

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-92

ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I)

—迎角0のとき—

谷 喬

1965年8月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-70 汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性
Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory 1965年1月 松浦陽恵, 樋口一雄
池谷光栄, 堀川勇壯
村上力, 百名盛之典
三好範子, 岡部正典
- TR-71 塑性の三方向せん断理論
塑性変形による異方性
塑性流動に及ぼす中間主応力の影響
応力状態と塑性変形の形
Three Shear Theory of Plasticity
Anisotropy Due to Plastic Deformation
Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation 1964年7月 中西不二夫, 佐藤和郎
- TR-71T Three Shear Theory of Plasticity
Anisotropy Due to Plastic Deformation
Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow
Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation
Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity September 1964 Fujio NAKANISHI
Yasuo SATO
- TR-72 補助翼バズに関する一実験
Some Experiments on Control-Surface Buzz 1965年1月 中村泰治, 田辺義一
- TR-72T Some Experiments on Control-Surface Buzz November 1964 Yasuaru NAKAMURA
Yoshikazu TANABE
- TR-73 軸対称激み点付近の溶融層の安定性
Stability of the Melted Layer near the Axisymmetric Stagnation Point 1964年11月 相原康彦
- TR-74 遷音速パネルフラッタの研究
The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter 1964年11月 石井孝雄, 柳沢三憲
- TR-75 統計流体力学の初期値問題について
On the Initial-Value Problem in Statistical Hydromechanics 1964年12月 細川 巖
- TR-76 高速軸流圧縮機の研究 (IV)
An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV) 1965年1月 大山耕一, 松木正勝
西脇英夫, 岩部柱相
片山泰治
- TR-77 Galerkin 法の収束性について
On the Convergence of Galerkin's Method 1965年1月 島海良三
- TR-78 二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法
Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems 1965年1月 三好 甫
- TR-79 引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の大振幅振動の影響について
Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates under Initial Tension or Compression 1965年1月 田寺木一, 古関昌次
泉 日出夫
- TR-80 変分法直接解法において解に及ぼす束縛の数値的影響
Numerical Effect of Constraints in Calculus of Direct Variational Method 1965年1月 埜 武敏, 越出慎一
- TR-81 FRP コーティングの断熱特性
Thermal Insulation Characteristics of FRP Coating 1965年1月 竹中幸彦, 江川幸一
小川鉦一
- TR-82 多段軸流圧縮機の部分負荷特性の簡易計算法
A Simple Method of Calculating the off-Design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressor 1965年2月 松木正勝, 藤井昭一
- TR-83 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (I)
—非圧縮流理論—
Theoretical Study of Two-Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (I)
—Incompressible Flow Case— 1965年2月 石井孝雄

ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法* (I)

— 迎角 0 のとき —

谷 喬**

An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (I)

— Linearized Flow with Axial Symmetry —

By Takashi TANI

The supersonic air flow past bodies of rocket vehicles is treated. The equation is transformed to the simplest wave equation in the vicinity of the body surface. This method is useful for the cylindrical body with slope discontinuities. In this report the linearized flow with axial symmetry is investigated. The results indicate good agreement with the results by other authors and experimental values.

1. ま え が き

高速で飛行するロケットの胴体部に働く空気力を簡単に求めることを目的として、胴体表面近傍で3次元の流れを2次元の形に変換する方法を導いた。本報告ではまず迎角のない場合、したがって軸対称流を取り扱った。特に頭部と胴体部のつぎめいわゆる肩の直後や、胴体後端のポードテイルあるいはフレヤー上の圧力分布を求めることを試みたが、これはこのような表面の傾斜またはその微係数に不連続のある所では通常用いられる超音速の線型理論に基づく軸上の吹出し分布による解が発散その他の困難を伴うからである。結果として実用上重要ないくつかの場合に精度のよい近似解が容易に求められることを示し、また、精度の向上も可能なことがわかる。

2. 序 論

ロケットの飛行速度が増すとともに尾翼の効果は減じ、胴体部に働く空気力が重要性を増してくる。実際ごく高性能のロケットには尾翼を全く欠いた形態もあらわれている。このようなロケット胴体部に働く空気力を計算するとき、もしその表面の傾斜が連続であればよく知られた線型理論による解¹⁾ やスレンダーボディの理論²⁾ 等が適用できる。また、流れが軸対称すなわち迎角のない場

* 昭和40年6月18日受付

** 空気力学第二部

合には非線型項を考慮することも可能であり³⁾ 筆者も高亜音速または低超音速の非線型流の解法を導いたことがある⁴⁾。

しかし実際に用いられるロケットでは頭部と中央の円筒部や尾部のフレアまたはポートテイルへの移り変わりが表面の傾斜の不連続を伴うのが普通である。そしてこのような流れを前記の解法により扱うときは軸上の吹出し分布が特異性を持ち、実際の計算に大きな困難をもたらす。われわれがよく用いられる Van Dyke の解法³⁾を電子計算機のプログラムに作った際もこの障害により解を不連続点で打ち切らねばならなかった⁵⁾。

本報告ではロケット胴体近傍で流れを支配する方程式を解きやすい2次元流の形に導き、このような不連続のある問題を扱うことを試みる。このように3次元流が局所的には2次元性をもつことはすでに知られており、特殊な問題については解が求められている^{6),7)}。筆者も以前ある種の仮想気体に対する軸対称流の非線型方程式が2次元形に変換しうることを見だした⁸⁾。しかし実用上からは従来の方法は解を求める上にまだ不十分であり、特に不連続点から有限距離下流の点の値を求める場合労力を要することが多い。これはやはり同じ思想に基づいた近似解法とみられる Shock-Expansion 法⁹⁾についてもいえることであって、下流の解を求めるためには手数のかかる2次元理論によらねばならず、また迎角のある場合にはその仮定に問題があるようである。

以下の方法によれば解は簡単な解析的な形で与えられ、実例について容易に数値を求めることができ、その結果は実験値あるいはほかの労力を要する計算結果とよい一致を示す。特に迎角のある場合の揚力問題や非線型項の影響の計算等も統一された方法で行なうことができる。

3. 記 号

a : 円錐まわりの解に含まれる常数

C_p : 圧力係数

F : 変換された擾乱ポテンシャル

R : 物体の半径

r : 半径方向座標

s : 変換された半径方向座標

x : 軸方向座標

y : 変換された半径方向座標

u : x 方向擾乱速度

U : 一様流流速

v : r 方向擾乱速度

V : $r=1$ 上の v の値

\tilde{x} : $x - \cot\delta$, 円錐-円筒物体の肩からの距離

f_+, f_- : F の一般解, それぞれ ξ, η のみの関数

β : $\sqrt{M^2 - 1}$

$\delta, \varepsilon, \eta$: $V(x)$ の展開項の係数, 特に δ は $x=0$ における流の偏角となる。

ξ, η : $x + \beta s$ および $x - \beta s$, 特性座標

ϕ : 擾乱速度ポテンシャル

τ : パンプの形状の係数

4. 解析 その 1

ロケット胴体のような軸対称物体が迎角 0 で一様な速度 U の定常飛行をするとき, このまわりの流れは小擾乱を仮定するとき主流方向 x と半径方向 r の 2 変数に関する擾乱速度ポテンシャル ϕ によって記述することができる。 x, r 方向の擾乱速度成分 u, v はそれぞれ $U\phi_x = u, U\phi_r = v$ により与えられる。よく知られたように ϕ に関する線型化された方程式は

$$\beta^2 \phi_{xx} = \phi_{rr} + \phi_r / r \quad (1)$$

である。われわれは超音速流を主として取り扱うこととし $M^2 - 1 = \beta^2 > 0$ としている。また当分の間 β は $\beta = 0(1)$, すなわち中程度の超音速流を考えることとする。一方境界条件としては物体の前方における擾乱が 0 であること, および物体表面で流れがこれにそうことにより与えられる。後者は物体表面を $r = R(x)$ で表わすと

$$\left(\frac{U\phi_r}{U + U\phi_x} \right)_{r=R(x)} = \frac{dR(x)}{dx} \quad (2)$$

