

(1.53) は簡略化された  $I_3$  を与える。これも  $\tau$  に無関係である。

### 1.4 $I_4$ と $I_5$ の簡略化

$I_4$  と  $I_5$  においては (1.19)、(1.20)、(1.41) と同様の近似を行なう。すなわち

$$(1) \quad R(P_0, P_m') \doteq R_1(P_0, P_m')$$

$$\begin{aligned} &\equiv \left\{ h^2 \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2(h \sin \chi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \left[ r \cos \psi - r' \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$(2) \quad G_1(P_0, P_m') \doteq G_2(P_0, P_m')$$

$$\begin{aligned} &\equiv -\frac{1}{2} \left\{ r^2 \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) + h^2 \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad + (h \sin \chi) r \left[ \sin \psi \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) + \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right] - (h \sin \chi)^2 (\cos \psi) \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \\ &\quad \left. \times \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$(3) \quad D_1(P_0, P_m') \doteq D_2(P_0, P_m')$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{4} \left\{ r(h^2 - r'^2) + (r^2 - h^2)r' \cos \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad - h^2 r' \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) \\ &\quad + (h \sin \chi) \left[ (r^2 - r'^2) \sin \psi + rr' \cos \psi \sin \left( \frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. - rr' \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right] \\ &\quad + (h \sin \chi)^2 (\cos \psi) \left[ -r \cos \psi + r' \cos \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. - r' \left( \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \sin \left( \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.56)$$

(1.54), (1.55), (1.56) において  $m=0$  とおけば, これらはそれぞれ (1.19), (1.20), (1.41) となる。さらに

$$(4) \quad \tau_{2m'} \doteq \tau + \frac{2m\pi}{N} \quad (1.57)$$

$\gamma_{wm}$  は (I.5.10), (I.5.13), (1.27), (1.57) によって

$$\begin{aligned} \gamma_{wm}(\tau', r', \psi) &= \frac{\partial}{\partial \tau'} \Gamma_0 \left( r', \psi - \frac{2m\pi}{N} - \frac{\tau' - \tau_{2m'}}{2} \right) \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial \tau'} \Gamma_0 \left( r', \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r') e^{ip\left(\phi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N}\right)} \quad (1.58)$$

同様に  $\delta w_m$  は (1.5.11), (1.5.13), (1.27), (1.57) によって

$$\begin{aligned} \delta w_m(\tau', r', \psi) &\doteq \frac{\partial}{\partial r'} \Gamma_0\left(r', \psi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{dG_p}{dr'} e^{ip\left(\phi - \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N}\right)} \end{aligned} \quad (1.59)$$

そのほか例のごとく  $H(P_0)$  を  $H_0$  で近似すると, 簡略化された  $I_4$  および  $I_5$  として

$$\begin{aligned} I_4 &\doteq -\frac{i}{8\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} G_p(r') \sum_{m=1}^{N-1} \int_{\tau + \frac{2m\pi}{N}}^{+\infty} \frac{G_2}{R_1^3} e^{-ip\left(\frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{m\pi}{N}\right)} d\tau' dr' \\ &= -\frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} G_p(r') \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{G_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$I_5 \doteq \frac{1}{2\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \quad (1.61)$$

ここに

$$\lambda = \frac{\tau' - \tau}{2} - \frac{m\pi}{N} \quad (1.62)$$

なる置換えを行なった。(1.60), (1.61) も  $\tau$  に無関係である。

### 1.5 簡略化された揚力面の方程式

以上の近似によって簡略化された揚力面の方程式は

$$w_n(P_0) = [I_1^{(1)} + I_1^{(3)} + (I_1^{(2)} - I_1^{(3)})] + [(I_2^{(1)} + I_2^{(3)}) + (I_2^{(2)} - I_2^{(3)})] + I_3 + I_4 + I_5 \quad (1.63)$$

の形となる。(1.18) の  $I_1^{(1)}$  と (1.46) の  $(I_2^{(1)} + I_2^{(3)})$  の第2項は組み合わせられて一つの積分となる。 $(I_2^{(2)} - I_2^{(3)})$  と  $I_5$  も組み合わせられる。(1.63) を完全な形で書くと

$$\begin{aligned} w_n(P_0) &= -\frac{\sqrt{E_0}}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\ &+ \frac{1}{4\pi H_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{\sqrt{E_0} \cdot (\tau' - \tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2}{(\tau' - \tau)(r' - r)} \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr' \\ &+ \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r) e^{ip\left(\phi - \frac{\tau_{20}(r)}{2}\right)} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} \frac{e^{-ip\frac{\tau'}{2}}}{\tau' - \tau} d\tau' \\ &- \frac{r[r + (h \sin \chi) \sin \psi]}{8\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \sin \frac{2m\pi}{N} \int_{r_1}^{r_2} \frac{G_p(r')}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N}\right)^{\frac{1}{2}}} dr' \\ &+ \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_0^{+\infty} \left( \frac{T_1}{S_1} \frac{G_2}{R_1} \Big|_{m=0} + \frac{r' - r}{|r' - r|} \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \\ &- \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} G_p(r') \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{G_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \left\{ \frac{\sqrt{E_0}}{r'-r} - \frac{F_0}{|r'-r|} + 2 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-ip\frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda \right\} dr' \quad (1.64)$$

右辺の第1, 第2項は発散積分で, 固定翼の場合にならって Cauchy の主値をとる。

## 2. 揚力線の方程式

従来の代表的なプロペラ理論<sup>3),4),5)</sup>は固定翼の Prandtl の揚力線理論と同程度の近似であるが, 一般の回転翼では流れがブレードの翼幅方向に必ずしも垂直でないので, 付録 C に示す理由によって上の近似は使えない。したがって本理論では後退翼にも有効な Weissinger の揚力線理論<sup>7)</sup>と同程度の近似を採用する。

定常翼理論では単位翼幅の揚力は循環によって定まるから, 揚力線の方程式はすなわち循環の方程式である。しかし回転翼では流れが本質的に非定常であるから, 後節に述べるように単位翼幅の揚力は循環のみでは定まらず, “循環モーメント”ともよぶべき量をも必要とする。それゆえ回転翼の揚力線の方程式は循環を求める方程式と循環モーメントを求める方程式の二つからなる。

なお境界条件から定まる  $w_n$  は, 揚力線理論に見合う近似として翼弦方向に一定と考えるのが妥当であろう。以下では  $w_n$  は  $\tau$  に無関係であると仮定する。

### 2.1 循環の方程式

(1.64) の右辺の第2, 第3項をそれぞれ  $J_1, J_2$  とおき, その他の項の和を  $J_3$  とおく。すなわち

$$w_n(r, \psi) = J_1 + J_2 + J_3 \quad (2.1)$$

$J_3$  は  $\tau$  に関係しない。左辺も上述の仮定によって  $\tau$  に無関係である。

$$\frac{\tau_{20}(r) - \tau_{10}(r)}{2} = b \quad (2.2)$$

$$\frac{\tau_{10}(r) + \tau_{20}(r)}{2} = \bar{\tau} \quad (2.3)$$

とおき, 新しい変数

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\tau - \bar{\tau}}{b} \\ \xi' &= \frac{\tau' - \bar{\tau}}{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

を導入する。 $\tau$  あるいは  $\tau'$  が  $\tau_{10}(r), \bar{\tau}, \tau_{20}(r)$  の値をとるとき,  $\xi$  あるいは  $\xi'$  はそれぞれ  $-1, 0, 1$  の値をとることがわかる。

循環の方程式を導くため, (2.1) の両辺に  $(1/\pi) \sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)}$  を掛けて  $-1$  から  $1$  まで  $\xi$  について積分する。このとき付録 D で述べた手法に従って,  $J_1$  の根号の中で

$$\tau' - \tau \doteq -b \quad (2.5)$$

とおく。まず

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi = \pi \quad (2.6)$$

であるから

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} w_n d\xi = w_n \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} J_3 d\xi = J_3 \quad (2.8)$$

次に

$$\begin{aligned} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{\tau' - \tau} d\xi &= \frac{1}{b} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{\xi' - \xi} d\xi \\ &= -\frac{\pi}{b} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' &= \frac{\partial}{\partial r'} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \gamma_{B0} d\tau' - \frac{d\tau_{20}'}{\partial r'} \gamma_{B0}(\tau_{20}') \\ &\doteq \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.9) では  $-1 < \xi' < 1$  すなわち  $\tau_{10}(r) < \tau' < \tau_{20}(r)$  と仮定している。これは必ずしも成立しないが、 $J_1$  の積分において最も寄与の大きい  $r' = r$  の付近では、少なくとも近似的に成立するからこれを是認する。また (2.10) では  $\partial \tau_{20}' / \partial r' \doteq 0$  と仮定している ((1.5.3) を導いたときと同じ理由により  $(\partial \tau_{10}' / \partial r') \gamma_{B0}(\tau_{10}')$  の項は現われない)。 (2.9), (2.10) を承認すると

$$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} J_1 d\xi \doteq -\frac{1}{4\pi H_0 b} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r' - r) + (r' - r)^2}}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \quad (2.11)$$

