

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-97

圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の
作動円盤理論 (I)

—軸対称流れ—

藤井 昭一

1965年12月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|---|----------|----------------------------------|
| TR-75 | 統計流体力学の初期値問題について
On the Initial-value Problem in Statistical
Hydromechanics | 1964年12月 | 細川 巖 |
| TR-76 | 高速軸流圧縮機の研究 (IV)
An Investigation of High Speed Axial
Flow Compressor (IV) | 1965年1月 | 大山耕一, 松木正勝
西脇英夫, 岩部柱相
片山泰治 |
| TR-77 | Galerkin 法の収束性について
On the Convergence of Galerkin's Method | 1965年1月 | 鳥海良三 |
| TR-78 | 二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解
法
Characteristic Method for the Numerical
Solution of Two-Dimensional Quasi-linear
Hyperbolic Systems | 1965年1月 | 三好 甫 |
| TR-79 | 引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の大振
幅振動の影響について
Influence of Large Amplitude on Flexural Vibra-
tions of Rectangular Elastic Plates under
Initial Tension or Compression | 1965年1月 | 田寺木一, 古関昌次
泉 日出夫 |
| TR-80 | 変分法直接解法において解に及ぼす束縛の数値
的影響
Numerical Effect of Constraints in Calculus of
Direct Variational Method | 1965年1月 | 塙 武敏, 越出慎一 |
| TR-81 | FRP コーティングの断熱特性
Thermal Insulation Characteristics of FRP
Coating | 1965年1月 | 竹中幸彦, 江川幸一
小川敏一 |
| TR-82 | 多段軸流圧縮機の部分負荷特性の簡易計算法
A Simple Method of Calculating the off-Design
Performance of Multi-Stage Axial-Flow
Compressor | 1965年2月 | 松木正勝, 藤井昭一 |
| TR-83 | 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージ
ェンス (I) —非圧縮流理論—
Theoretical Study of Two-Dimensional Panel
Flutter and Panel Divergence in Subsonic
Flow (I)
—Incompressible Flow Case— | 1965年2月 | 石井孝雄 |
| TR-84 | 遷音速タービン翼列二次元試験 (II)
Experimental Investigation on Transonic
Turbine Cascades (II) | 1965年3月 | 近藤 博, 養田光弘
山崎紀雄 |
| TR-85 | 回転翼の線型理論 (II)
—揚力線理論—
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor
Blades (II)
—Lifting-Line Theory— | 1965年3月 | 市川輝雄 |
| TR-86 | 高速多段軸流圧縮機の部分負荷特性の一計
算法
A Method for Predicting the off-design
Performance of Multi-Stage Axial-Flow
Compressors Operating in the Transonic
Flow | 1965年5月 | 松木正勝, 藤井昭一
五味光男 |
| TR-87 | 亜音速流中のパネルフラッタとダイバージェ
ンス (II) 圧縮流理論 (III) 実験的研究
Study of Two Dimensional Panel Flutter and
Panel Divergence in Subsonic Flow (II)
Compressible Flow Case (III) Experimental
Study | 1965年6月 | 石井孝雄 |
| TR-88 | 尾翼, 胴体結合構造物の地上振動試験結果に
関する定性的な吟味
Qualitative Examinations on the Results of
Ground Vibration Tests of Tail Wing-
Fuselage Combination Structure | 1965年6月 | 塙 武敏, 越出慎一 |
| TR-89 | 垂直突風および航空機の突風応答に関する実
験的研究
An Experimental Investigation on Vertical
Gusts and the Airplane Response | 1965年6月 | 小野幸一, 山根皓三郎 |

圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の 作動円盤理論 (I)

——軸対称流れ*——

藤 井 昭 —**

A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (First Report)

—Non-Swirling Fluids in Ducts—

By Shoichi FUJII

Theories of the incompressible and compressible fluids through actuator discs placed in the cylindrical flow passages have been developed by several workers^{1)~6)}. Recently few investigators^{7)~9)} have made theoretical approaches to the incompressible flow media which run in turbo-machines of the varying cross-sectional area.

Accordingly, making use of the actuator disk concept, the present author has carried out the theoretical survey of the subsonic flows with special reference to both the compressibility and the hub contour. As the first report, outlined here is the basic theory for the compressible shear flows in ducts with varying hub radii. Numerical examples are presented and discussed briefly.

It is concluded that within the realm of linear treatment the tangential vorticity component is flowing along the main stream and attenuated by the contraction of passages. Numerical results illustrate the marked difference between the converging and the diverging flows, especially in the axial velocity profiles. It also emphasizes that the radial flows occur strongly when flowing at high Mach-number level. The present theory applied for the cylindrical duct and the classical actuator disc theories have been compared and thereby the agreement has been proven in their mathematical forms, although the damping coefficient of our theory is a little smaller (about 10 per cent) than that of the classical one.

1. はじめに

軸流圧縮機やタービンの空力設計には、通常、まず所望の定格要目として、圧力比、回転数、流量および段数などが与えられ、それらを満足するように各段の仕事配分を与え、次に流れ様式 (Flow Pattern) を決定し最後に翼を配備するという順序をとる。しかるに、流れ様式の決定段階

* 昭和 40 年 11 月 18 日受付

** 原動機部

において軸流および半径方向速度をできるだけ正確に計算しなければならない。この計算において、もっとも簡単な方法は半径方向単純平衡の仮定を使うことである。しかし非常に限られた場合以外は、このような仮定は不正確である。そこで軸流ターボ機械内の流れを計算するためにいろいろの方法が提案されたが、その中の一つとして作動円盤理論^{1)~3)} (Actuator Disc Theory) がある。これは、プロペラの計算のときに行なわれた方法を、ターボ機械の場合に適用したものであって、動翼や静翼の軸方向長さを無視して、いわゆる作動円盤で置き換え、この円盤を通過すると円周方向速度が不連続的に変化すると仮定する。一方、円盤を通ると流体は外力を受けるからうずが新たに発生し、このうずも流れ場に影響を及ぼす。要するに、ターボ機械内の流れは一般にうずあり流れ (Rotational Flow) であって、これらのうず成分と速度成分との関係を調べるのが作動円盤理論の基本的な考え方である。

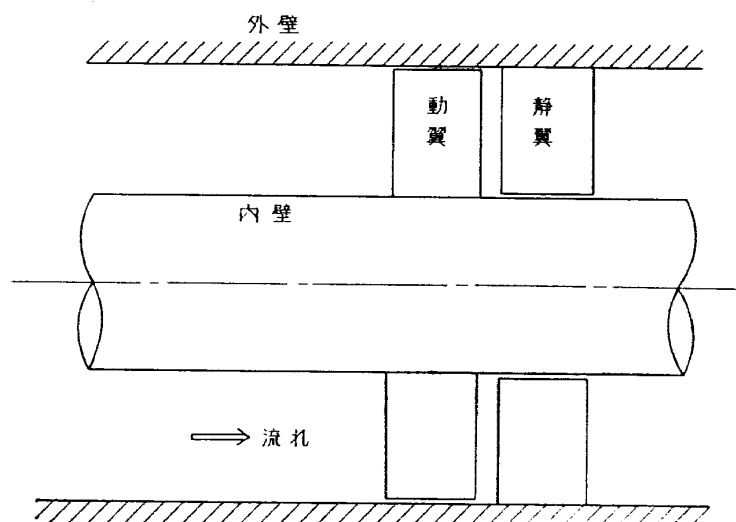


図 1 円筒流れ

ターボ機械の上壁と下壁とが平行である図 1 のような円筒中を、非圧縮性の流体が流れた場合の作動円盤理論が最初に確立された。Horlock の報告³⁾ などとその代表的なものであるが、作動円盤を翼弦のどの位置に置くかということが問題であり、これに対する一つの解答として Marble の報告²⁾ があげられる。

次に、壁が傾斜している場合の作動円盤理論に対する一連の試みが、Lewis & Horlock^{7)~9)} によってなされたが、非圧縮流体を取り扱い、かつ、図 2 のように球面座標を適用したときにつごうのよい壁形状の場合に、その解析解を得た。図 3 のような、一般のターボ機械の形状の場合の数値解も試みられたが⁹⁾、いずれも非圧縮性の域を出ない。もちろん、圧縮流体に対する解も導かれている⁶⁾ が、図 1 のような円筒の境界をもった場合である。そもそも、軸流ターボ機械で壁形状を変化させるのは、圧縮性があるための考慮であって、壁形状の変化と圧縮性は不可分であるから、本研究では両者を加味して流れを調べた。この際、傾斜している壁面上の境界条件を、どのようにし