で与えられる。

いま, 胴体表面が先端部よりあとではあまり断面積変化がないと仮定する。これは実際に多くのロケット飛しょう体についていえることである。このときその平均半径を単位長にとっても問題の一般性を失うことはない。すなわち胴体表面について

$$R(x) \doteq 1$$

とおくことができる。われわれは流れの場をこの胴体表面付近のみに着目し次のような変換を導入する。

$$\phi = e^{-m} r^n e^{mr} F(x, r) \quad (3)$$

このとき $r \neq 0$ において $F(x, r)$ に対する方程式は

$$\beta^2 F_{xx} = F_{rr} + (2mr + 2n + 1) \frac{F_r}{r} + \{m^2 r^2 + (2nm + m)r + n^2\} \frac{F}{r^2}$$

である。ここに

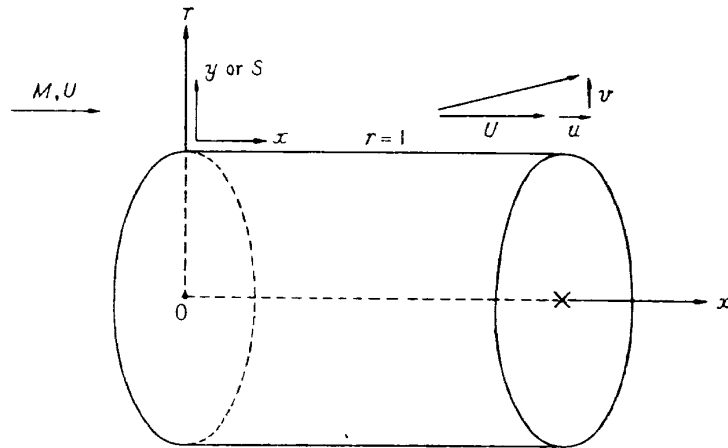


図 1 座 標 系

$$m = -1/4, \quad n = -1/4$$

とおけば $r=1$ において右辺第 2, 第 3 項は 0 となりこの一定円筒上では 2 次元型の方程式

$$\beta^2 F_{xx} = F_{rr} \quad (4)$$

を得る。さらに $r=1$ から少し離れた点を考えると $r=1$ の近傍のみを取り扱うためには独立変数も

$$r = 1 + y$$

によって r から y に変換すると便利である。当然

$$y \ll 1$$

のみが問題となる。また

$$F_r = F_y, \quad F_{rr} = F_{yy}$$

等となるから上に求めた m, n の値に対して F の x, y に関する方程式は

$$\beta^2 F_{xx} = F_{yy} - \frac{1}{2} y F_y (1 - y + \dots) + \frac{y^2}{16} F (1 - 2y + \dots) \quad (5)$$

となる。ここでさらに

$$s = y + y^3/12 = (r-1) + (r-1)^3/12$$

とすれば方程式は

$$\beta^2 F_{xx} = F_{ss} + \frac{s^2}{2} \left(F_{ss} + F_s + \frac{F}{8} \right) + s^3 (\dots) + \dots \quad (6)$$

となり形式的に係数として s の一次の項を消去することができる。すなわち $s^2 = (r-1)^2$ 以上の係数の項を無視すれば方程式は 2 次元の超音速線型流を支配する最も簡単な波動方程式

$$\beta^2 F_{xx} = F_{ss} \quad (7)$$

の形に帰着させることができた。これを $r=1$ における三次元軸対称流を表わす方程式とみなすことができる。

方程式 (7) の一般解はいうまでもなく

$$F = f_+(x + \beta s) + f_-(x - \beta s) \quad (8)$$

の形で与えられる。ここに f_+, f_- はそれぞれ $x + \beta s$, もしくは $x - \beta s$ の任意関数である。この解ともとの物理量との関係は

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} = \phi_x &= e^{tr-t} e^{-tr} F_x = e^{tr-t} e^{-tr} (f_+' + f_-'), \\ \frac{v}{U} = \phi_r &= e^{tr-t} \{ r^{-t} e^{-tr} F \}_r \\ &= e^{tr-t} \left(-\frac{1}{4} r^{-t} e^{-tr} - \frac{1}{4} r^{-t} e^{-tr} \right) (f_+ + f_-) + \beta e^{tr-t} e^{-tr} (f_+' - f_-') \frac{ds}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

等となる。特に $r=1$ すなわち $s=0$ の上ではそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u &= U(f_+' + f_-')_{s=0}, \\ v &= -\frac{1}{2} U(f_+ + f_-)_{s=0} + \beta U(f_+' - f_-')_{s=0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

で与えられる。これらの表現は f_+, f_- が連続な関数であれば $s=0$ において特異性をもつことはなく、また、中程度の超音速領域では u, v が同程度の擾乱量であることを示す。

次に境界条件としてまず物体表面上のものはいま求めた擾乱速度成分 u, v を (2) と組み合わせることによって得られる。ただし通常流れの場合が対称軸をふくむような軸対称超音速流の問題では軸上で解が特異性をもつため物体上の境界条件は正しく物体表面上で与えられねばならなかった¹⁰⁾。しかしいま考えているように一定の円筒表面付近の流れについては、(9) 式にみるように解の値は $r=1$ の近傍で r の微小変化によつては高次の微小量しか変化しないと考えられるから、境界条件も近似的にこの平均円筒面 $r=1$ の上で与えることも許されるであろう。なおあとで实例に示すように正しく物体表面上で与えることも本質的な困難を伴うものではない。

他方流れを物体近傍のみで考えているから、無限遠条件を入れることはかなり困難を伴う。しかし近似的には超音速流については次のように考えられる。

一般解 (8) の二つの任意関数のそれぞれの独立変数 $x + \beta s, x - \beta s$ は $r=1$ の近傍ではそれぞれもとの方程式の特性曲線群 $x + \beta r, x - \beta r$ にほとんど近いものと考えられる。そしてそれぞれは物体に入射する擾乱と物体から放射する擾乱を表わすものと解釈されるから、物体による擾乱を考える場合には解として $f_-(x - \beta s)$ のみを採用し、その関数形を物体上の境界条件で決定すればよいというる。

けっきょく最も簡単な場合として近似的な境界条件は

$$U \left(-\frac{1}{2} f_- - \beta f_-' \right)_{s=0} \Big/ U = (dR/dx)_{r=1} \quad (11)$$

で与えられる。また、もし上流が一様流でなくすでにある既知の擾乱がある場合、すなわちロケット先端部の解が既知であって、これにつづく胴体上の解を求めるような場合も実用上しばしば必要となるが、このときは既知の解の擾乱速度成分に $f_-(x-\beta s)$ による解を加えたものが、以下の胴体表面上の境界条件をみたすように f_- を定めればよい。これについて y は実例によってあとに示すこととしたい。