最後に  $J_2$  については、変数を  $\xi, \xi'$  に置き換えて

$$J_2 = \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p G_p(r) e^{i(p\phi + k_p)} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ik_p \xi'}}{\xi' - \xi} d\xi' \quad (2.12)$$

ここに

$$k_p = \frac{pb}{2} \quad (2.13)$$

で、固定翼の非定常理論における無次元振動数 (reduced frequency) に相当する。

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{\xi' - \xi} = \pi \left( \sqrt{\frac{\xi' + 1}{\xi' - 1}} - 1 \right) \quad (\xi' > 1) \quad (2.14)$$

であるから

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} J_2 d\xi = \frac{1}{2\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} ik_p G_p(r) e^{i(p\phi + k_p)} \int_1^{+\infty} \left( \sqrt{\frac{\xi' + 1}{\xi' - 1}} - 1 \right) e^{-ik_p \xi'} d\xi' \quad (2.15)$$

付録 E に示すように

$$\int_1^{+\infty} \left( \sqrt{\frac{\xi'+1}{\xi'-1}} - 1 \right) e^{-ik_p \xi'} d\xi' = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} [H_1^{(2)}(k_p) + iH_0^{(2)}(k_p)] - \frac{e^{-ik_p}}{ik_p} & (k_p > 0) \\ -\frac{\pi}{2} [H_1^{(1)}(-k_p) - iH_0^{(1)}(-k_p)] - \frac{e^{-ik_p}}{ik_p} & (k_p < 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

$H_1^{(2)}$  等はハンケル関数である。  $p=0$  すなわち  $k_p=0$  のときこの積分は発散するが、(2.15) は  $k_p$  なる因子をもつので全体として有限の値をもつ。すなわち

$$A(k_p) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} k_p e^{ik_p} [H_0^{(2)}(k_p) - iH_1^{(2)}(k_p)] - 1 & (k_p > 0) \\ -\frac{\pi}{2} k_p e^{ik_p} [H_0^{(1)}(-k_p) + iH_1^{(1)}(-k_p)] - 1 & (k_p < 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

とおくと、付録 F に示すように

$$\lim_{k_p \rightarrow 0} A(k_p) = 0$$

となるから

$$A(0) = 0 \quad (2.18)$$

と定義して

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} J_2 d\xi = \frac{1}{2\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p(r) e^{ip\phi} \quad (2.19)$$

以上によって循環の方程式は

$$\begin{aligned} w_n(r, \phi) = & -\frac{\sqrt{E_0}}{4\pi H_0} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\ & - \frac{1}{4\pi H_0 b} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r' - r) + (r' - r)^2}}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\ & + \frac{1}{2\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p(r) e^{ip\phi} \\ & - \frac{r[r + (h \sin \chi) \sin \phi]}{8\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip \frac{2m\pi}{N}} \sin \frac{2m\pi}{N} \int_{r_1}^{r_2} \frac{G_p(r')}{\left( r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N} \right)^{\frac{1}{2}}} dr' \\ & + \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \int_0^{+\infty} \left( \frac{T_1}{S_1} \frac{G_2}{R_1} \Big|_{m=0} + \frac{r' - r}{|r' - r|} \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \\ & - \frac{i}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} G_p(r') \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip \frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{G_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda dr' \\ & + \frac{1}{4\pi H_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dG_p}{dr'} \left\{ \frac{\sqrt{E_0}}{r' - r} - \frac{F_0}{|r' - r|} + 2 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-ip \frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} e^{-ip\lambda} d\lambda \right\} dr' \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.2 循環モーメントの方程式

(2.1) の両辺に  $(2/\pi)\sqrt{1-\xi^2}$  を掛けて  $-1$  から  $1$  まで  $\xi$  について積分する。このとき循環の



方程式の場合と同じく,  $J_1$  の根号の中で (2.5) の近似をする。

まず

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} \quad (2.21)$$

であるから

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} w_n d\xi = w_n \quad (2.22)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} J_3 d\xi = J_3 \quad (2.23)$$

次に

$$\begin{aligned} \oint_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau'-\tau} d\xi &= \frac{1}{b} \oint_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi'-\xi} d\xi \\ &= \frac{\pi}{b} \xi' \end{aligned} \quad (2.24)$$

ただし (2.9) におけると同様  $-1 < \xi' < 1$  と仮定している。そうすると

$$\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} J_1 d\xi = \frac{1}{2\pi H_0 b} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r'-r) + (r'-r)^2}}{r'-r} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \xi' \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' dr'$$

いま

$$\Delta(r') = \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \tau' \gamma_{B0} d\tau' \quad (2.25)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} [\Delta(r') - \bar{\tau}(r) \Gamma_0(r')] &= \frac{\partial}{\partial r'} \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} (\tau' - \bar{\tau}) \gamma_{B0} d\tau' \\ &= \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} (\tau' - \bar{\tau}) \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' + \frac{\partial \tau_{20}}{\partial r'} (\tau_{20}' - \bar{\tau}) \gamma_{B0}(\tau_{20}') \\ &\doteq b \int_{\tau_{10}'}^{\tau_{20}'} \xi' \frac{\partial \gamma_{B0}}{\partial r'} d\tau' \end{aligned} \quad (2.26)$$

とすることができるから

$$\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} J_1 d\xi = \frac{1}{2\pi H_0 b^2} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r'-r) + (r'-r)^2}}{r'-r} \left( \frac{\partial \Delta}{\partial r'} - \bar{\tau} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} \right) dr' \quad (2.27)$$

$\Delta$  を循環モーメントとよぶことにする。

最後に  $J_2$  については

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi'-\xi} d\xi = \pi(\xi' - \sqrt{\xi'^2 - 1}) \quad (\xi' > 1) \quad (2.28)$$

であるから

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} J_2 d\xi = \frac{1}{\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} i k_p G_p(r) e^{i(p\phi + k_p r)} \int_1^{+\infty} (\xi' - \sqrt{\xi'^2 - 1}) e^{-i k_p \xi' r} d\xi' \quad (2.29)$$

付録 E に示すように

$$\int_1^{+\infty} (\xi' - \sqrt{\xi'^2 - 1}) e^{-i k_p \xi' r} d\xi' = \begin{cases} \frac{1}{i k_p} \left[ \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k_p) + e^{-i k_p r} \left( 1 + \frac{1}{i k_p} \right) \right] & (k_p > 0) \\ \frac{1}{i k_p} \left[ \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-k_p) + e^{-i k_p r} \left( 1 + \frac{1}{i k_p} \right) \right] & (k_p < 0) \end{cases} \quad (2.30)$$

$k_p=0$  のときこの積分は発散するが、(2.29) は  $k_p$  なる因子をもつので全体として有限の値をもつ。

$$B(k_p) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k_p) e^{i k_p r} + 1 + \frac{1}{i k_p} & (k_p > 0) \\ \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-k_p) e^{i k_p r} + 1 + \frac{1}{i k_p} & (k_p < 0) \end{cases} \quad (2.31)$$

とおくと、付録 F に示すように

$$\lim_{k_p \rightarrow 0} B(k_p) = 0$$

であるから

$$B(0) = 0 \quad (2.32)$$

と定義して、(2.29)、(2.30)、(2.31) によって

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} J_2 d\xi = \frac{1}{\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B(k_p) G_p(r) e^{i p \phi} \quad (2.33)$$

以上によって循環モーメントの方程式は

$$\begin{aligned} w_n(r, \psi) &= \frac{1}{2\pi H_0 b^2} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r' - r) + (r' - r)^2}}{r' - r} \left( \frac{\partial \Delta}{\partial r'} - \bar{\tau} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} \right) dr' \\ &+ \frac{1}{\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B(k_p) G_p(r) e^{i p \phi} \\ &+ J_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

一方、循環の方程式 (2.20) は

$$\begin{aligned} w_n(r, \psi) &= -\frac{1}{4\pi H_0 b} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r' - r) + (r' - r)^2}}{r' - r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} dr' \\ &+ \frac{1}{2\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p(r) e^{i p \phi} \\ &+ J_3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

と書けるから、(2.34) と (2.35) の差をとると

$$\frac{1}{2\pi H_0 b^2} \oint_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{E_0 b^2 - 2F_0 b \cdot (r' - r) + (r' - r)^2}}{r' - r} \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial r'} + \left( \frac{b}{2} - \bar{\tau} \right) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r'} \right] dr'$$

$$+\frac{1}{\pi H_0 b} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_1(k_p) G_p(r) e^{ip\psi} = 0 \quad (2.36)$$