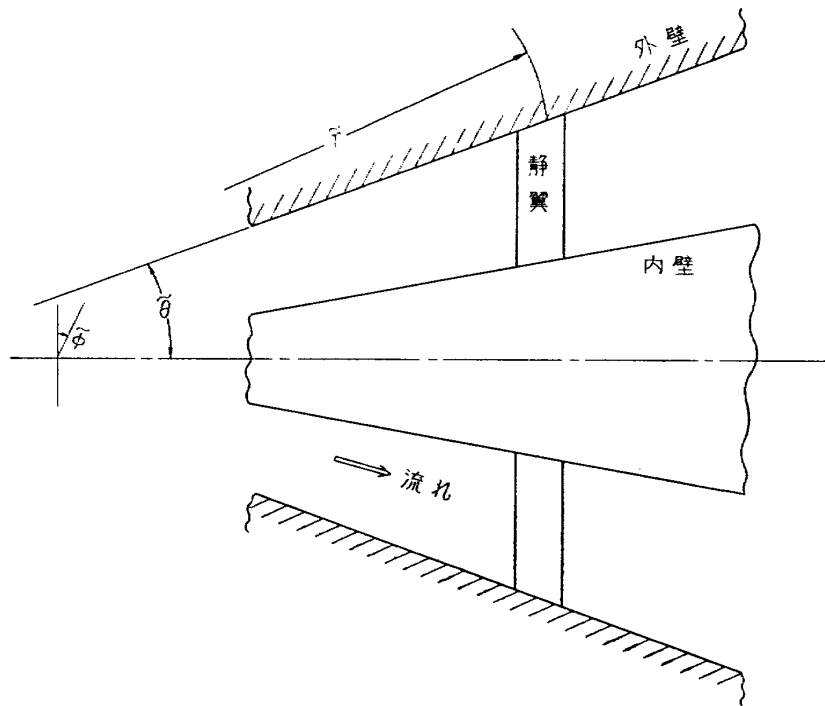


図 2 傾斜流れ (その 1)

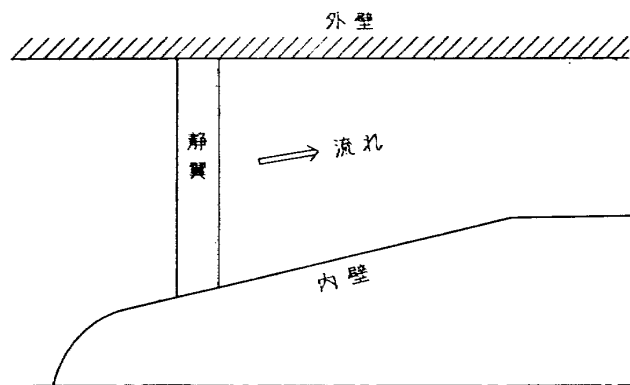


図 3 傾斜流れ (その 2)

て方程式に取り入れるかが問題になるが、単一のパラメータを半径方向速度に適用して、その解決をはかった。単一パラメータを使って、一種の変数分離を行なう方法は、壁形の変化しないとき、軸流速度に対してはすでになされているが^{4),5)}、このとき用いられたパラメータは、設計半径での軸流速度の半径方向傾斜に直接関係する。しかるに、著者の導入したパラメータは設計半径（または平均半径）での半径方向速度の形に関係するものであり、軸流速度分布に対しては、パラメータの軸方向の一次および二次微分も関係してくる性質をもったものである。

本報告では、円周方向速度のない場合（このことを軸対称流れと呼ぶ）に限定して考察を進めるが、これは半径方向の全エンタルピーこうばいのみが存在することに相当する。なお、Actuator Disk を作動円盤と訳したが、内壁があるから円板でなく、円盤なる訳語が適当であると考えたからである。

2. 基礎理論

2.1 基本方程式の誘導と仮定

図4のように、ターボ機械の中に円筒座標系 r, θ, z を採用するとうずの成分 ξ, η, ζ は

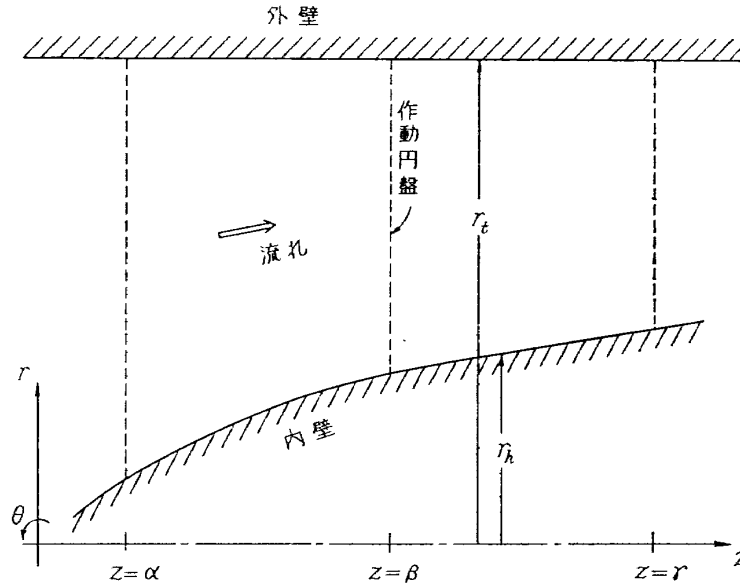


図4 解析モデル

$$\xi = \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (2)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \quad (3)$$

と表わせ、連続の条件は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

さらに、外力の働いていない流れ場での運動の方程式は

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5)$$

$$V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial z} + V_r \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (7)$$

となる。ただし V_r, V_θ, V_z はそれぞれ半径、円周および軸方向速度を、 ρ は密度、 p は静圧を表わす。(1)~(7) 式は定常流で非粘性のときに成立する方程式であるが、 θ 軸方向には一様という

仮定をつけ加えると $\partial/\partial\theta$ に関する項がすべて消え、さらに、この第 I 報では円周方向速度 $V_\theta=0$ の場合に限定すると上式はおのこの次のように簡単になる。すなわちうず成分のうち ξ, ζ はなくなり

$$\eta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (8)$$

$$\xi = \zeta = 0 \quad (9)$$

また、連続の条件として

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

運動の方程式の θ 軸方向は考えなくてもよく

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (11)$$

$$V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (12)$$

$$V_\theta = 0 \quad (13)$$

となる。

さて、速度と密度のターボ機械中での変化は、小擾乱量を用いて次のように表わせると仮定する。すなわち ρ_0 をある基準点の密度、 z の関数 $A(z)$ を流路面積とすると軸流速度は

$$V_z = \frac{G}{\rho_0 A(z)} + u \quad (14)$$

と書けるものとする。ただし G は流量パラメータと今後呼ぶことにする量であって、流量を重力の加速度定数 g で除したものであり、 u は小擾乱された軸流速度成分を表わし、 $G/\{\rho_0 A(z)\} \gg u$ なる関係がある。次に、軸流を対象にしている限り、半径方向速度は微小量 v のみで

$$V_r = v \quad (15)$$

と表わせるとする。このようにすると密度は基準密度 ρ_0 からのずれとして、 ρ' なる小擾乱量を使って

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (16)$$

と書ける。

圧縮機やタービンでは、熱損失や摩擦があるから圧力と密度はポリトロップ変化の式 $p/\rho^n = \text{定数}$ (n ; ポリトロップ指数) に従うものである。しかし冷却タービンなどの特殊な場合以外は完全に断熱的であるとしてさしつかえない。また、この研究は圧縮性や流路形状の影響を調べるのが主目的であるから、摩擦による全圧力の損失を無視する。このようにすると、翼列を通過する前後の流れ場では、それぞれ独立に等エントロピー流れと考えられる。さらに、問題を簡潔化するために仮想気体の状態変化

$$p = a - \frac{b}{\rho} \quad (17)$$

を仮定する。ただし、 a, b は定数であってターボ機械入口の一樣流中の状態 p_0, ρ_0 から規定でき

$$a = p_0 + \rho_0 a_0^2 \quad (18)$$

$$b = \rho_0^2 a_0^2 \quad (a_0: \text{入口の音速}) \quad (19)$$

と表わせる。

いま、 u, v, ρ' を一次の微小項とし、(14), (15) および (16) 式を (8), (10)~(12) 式に入れて二次の微小な項を省略すると、うずの円周方向成分 η は

$$\eta = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (20)$$

連続の条件は

$$\frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial z} + \frac{Gr}{\rho_0} \left(\frac{1}{A}\right)' + \frac{Gr}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) = 0 \quad (21)$$

運動方程式は

$$\frac{G}{\rho_0 A} \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \quad (22)$$

$$\frac{G}{\rho_0 A} \left[\frac{G}{\rho_0} \left(\frac{1}{A}\right)' + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + u \frac{G}{\rho_0} \left(\frac{1}{A}\right)' = - \frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \quad (23)$$

となる。ただし $\left(\frac{1}{A}\right)'$ は $\frac{1}{A}$ の z に関する微分を表示している。しかし ρ' は密度の小擾乱量である。

(20) 式を z で、(21) 式を r でそれぞれ微分して u に関する項を消去すると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) \quad (24)$$

となり、上式 (24) の右辺の最後の項に注目すると

$$\frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) = \frac{G}{\rho_0^2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \rho'}{\partial r} \left(\frac{1}{A}\right)' \right] \quad (25)$$

と書き直せるから、この式で ρ' を消去することを試みる。そのために、まず (23) 式を r で微分して

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial z} = - \frac{G \rho_0^2}{A b} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{G \rho_0^2}{b} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{A}\right)' \quad (26)$$

一方、(20) 式から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} - \eta$$

が得られるから、これらを (26) 式に入れて u に関する項を消すと

$$\frac{1}{A} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial z} = -\frac{G \rho_0^2}{A^2 b} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{G \rho_0^2}{A b} \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{1}{A} \right)' + \frac{G \rho_0^2}{A^2 b} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{G \rho_0^2}{A b} \eta \left(\frac{1}{A} \right)' \quad (27)$$