境界条件 (11) は $s=0$ 上では x のみの関数 f_- を定める一つの常微分方程式とみなすことができる。右辺 $(dR/dx)_{r=1}$ は与えられる既知関数であるからこれを $V(x)$ とおくときは

$$\frac{df_-}{dx} + \frac{1}{2\beta} f_- = -\frac{1}{\beta} V(x) \quad (12)$$

となり、この線型方程式の解は

$$f_- = e^{-\frac{x}{2\beta}} \left[\int \left\{ -\frac{V(x)}{\beta} \right\} e^{\frac{x}{2\beta}} dx + c \right] \quad (13)$$

となる。積分常数 c を決定するために u を作ると

$$\left(\frac{u}{U} \right)_{r=1} = f_-' = -\frac{1}{2\beta} e^{-\frac{x}{2\beta}} \left[\int \left\{ -\frac{V(x)}{\beta} \right\} e^{\frac{x}{2\beta}} dx + c \right] - \frac{V(x)}{\beta} \quad (14)$$

となるが、 $x=0$ においては厳密に2次元性がなりたち2次元超音速流と同様

$$u = -v/\beta$$

となるはずであるから、これより

$$c = - \left[\int -\frac{V(x)}{\beta} e^{\frac{x}{2\beta}} dx \right]_{x=0} \quad (15)$$

となる。このように最も簡単な近似においては軸対称物体の表面形

$$\left(\frac{dR}{dx} \right)_{r=1} = V(x)$$

が与えられたとき、その表面上の圧力分布が (14, 15) 式によって与えられたこととなる。また、この表現は x が十分小さい範囲では部分積分によって

$$\left(\frac{u}{U} \right)_{r=1} = -\frac{V(x)}{\beta} + \frac{1}{2\beta^2} \int V(x) dx - \frac{1}{4\beta^3} \iint V(x) dx dx + \dots \quad (16)$$

の形に書くこともできる。もちろんこの式の適用にあたって取れん等の注意が必要である。この最後の式でみれば $\beta \rightarrow \infty$ につれて第2項以下は第1項に比し無視しうることとなり、高マッハにおいては2次元性が良好に成立することを定性的に示している。

なお圧力係数の形にするときの注意としてスレンダーボディの場合 u が v よりも高次の微小量となるため v^2 の項を無視しえないことがよく知られているが、前述のように軸より有限長離れた一定円筒付近の物体表面では u, v は同位の微小量となるから2次元の場合と同様

$$C_p = -2u/U = -2f_- \quad (17)$$

で十分である。もちろんこの式を厳密化することも容易である。

5. 実例その 1 ポートテイル上の圧力分布

ロケットの抵抗を減ずるため、その後端の断面積を減少させいわゆるポートテイルとすることは広く行なわれている。ポートテイルの効果としては底面圧への影響が特に重要であるが、その推定は粘性を考慮した議論によらねばならないから本稿の範囲外である。ここにはポートテイルそのものの上の圧力分布について述べるが、これはまた底面圧計算の前提となるものである。

ポートテイルとして最も簡単な円錐形ポートテイルすなわちロケット後端が円錐状に絞られている場合を考えると、いまその絞り角 δ が十分小さいときは境界条件は平均半径 $r=1$ の上で与えることができるから (12) において

$$\frac{df_-}{dx} + \frac{1}{2\beta} f_- = -\frac{1}{\beta} (-\delta) \tag{18}$$

により決定される f_- がポートテイルにより付加えられる擾乱を与える。いま胴体が十分長く頭部の影響は尾部に及ばずポートテイル直前で流れはほとんど一様流になっているものとすれば、ポートテイル上の圧力分布はこの f_- のみで与えられることになる。

(18) はただちに解が求められ、(15) を考慮して

$$\left. \begin{aligned} f_- &= 2\delta \left(1 - e^{-\frac{x}{2\beta}} \right) \\ f_- ' &= \frac{\delta}{\beta} e^{-\frac{x}{2\beta}} = u_{(r=1)} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

が得られる。圧力係数は最も簡単には

$$C_p = -\frac{2u}{U} = -\frac{2\delta}{\beta} e^{-\frac{x}{2\beta}} \tag{20}$$

である。この結果を J. R. Jack¹¹⁾ による Van Dyke 流の詳しい計算と比較すると図 2 のようになる。現在の計算は二次元の場合の Ackeret の近似に相当する最も簡単な表現であるからポートテイルの角 δ が大きくなると当然誤差が増大するが¹²⁾、 δ が小さいところでは十分よい近似を与えることがわかる。大きい δ まで精度をあげるためには近似式、境界条件、圧力係数すべて高次項まで考慮せねばならないが、これについては改めて論ずることとしたい。

次にもっと複雑な問題として円錐以外のポートテイルについても全く同様に計算できる。Jack の論文¹¹⁾にはわずかに二例しか計算されていないが、その計算例は

Tangent-parabolic: $r=1-0.02719 x^2$

Secant-parabolic : $r=1-0.06116 x-0.01364 x^2$

および比較のための円錐ポートテイル

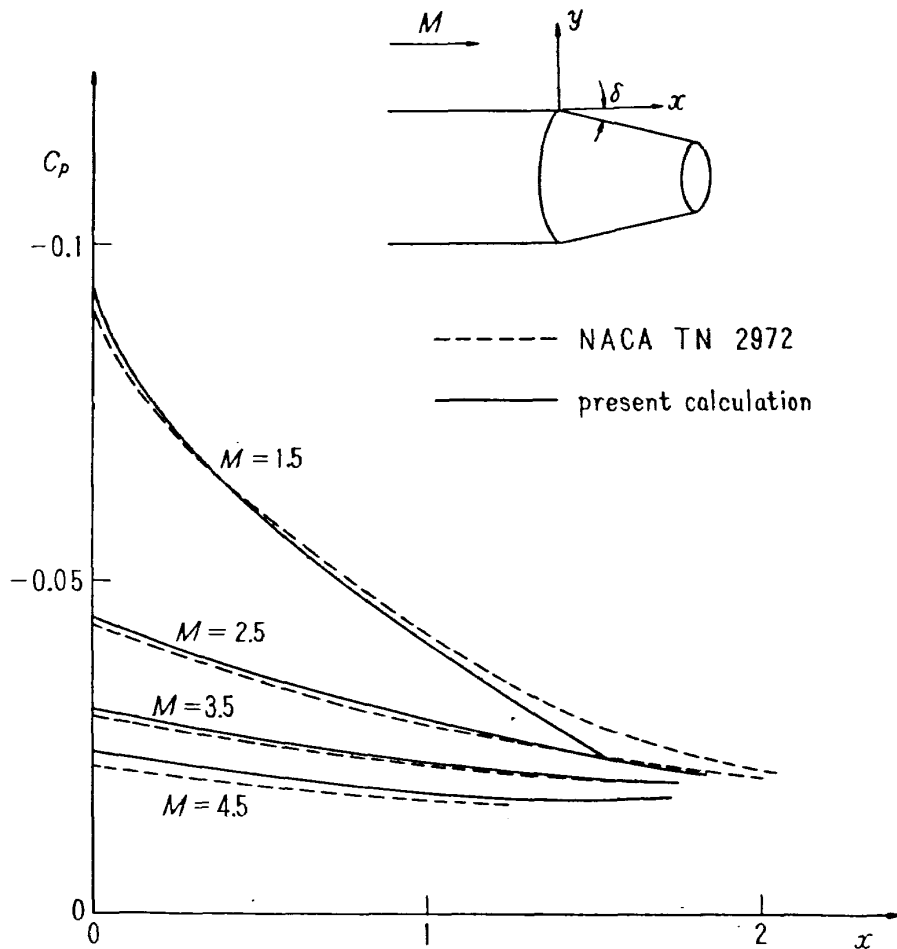


図 2 $\delta=3^\circ$ 円錐ポートテイル上の圧力分布

$$r=1-0.1228x$$

の $M=2.5$ における圧力分布である。これらもすべて (12) において

$$V(x)=\delta+ex+\dots$$

としたときの解

$$f=-2\delta-2\epsilon x+4\epsilon\beta+(2\delta-4\epsilon\beta)e^{-\frac{x}{2}} \quad (21)$$