ここに

$$B_1(k_p) = B(k_p) - \frac{1}{2} A(k_p) \\ = \begin{cases} 1 + \frac{1}{ik_p} + \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k_p) e^{ik_p} - \frac{1}{2} A(k_p) & (k_p > 0) \\ 1 + \frac{1}{ik_p} + \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-k_p) e^{ik_p} - \frac{1}{2} A(k_p) & (k_p < 0) \end{cases} \quad (2.37)$$

循環がすでに求められていれば、循環モーメントは(2.34)によるよりも(2.36)によるほうがはるかに簡単に求められる。

### 3. 境界条件

循環の方程式(2.20)の左辺の値を定める境界条件を揚力線近似に見合う形で出しておく。(I.2.16)は

$$w_n = \frac{-\Omega \left( \frac{\partial f_B}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right)}{\frac{\partial F_L}{\partial n}} \quad (3.1)$$

と書くことができる。ここに

$$\frac{\partial F_L}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } F_L \quad (3.2)$$

であって、 $\text{grad } F_L$  は  $\mathbf{n}$  と同じ方向(向きは違うかもしれない)のベクトルであることを考慮にいった。

基準ブレードを代表する半径線

$$\sigma = \tau = 0 \quad (3.3)$$

の付近でのみ考えることとし、新たに直角座標系  $O-\xi\eta z$  を考え、 $\xi$  軸は(3.3)に一致するように、 $\eta$  軸は右手系をなすように定める。明らかに

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \psi - y \sin \psi \\ \eta &= x \sin \psi + y \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

の関係があるから、(I.3.1)を用い、 $\sigma$  も  $\tau$  も小さいと考えると

$$\left. \begin{aligned} \xi &\doteq r + \left( \frac{\tau - \sigma}{2} \right) h \sin \chi \cos \psi \\ \eta &\doteq r \left( \frac{\tau + \sigma}{2} \right) + \left( \frac{\tau - \sigma}{2} \right) h \sin \chi \sin \psi \\ z &= \left( \frac{\tau - \sigma}{2} \right) h \cos \chi \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

回転翼として通常のヘリコプターのもの考えることにし、ブレードのピッチ角を  $\theta$ 、フラッピング角を  $\beta$ 、フラッピング・ヒンジの偏心量を  $e$  とすると、ブレード面の方程式は

$$z = -\beta(\xi - e) + \eta \tan \theta \quad (3.6)$$

で表わせる。ここに  $\beta$  は小さいと考えている。 $\theta$  は必ずしも小さくない。(3.6) を

$$F_B = 0 \quad (3.7)$$

で表わすと

$$F_B \equiv A \cdot [z + \beta(\xi - e) - \eta \tan \theta] \quad (3.8)$$

ここに  $A$  は任意の関数である。

一方、ブレード軌跡面の方程式は、 $\xi$  軸の付近では

$$\left. \begin{aligned} F_L &= 0 \\ F_L &\equiv A \cdot (z - \eta \tan \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

で表わされる。基準ブレードの軌跡面上では

$$\sigma = 0 \quad (I.2.10)$$

であるから、(3.9) から  $\tan \theta_0$  を求めると

$$\begin{aligned} \tan \theta_0 &= \left. \frac{z}{\eta} \right|_{\sigma=0} \\ &= \frac{h \cos \chi}{r + h \sin \chi \sin \psi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\theta_0$  は流れに攪乱を生じないようなピッチ角の分布と考えることができる。

(I.2.12) によって

$$\begin{aligned} f_B &\equiv F_B - F_L \\ &\equiv A \cdot [\beta(\xi - e) - \eta(\tan \theta - \tan \theta_0)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

いま

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \quad (3.12)$$

とおくと、 $\theta_1$  は小さいと考えられるから

$$\begin{aligned} \tan \theta - \tan \theta_0 &\doteq (1 + \tan^2 \theta_0) \theta_1 \\ &= \frac{(h \cos \chi)^2 + (r + h \sin \chi \sin \psi)^2}{(r + h \sin \chi \sin \psi)^2} \theta_1 \end{aligned}$$

(1.17) と (I.3.8) とを参照して

$$\tan \theta - \tan \theta_0 \doteq \frac{4H_0^2}{(r + h \sin \chi \sin \psi)^2} \theta_1 \quad (3.13)$$

任意の関数  $A$  としては

$$A = r + h \sin \chi \sin \psi \quad (3.14)$$

と選ぶと, (3.5), (3.9), (3.10) によって

$$F_L \equiv -(h \cos \chi) r \sigma \quad (3.15)$$

となる。

(3.1) は  $\sigma=0$  のブレード軌跡面上で満足させる。さらに揚力線近似に見合う仮定として,  $w_n$  を  $\tau$  に無関係と考える。これは  $\tau=0$  における値をとるのがつごうがよい。すなわち

$$\begin{aligned} w_n(r, \psi) &\doteq w_n|_{\sigma=\tau=0} \\ &= \frac{-\mathcal{Q} \left( \frac{\partial f_B|_{\sigma=\tau=0}}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial f_B|_{\sigma=0}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right)}{\frac{\partial F_L}{\partial n} \Big|_{\sigma=\tau=0}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.5), (3.11), (3.13), (3.14) によって

$$f_B|_{\sigma=0} = (r+h \sin \chi \sin \psi) \left( r-e + \frac{\tau}{2} h \sin \chi \cos \psi \right) \beta - 2H_0^2 \cdot \tau \theta_1 \quad (3.17)$$

$$f_B|_{\sigma=\tau=0} = (r+h \sin \chi \sin \psi) (r-e) \beta \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial f_B|_{\sigma=\tau=0}}{\partial \psi} = (r-e) \left[ (h \sin \chi \cos \psi) \beta + (r+h \sin \chi \sin \psi) \frac{d\beta}{d\psi} \right] \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial f_B|_{\sigma=0}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (r+h \sin \chi \sin \psi) (h \sin \chi \cos \psi) \beta - 2H_0^2 \cdot \theta_1 \quad (3.20)$$

また付録 G により

$$\frac{\partial F_L}{\partial n} \Big|_{\sigma=\tau=0} = 2H_0 \quad (3.21)$$

以上によって

$$\begin{aligned} w_n(r, \psi) &\doteq \frac{-\mathcal{Q} \left\{ (2r-e+h \sin \chi \sin \psi) (h \sin \chi \cos \psi) \beta + (r-e) (r+h \sin \chi \sin \psi) \frac{d\beta}{d\psi} - 4H_0^2 \cdot \theta_1 \right\}}{2H_0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\theta_1$  は (3.12) と (3.10) によって

$$\theta_1 = \theta - \tan^{-1} \frac{h \cos \chi}{r+h \sin \chi \sin \psi} \quad (3.23)$$

#### 4. 単位翼幅の揚力

基準ブレードの上下面の圧力差を

$$\Delta p = p_U - p_L \quad (4.1)$$

で表わすと, (I.3.9) を参照して

$$\begin{aligned}
 L(r^*, \psi)dr &= - \int_{\tau_{10}(r^*)}^{\tau_{20}(r^*)} \Delta p(\tau, r^*, \psi) H(\tau, r^*, \psi) d\tau dr \\
 &\doteq - H_0(r^*) \int_{\tau_{10}(r^*)}^{\tau_{20}(r^*)} \Delta p d\tau dr
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

は、翼幅方向に  $dr$  の幅をもち  $r=r^*$  の線に沿った近似的に平行四辺形の部分（図 1 に実線で囲んだ部分）に作用する空力荷重を表わす。 $r^*$  は単に  $r$  の特定の値を表わす。 $\Delta p$  の翼幅方向の変

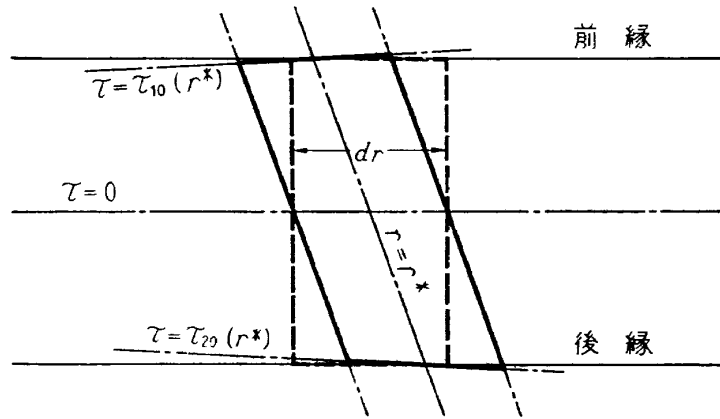


図 1

化が急激でなければ、(4.2) は図 1 に破線で囲んだ近似的に矩形の部分に作用する空力荷重にほぼ等しい。この意味で、 $L$  を単位翼幅の揚力とよぶことにする。