したがって、(27) 式と (22) 式を (25) 式に入れてその右辺から ρ' の偏微分の項をなくすると

$$\frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\rho'}{A} \right) = -\frac{G^2}{A^2 b} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{G^2}{A^2 b} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{2G^2}{A b} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{A} \right)' + \frac{G^2}{A b} \eta \left(\frac{1}{A} \right)' \quad (28)$$

となり、(24) 式より v に関する微分方程式として

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_0^2 A \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{1}{A} \right)' \\ = (1 - M_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} - M_0^2 A \eta \left(\frac{1}{A} \right)' \end{aligned} \quad (29)$$

ここで
$$M_0^2 = \frac{G^2}{A^2 b} \quad (30)$$

が得られる。(30) 式の右辺については次のように変形してみるとその物理的な意味が明確になる。すなわち

$$\frac{G^2}{A^2 b} = \frac{G^2 \rho_0^2}{A^2 \rho_0^2 b} = \left(\frac{G^2}{A^2 \rho_0^2} \right) / \left(\frac{b}{\rho_0^2} \right) = M_0^2 \quad (31)$$

のような関係があるから、 M_0 は擾乱されていない主流マッハ数と解釈でき、ちょうど、単独翼などの場合の自由流マッハ数に相当する。

2.2 うず成分 η について

v を支配する微分方程式 (29) は、線型非斉次であり、非斉次項を表わす右辺は η や流路変化 $(1/A)'$ などに関係している。そこで η についてさらに調べる必要がある。そのために (22) 式を z で、(23) 式を r で微分して ρ' の項を消去すると

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{A} \right)' = 0 \quad (32)$$

となり、(20) 式の関係を使って

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = 0 \quad (33)$$

または積分して

$$\eta = f(r) \cdot A(z) \quad (34)$$

と書ける。ここで $f(r)$ は r の単なる関数である。したがって (33) または (34) 式は η/A が軸方向に変化しないことを意味しており $(V_z - u) = \tilde{V}_z$ と表わすと (14) 式を用いて $\rho_0 \tilde{V}_z \eta \propto f(r)$ となり、 η は主流によって運搬されることを示している。また、 η に密度変化が関与していないのはいま考えている仮定の範囲内では、 ρ' の影響は少なくとも二次の微小項であることにほかならない。すなわち Crocco¹²⁾ または Bragg & Hawthorne¹⁾ によれば軸対称のうずあり流れのとき厳

密には

$$\eta = r \frac{dH}{d\psi} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \quad (35)$$

ただし H ; 全エンタルピー

ψ ; 流れ関数

と表わさねばならないから、 ρ'/ρ_0 の項を無視したことに相当する。さらに、Lewis & Horlock⁸⁾ の導いたうずの式は図 2 の球面座標系 $\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}$ を使って

$$\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{r}} = f(\tilde{\theta}) \quad (36)$$

ただし $\tilde{\eta}$; 球面座標系での $\tilde{\phi}$ 方向のうず成分

となっている。この (36) 式は広がる流れ (Diffusing Flow) では $\tilde{\eta}/\tilde{r}$ が主流の方向 \tilde{r} には変化しないことを意味しており、(34) 式と比べてみるとその相似がわかる。当然のことではあるが (34) 式で $A(z)$ が一定のときは η は r のみの関数となり、円環状うず (Ring-vortex) η は円筒面状を流れ去ると仮定すれば、ある半径上の η は一定であり、無限遠点のそれに等しいことになる。

さて、(29) 式の右辺に (33) 式の関係を使って v に関する線型偏微分方程式として最終的に次のように書き直せる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_0^2 \frac{\partial v}{\partial z} A \left(\frac{1}{A} \right)' = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (37)$$

2.3 単一パラメータ $S(z)$ について

Marble²⁾, Horlock⁸⁾ 等によると円筒状を流れる場合の作動円盤理論では、半径方向速度は一次のベッセル関数の線型結合とそれにかかる指数関数で表わせるから、無限遠では消滅しその途中では半径方向にはほぼ放物線状になる。この結果から類推して、ここでは v は次のように r の二次関数で表わせると仮定する。

$$v = S(z)r^2 + \chi_1(s, z)r + \chi_2(s, z) \quad (38)$$

ここで、 $S(z)$ は z のみの関数で今後これを単一パラメータと呼ぶものであり v の形状に関係し、 $\chi_1(s, z)$ および $\chi_2(s, z)$ は S と z の関数であって半径方向の境界条件から決めることができる。図 4 をみて外壁面 $r=r_t$ で

$$S(z)r_t^2 + \chi_1(S, z)r_t + \chi_2(S, z) = 0 \quad (39)$$

内壁面 $r=r_h$ で

$$S(z)r_h^2 + \chi_1(s, z)r_h + \chi_2(S, z) = V_h \quad (40)$$

なるように定める。(40) 式の V_h は内壁面の傾斜によって生じる半径方向の速度で、内壁の接線と軸方向とのなす角を λ とすると

$$V_h = \tan \lambda \cdot \left[\frac{G}{\rho_0 A(z)} + u \right] \quad (41)$$

となり, λ が z の関数として与えられ, かつ λ の値が大きくなければ V_h は z だけの関数として

$$V_h \cong (\tan \lambda) \frac{G}{\rho_0 A(z)} \quad (42)$$

と書ける。(39) と (40) 式を連立させて $\chi_1(s, z)$ および $\chi_2(s, z)$ を決めれば (38) 式は次のように書ける。

$$v = S(z)[r^2 + F_2(z)r + F_4(z)] + F_1(z)r + F_3(z) \quad (43)$$

ただし

$$F_1(z) = -\frac{V_h}{r_i(1-\nu)} \quad (44)$$

$$F_2(z) = -r_i(1+\nu) \quad (45)$$

$$F_3(z) = \frac{V_h}{(1-\nu)} \quad (46)$$

$$F_4(z) = r_i^2 \nu \quad (47)$$

$$\nu = \frac{r_h}{r_i} \text{ (ボス比)} \quad (48)$$

(43) 式を (37) 式に入れると

$$\begin{aligned} & S''(1-M_0^2)(r^2 + F_2 r + F_4) + S' \left[2(1-M_0^2)(F_2' r + F_4') - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (r^2 + F_2 r + F_4) \right] \\ & + S \left[3 + (1-M_0^2)(F_2'' r + F_4'') - \frac{F_4}{r^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2' r + F_4') \right] \\ & = \frac{F_3}{r^2} + 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1' r + F_3') - (1-M_0^2)(F_1'' r + F_3'') + \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{aligned} \quad (49)$$

ここで S'' , F_2'' , F_4'' は z に関する 2 階の微分, S' , F_1' , F_2' , F_3' , F_4' は 1 階の微分を示す。このようにして導いた (49) 式はある半径上で厳密に満足させることができるから, その半径として平均半径 $r_m = (r_i + r_h)/2$ を選ぶと

$$\begin{aligned} & S''(1-M_0^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4) + S' \left[2(1-M_0^2)(F_2' r_m + F_4') - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (r_m^2 + F_2 r_m + F_4) \right] \\ & + S \left[3 + (1-M_0^2)(F_2'' r_m + F_4'') - \frac{F_4}{r_m^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2' r_m + F_4') \right] \\ & = \left[\frac{F_3}{r_m^2} + 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1' r_m + F_3') - (1-M_0^2)(F_1'' r_m + F_3'') + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

となる。もし流路変化がなければ上式は

$$S''(1-M_0^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4) + S \left(3 - \frac{F_4}{r_m^2} \right) = 0 \quad (51)$$

のように簡単になり、この式は圧縮性のある流体が図 1 のような二重円筒中を流れる場合に相当するが、詳しい検討は第 3 章で行なうことにする。

(50) および (51) 式は、平均半径から離れるにつれて誤差が大きくなる。しかし内壁や外壁近くの複雑な流れ領域を除いて、平均半径を中心としてかなり大きな部分で近似的に上式は成立するであろう。とくに平均半径上では正確に S の値が決定できるから、それを使って半径方向速度のだいたいの形を知ることができる。

2.4 パラメータ $S(z)$ の境界条件

結局、 v の偏微分方程式 (37) は S の常微分方程式 (50) に還元できたことになり、これを解くために S に対する条件を定めなければならない。図 4 を参照して作動円盤からかなり離れた $z=\alpha$ および γ で半径方向の平衡が成立しているとすれば、少なくともそれらの位置は v の形が内壁の傾斜の影響だけを受けて半径方向に直線的に変わる場所の一つである。もし内壁や外壁が傾斜をしていないならば半径方向平衡の成立しているところで v は消滅する。したがって S の境界条件として

$$S(\alpha)=0 \quad (52)$$

$$S(\gamma)=0 \quad (53)$$

を与える。

さらに、作動円盤の置かれている $z=\beta$ での S の条件を決めるためにその近傍の状態を調べねばならない。作動円盤を通過すると密度変化が起こり円盤直前の半径方向速度 v_1 および軸流方向速度 $G/(\rho_0 A)+u_1$ は、不連続的に円盤通過直後の速度 v_2 および $G/(\rho_0 A)+u_2$ に変わるが、この理論を進めている近似の範囲内では h および k を 1.0 に近い量として

$$v_2=hv_1 \quad (54)$$

$$u_2=ku_1 \quad (55)$$

と書ける。円盤通過前後でのとび (Jump) 量を $[]_\beta$ なる記号で表わすと (54) および (55) 式から

$$[v]_\beta=(h-1)v_1 \quad (56)$$

$$[u]_\beta=(k-1)u_1 \quad (57)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_\beta=(k-1)\frac{\partial u_1}{\partial r}+u_1\frac{\partial k}{\partial r} \quad (58)$$