においてそれぞれ,

$$\text{Tangent-parabolic: } \delta=0, \quad \epsilon=-0.0544$$

$$\text{Secant-parabolic : } \delta=-0.06116, \quad \epsilon=-0.02728$$

$$\text{Conical : } \delta=-0.1228, \quad \epsilon=0$$

とおいたものとなる。円錐ポートテイルの場合 $\delta=7^\circ$ と比較的大きい値のため前述の理由により Jack の計算値と若干のずれはあるが、 x の小さい範囲で傾向は一致している。下流に遠ざかるに従って表面が平均半径 $r=1$ からのへだたりが大きくなるなどの影響で精度は低下する。

以上の例にみるようにきわめて簡単な表現で任意のポートテイル上の圧力分布の近似値が求めう

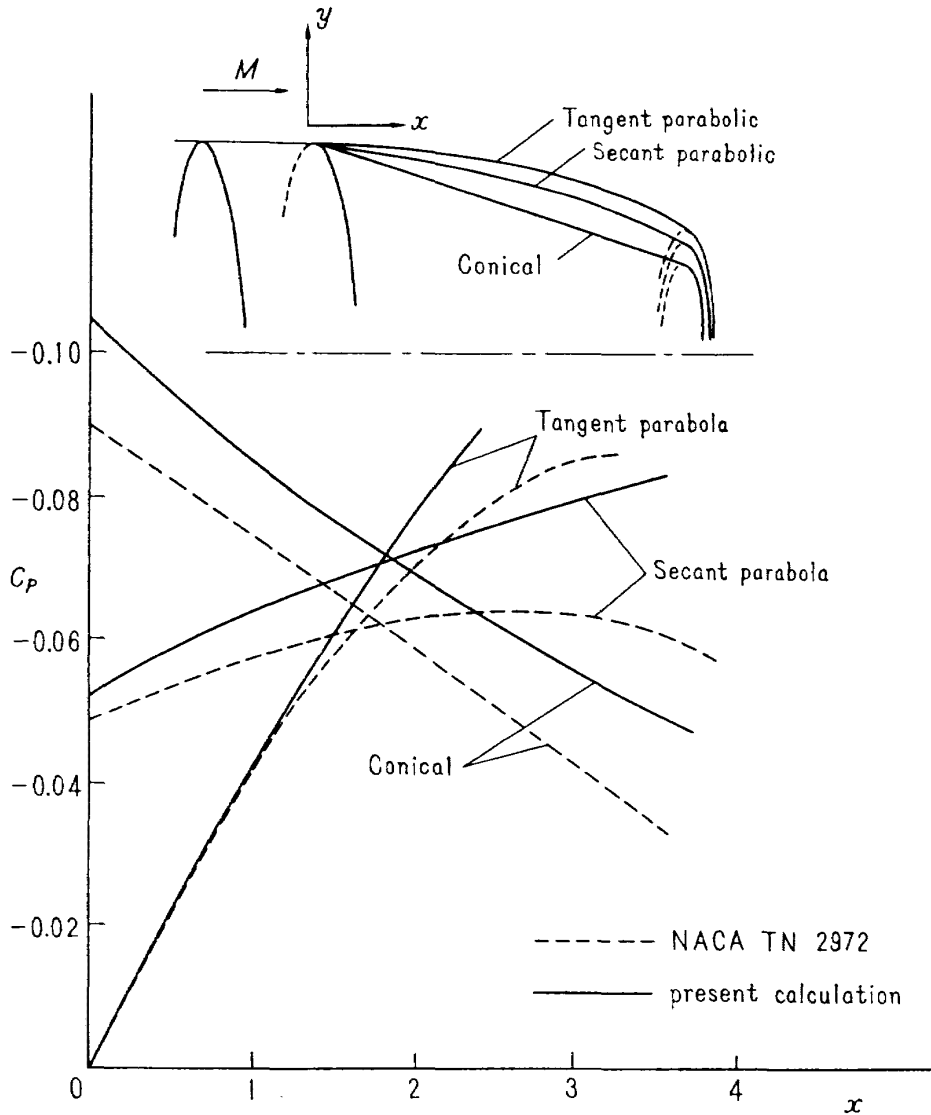


図 3 曲線ボートテイル上の圧力分布

ることを示した。なお実験値として比較すべきデータの発表されたものはまだ見当たらない。また抵抗値は圧力係数の積分から容易に求められる。

6. 実例その 2 フレヤー (Flare) 上の圧力分布

前項のボートテイルと反対にロケットの後端の断面積を拡大し、この部に働く垂直力によってロケットの静安定を保ついわゆるフレヤーは、翼の効果の減ずる高マッハ数範囲で飛行するロケットに採用されつつある。この場合特に問題となるのはフレヤーによる垂直力であるが、これについては迎角ある場合についての次の報告に述べることにし、ここにはフレヤーによる抵抗を求めるための圧力分布計算についてのみふれることとする。