(I.5.4) によって

$$- \frac{\Delta p(\tau, r, \psi)}{\rho \Omega} = \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' + 2\gamma_{B0}(\tau, r, \psi) \tag{4.3}$$

したがって

$$\frac{L(r, \psi)}{H_0 \rho \Omega} = \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' d\tau + 2 \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \gamma_{B0}(\tau, r, \psi) d\tau \tag{4.4}$$

$\tau_{10}$ ,  $\tau_{20}$  は  $\psi$  の関数でもあって

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' d\tau \\
 &= \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' d\tau + \frac{\partial \tau_{20}}{\partial \psi} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau'
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

と書くことができ、さらに

$$\begin{aligned}
 &\int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' d\tau \\
 &= \tau_{20} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \gamma_{B0}(\tau', r, \psi) d\tau' - \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \tau \gamma_{B0}(\tau, r, \psi) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

と書かれるから、(I.5.5) と (2.25) を参照して

$$\frac{L(r, \psi)}{H_0 \rho \Omega} = \left[ 2 - \frac{\partial \tau_{20}(r, \psi)}{\partial \psi} \right] \Gamma_0(r, \psi) + \frac{\partial}{\partial \psi} [\tau_{20}(r, \psi) \Gamma_0(r, \psi) - \Delta(r, \psi)] \quad (4.7)$$

すなわち単位翼幅の揚力は循環と循環モーメントによって表わされる。

(4.7) で与えられる単位翼幅の揚力はブレード軌跡面に垂直，すなわちベクトル  $-\mathbf{n}$  の方向の力である。この力の回転面に垂直，すなわち  $-\mathbf{k}$  の方向の成分を単位翼幅の推力とよぶことにし，これを  $T(r, \psi)$  で表わすと，(I.3.11)，(I.3.2)，(I.3.3) を用いて

$$\begin{aligned} T(r, \psi) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})|_{\sigma=\tau=0} \cdot L(r, \psi) \\ &= \frac{r+h \sin \chi \sin \psi}{2H_0} L(r, \psi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

このほか，単位翼幅の揚力を求めるのに  $\tau_{20}$  の値が要求される。また揚力線の方程式においても  $b$  と  $\bar{\tau}$  の値が必要であるから，ここでこれらを一括して考える。まず  $\bar{\tau}$  は基準ブレードの翼弦の中央の座標にほぼ等しく，ブレードがはなはだしいラグ運動をしないかぎり

$$\bar{\tau} = 0 \quad (4.9)$$

と仮定してよいであろう。

$b$  は  $\tau$  曲線 ( $r$  = 一定) の方向に  $\tau$  の尺度で測った半弦長にほぼ等しい。長さの尺度との関係は (I.3.4) で与えられる。ブレードの前後縁の間では  $E$  はほぼ一定とみなされるからこれを  $E_0$  で代表させる。またこの間で  $\tau$  曲線はほぼ直線とみなされるから， $\tau=0$  の直線となす角を  $\omega_0$  とすると，その位置での翼弦長を  $c(r)$  として (図 2)

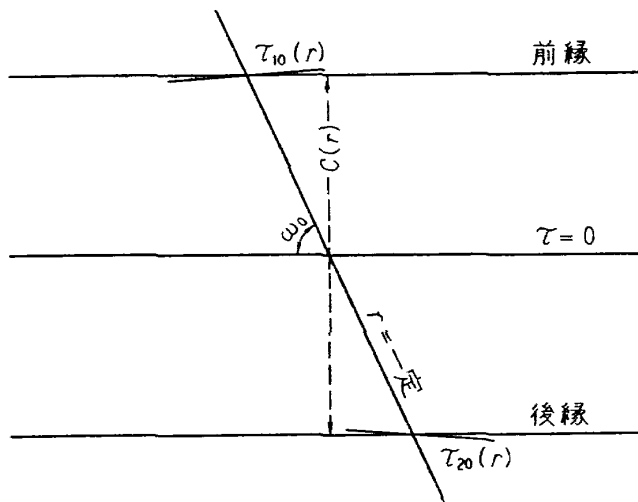


図 2

$$c(r) = 2b(r, \psi) \sqrt{E_0} \sin \omega_0 \quad (4.10)$$

(I.3.7) によって， $G=1$  を考慮して

$$\sin \omega_0 = \frac{H_0}{\sqrt{E_0}} \quad (4.11)$$

したがって

$$b(r, \psi) = \frac{c(r)}{2H_0} \quad (4.12)$$

$\tau_{10}$  と  $\tau_{20}$  は, (4.9) の仮定によって明らかに

$$-\tau_{10} = \tau_{20} = b \quad (4.13)$$

## 5. 垂直飛行の場合

この場合は上の理論において  $\alpha=0$  とおき, かつ定常の条件を与えた特別の場合である。揚力線の方程式およびその他の式は簡単になり, プロペラの理論のそれと直接比較することができる。ただしプロペラの理論は固定翼の Prandtl の揚力線理論と同程度の近似であるのに反し, 本理論は Weissinger の理論と同程度の近似である。定常であるから揚力を求めるのに循環モーメントは不要で, したがって揚力線の方程式としては循環の方程式のみとなる。

### 5.1 揚力線の方程式

定常の条件により, (2.20) において  $p$  による和は  $p=0$  の項を除いて脱落する。その結果右辺の第3ないし第6項はすべて零となる。すなわち第3項は (2.18) によって, また第4項は

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{\sin \frac{2m\pi}{N}}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

なる因子が現われ, これを

$$\sum_{m=1}^{[N/2]} \left[ \frac{\sin \frac{2m\pi}{N}}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2m\pi}{N}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin \frac{2(N-m)\pi}{N}}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{2(N-m)\pi}{N}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

と書き直すと, 角かっこの中の二つの項が互いに打ち消すことがわかる。ここに和の記号における  $[N/2]$  は  $N/2$  を越えない最大の整数を表わす。第5, 第6項については明らかである。

$\alpha=0$  の条件から

$$\sqrt{E_0} = H_0 = \sqrt{h^2 + r^2}/2 \quad (5.1)$$

$$F_0 = 0 \quad (5.2)$$

なることは容易にわかる。これらと (4.12) を (2.20) の残りの項に適用して

$$\begin{aligned} w_n(r) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r'-r} \frac{d\Gamma}{dr'} dr' \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{1 + (2/c)^2 (r'-r)^2}}{r'-r} \frac{d\Gamma}{dr'} dr' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\Gamma}{dr'} \left[ \frac{1}{r'-r} + \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \frac{4D_2}{R_1^3} d\lambda \right] dr' \end{aligned} \quad (5.3)$$



ここに

$$R_1 = \sqrt{h^2\lambda^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\left(\lambda + \frac{2m\pi}{N}\right)} \quad (5.4)$$

$$4D_2 = r(h^2 - r'^2) + (r^2 - h^2)r' \cos\left(\lambda + \frac{2m\pi}{N}\right) - h^2r'\lambda \sin\left(\lambda + \frac{2m\pi}{N}\right) \quad (5.5)$$

(5.3) の右辺の第1項は第3項の一部と相殺するが, (5.3) の形のままのほうがよい。それは第3項の角かっこの中では,  $r'=r$  における特異性が少なくとも一位の極については打ち消されているからである。しかしより低位の, すなわち対数的な特異性は残っている。特異性については後の報告において一般の場合の議論をする。

(5.3) の右辺第3項の中の  $\lambda$  に関する積分はプロペラの理論<sup>5)</sup>において現われる積分と本質的には同じもので, 付録 H に示すように

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \frac{4D_2}{R_1^3} d\lambda \\ &= \begin{cases} -N \left[ \mu - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) pN\mu' I_{pN}(pN\mu) K_{pN'}(pN\mu') \right] & (\mu' > \mu) \\ N \left[ \frac{1}{\mu} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) pN\mu' I_{pN'}(pN\mu') K_{pN}(pN\mu) \right] & (\mu' < \mu) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{r}{h} \\ \mu' &= \frac{r'}{h} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

$I_{pN}$  および  $K_{pN}$  は  $pN$  次の変形されたベッセル関数,  $I_{pN'}$  および  $K_{pN'}$  はそれらの argument による微分係数を表わす。

(5.3) は Weissinger の理論と同程度の, プロペラの揚力線の方程式とすることができる。Prandtl の理論と同程度の方程式は右辺第2項の根号の中の1を省略して

$$-\frac{1}{2\pi c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{|r'-r|}{r'-r} \frac{d\Gamma}{dr'} dr' = \frac{\Gamma(r)}{\pi c}$$