となる。すなわち半径方向速度のとび $[v]_\beta$ については、 h が 1.0 に近い値であるから $(h-1)$ は微小な量となり、したがって $(h-1)v_1$ は二次の微小項と評価でき、同様に $[u]_\beta$ も無視してさしつかえない量である。さらに u_1 や k が作動円盤の近傍で半径方向に急激な変化をしないならば $[\partial u/\partial r]_\beta$ も二次の微小項となり

$$[v]_\beta \cong 0 \quad (59)$$

$$[u]_{\beta} \cong 0 \quad (60)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\beta} \cong 0 \quad (61)$$

とおける。よって (61) および (20) 式を使ってうずのとびとして

$$[\eta]_{\beta} = \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{\beta} - \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\beta} \cong \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{\beta} \quad (62)$$

となる。以上の準備のもとに円盤直前、直後の状態をそれぞれサフィックス 1, 2 を付けて示すと (43) および (59) 式から

$$S_1 = S_2 \quad (63)$$

が得られ、さらに (43) および (62) 式の関係から

$$\begin{aligned} S_2[F_2'(\beta)r + F_4'(\beta)] + S_2'[r^2 + F_2(\beta)r + F_4(\beta)] \\ = S_1[F_2'(\beta)r + F_4'(\beta)] + S_1'[r^2 + F_2(\beta)r + F_4(\beta)] + [\eta]_{\beta} \end{aligned} \quad (64)$$

となり、(63) 式を考慮して S' のとびは

$$S_2' - S_1' = \frac{[\eta]_{\beta}}{[r^2 + F_2(\beta)r + F_4(\beta)]} \quad (65)$$

と表わせる。すなわち (63) および (65) 式が作動円盤のところで S に付加される条件である。

2.5 $[\eta]_{\beta}$ について

(65) 式に現われているうず成分のとび $[\eta]_{\beta}$ を見積る必要がある。そのために、下流の半径方向平衡の成立している $z=r$ で u の分布を

$$u = a_1 r^2 + b_1 r + c_1 \quad (66)$$

と規定する。ただし a_1, b_1 および c_1 は単なる定数であり、その中 a_1 および b_1 はうず分布に関係するから、これらをうず分布パラメータと呼ぶことにする。 v については $S(r)=0$ なることから $z=r$ では

$$v = F_1(r)r + F_3(r) \quad (67)$$

とおけ、また、うず分布は

$$\eta(r, r) = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{z=r} = [F_1'(r)r + F_3'(r)] - (2ra_1 + b_1) \quad (68)$$

と書けるから、(34) および (68) 式より

$$f(r)A(r) = [F_1'(r) - 2a_1]r + [F_3'(r) - b_1] \quad (69)$$

となり、したがって η および $\partial\eta/\partial z$ は円盤下流においてそれぞれ

$$\eta = \{[F_1'(r) - 2a_1]r + [F_3'(r) - b_1]\} \frac{A(z)}{A(r)} \quad (70)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial z} = \{[F_1'(r) - 2a_1]r + [F_3'(r) - b_1]\} \frac{A'(z)}{A(r)} \quad (71)$$

と表わせる。いま、 η_0 を作動円盤の上流での円周方向うず成分、 ε を正の微小量とすると η/A の円盤前後でのとびは $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限として

$$\left[\frac{\eta}{A} \right]_{\beta} = \left[\frac{\eta(r, \beta + \varepsilon)}{A(\beta + \varepsilon)} - \frac{\eta_0(r, \beta - \varepsilon)}{A(\beta - \varepsilon)} \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (72)$$

となるが、もし上流でうずなし流れであるならば、 $\eta_0 = 0$ とおけるから (70) および (72) 式より

$$[\eta]_{\beta} = [\{F_1'(\gamma) - 2a_1\}r + \{F_3'(\gamma) - b_1\}] \frac{A(\beta)}{A(\gamma)} \quad (73)$$

が得られ、これを (65) 式に入れて S' のとびは最終的に次のように表わせる。

$$S_2' - S_1' = \frac{[\{F_1'(\gamma) - 2a_1\}r + \{F_3'(\gamma) - b\}] \frac{A(\beta)}{A(\gamma)}}{[r^2 + F_2(\beta)r + F_4(\beta)]} \quad (74)$$

2.6 作動円盤を通過するとき流体が受ける外力

円盤を通るとき外力が働かうず成分 η が新たに発生する。(22) および (23) 式で外力の項まで考えると次のようになる。

$$\frac{G}{\rho_0 A} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{b}{\rho_0^3} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) + F_r \quad (75)$$

$$\frac{G}{\rho_0 A} \left[\frac{G}{\rho_0} \left(\frac{1}{A} \right)' + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + u \frac{G}{\rho_0} \left(\frac{1}{A} \right)' = - \frac{b}{\rho_0^3} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) + F_z \quad (76)$$

ただし F_r, F_z はそれぞれ外力の半径、軸方向の成分である。したがって (75) 式を z で、(76) 式を r で微分し ρ' に関する項を消去し、かつ (20) 式を使って

$$\frac{G}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = - \frac{\partial F_z}{\partial r} + \frac{\partial F_r}{\partial z} \quad (77)$$

を得る。軸対称流れであるから円周方向には外力が働かず、よって F_r と F_z の合力は流れに平行であり次の条件を満足する。

$$v F_z - \left(\frac{G}{\rho_0 A} + u \right) F_r = 0 \quad (78)$$

問題の性質からみて F_z を一次の微小項とみなせば上式より F_r は二次の微小項でなければならない。そこで (77) 式に現われている F_r, F_z の微分項の大きさを見積るために (78) 式を使って

$$\frac{\rho_0}{G} \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} \right) \cong \frac{\partial}{\partial z} (v F_z A) = F_z A \frac{\partial v}{\partial z} + v A \frac{\partial F_z}{\partial z} + v F_z \frac{\partial A}{\partial z} \quad (79)$$

$$\frac{\rho_0}{G} \left(\frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \cong \frac{\partial F_r}{\partial r} \left(\frac{1}{A v} \right) + \left(\frac{F_r}{A} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{v} \right) + \frac{\rho_0 A}{G} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{v} \right) \right] \quad (80)$$

を得ると (79) 式の右辺はすべて二次の微小項となり、一方 (80) 式のそれは一次の微小項となるから $(\rho_0/G)(\partial F_r/\partial z)$ は $(\rho_0/G)(\partial F_z/\partial r)$ に比べて省略でき (77) 式は

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) \cong - \frac{\rho_0}{G} \left(\frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \quad (81)$$

と書け、積分して η/A のとびは $z=\beta$ での極限值をとって

$$\left[\frac{\eta}{A} \right]_{\beta} = \left[-\frac{\rho_0}{G} \int_{\beta-\epsilon}^{\beta+\epsilon} \left(\frac{\partial F_z}{\partial r} \right) dz \right]_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (82)$$

と表わせる。すなわち、この式は作動円盤を通るとき軸方向の力がうず成分 η の発生に主として関与することを意味しており、この種の流れを二次元風胴を用いて実験的に得た一例として Livesey & Turner¹³⁾ の報告がある。

2.7 軸流速度

最初に軸方向の攪乱速度 u について調べる。(20) 式を半径方向に積分して

$$u = \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \eta \right) dr + f(z) \quad (83)$$

となる。ただし $f(z)$ は z の関数でありその決定は後にゆずることにして、積分記号の中の $\partial v / \partial z$ は (43) 式を z で微分すれば得られ、 η については作動円盤の上流ではうずなし流れ、すなわち $\eta=0$ とおき、下流では (70) 式によって与えられるから u に関する式として上流、下流でそれぞれ次のようになる。

$$u_1(r, z) = \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + (S'F_2 + F_1' + SF_2') \frac{r^2}{2} + (S'F_4 + F_3' + SF_4') r + f_1(z) \quad (84)$$

$$u_2(r, z) = \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + \left[S'F_2 + F_1' + SF_2' - \{F_1'(\gamma) - 2a_1\} \frac{A(z)}{A(\gamma)} \right] \frac{r^2}{2} \\ + \left[S'F_4 + F_3' + SF_4' - \{F_3'(\gamma) - b_1\} \frac{A(z)}{A(\gamma)} \right] r + f_2(z) \quad (85)$$

ただし $u(r, z)$ および $f(z)$ のサフィックス 1, 2 はそれぞれ上流、下流の状態を表わす。 $S' \neq 0$ の領域では (84) および (85) 式は r に関する三次式であり Seippel¹⁰⁾ によって導かれた軸流速度分布の形によく似ている。

そこで $f(z)$ を決めるために連続の条件を考えねばならない。すなわち

$$G = 2\pi \int_{r_h}^{r_t} \left\{ \frac{G}{\rho_0 A(z)} + u \right\} (\rho_0 + \rho') r dr \quad (86)$$

は次のように書き直すことができる。

$$\rho_0 \int_{r_h}^{r_t} u r dr + \frac{G}{\rho_0 A(z)} \int_{r_h}^{r_t} \rho' r dr = 0 \quad (87)$$