前述の解法によれば、フレヤーについてもその開き角が小さい範囲では、ボートテイルの解と符

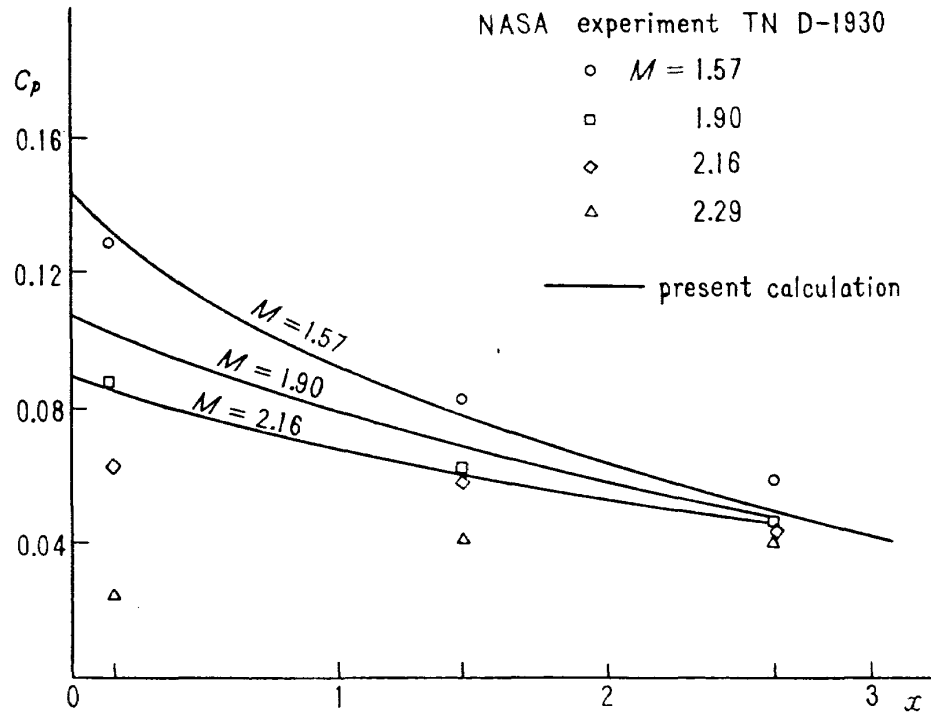


図 4 5° 円錐フレアー上の圧力分布 Scout 実験値との比較

号だけ考慮すれば全く同様である。胴体部が十分長く頭部の影響が無視しうるとすれば、最も簡単な円錐状フレアー上の圧力分布は

$$C_p = \frac{2\delta}{\beta} e^{-\frac{x}{2\beta}} \quad (22)$$

で与えられる。円錐状以外のフレアーについても前項と同様容易に近似解を求めることができる。フレアーについては計算値の発表されたものはほとんどみられない。実験値も少ないがここには、L. S. Jernell¹⁹⁾ による Scout 飛しょう体の圧力分布計測結果よりとった後端フレアーの値を示す。マッハ数の低い範囲では (22) 式がよい近似を与えることがわかる。マッハ数が高くなると実験値が傾向の変わるのは Jernell の報告にあるようにフレアー直前の境界層はく離によるものと思われる。またこの Scout は頭部に近い所にやはり円錐状の面積増大部があるが、このほうは頭部の影響があるため (22) 式だけでは推定できない。頭部の影響については次節以下に論じよう。

また、円錐フレアーでは十分下流に離れると、その表面上の流れはしだいに一樣流中の円錐上の流れに近づくはずである。このような円錐上の圧力分布はフレアー先端部の値に比しかなり小さいものであるが (22) 式の表現は x の増大とともに C_p がしだいに減少していることを示しているがこの極限值 $C_{p\text{cone}} = 2\delta^2 \log(2/\beta\delta)$ には収れんしない。これらの議論はさらに精度をあげて計算せねばならない。

7. 実例その3 バンプ (Bump) 上の解

円筒表面付近の解析で、しばしば実例となる問題にバンプがある。ここには計算の比較のため Nielsen⁷⁾ による計算例について検討する。

一様流中の円筒上に図のごときバンプがあるとき、この上の圧力分布を求める、ただし記号、単位など前節との統一のため若干変更してある。バンプの形状は τ を常数として次のように与えられるものとする。

$$R = 1 + \tau x \left(1 - \frac{x}{\pi} \right)$$

$$\frac{dR}{dx} = \tau \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

このとき境界条件 (12) は

$$\frac{df_-}{dx} + \frac{1}{2\beta} f_- = -\frac{1}{\beta} \tau \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right)$$

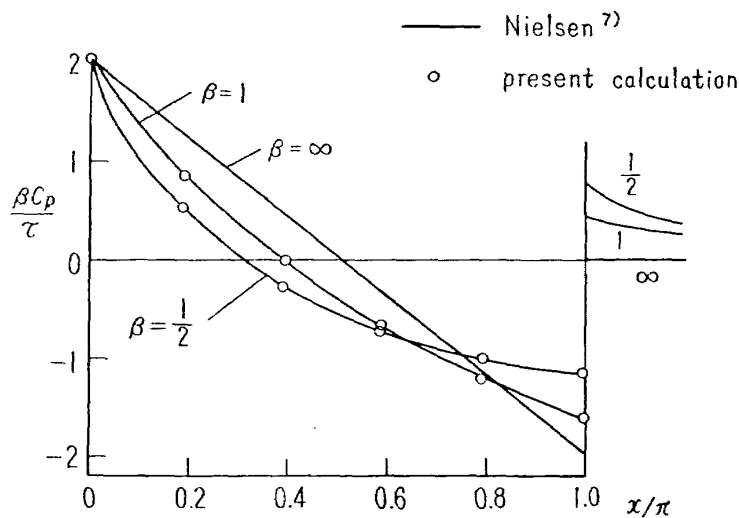
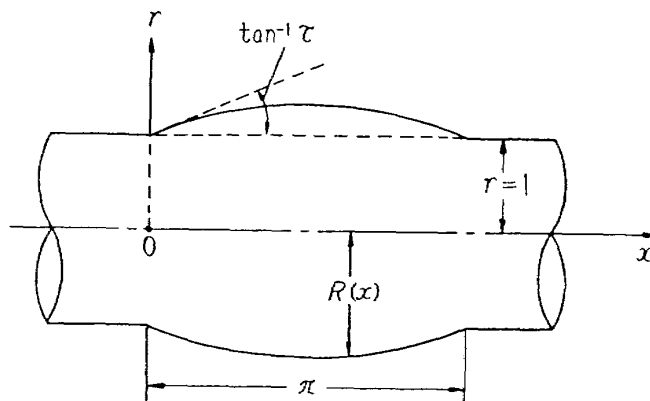


図5 バンプ上の圧力分布

であるから f_- として

$$f_- = -2\tau + \frac{4\tau}{\pi}x - \frac{8\tau\beta}{\pi} + \left(2\tau + \frac{8\tau\beta}{\pi}\right)e^{-\frac{x}{2\beta}}$$

が得られる。求める圧力分布は

$$C_p = -\frac{2u}{U} = -\frac{8\tau}{\pi} + \left(\frac{2\tau}{\beta} + \frac{8\tau}{\pi}\right)e^{-\frac{x}{2\beta}}$$

である。Nielsen による表現は線型理論の厳密解

$$C_p = \frac{2}{\beta} \left\{ \tau \left(1 - \frac{2(x - \beta r + \beta)}{\pi} \right) r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta} \int_0^{x - \beta r + \beta} \tau \left(1 - \frac{2\xi}{\pi} \right) W_0 \left(\frac{x}{\beta} - r + 1 - \frac{\xi}{\beta}, r \right) d\xi \right\}$$

であり、 W_0 は Laplace 変換 L によって

$$L[W_n(x, r)] = e^{p(r-1)} \frac{K_n(pr)}{K_n'(p)} + \frac{1}{r^{1/2}}$$

K_n : Bessel 関数

として定義される。いま求めた近似解はこの式の近似表現を与えるべきものであって、数値例は図 5 のようになる。図を見やすくするためにいくつかの点の値だけを示したが Nielsen の計算値とよい一致を示している。

$\beta \rightarrow \infty$ の場合の解は直線となるが、これは解を (16) の形において $\beta \rightarrow \infty$ とすればよく了解されよう。

8. 解析その 2 精度の向上

前述の近似解はきわめて簡単な表現によって任意の物体上の圧力のある程度良い近似で与えようとするものである。しかもこの基礎となった近似式 (7) は取り扱いの容易な 2 次元波動方程式であって近似を高めることも手数を別とすれば一般にごく容易に行なうことができる。すなわち省略を行なう前の (6) 式あるいはさらに非線型項を考慮しても一般にこれら精度の高い式は

$$\beta^2 F_{xx} - F_{ss} = \mathcal{F}_n(F, F_s, F_{ss}, s) \quad (23)$$

の形に書くことができる。右辺の項を十分小さいとして (7) をといた近似解を F_0 とし補正項を F_1 とおけば正しい値 F は

$$F = F_0 + F_1$$

であるから、これを (23) に入れると

$$\beta^2 (F_0 + F_1)_{xx} - (F_0 + F_1)_{ss} = \mathcal{F}_n(F_0, F_{0s}, F_{0ss}, s)$$