とすれば得られる。

## 5.2 境界条件

(3.22) と (3.23) において  $\chi=0$ ,  $d\beta/d\psi=0$  とし, (5.1) を用いるとそれぞれ

$$w_n(r) = \Omega \sqrt{h^2 + r^2} \theta_1 \quad (5.8)$$

$$\theta_1 = \theta - \tan^{-1} \frac{h}{r} \quad (5.9)$$

となる。

### 5.3 単位翼幅の揚力

(4.7) において  $\psi$  による偏微分の項が落ちる。また (5.1) を用いて

$$L(r) = \rho \Omega \sqrt{h^2 + r^2} \Gamma(r) \quad (5.10)$$

これは Kutta-Joukowski の定理を表わしている。

(4.8) は

$$T(r) = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} L(r) \quad (5.11)$$

したがって

$$T(r) = \rho \Omega r \Gamma(r) \quad (5.12)$$

となる。

## む す び

Weissinger の揚力線理論と同程度の近似による回転翼の揚力線理論を展開し、プロペラの理論との関係を明らかにした。

揚力線の方程式は固定翼の場合に比べてはるかに複雑で、しかも一般の場合には垂直飛行の場合のように核関数を既知関数で表わしうる望みはなさそうである。それゆえ核関数は数値積分によって計算しなければならない。

回転翼の揚力線の方程式を解くことは、循環あるいは循環モーメントが半径方向だけでなく方位角によっても変化するので、固定翼の揚力面の方程式を解く位あるいはそれ以上の労力を必要とするであろう。しかし方針としては、固定翼の場合に通常用いられる方法（たとえば Multhopp の方法）を拡張して、ほぼ同様の方針で行なえばよい。そのためにはなお核関数の特異性などを調べておく必要がある。これらについての議論は後の報告で行なう。

### 付録 A. 基準ブレード上における近似

$I_1^{(1)}$  および  $I_2^{(1)}$  は基準ブレード上の積分であって、ここでは  $|\tau' - \tau|$  は小さいと考えてよいであろう。これらの積分に含まれる関数  $R^2$ ,  $G_1$ ,  $D_1$ ,  $S$ ,  $T$  の近似式を導いておく。これらの関数を  $\tau' = \tau$ ,  $r' = r$  の近傍で  $\tau'$ ,  $r'$  に関して Taylor 級数に展開すると

$$\begin{aligned} R^2(P_0, P_0') &= E(P_0)(\tau' - \tau)^2 + 2F(P_0)(\tau' - \tau)(r' - r) + (r' - r)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ r + 2h \sin \chi \sin \left( \psi - \frac{\tau}{2} \right) \right] (\tau' - \tau)^2 (r' - r) + \dots \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$G_1(P_0, P_0') = -H^2(P_0)(\tau' - \tau) + \frac{1}{4} \left[ r + h \sin \chi \sin \left( \psi - \frac{\tau}{2} \right) \right] F(P_0)(\tau' - \tau)^2 + \dots \quad (A.2)$$

$$D_1(P_0, P_0') = -H^2(P_0)(r'-r) - \frac{1}{8}rH^2(P_0)(\tau'-\tau)^2 - \frac{1}{4}\left[r+h\sin\chi\sin\left(\psi-\frac{\tau}{2}\right)\right](r'-r)^2 + \dots \quad (\text{A.3})$$

$$S(P_0, P_0') = H^2(P_0)(\tau'-\tau)^2 + \dots \quad (\text{A.4})$$

$$T(P_0, P_0') = F(P_0)(\tau'-\tau) + (r'-r) + \frac{1}{8}\left[r+2h\sin\chi\sin\left(\psi-\frac{\tau}{2}\right)\right](\tau'-\tau)^2 + \dots \quad (\text{A.5})$$

$R^2$  と  $D_1$  はそれぞれ (I.4.10) と (1.4) でみられるようにもともと  $r'$  に関して2次式であるから、展開式においても  $(r'-r)$  の3次以上の項を含まない。また  $(\tau'-\tau)^n (r'-r)^2$  の項 ( $n=1, 2, \dots$ ) も含まない。 $G_1$  と  $S$  は  $r'$  に無関係である。 $T$  は  $r'$  に関して1次式であって、(A.5) 式の右辺第2項以外に  $r'$  を含まない。

$G_1$  と  $S$  はそれぞれ (A.2) および (A.4) 式の右辺第2項以下を省略するのに無理はない。 $T$  も (A.5) 式の右辺第3項以下を省略してさしつかえない。 $R^2$  に関しては  $|r'-r|$  が小さいときには (A.1) 式の最初の3項で近似される。 $|r'-r|$  が大きいときには明らかに第3項で近似される。したがって (A.1) 式の第4項以下を省略してよいであろう。こうすると固定翼(後退翼)の場合に似た形になってつごうがよい。最後に  $D_1$  については (A.3) 式の右辺第2項は省略できるが、第3項は (A.3) 式のみを考えるかぎり省略すべき理由はない。しかし (1.35) の積分を考えると、被積分関数の分母に  $R^3$  があるので、 $|r'-r|$  が大きいときの寄与は小さいと思われる。それゆえ (A.3) 式の右辺第3項をも省略する。これも固定翼の場合と同様の形にするためである。

さらに  $|\tau|$  も小さいと考えてよいから、展開の係数として現われる  $E(P_0), F(P_0), H(P_0)$  を  $\tau=0$  における値で近似し、これらをそれぞれ  $E_0, F_0, H_0$  で表わす。以上によって上記の関数の基準ブレード上における近似は (1.13) ないし (1.16) および (1.37) となる。

### 付録 B. $I_1^{(3)}$ の誘導

誘導速度に対する  $\gamma_{w0}$  の寄与は (1.5) の第1式から

$$I = \frac{1}{4\pi H} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{20}'}^{+\infty} \frac{G_1 \gamma_{w0}}{R^3} d\tau' dr'$$

$|\tau'-\tau|$  と  $|r'-r|$  が小さい範囲では  $R$  は (1.13),  $G_1$  は (1.14) で近似される。さらに  $\gamma_{w0}$  を  $\gamma_{w0}(r)$ ,  $H(P_0)$  を  $H_0$ ,  $\tau_{20}'$  を  $\tau_{20}(r)$  で置き換え、 $r_1 \rightarrow -\infty, r_2 \rightarrow +\infty$  として

$$\begin{aligned} I_1^{(3)} &= -\frac{H_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} \frac{(\tau'-\tau)\gamma_{w0}(r)}{[E_0 \cdot (\tau'-\tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau'-\tau)(r'-r) + (r'-r)^2]^{\frac{3}{2}}} d\tau' dr' \\ &= -\frac{H_0}{4\pi} \int_{\tau_{20}(r)}^{+\infty} (\tau'-\tau)\gamma_{w0}(r) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[E_0 \cdot (\tau'-\tau)^2 + 2F_0 \cdot (\tau'-\tau)(r'-r) + (r'-r)^2]^{\frac{3}{2}}} dr' d\tau' \end{aligned}$$

$r'$  による積分を実行すると (1.24) を得る。 $I_1^{(3)}$  は  $\gamma_{w0}$  が点  $P_0$  におけるブレード軌跡面の接平面上に二次元的に分布しているときの  $P_0$  における誘導速度と解釈される。

(1.26) の形の被積分関数は, (1.23) の被積分関数において  $|\tau' - \tau|$  が小さいとすると, (1.19), (1.20), (1.21), (1.22) から

$$\begin{aligned} R_1 &\doteq |r' - r| \\ G_2 &\doteq -H_0^2 \cdot (\tau' - \tau) \\ S_1 &\doteq H_0^2 \cdot (\tau' - \tau)^2 \\ T_1 &\doteq r' - r \end{aligned}$$

となるから

$$\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \doteq -\frac{r' - r}{|r' - r|} \frac{1}{\tau' - \tau}$$

### 付録 C. 偏揺れした翼に対する Prandtl の揚力線モデル

Prandtl の揚力線理論では, 後流渦による揚力線上の誘導速度を求めることが基本である。図 3 のように角  $A$  だけ偏揺れした揚力線を考えると, その上での誘導速度は

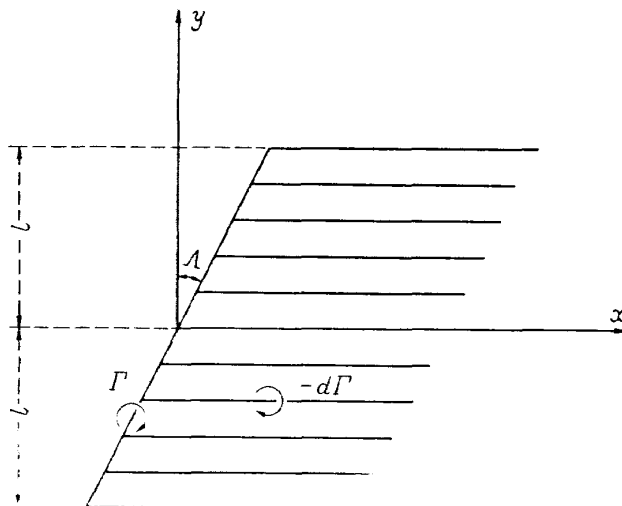


図 3

$$\begin{aligned} w(y \tan A, y) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{y - y'} \frac{d\Gamma}{dy'} dy' \\ &\quad - \frac{\sin A}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{|y - y'|} \frac{d\Gamma}{dy'} dy' \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