そこで上式 (87) の左辺第 2 項を求めるために (21) および (23) 式から $\partial \rho' / \partial z$ を消去し

$$\frac{\partial u}{\partial z} (1 - M_0^2) - u M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + (1 - M_0^2) \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \\ = -\frac{G}{\rho_0^2 A} \rho' A \left(\frac{1}{A} \right)' \quad (88)$$

両辺に r をかけて r_h から r_t まで積分すると

$$(1-M_0^2) \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial u}{\partial z} r dr - \left[M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \right] \int_{r_h}^{r_t} u r dr + \int_{r_h}^{r_t} v dr + \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial v}{\partial r} r dr \\ + (1-M_0^2) \frac{G}{\rho_0 A} \frac{r_t^2 - r_h^2}{2} A \left(\frac{1}{A} \right)' = - \frac{G}{\rho_0^2 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \int_{r_h}^{r_t} \rho' r dr \quad (89)$$

となる。いま $\tilde{F}(r, z)$ なる関数記号を用いて

$$\tilde{F}(r, z) = \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \eta \right) dr \quad (90)$$

を表わすものとする (83) 式から

$$\int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial u}{\partial z} r dr = \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} r dr + f'(z) \int_{r_h}^{r_t} r dr \quad (91)$$

$$\int_{r_h}^{r_t} u r dr = \int_{r_h}^{r_t} \tilde{F} r dr + f(z) \int_{r_h}^{r_t} r dr \quad (92)$$

なる関係が得られ、これらを (89) 式に入れて

$$(1-M_0^2) \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} r dr + (1-M_0^2) f'(z) \int_{r_h}^{r_t} r dr - M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \int_{r_h}^{r_t} \tilde{F} r dr \\ - M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' f(z) \int_{r_h}^{r_t} r dr + \int_{r_h}^{r_t} v dr + \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial v}{\partial r} r dr + (1-M_0^2) \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \int_{r_h}^{r_t} r dr \\ = - \frac{G}{\rho_0^2 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \int_{r_h}^{r_t} \rho' r dr \quad (93)$$

を得る。したがって (92) および (93) 式を使って (87) 式は次のような $f(z)$ に関する 1 階の常微分方程式となる。

$$f'(z) + P(z) \cdot f(z) = Q(z) \quad (94)$$

ここで

$$P(z) = - \frac{1 + M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)'}{1 - M_0^2} \quad (95)$$

$$Q(z) = 2 \left[\frac{1 + M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)'}{(1 - M_0^2) r_t^2 (1 - \nu^2)} \right] \int_{r_h}^{r_t} \tilde{F} r dr - \frac{2}{r_t^2 (1 - \nu^2)} \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} r dr \\ - \left[\frac{2}{r_t^2 (1 - M_0^2) (1 - \nu^2)} \right] \left[\int_{r_h}^{r_t} v dr + \int_{r_h}^{r_t} \frac{\partial v}{\partial r} r dr \right] - \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \quad (96)$$

したがって (94) 式を積分して

$$f(z) = C e^{-\int P(z) dz} + e^{-\int P(z) dz} \int Q e^{\int P(z) dz} dz \quad (97)$$

となるから積分定数 C を決めねばならない。 $z = \alpha$ では半径方向速度は $v = F_1(\alpha)r + F_2(\alpha)$ なる分布をもっているから $\partial v / \partial z = \partial u / \partial r$ の関係より

$$u(r, z) = F_1'(\alpha) \frac{r^2}{2} + F_3'(\alpha)r + f(\alpha) \quad (98)$$

となり, $z=\alpha$ を ρ の基準点に定めるとそこでは $\rho'=0$ とおけるから (87) 式に (98) 式を入れて $f(\alpha)$, したがって求める定数 C は次のように決められる。

$$f(\alpha) = -\frac{r_i^2}{4} F_1'(\alpha)(1 + \nu^2) - \frac{2r_i}{3} F_3'(\alpha) \left(\frac{1 + \nu + \nu^2}{1 + \nu} \right) = C \quad (99)$$

ただし上式の ν は $z=\alpha$ でのボス比である。一方, $z=r$ では u の分布は (66) 式によって与えられているから $C=c_1$ とおける。結局, 上流および下流に対する $f(z)$ としてそれぞれサフィックス 1, 2 を付けて表わすと次のようになる。

$$f_1(z) = f(\alpha) e^{-\int_{\alpha}^z P(z) dz} + e^{-\int_{\alpha}^z P(z) dz} \int_{\alpha}^z Q_1(z) e^{\int_{\alpha}^z P(z) dz} dz \quad (100)$$

$$f_2(z) = c_1 e^{-\int_r^z P(z) dz} + e^{-\int_r^z P(z) dz} \int_r^z Q_2(z) e^{\int_r^z P(z) dz} dz \quad (101)$$

上式の $P(z)$ は円盤のところで連続するが, $Q(z)$ は (96) 式よりみて $\tilde{F}(z)$ に関する項を含んでいるから不連続になり上, 下流で次のように区別して表わさねばならない (積分の上, 下端は省略)。

$$Q_1(z) = 2 \left[\frac{1 + M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)'}{(1 - M_0^2) r_i^2 (1 - \nu^2)} \right] \left[\int \tilde{F}_1 r dr - \frac{2}{r_i^2 (1 - \nu^2)} \int \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial z} r dr \right. \\ \left. - \left[\frac{2}{r_i^2 (1 - M_0^2) (1 - \nu^2)} \right] \left[\int v dr + \int \frac{\partial v}{\partial r} r dr \right] - \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \right] \quad (102)$$

ただし

$$\tilde{F}_1(r, z) = \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + (S' F_2 + F_1' + S F_2') \frac{r^2}{2} + (S' F_4 + F_3' + S F_4') r \quad (103)$$

$$Q_2(z) = 2 \left[\frac{1 + M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)'}{(1 - M_0^2) r_i^2 (1 - \nu^2)} \right] \left[\int \tilde{F}_2 r dr - \frac{2}{r_i^2 (1 - \nu^2)} \int \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial z} r dr \right. \\ \left. - \left[\frac{2}{r_i^2 (1 - M_0^2) (1 - \nu^2)} \right] \left[\int v dr + \int \frac{\partial v}{\partial r} r dr \right] - \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \right] \quad (104)$$

ただし

$$\tilde{F}_2(r, z) = \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + \left[S' F_2 + F_1' + S F_2' - \{ F_1'(\gamma) - 2a_1 \} \frac{A(z)}{A(\gamma)} \right] \frac{r^2}{2} \\ + \left[S' F_4 + F_3' + S F_4' - \{ F_3'(\gamma) - b_1 \} \frac{A(z)}{A(\gamma)} \right] r \quad (105)$$

以上から上流および下流の軸流速度はそれぞれ

$$V_{z1} = \frac{G}{\rho_0 A(z)} + \tilde{F}_1(r, z) + f_1(z) \quad (106)$$

$$V_{z2} = \frac{G}{\rho_0 A(z)} + \tilde{F}_2(r, z) + f_2(z) \quad (107)$$

と書ける。

3. 円筒流れ

壁形状の変化しない二重円筒中の流れは (51) 式で表わされるから、これに $r_m = r_i(1+\nu)/2$ を代入して整理すると

$$S'' - n^2 S = 0 \quad (108)$$

$$n^2 = \frac{4 \left[3 - \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} \right]}{r_i^2 (1-\nu)^2 (1-M_0^2)} \quad (109)$$

となり、その一般解は \tilde{c}_0, \tilde{c}_1 を積分定数として

$$S = \tilde{c}_0 e^{+nz} + \tilde{c}_1 e^{-nz} \quad (110)$$

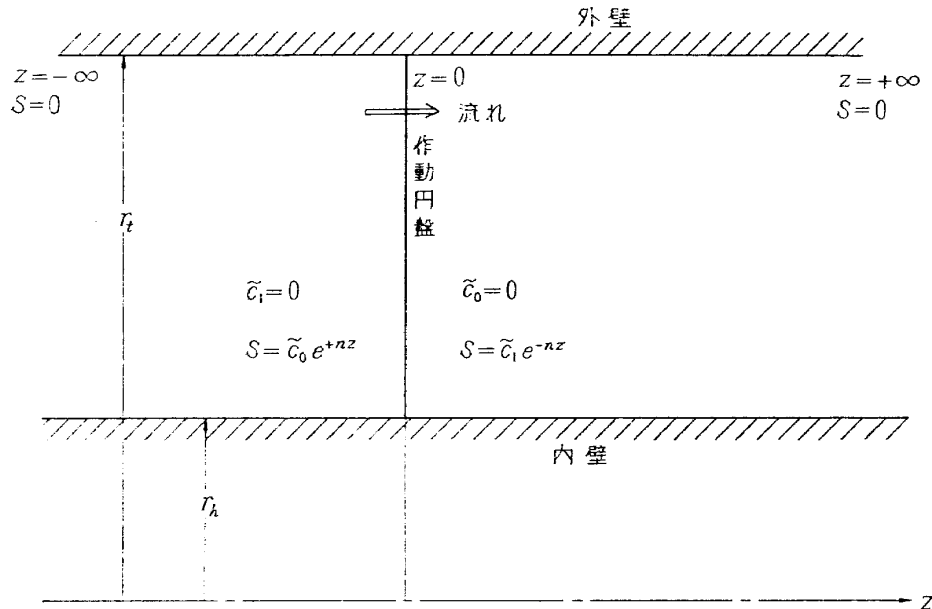


図 5 円筒流れ

と表わせる。図 5 をみて $z = \pm\infty$ で半径方向の平衡が成立し、 $z = 0$ の位置に作動円盤が置かれているとき上流で (110) 式の S が発散しないためには $\tilde{c}_1 = 0$ でなければならず、同様の理由から下流では \tilde{c}_0 が消滅する必要がある。一方 $z = 0$ の近傍では上流から円盤に接近させた S_1 と、下流から円盤に限りなく近づけた S_2 とは連続し、すなわち