のように右辺の微小項は F_0 のみの関数で表わしうるであろう。定義により

$$\beta^2 F_{0xx} - F_{0ss} = 0$$

であるから F_1 に対する方程式として

$$\beta^2 F_{1xx} - F_{1ss} = \mathcal{F}_n(F_0, F_{0s}, F_{0ss}, s) \quad (24)$$

を得る。ここに右辺は既知関数であり、(24) の解はよく知られたように

$$F_1 = f_{1+}(x+\beta s) + f_{1-}(x-\beta s) + \iint \mathcal{F}_n d(x+\beta s) d(x-\beta s) \quad (25)$$

で与えられる。

非線型項に対する考察は次の報告で行なうこととし以下には線型基礎方程式 (1) を解く上の近似度を高めることを考察しよう。近似式 (7) において省略された項として最も重要なものは (6) 式右辺第 2 項であるが、これは精度的には (5) 式右辺第 2 項について考えても同じであることが容易にわかる。ここには簡単のため (5) 式において yF_y の項を考慮したときを考えよう。すなわち

$$\beta^2 F_{xx} = F_{yy} - \frac{1}{2} y F_y \quad (26)$$

を解くことを試みる。いま

$$x + \beta y = \xi, \quad x - \beta y = \eta$$

とすれば (26) は

$$4\beta^2 F_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} \frac{\xi - \eta}{2\beta} \beta (F_{\xi\xi} - F_{\eta\eta}) \quad (27)$$

である。上に述べたように右辺 0 の解を F_0 、補正項を F_1 とすれば F_1 に対する式 (24) が

$$F_{1\xi\eta} = -\frac{1}{16} (\xi - \eta) (F_{0\xi\xi} - F_{0\eta\eta}) \quad (28)$$

となる。物体による擾乱を考えると F_0 としては $x - \beta y = \eta$ のみの関数と考えられるから

$$F_0 = f_-(\eta)$$

とすればこの解は簡単に

$$F_1 = \frac{1}{16\beta^2} \left(\frac{\xi^2}{2} f_- - \xi\eta f_- + \xi \int f_- d\eta \right) + X(\xi) + Y(\eta) \quad (29)$$

となる。ここに X, Y はそれぞれ ξ, η の任意関数である。 F_0 に対すると同じ理由で $X=0$ と考えられ、また Y としては境界条件から定められることとなる。すなわち解は

$$F = f_-(\eta) + F_1$$

であり、 f_- が第一近似の境界条件で定まったあと F_1 に含まれる Y が定まるわけであるが、ここでは Y として

$$Y = \frac{\eta^2}{32\beta^2} f_-(\eta)$$

を仮定して f_- を第2近似の境界条件から定めたほうが容易である。すなわちこのとき F_1 として

$$F_1 = \frac{1}{16\beta^2} \left(\frac{1}{2} (2\beta y)^2 f_- + \xi \int f_- d\eta \right) \quad (30)$$

とすることができ、第一項は $y=0$ すなわち平均半径上でその微係数まで0となるから多くの場合取り扱いが容易となるからである。結果としてもとの擾乱ポランシヤル ϕ に対して

$$\begin{aligned} \phi = & e^{\frac{1}{4}} (1+y)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}(1+y)} \left\{ f_-(x-\beta y) + \frac{1}{8} y^2 f_-(x-\beta y) \right. \\ & \left. + \frac{(x+\beta y)}{16\beta^2} \int f_-(x-\beta y) d(x-\beta y) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

特に $r=1$ 上では

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u}{U} \right)_{r=1} &= f'_-(x) + \frac{1}{16\beta^2} \int f_-(x) dx + \frac{x}{16\beta^2} f_-(x) \\ \left(\frac{v}{U} \right)_{r=1} &= -\beta f'_-(x) + \frac{1}{16\beta} \int f_-(x) dx - \frac{x}{16\beta} f_-(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} f_-(x) - \frac{x}{32\beta^2} \int f_-(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

等を得る。 f_- の関数形は境界条件より決定される

9. 実例その4 円錐-円筒物体 (Cone-cylinder) の肩直後の解

多くのロケット飛しょう体はその先端がいわゆる円錐-円筒物体をなしている。超音速流中の円錐まわりの流れは Taylor-Maccoll の厳密解以来多くの研究があるが、問題は円筒に移った直後いわゆる肩のあとの流れである。これはこのような傾斜の不連続を伴う最も基本的な問題としていくつかの研究が発表されているが多くは個々の実例について解いたものであって、実際計算に適用するためにはかなりの労力が必要である。このような計算はたとえば胴体上の境界層や熱伝達計算の基礎となるのであるが、以前筆者が V. Zakkay と共同でこの部の熱伝達問題を解いた際¹⁴⁾は Hakkinen による展開公式¹⁵⁾を用いて計算した。以下には前述の解法によってこのような展開公式が容易に導きうることを示すが、この解法によれば、特に先端が円錐と限らず任意の与えられオジャイブ (Ogive) に対して、その上の解が既知であれば (このような不連続を含まない先端部だけの解は軸上の湧出し分布で容易に解ける) それにつづく円筒上の解を同様に求めうるものである。

いま半頂角 δ の円錐が迎角 0 で一様な超音速流中にあるものとする。このまわりの流れに対する線型理論の解は

$$u_{\text{cone}} = -a \cosh^{-1} \frac{x}{\beta r}, \quad v_{\text{cone}} = a\beta \sqrt{\frac{x^2}{\beta^2 r^2} - 1} \quad (33)$$

であり、ここに

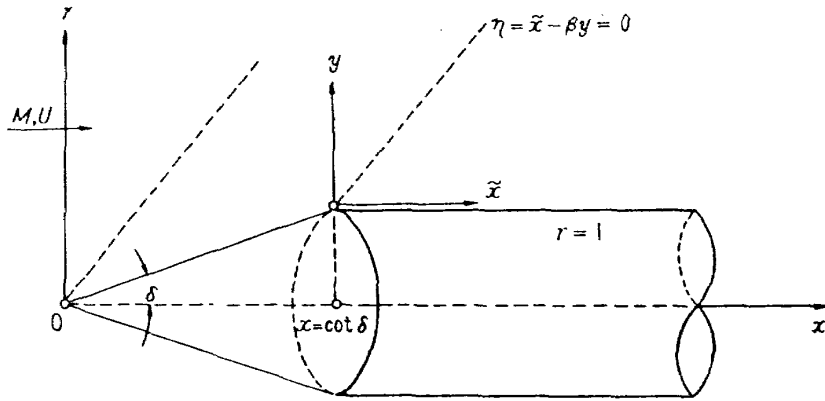


図 6 迎角のない円錐-円筒物体まわりの流れ

$$a = \frac{U \tan \delta}{\sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2} + \tan \delta \cosh^{-1} \left(\frac{\cot \delta}{\beta} \right)}$$

である¹⁾。r=1 の円筒がこの円錐につづいているとき円錐上の解 (33) はこの円筒表面上では

$$[u_{\text{cone}}]_{r=1} = -a \cosh^{-1} \frac{x}{\beta}, \quad [v_{\text{cone}}]_{r=1} = a \sqrt{x^2 - \beta^2}$$