右辺はいずれも特異積分で, 第1の積分は偏揺れのない場合と同じ形であるから Cauchy の主値をとればよい。第2の積分は Cauchy の主値が存在しない。したがって偏揺れした翼に対して Prandtl の揚力線モデルを適用することはできない。

付録 D. Weissinger の揚力線の方程式を揚力面の方程式から誘導するための数学的近似

Weissinger の揚力線の方程式は物理的なモデルに基づいて作られたものであるが、矩形翼の場合にはこれを揚力面の方程式から数学的近似によって誘導されることが知られている<sup>2)</sup>。ここではこの手法を回転翼の場合に応用するため、より一般の平面形について考える。

図 4 に示すように、翼幅方向にとった軸が一樣流に対して角  $\Lambda$  だけ偏揺れした翼を考える。前後縁の位置がこの軸から一樣流の方向に測って等距離であるほかは任意の平面形とする。座標軸を

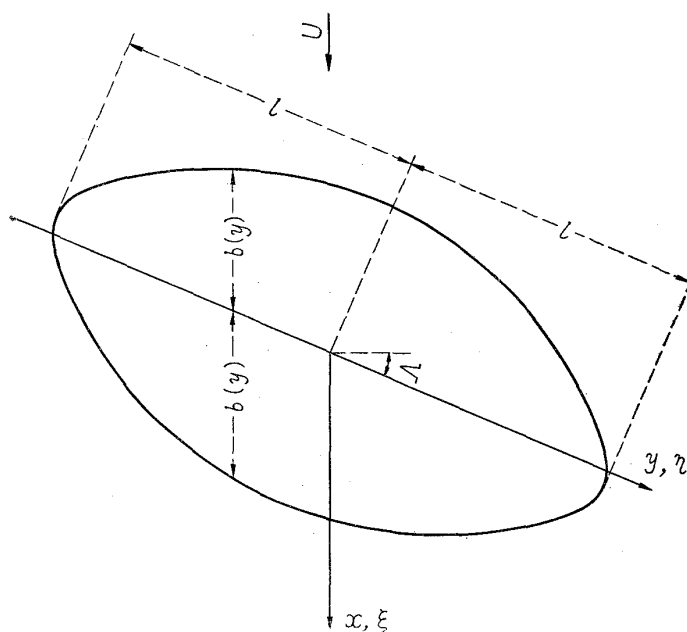


図 4

図のようにとり、Biot-Savart の法則を適用すると、揚力面の積分方程式として

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & -\frac{\cos \Lambda}{4\pi} \int_{-l}^l \int_{-b(\eta)}^{b(\eta)} \frac{\gamma_a(\xi, \eta)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta) \sin \Lambda + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \\
 & -\frac{\cos \Lambda}{4\pi} \int_{-l}^l \int_{-b(\eta)}^{b(\eta)} \frac{\delta_a(\xi, \eta)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta) \sin \Lambda + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \\
 & -\frac{\cos \Lambda}{4\pi} \int_{-l}^l \int_{b(\eta)}^{+\infty} \frac{\delta_a(b(\eta), \eta)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta) \sin \Lambda + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

をうる。ここに

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_a &= \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \\
 \delta_a &= \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (D.2)$$

$\phi$  は速度ポテンシャル、 $\Delta$  は翼上下面における値の差を表わす。(D.1) の右辺の第 1 の積分を  $\eta$

について、第2の積分を  $\xi$  についてそれぞれ部分積分し、第3の積分の  $\xi$  についての積分を実行すると (D.1) は

$$w(x, y) = -\frac{1}{4\pi \cos A} \int_{-l}^l \int_{-b(\eta)}^{b(\eta)} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta) \sin A + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} \frac{\partial r_a}{\partial \eta} d\xi d\eta \\ - \frac{1}{4\pi \cos A} \int_{-l}^l \frac{1}{y-\eta} \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \quad (D.3)$$

の形となる。ここに

$$\Gamma(\eta) = \int_{-b(\eta)}^{b(\eta)} r_a(\xi, \eta) d\xi \quad (D.4)$$

(D.3) の第1の積分の根号の中で

$$x - \xi \doteq b(y) \quad (D.5)$$

とおき、両辺に  $\sqrt{[b(y)+x]/[b(y)-x]}$  を掛けて  $-b(y)$  から  $b(y)$  まで  $x$  について積分する。このとき  $\alpha(y)$  を幾何学的迎え角として

$$w(x, y) = -U\alpha(y) \quad (D.6)$$

とすると

$$\alpha(y) = \frac{1}{4\pi U b(y) \cos A} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{[b(y)]^2 + 2b(y)(y-\eta) \sin A + (y-\eta)^2}}{y-\eta} \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \\ + \frac{1}{4\pi U \cos A} \int_{-l}^l \frac{1}{y-\eta} \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \quad (D.7)$$

をうる。(D.7) が Weissinger の揚力線の方程式 (L-method)<sup>7)</sup> と事実上同じであることは容易に検証される。

## 付録 E. 二つの積分

二つの積分の公式 (2.16) と (2.30) を証明する。変形されたベッセル関数  $K_\nu(z)$  は次の積分表示が可能である (文献 (8), p. 172)。

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_1^{+\infty} e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2} dt \quad (E.1)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\nu+1/2) > 0 \\ |\arg z| < \pi/2 \end{array} \right\}$$

とする。(E.1) で  $\nu=0$  とおくと

$$K_0(z) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-zt}}{\sqrt{t^2-1}} dt \quad (E.2)$$

この式は特に

$$|\arg z| \leq \pi/2 \tag{E.3}$$

で成立する (等号の場合にも右辺が収束するから)。

(E.1) で  $\nu=1$  とおくと

$$K_1(z) = z \int_1^{+\infty} e^{-zt} \sqrt{t^2-1} dt \tag{E.4}$$

次に

$$\int_1^{+\infty} t e^{-zt} dt = \frac{e^{-z}}{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \tag{E.5}$$

ただし

$$|\arg z| < \pi/2$$

(E.4) と (E.5) から

$$\int_1^{+\infty} e^{-zt} (\sqrt{t^2-1} - t) dt = \frac{K_1(z)}{z} - \frac{e^{-z}}{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \tag{E.6}$$

左辺は (E.3) の範囲で収束するから, 同じ範囲でこの式が成立する。左辺を部分積分すると

$$\int_1^{+\infty} e^{-zt} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}} - 1\right) dt = K_1(z) - \frac{e^{-z}}{z} \tag{E.7}$$

(E.2) と (E.7) の和を考えると

$$\int_1^{+\infty} e^{-zt} \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} - 1\right) dt = K_0(z) + K_1(z) - \frac{e^{-z}}{z} \tag{E.8}$$

成立範囲は (E.3) である。(E.6) と (E.8) はすでに知られている<sup>9),10)</sup>。

(E.8) において  $z=ik_p$  とおくと

$$\int_1^{+\infty} e^{-ik_p t} \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} - 1\right) dt = K_0(ik_p) + K_1(ik_p) - \frac{e^{-ik_p}}{ik_p} \tag{E.9}$$

(E.8) の成立範囲を考慮すると,  $k_p > 0$  のとき

$$\left. \begin{aligned} K_0(ik_p) &= -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(k_p) \\ K_1(ik_p) &= -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k_p) \end{aligned} \right\} \tag{E.10}$$

$k_p < 0$  のとき

$$\left. \begin{aligned} K_0(ik_p) &= \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(-k_p) \\ K_1(ik_p) &= -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-k_p) \end{aligned} \right\} \tag{E.11}$$

と表わせる (文献 (8), p. 78 の公式 (8) および p. 75 の公式 (5))。ここに  $H_0^{(2)}$  等はハンケル関数を表わす。(E.9), (E.10), (E.11) から (2.15) をうる。 $k_p=0$  のときは (E.9) の左辺の積

分は収束しない。

(E.6) において  $z=ik_p$  とおくと

$$\int_1^{+\infty} e^{-ik_p t} (\sqrt{t^2-1}-t) dt = \frac{K_1(ik_p)}{ik_p} - \frac{e^{-ik_p}}{ik_p} \left(1 + \frac{1}{ik_p}\right) \quad (\text{E.12})$$