$$S_1 = S_2 \quad (111)$$

の関係が成立しかつそこでは S_1' および S_2' の間にとびが存在する。このとび量は (74) 式で $A = \text{const.}$ および $r_m = r_i(1+\nu)/2$ を入れて

$$S_2' - S_1' = \frac{4(2a_1r + b_1)}{r_i^2(1-\nu)^2} \quad (112)$$

と見積れる。以上の条件から S は上流と下流とで対称になり積分定数を $\bar{c}_0 = \bar{c}_1 = C$ とおくと

$$C = -\frac{2(2a_1r + b_1)}{r_i^2(1-\nu^2)n} \quad (113)$$

のように表わせるから複号を用いて

$$S = Ce^{\pm nz} \quad (114)$$

となる。ただしプラスが上流、マイナスが下流に対応する。

次に (114) 式によって与えられる S を用いて軸流擾乱速度を求める。まず上流ではうずなし流れ $\partial u/\partial r = \partial v/\partial z$ の条件より

$$u_1 = \left(\frac{a_1r^2 + b_1r + c_1}{2} \right) e^{+nz} + f_1(z) \quad (115)$$

下流では $\partial u/\partial r = \partial v/\partial z - \eta$ より

$$u_2 = -\left(\frac{a_1r^2 + b_1r + c_1}{2} \right) e^{-nz} + a_1r^2 + b_1r + f_2(z) \quad (116)$$

となる。(99) 式から $f(-\infty) = 0$ および (66) 式から $f(+\infty) = c_1$ が得られるから、(115) および (116) 式の指数関数 $e^{\pm nz}$ の前にかかっている $\pm(a_1r^2 + b_1r + c_1)/2$ は $\pm\{u_2(r, +\infty) - u_1(r, -\infty)\}/2$ を意味することがわかり、(115) と (116) 式は $e^{\pm nz}$ を除いてベッセル関数を使って導かれた解³⁾

$$C_{x1}' = \left(\frac{C_{x2} - C_{x1}}{2} \right) e^{k_i x/l} \quad (A-1)$$

$$C_{x2}' = -\left(\frac{C_{x2} - C_{x1}}{2} \right) e^{-k_i x/l} \quad (A-2)$$

ただし C_{x1}', C_{x2}' ; 上, 下流の擾乱軸流速度

C_{x1}, C_{x2} ; 無限遠上, 下流の軸流速度

k_i ; ベッセル関数の根 ($i=1, 2, 3, \dots$)

l ; $(r_i - r_h)$

x ; 軸方向座標であり (115), (116) 式の z と同じとみなせる

と見比べて形の上で完全に一致する。したがって $e^{\pm nz}$ について検討してみる必要がある。これは擾乱速度の減衰割合を示すもので、(109) 式で $M_0^2 \cong 0$ とおけば非圧縮性流体の場合の n を表わすことになり、これを N と表現すると

$$N^2 = \frac{4 \left[3 - \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} \right]}{r_i^2(1-\nu)^2} \quad (117)$$

と書ける。よって上式の分子の平方根 $2\sqrt{3 - 4\nu/(1+\nu)^2}$ と (A-1) または (A-2) 式の k_i を比べ

るために、ボス比 ν を横軸にとってプロットしたのが図 6 でありターボ機械としての有効ボス比の範囲内で著者の理論のほうが一割ほど値が小さい、すなわち減衰が遅いことになる。また圧縮性を加味すると、(109) 式からわかるようにマッハ数 M_0 が大きいほど早く減衰が起こることになり、この現象は Horlock の解析解⁶⁾ と一致する。

次の場合について数値解を求め結果を図 7 と図 8 に示す。

外径	r_i	0.200 m
ボス比 (一定)	ν	0.8
うず分布パラメータ	a_1	0
	b_1	10.55 sec ⁻¹
軸流マッハ数	M_0	小さい ($M_0^2 \cong 0$)
基準密度	ρ_0	0.125 kgs ² /m ⁴

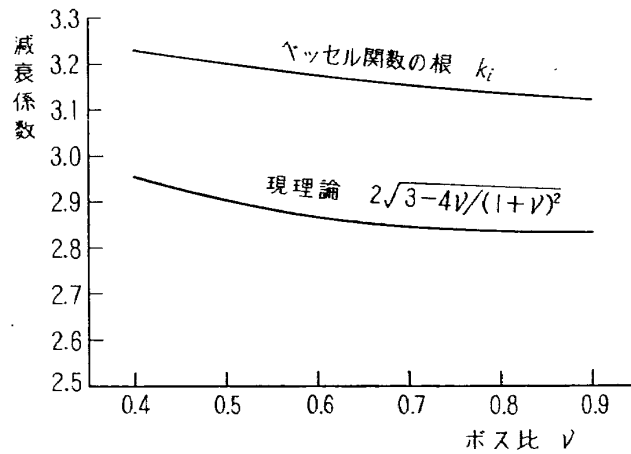


図 6 減衰割合の比較

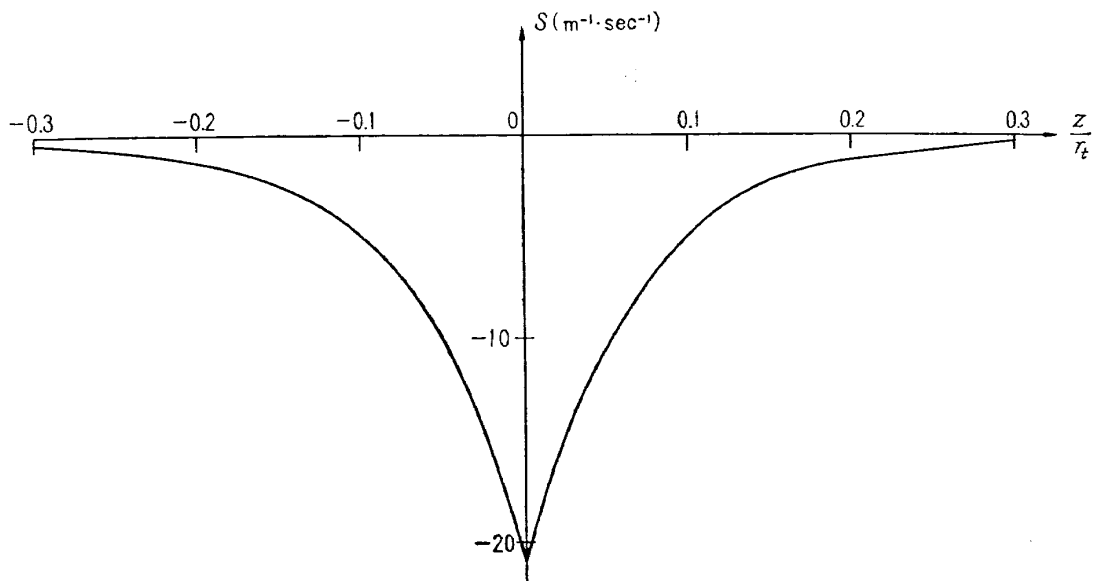


図 7 単一パラメータの数値例 (円筒流れ, $b_1=10.55$)

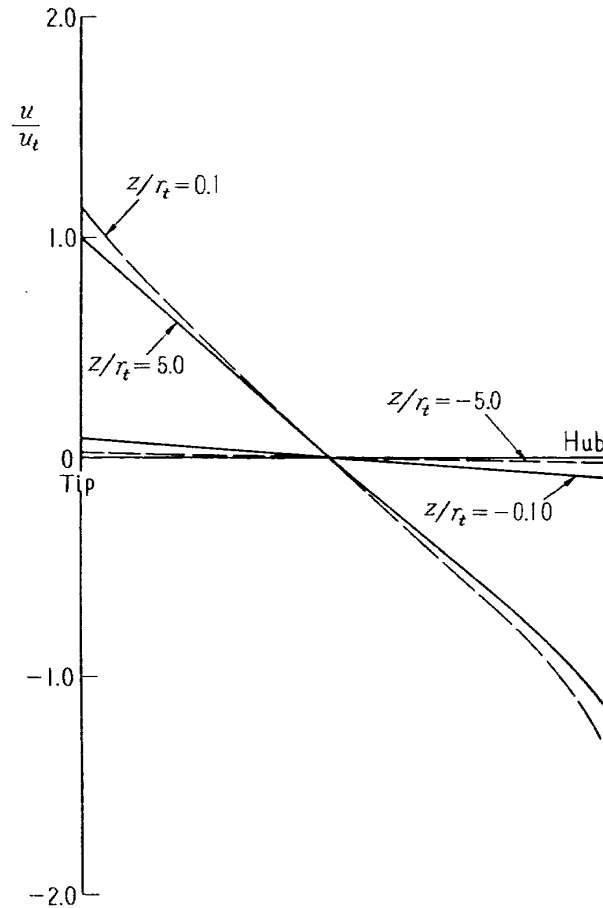


図 8 軸流擾乱速度分布 (円筒流れ, $b_1=10.55$)