となる。円錐-円筒のつなぎめ、すなわち肩において $x = \cot \delta$ であるからいま $\tilde{x} = x - \cot \delta$ を新しい変数とすれば、 $\tilde{x} < 0$ において擾乱を表わす解を付加えて r=1 すなわち $y=0$ の円筒表面上で $v=0$ とせねばならない。すなわち (32) より

$$\frac{[v_{\text{cone}}]_{r=1}}{U} - \beta f' + \frac{1}{16\beta} \int f_- d\tilde{x} - \frac{\tilde{x}}{16\beta} f_- - \frac{1}{2} f_- - \frac{\tilde{x}}{32} \int f d\tilde{x} = \frac{v_{r=1}}{U} = 0$$

が満すべき条件となる。 \tilde{x} の小さい所を問題として展開によって解ためまず v_{cone} を展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{[v_{\text{cone}}]_{r=1}}{U} &= a \sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2 + 2 \tilde{x} \cot \delta + \tilde{x}^2} \\ &= a \sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2} + \frac{a \cot \delta}{\sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2}} \tilde{x} + a \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2}} - \frac{1}{2} \frac{\cot^2 \delta}{(\cot^2 \delta - \beta^2)^{3/2}} \right) \tilde{x}^2 + \dots \\ &= \delta + \varepsilon \tilde{x} + \eta \tilde{x}^2 + \dots \end{aligned}$$

が得られる。これに対する (32) の解は

$$f_- = -\frac{\delta}{\beta} \tilde{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2\beta^2} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \tilde{x}^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{32} \frac{\delta}{\beta^3} + \frac{\varepsilon}{4\beta^2} - \frac{\eta}{\beta} \right) \tilde{x}^3 + \dots$$

となり、u としては

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= f_- + \frac{1}{16\beta^2} \int f_- dx + \frac{x}{16\beta^2} f_- \\ &= -\frac{\delta}{\beta} + \left(\frac{\delta}{\beta^2} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \tilde{x} + \left(-\frac{6}{32} \frac{\delta}{\beta^3} + \frac{\varepsilon}{4\beta^2} - \frac{\eta}{\beta} \right) \tilde{x}^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\doteq -\frac{v}{\beta} + \frac{1}{2\beta^2} \int v d\tilde{x} - \frac{3}{8\beta^3} \iint v d\tilde{x} d\tilde{x}$$

等が得られる。この結果に前に求めた円錐に対する解の展開を代入すれば f_- が決定されるが、円筒上の圧力分布としては f_- によるもののほか、もとの円錐に対する解 u_{cone} を加え合わせたものとなり、けっきょく円筒上では

$$u = a \left[\left(-\cosh^{-1} \frac{\cot \delta}{\beta} + \frac{\sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2}}{\beta} \right) - \frac{(\cot \delta - \beta)^2}{2\beta^2 \sqrt{\cot^2 \delta - \beta^2}} \tilde{x} + \frac{(\cot \delta - \beta)^3 (5 \cot \delta + 3\beta)}{16(\cot^2 \delta - \beta^2)^{3/2} \beta^3} \tilde{x}^2 + \dots \right]$$

が得られる。 a の値は (33) のものと同じである。これより C_p あるいは p/p_∞ が計算されるが、その例を図7に示す。これは Kuehn による実験値¹⁶⁾との比較であって、高マッハ数においてはほ

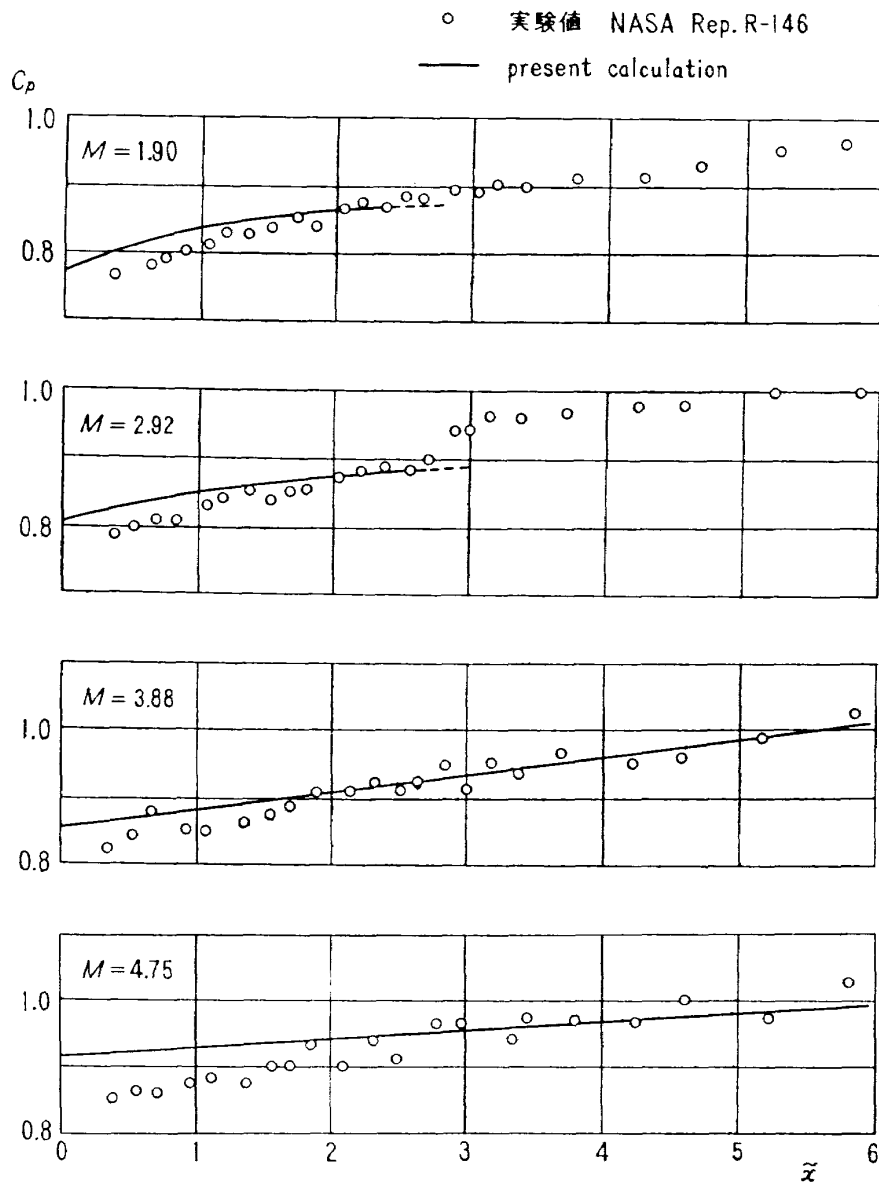


図 7 20° 円錐-円筒物体の円筒表面上圧力分布

とんど二次の項は無視しうる。また, M の低い範囲では展開による近似の成立するのは比較的狭い範囲に限られるが肩の直後ではよい一致を示しているものといえよう。

10. あ と が き

ロケット胴体に働く空気力を簡単に計算するため, このような半径のほぼ一定な円筒の近傍では解を求めることの困難な 3次元流の方程式が取り扱いの容易な 2次元流の方程式で近似しうることを示した。今回の報告は迎角 0, 線型流の場合に限られたがいくつかの実例を計算した結果, 容易な計算により線型方程式の解としては十分な精度が得られることがわかった。近似度の向上としては今回は 2次元化の過程における省略項の代表的なものを考慮することだけを試みたが, 非線型項の影響も同様に計算しうるはずであり, これは次の機会に報告したい。また, 迎角のある場合の垂直力計算も同様の方法で可能である。