これに (E.10), (E.11) を適用すると (2.30) をうる。  $k_p=0$  のときは (E.12) の左辺は収束しない。

### 付録 F. $A(k_p), B(k_p)$ の極限值

$k_p$  を零に近づけたときの  $A(k_p)$  と  $B(k_p)$  の極限值を調べておく。

$$A(k_p) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} k_p e^{ik_p} [H_0^{(2)}(k_p) - iH_1^{(2)}(k_p)] - 1 & (k_p > 0) \\ -\frac{\pi}{2} k_p e^{ik_p} [H_0^{(1)}(-k_p) + iH_1^{(1)}(-k_p)] - 1 & (k_p < 0) \end{cases} \quad (\text{2.17})$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)} &= J_0 + iN_0 \\ H_1^{(1)} &= J_1 + iN_1 \\ H_0^{(2)} &= J_0 - iN_0 \\ H_1^{(2)} &= J_1 - iN_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.1})$$

$x \rightarrow 0+$  のとき

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &\rightarrow 1 \\ J_1(x) &\rightarrow 0 \\ N_0(x) &\doteq \frac{2}{\pi} \log x \\ N_1(x) &\doteq -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.2})$$

であるから,  $k_p \rightarrow 0+$  のとき

$$\begin{aligned} & e^{ik_p} [H_0^{(2)}(k_p) - iH_1^{(2)}(k_p)] \\ &= [J_0(k_p) - N_1(k_p)] \cos k_p + [J_1(k_p) + N_0(k_p)] \sin k_p \\ &\quad + i \{ [J_0(k_p) - N_1(k_p)] \sin k_p - [J_1(k_p) + N_0(k_p)] \cos k_p \} \\ &\doteq \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k_p} - i \log k_p \right) \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$k_p \rightarrow 0-$  のとき

$$\begin{aligned} & e^{ik_p} [H_0^{(1)}(-k_p) + iH_1^{(1)}(-k_p)] \\ &= [J_0(-k_p) - N_1(-k_p)] \cos k_p - [J_1(-k_p) + N_0(-k_p)] \sin k_p \\ &\quad + i \{ [J_0(-k_p) - N_1(-k_p)] \sin k_p + [J_1(-k_p) + N_0(-k_p)] \cos k_p \} \end{aligned}$$



$$\doteq -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k_p} - i \log(-k_p) \right] \quad (\text{F.4})$$

したがって

$$\lim_{k_p \rightarrow 0+} A(k_p) = \lim_{k_p \rightarrow 0-} A(k_p) = 0 \quad (\text{F.5})$$

すなわち

$$\lim_{k_p \rightarrow 0} A(k_p) = 0 \quad (\text{F.6})$$

次に

$$B(k_p) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{ik_p} + \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k_p) e^{ik_p} & (k_p > 0) \\ 1 + \frac{1}{ik_p} + \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-k_p) e^{ik_p} & (k_p < 0) \end{cases} \quad (\text{2.31})$$

(F.1), (F.2) によって,  $k_p \rightarrow 0+$  のとき

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(k_p) e^{ik_p} &= J_1(k_p) \cos k_p + N_1(k_p) \sin k_p + i[J_1(k_p) \sin k_p - N_1(k_p) \cos k_p] \\ &\doteq -\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{ik_p} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$k_p \rightarrow 0-$  のとき

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(-k_p) e^{ik_p} &= J_1(-k_p) \cos k_p - N_1(-k_p) \sin k_p \\ &\quad + i[J_1(-k_p) \sin k_p + N_1(-k_p) \cos k_p] \\ &\doteq -\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{ik_p} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

したがって

$$\lim_{k_p \rightarrow 0+} B(k_p) = \lim_{k_p \rightarrow 0-} B(k_p) = 0 \quad (\text{F.9})$$

すなわち

$$\lim_{k_p \rightarrow 0} B(k_p) = 0 \quad (\text{F.10})$$

また (F.5) を考慮して, 明らかに

$$\lim_{k_p \rightarrow 0} B_1(k_p) = 0 \quad (\text{F.11})$$

### 付録 G. $\partial F_L / \partial n |_{\sigma=\tau=0}$

$\mathbf{r}$  を位置ベクトルとし

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \mathbf{r}_\sigma, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \mathbf{r}_\tau, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{r}_r \quad (\text{G.1})$$

と書く。これらは座標曲線の接線方向のベクトルである。 $\text{grad } F_L$  をこれらの方向に分解して

$$\text{grad } F_L = (\text{grad } F_L)_\sigma \mathbf{r}_\sigma + (\text{grad } F_L)_\tau \mathbf{r}_\tau + (\text{grad } F_L)_r \mathbf{r}_r \quad (\text{G.2})$$

と書くことができる。 $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_r$  に垂直であることを考慮すると, (3.2) によって

$$\frac{\partial F_L}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } F_L)_\sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma) \quad (\text{G.3})$$

(G.2) の両辺と  $\mathbf{r}_\sigma, \mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_r$  とのスカラ積を作ると

$$\mathbf{r}_\sigma \cdot \text{grad } F_L = \frac{\partial F_L}{\partial \sigma}$$

等であるから

$$\frac{\partial F_L}{\partial \sigma} = (\text{grad } F_L)_\sigma (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\sigma) + (\text{grad } F_L)_\tau (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau) + (\text{grad } F_L)_r (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r) \quad (\text{G.4})$$

等の3個の式をうる。これら3個の式から  $(\text{grad } F_L)_\sigma$  を求めると

$$(\text{grad } F_L)_\sigma = \frac{\Delta \sigma}{\Delta} \quad (\text{G.5})$$

ここに

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix}^2 \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$\Delta_\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_L}{\partial \sigma} & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r \\ \frac{\partial F_L}{\partial \tau} & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r \\ \frac{\partial F_L}{\partial r} & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_r \end{vmatrix} \quad (\text{G.7})$$

一方, (I.3.11) によって

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma &= \frac{1}{H} (\mathbf{r}_\tau \times \mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{r}_\sigma \\ &= -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma, \tau, r)} \quad (\text{G.9})$$

と書くと, (G.3), (G.5), (G.6), (G.8) により

$$\frac{\partial F_L}{\partial n} = -\frac{\Delta_\sigma}{H \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma, \tau, r)}} \quad (\text{G.10})$$

(I.3.1) から (G.9) を計算すると

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma, \tau, r)} = \frac{1}{2} rh \cos \chi \quad (\text{G.11})$$

必要なのは  $\partial F_L / \partial n|_{\sigma=\tau=0}$  であるから, 以下では簡単のため  $\sigma=\tau=0$  における値のみを考える。

(3.15) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_L}{\partial \sigma} &= -rh \cos \chi \\ \frac{\partial F_L}{\partial \tau} &= \frac{\partial F_L}{\partial r} \Big|_{\sigma=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.12})$$

であるから, (G.7) から

$$\Delta_\sigma|_{\sigma=\tau=0} = \frac{\partial F_L}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\tau=0} [(\mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\tau)(\mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_r) - (\mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r)^2] \Big|_{\sigma=\tau=0}$$

(I.3.5), (I.3.8) を考慮すると

$$\Delta_\sigma|_{\sigma=\tau=0} = -r(h \cos \chi) H_0^2 \quad (\text{G.13})$$

(G.10), (G.11), (G.13) によって

$$\frac{\partial F_L}{\partial n} \Big|_{\sigma=\tau=0} = 2H_0 \quad (\text{G.14})$$

## 付録 H.

(5.6) の関係の証明をしておく。これと本質的には同じ関係がプロペラの理論で求められているが, 誘導の過程に厳密を欠く点がある。以下の誘導はプロペラの理論におけるものと多少異なる。

(5.4) と (5.5) によって

$$\frac{4D_2}{R_1^3} = \frac{h^2}{r} \left[ \frac{1}{R_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{R_1} \right) \right] + \frac{h^2 + r^2}{r} r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{R_1} \right) \quad (\text{H.1})$$

と書くことができる。

$$\sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \frac{4D_2}{R_1^3} d\lambda$$

を考えるのに、(H.1) の右辺第1項については

$$\int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{R_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{R_1} \right) \right] d\lambda = \frac{1}{h} \quad (\text{H.2})$$

であることが容易にわかるから

$$\frac{h^2}{r} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{R_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{R_1} \right) \right] d\lambda = \frac{N}{\mu} \quad (\text{H.3})$$

第2項については、まずベッセル関数に関する Lipschitz の積分 (文献 (8), p. 384) と Neumann の加法定理 (同, p. 359) とを用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \int_0^{+\infty} e^{-h\lambda x} J_0(rx) J_0(r'x) dx \\ &+ 2 \int_0^{+\infty} e^{-h\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(rx) J_n(r'x) \cos n \left( \lambda + \frac{2m\pi}{N} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