図 7 の S は円盤に対して対称形になり $z/r_t = \pm 0.1$ では $z/r_t = 0$ のときの値の約 24% に減衰し, $z/r_t = \pm 0.2$ を越えれば実質的には半径方向の平衡が保たれた領域になる。図 8 の縦軸の値は軸流擾乱速度 u を, $z/r_t = 5.0$ のときの外壁での u で割って無次元化したものである。

4. 傾斜流れの数値解

流路面積に変化のある場合の流れは (50) 式によって表わされるが, この式は S に関する 2 階の常微分方程式であるから, 2 点境界値問題¹¹⁾として数値解を求めることにする。すなわち (50) 式は次のように変形できる。

$$S'' + f(z)S' + g(z)S = k(z) \tag{118}$$

$$f(z) = 2 \left[\frac{F_2' r_m + F_4'}{r_m^2 + F_2 r_m + F_4} - \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} A \left(\frac{1}{A} \right)' \right] \tag{119}$$

$$g(z) = \frac{F_2'' r_m + F_4''}{r_m^2 + F_2 r_m + F_4} + \frac{1}{(1 - M_0^2)(r_m + F_2 r_m + F_4)} \left\{ 3 - \frac{F_4}{r_m^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2' r_m + F_4') \right\} \tag{120}$$

$$k(z) = \frac{1}{(1-M_0^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4)} \left\{ \frac{F_3}{r_m^2} + 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1' r_m + F_3') \right. \\ \left. - (1-M_0^2)(F_2'' r_m + F_3'') + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right\} \quad (121)$$

いま区間を $(N+1)$ 分割した場合を例にとると次に示す方法によって N 個の線型連立方程式を作ることができる。

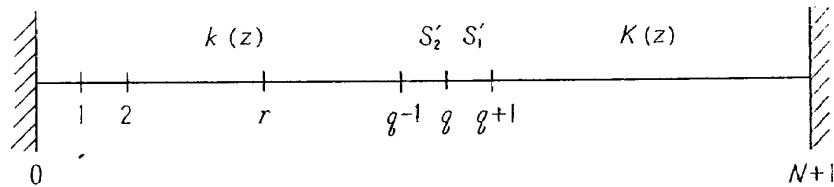


図 9

図 9 をみてメッシュの長さを h , r 番目の $S, f(z), g(z)$ および $k(z)$ の値を S_r, f_r, g_r および k_r と表わし, q 番目のところで S' に不連続が起こるものとする (なお, 自明なことであるが r, q, N はいずれも正の整数と約束する)。

$q-1 \geq r \geq 1$ の区間では h が十分小さければ, (118) 式は一次および二次微分に対して中心差分公式を用いて近似的に

$$S_{r-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_r \right) - S_r (2 - h^2 g_r) + S_{r+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_r \right) = h^2 k_r \quad (122)$$

とおける。一方, $r=q$ で $k(z)$ に不連続変化が起こるから $N \geq r \geq q+1$ の区間での $k(z)$ を $K(z)$ と表示するとその区間では

$$S_{r-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_r \right) - S_r (2 - h^2 g_r) + S_{r+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_r \right) = h^2 K_r \quad (123)$$

と書ける。ただし r 番目の $K(z)$ の値を K_r と表わす。しかるに $r=q$ ではもし q が左側の領域に属していると考えれば (118) 式は差分形式で次のように書ける。

$$S_{q-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_q \right) - S_q (2 - h^2 g_q) + \bar{S}_{q+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_q \right) = h^2 k_q \quad (124)$$

ここで \bar{S}_{q+1} は $k(z)$ に不連続変化が起こらないとした場合の値である。同様に q が右側の領域に属しているとみなしたとき

$$\bar{S}_{q-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_q \right) - S_q (2 - h^2 g_q) + S_{q+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_q \right) = h^2 K_q \quad (125)$$

とおける。 \bar{S}_{q-1} は $K(z)$ が $r=q$ を越えて左側まで連続しているものと考えたときの値である。一方, 右領域から q に近づく S の微係数を S'_2 , 左領域からのそれを S'_1 とすると差分形式で

$$2h(S'_2 - S'_1) = (S_{q+1} + S_{q-1}) - (\bar{S}_{q-1} + \bar{S}_{q+1}) \quad (126)$$

と表わせる。したがって (124), (125) および (126) 式より $r=q$ での差分式は

$$\begin{aligned}
 & S_{q-1} \left(1 + \frac{a_1}{a_3} \right) - S_q \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_3} \right) + S_{q+1} \left(1 + \frac{a_3}{a_1} \right) \\
 & = 2h(S_2' - S_1') + \frac{b_4}{a_1} + \frac{a_4}{a_3}
 \end{aligned} \tag{127}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= 1 - \frac{1}{2} h f_q \\
 a_2 &= 2 - h^2 g_q \\
 a_3 &= 1 + \frac{1}{2} h f_q \\
 a_4 &= h^2 k_q \\
 b_4 &= h^2 K_q
 \end{aligned} \right\} \tag{128}$$

とおかねばならない。以上から図 9 の 0 点および $N+1$ 点を境界値としてもつ N 個の連立方程式を形成することができる。

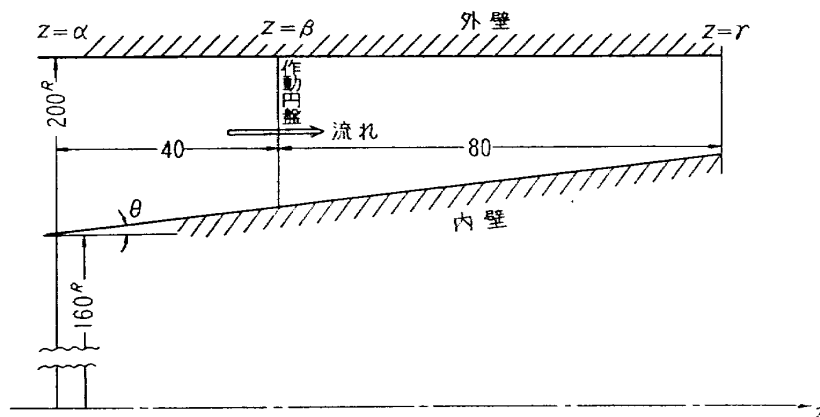


図 10 数 値 例 (単位 mm)

一例として図 10 のようなダクト (外径 $r_i=200$ mm, 入口 $z=\alpha$ でのボス比 0.8) の場合について数値解を求めた。計算を簡単にするために内壁の形状については, 内壁の接線と z 軸とのなす角 θ が z によらない図 10 のような一定値をとる場合を選んだ。 $z=\alpha, r$ でそれぞれ上流, 下流の半径方向平衡が成立し $z=\beta$ に作動円盤, いまの場合には円周方向に速度成分を与えない金網状のものが置かれているとする。うず分布パラメータに関しては $a_1=0, b_1=10.55$ (sec^{-1}), 基準密度は $\rho_0=0.125$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-4}$) とし傾きを表わす $\tan \theta$ として $+0.05$ および -0.05 の 2 種類について考え, 各場合について流量を 3 種類かえて計算したのが図 11 である。グラフには流量を表わす値として入口の流入軸流マッハ数 M_0 を記入した。せばまり流れ ($\tan \theta=+0.05$) と広がり流れ ($\tan \theta=-0.05$) では S の正負が逆転し, このように傾斜のある流れではマッハ数が高くなるほど

上, 下流とも S の絶対値は大きくなる。いま求めた S を使って軸流速度分布が変化の様子を知るために (103) および (105) 式の \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 を計算し, 内壁での値 $\tilde{F}_{1h}, \tilde{F}_{2h}$ との差をとり, 無次元化するためある代表の値で割ったものを縦軸にプロットしたのが図 12, 図 13 である。たとえば図 12 (a) の縦軸は $(\tilde{F}_1 - \tilde{F}_{1h})$ を, $M_0=0.26, x/r_t=-0.02$ のときの外壁と内壁における差 $(\tilde{F}_{1e} - \tilde{F}_{1h})$ で割ったものであり, 横軸は外壁から内壁までを 4 等分した半径位置 5 点をとってある。 x は作動円盤を起点として下流方向をプラスとする。

さて, 図 12(a) ではマッハ数が大きいほど外壁と内壁との差 $(\tilde{F}_{1e} - \tilde{F}_{1h})$ および $x/r_t=-0.10$ から -0.02 まで流れることによって生じる分布の変化割合が大きくなる。しかるに下流に行くとき図 12 (b) が示すようにマッハ数が大きければ $(\tilde{F}_{2e} - \tilde{F}_{2h})$ は大きくなるが, 流れることによって起こる分布の変化の様子が $M_0=0.78$ と $M_0=0.26$ の場合では逆転し, 低マッハ数のときは作動円盤から遠ざかるにつれて $(\tilde{F}_{2e} - \tilde{F}_{2h})$ が大きくなる。一方, 広がる流れの場合は図 13 (a) において高マッハ数のときは流れることによって生じる変化の割合は小さくとも, とにかく $(\tilde{F}_{1e} - \tilde{F}_{1h})$ の値は大きいことがわかる。しかし図 13 (b) に示したように下流になると低マッハ数ほど変化の割合も, 外壁と内壁における値の差も著しい。このことは図 11 をふりかえってみると広がり流れの作動円盤下流ではマッハ数が低くなると S の絶対値は小さくなるが, そのこうばいの絶対値は逆に大きくなることに起因している。