この研究は東京大学航空学科近藤次郎教授の御指導により続けている軸対称物体まわりの高速流の一連の計算の一部であり, 懇切な御教示をいただいた同教授に深く感謝いたします。また, 当所空力性能研究室長河崎俊夫技官に討論いただいたことを付記します。

文 献

- 1) T. von Kármán and N.B. Moore; Resistance of Slender Bodies Moving with Supersonic Velocities, with Special Reference to Projectiles, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., Vol. 54 (1932). pp. 303~310.
- 2) Mac C. Adams and W.R. Sears; Slender Body Theory-Review and Extension, J. Aero. Sci., Vol 20 No. 2 (1953).
- 3) M. Van Dyke; First-and Second-Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution, J. Aero Sci., Vol 18, No. 3 (1951)
- 4) T. Tani; Linearization for High Subsonic or Low Supersonic Flow with Axial Symmetry, Trans of Japan Soc. for Aeron and Space Sci., Vol 3, No. 4 (1960).
- 5) 河崎俊夫, 谷 喬, 近藤洋史, 額田登美子; 軸対称物体に働く空気力, 第 12 回日本航空学会年会 (昭和 39) にて講演, 未印刷.
- 6) J.H. Johannesen and R.E. Meyer; Axially-Symmetrical Supersonic Flow Near the Centre of An Expansion, The Aeron. Quarterly Vol 2, (1950/4).
- 7) J.N. Nielsen; Missile Aerodynamics (1960) pp. 80~84. Mc Graw Hill Book Co.
- 8) 谷 喬; 軸対称超音速流の二三の問題. 第 7 回応用力学連合講演会予稿集 (昭和 32)
- 9) C.A. Syvertson and D.H. Dennis; A Second-Order Shock-Expansion Method Applicable to Bodies of Revolution Near Zero Lift, NACA Technical Note 3527 (1956).
- 10) たとえば H.W. Liepmann and A. Roshko; Elements of Gandynamic (1957) pp. 218~251. John Wiley & Sons, Inc.
- 11) J.R. Jack; Theoretical Pressure Distributions and Wave Drag for Conical Boattails, NACA Technical Note 2972 (1953).

- 12) たとえば M.J. Lighthill; Higher Approximations in Aerodynamic Theory, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion VI (1954) Princeton Univ. Press.
- 13) L.S. Jernell; Aerodynamic Loading Characteristics of a 1/10-Scale Model of the Three-Stage Scout Vehicle at Mach Numbers from 1.57 to 4.65, NASA Technical Note D-1930 (1963).
- 14) V. Zakkay and T. Tani; Theoretical and Experimental Investigation of the Laminar Heat Transfer Downstream of a Sharp Corner, PIBAL Report No. 708 (1961).
- 15) R.J. Hakkinen; Supersonic Flow Near Two-Dimensional and Axially Symmetric Convex Corners and Curvature Discontinuity, Douglas Aircraft Co. Inc. Rep. No. SM-27747 (1958).
- 16) D.M. Kuehn; Laminar Boundary-Layer Separation Induced by Flares on Cylinders at Zero Angle of Attack, NASA Technical Report R-146 (1961).

<p>NAL TR-92 航空宇宙技術研究所 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— 1965年8月 18ページ</p> <p>超音速で飛しようするロケット胴体まわりの流れを, その表面近傍で2次元形で近似して解析解を求める。この方法は特に表面傾斜の不連続点直後の計算に有効である。今回は線型化された迎角のな い場合を取り扱ったが, 従来の結果や実験値とよい一致を示した。</p>	<p>I. 谷 喬 II. NAL TR-92 III. 533.6.011</p>	<p>NAL TR-92 航空宇宙技術研究所 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— 1965年8月 18ページ</p> <p>超音速で飛しようするロケット胴体まわりの流れを, その表面近傍で2次元形で近似して解析解を求める。この方法は特に表面傾斜の不連続点直後の計算に有効である。今回は線型化された迎角のな い場合を取り扱ったが, 従来の結果や実験値とよい一致を示した。</p>	<p>I. 谷 喬 II. NAL TR-92 III. 533.6.011</p>
<p>NAL TR-92 航空宇宙技術研究所 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— 1965年8月 18ページ</p> <p>超音速で飛しようするロケット胴体まわりの流れを, その表面近傍で2次元形で近似して解析解を求める。この方法は特に表面傾斜の不連続点直後の計算に有効である。今回は線型化された迎角のな い場合を取り扱ったが, 従来の結果や実験値とよい一致を示した。</p>	<p>I. 谷 喬 II. NAL TR-92 III. 533.6.011</p>	<p>NAL TR-92 航空宇宙技術研究所 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— 1965年8月 18ページ</p> <p>超音速で飛しようするロケット胴体まわりの流れを, その表面近傍で2次元形で近似して解析解を求める。この方法は特に表面傾斜の不連続点直後の計算に有効である。今回は線型化された迎角のな い場合を取り扱ったが, 従来の結果や実験値とよい一致を示した。</p>	<p>I. 谷 喬 II. NAL TR-92 III. 533.6.011</p>

- | | | | |
|-------|--|---------|---------------------|
| TR-84 | 遷音速タービン翼列二次元試験 (II)
Experimental Investigation on Transonic
Turbine Cascades (II) | 1965年3月 | 近藤博, 蓑田光弘
山崎紀雄 |
| TR-85 | 回転翼の線型理論 (II)
—揚力線理論—
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor
Blades (II)
—Lifting-Line Theory— | 1965年3月 | 市川輝雄 |
| TR-86 | 高速多段軸流圧縮機の部分負荷特性の一計算
法
A Method for Predicting the off-design Per-
formance of Multi-Stage Axial-Flow Com-
pressors Operating in the Transonic Flow | 1965年5月 | 松木正勝, 藤井昭一
五味光男 |
| TR-87 | 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージ
ェンス (II) 圧縮流理論, (III) 実験的研
究
Study of Two Dimensional Panel Flutter
and Panel Divergence in Subsonic Flow
(II) Compressible Flow Case
(III) Experimental Study | 1965年6月 | 石井孝雄 |
| TR-88 | 尾翼, 胴体結合構造物の地上振動試験結果に
関する定性的な吟味
Qualitative Examinations on the Results of
Ground Vibration Tests of Tail Wing-
Fuselage Combination Structure | 1965年6月 | 埴武敏, 越出慎一 |
| TR-89 | 垂直突風および航空機の突風応答に関する実
験的研究
An Experimental Investigation on Vertical
Gusts and the Airplane Response | 1965年6月 | 小野幸一, 山根皓三郎 |
| TR-90 | ヒステリシスループの形, 繰返しによる形の
変化および繰返し後の塑性流動応力の上昇
第一報 実験, 第二報 振りの場合の理論
The Shape of Mechanical Hysteresis Loop,
its deformation due to Stress Repetition
and Resulting Increase in Flow Stress
(Part 1. Experiment, Part 2. Theory for
Torsion) | 1965年7月 | 中西不二夫, 佐藤和郎
永井文雄 |
| TR-91 | 固体プロペラントの割れ目内への火炎伝ば
(I)
Flame Propagation into the Gap of Solid Pro-
pellat Grain (I) | 1965年7月 | 五代富文 |

航空宇宙技術研究所報告92号

昭和40年8月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1880 電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)
印刷所	笠井出版印刷社 東京都港区西新橋1の21の8