と書く。(H.4) の第1項については  $r'$  による偏微分,  $\lambda$  についての積分の順序に行ない, 最後に Weber の積分 (文献 (8), p. 406) を用いて  $x$  に関する積分を行なうと

$$\begin{aligned} &\frac{h^2+r^2}{r} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} r' \frac{\partial}{\partial r'} \int_0^{+\infty} e^{-h\lambda x} J_0(rx) J_0(r'x) dx d\lambda \\ &= \begin{cases} -N \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) & (r' > r) \\ 0 & (r' < r) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

(H.4) の第2項については  $\lambda$  に関する積分,  $m$  についての和の順序に行なった後, Hankel の積分 (文献 (8), p. 429) を用いて  $x$  に関する積分を行ない, 最後に  $r'$  について偏微分すると

$$\begin{aligned} &\frac{2(h^2+r^2)}{r} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} r' \frac{\partial}{\partial r'} \int_0^{+\infty} e^{-h\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(rx) J_n(r'x) \cos n \left( \lambda + \frac{2m\pi}{N} \right) dx d\lambda \\ &= \begin{cases} 2N \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) \sum_{p=1}^{+\infty} p N \mu' I_{pN} (pN\mu) K_{pN}' (pN\mu') & (r' > r) \\ 2N \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) \sum_{p=1}^{+\infty} p N \mu' I_{pN}' (pN\mu') K_{pN} (pN\mu) & (r' < r) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

(H.3), (H.5), (H.6) を加え合わせて (5.6) をうる。

文 献

- 1) 市川輝雄; 回転翼の線型理論 (I), 揚力面理論, 航技研報告 TR-68 (昭和 39)
- 2) E. Reissner; Note on the Theory of Lifting Surfaces, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 35, No. 4 (1949/4)  
R. L. Bisplinghoff et al.; Aeroelasticity (1955) pp. 237-239, Addison-Wesley.
- 3) 河田三治; Calculation of Induced Velocity by Helical Vorticies and Its Application to Propeller Theory, 航空研究所報告, No. 172 (昭和 14)
- 4) 近藤一夫; プロペラ理論の再展開, 航空学会誌, 6 卷 51 号 (昭和 14/7) p. 725.
- 5) 守屋富次郎; 空気力学序論 (昭和 34) pp. 172-182, 培風館.
- 6) E. Reissner; Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings, I—Aerodynamic Theory of Oscillating Wings of Finite Span, NACA TN 1194 (1947) p. 15.
- 7) J. Weissinger; The Lift Distribution of Swept-Back Wings, NACA TM 1120 (1947)
- 8) G. N. Watson; A Treatise on the Theory of Bessel Functions (1958) Cambridge.
- 9) E. Reissner; On the General Theory of Thin Airfoils for Nonuniform Motion, NACA TN 946 (1944) p. 52.
- 10) W. F. Durand; Aerodynamic Theory, Vol. II (1935) p. 295, Springer.

回転翼の線型理論 (I) 正誤表

ページ	行	誤	正
7	上 1	ブレード面	ブレード面
9	上 9	曲面 $\sigma = \bar{\sigma}$ 上の位置ベクトル……	曲面 $\sigma = \bar{\sigma}$ 上の点の位置ベクトル……
12	上 10	$\text{curl} \left[ \frac{\gamma(P')}{R(R, P')} \right]$	$\text{curl} \left[ \frac{\gamma(P')}{R(P, P')} \right]$
//	上 13	$w_n(p) = \dots$	$w_n(P) = \dots$
16	下 8	右辺は (2.16) で	左辺は (2.16) で……

<p>NAL TR-85 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (II) —揚力線理論—</p> <p>1965年3月 35ページ</p> <p>前報で得た回転翼の揚力面の方程式から揚力線の積分方程式を導いた。これは固定翼の Weissinger の揚力線理論と同程度の近似で、循環の方程式と循環モーメントの方程式の二つからなる。境界条件は揚力線近似に見合う形で表わした。単位翼幅の揚力は循環と循環モーメントで表わされる。 最後に定常垂直飛行の場合を扱った。この場合には核関数の一部がプロペラの理論におけると同様な変形されたベッセル関数の級数で表わされる。</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-85 III. 629.13.014.7</p>	<p>NAL TR-85 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (II) —揚力線理論—</p> <p>1965年3月 35ページ</p> <p>前報で得た回転翼の揚力面の方程式から揚力線の積分方程式を導いた。これは固定翼の Weissinger の揚力線理論と同程度の近似で、循環の方程式と循環モーメントの方程式の二つからなる。境界条件は揚力線近似に見合う形で表わした。単位翼幅の揚力は循環と循環モーメントで表わされる。 最後に定常垂直飛行の場合を扱った。この場合には核関数の一部がプロペラの理論におけると同様な変形されたベッセル関数の級数で表わされる。</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-85 III. 629.13.014.7</p>
<p>NAL TR-85 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (II) —揚力線理論—</p> <p>1965年3月 35ページ</p> <p>前報で得た回転翼の揚力面の方程式から揚力線の積分方程式を導いた。これは固定翼の Weissinger の揚力線理論と同程度の近似で、循環の方程式と循環モーメントの方程式の二つからなる。境界条件は揚力線近似に見合う形で表わした。単位翼幅の揚力は循環と循環モーメントで表わされる。 最後に定常垂直飛行の場合を扱った。この場合には核関数の一部がプロペラの理論におけると同様な変形されたベッセル関数の級数で表わされる。</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-85 III. 629.13.014.7</p>	<p>NAL TR-85 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (II) —揚力線理論—</p> <p>1965年3月 35ページ</p> <p>前報で得た回転翼の揚力面の方程式から揚力線の積分方程式を導いた。これは固定翼の Weissinger の揚力線理論と同程度の近似で、循環の方程式と循環モーメントの方程式の二つからなる。境界条件は揚力線近似に見合う形で表わした。単位翼幅の揚力は循環と循環モーメントで表わされる。 最後に定常垂直飛行の場合を扱った。この場合には核関数の一部がプロペラの理論におけると同様な変形されたベッセル関数の級数で表わされる。</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-85 III. 629.13.014.7</p>

- |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |          |                                  |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------------------------------|
| TR-73 | 軸対称澱み点付近の溶融層の安定性<br>Stability of the Melted Layer near the Axisymmetric Stagnation Point                                                                                                                                                                                                    | 1964年11月 | 相原康彦                             |
| TR-74 | 遷音速パネルフラッタの研究<br>The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter                                                                                                                                                                                                        | 1964年11月 | 石井孝雄, 柳沢三憲                       |
| TR-75 | 統計流体力学の初期値問題について<br>—Hopf 特性汎関数方程式の一般解—<br>On the Initial-value Problem in Statistical Hydromechanics<br>—A General Solution of the Hopf Characteristic Functional Equation—                                                                                                                | 1964年12月 | 細川 巖                             |
| TR-76 | 高速軸流圧縮機の研究 (IV)<br>—NACA 65 系翼型を修正した近似二重門弧翼形の動翼相対入口マッハ数1.5までの回転翼列試験—<br>An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV)<br>—Rotor Performance at Relative Inlter Mach Numbers up to 1.5 of NACA 65-Series Compressor Blades Modified Approximately to Double Circular-Arc Blades— | 1965年1月  | 大山耕一, 松本正勝<br>西脇英夫, 岩部桂相<br>片山泰治 |
| TR-77 | Galerkin 法の収束性について<br>On the Convergence of Galerkin's Method                                                                                                                                                                                                                               | 1965年1月  | 鳥海良三                             |
| TR-78 | 二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法<br>Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems                                                                                                                                                               | 1965年1月  | 三好 甫                             |
| TR-79 | 引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の大振幅振動の影響について<br>Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates under Initial Tension or Compression                                                                                                                                   | 1965年1月  | 田寺木一, 古関昌次<br>泉 日出夫              |
| TR-80 | 変分法直接解法において解に及ぼす束縛の数値的影響<br>—薄肉開断面片持梁の純捩り振動の例—<br>Numerical Effect of Constraints in Calculus of Direct Variational Method<br>—in Case of Pure Torsional Vibration of Thin Walled Beams of Open Cross Section—                                                                              | 1965年1月  | 埜 武敏, 越出慎一                       |
| TR-81 | FRP コーティングの断熱特性<br>Thermal Insulation Characteristics of FRP Coating                                                                                                                                                                                                                        | 1965年1月  | 竹中幸彦, 江川幸一<br>小川敏一               |
| TR-82 | 多段軸流圧縮機の部分負荷特性の簡易計算法<br>A Simple Method of Calculating the off-Design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressor                                                                                                                                                                      | 1965年2月  | 松本正勝, 藤井昭一                       |
| TR-83 | 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (I)<br>—非圧縮流理論—<br>Theoretical Study of Two-Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (I)<br>—Incompressible Flow Case—                                                                                                                       | 1965年2月  | 石井孝雄                             |

## 航空宇宙技術研究所報告85号

昭和40年3月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1,880  
電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社  
東京都港区芝南佐久間町1の53