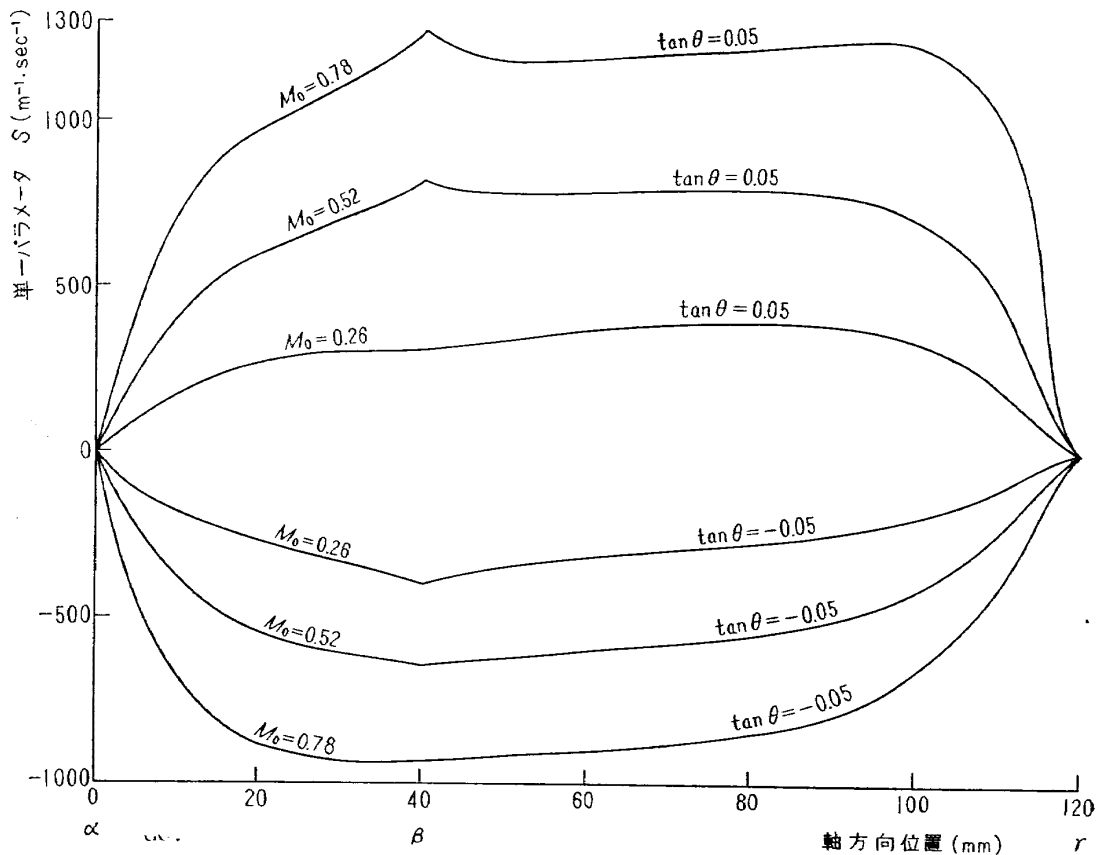


図 11 単一パラメータの数値例 ($a_1=0, b_1=10.55$)

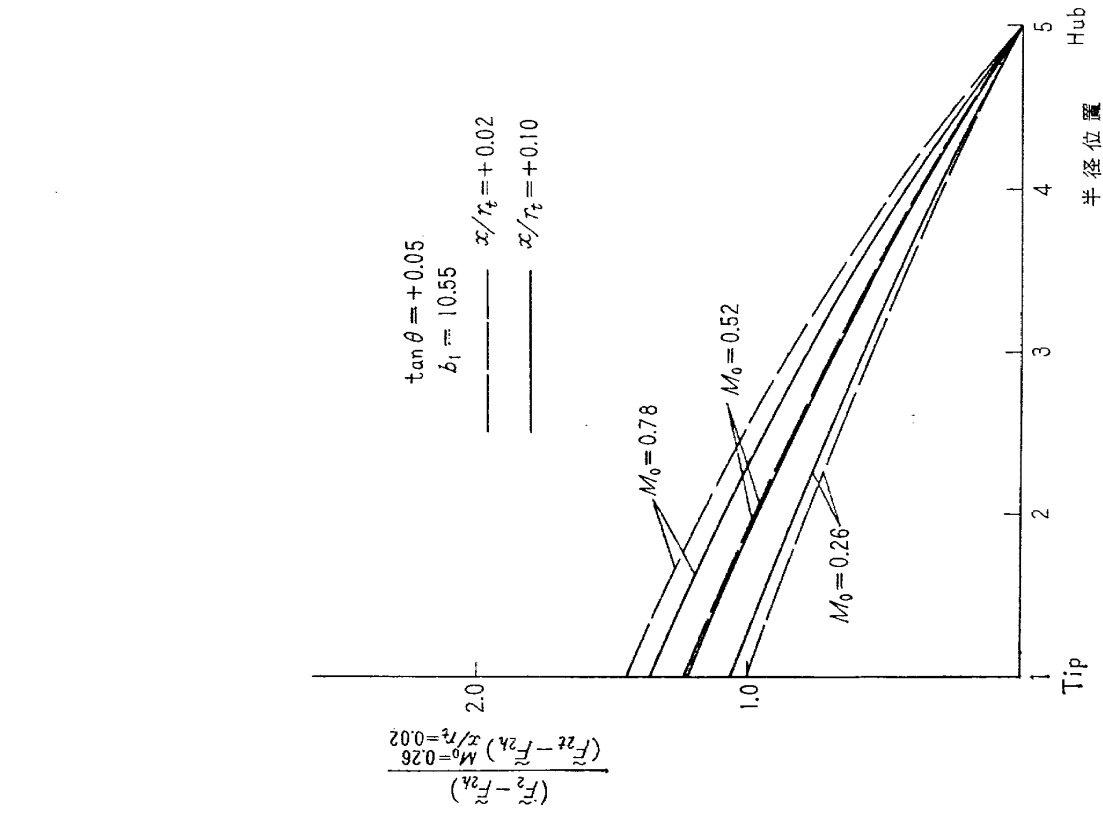


図 12(a) せばまり流れ (上流)

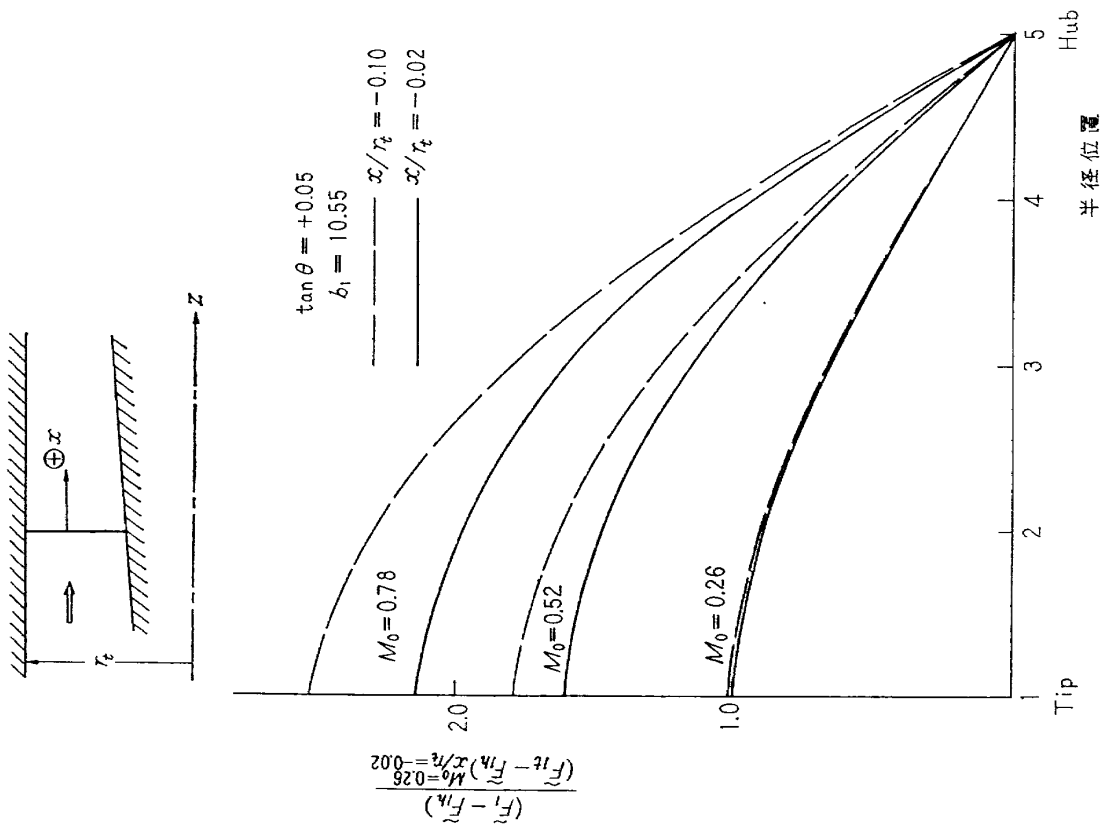


図 12(b) せばまり流れ (下流)

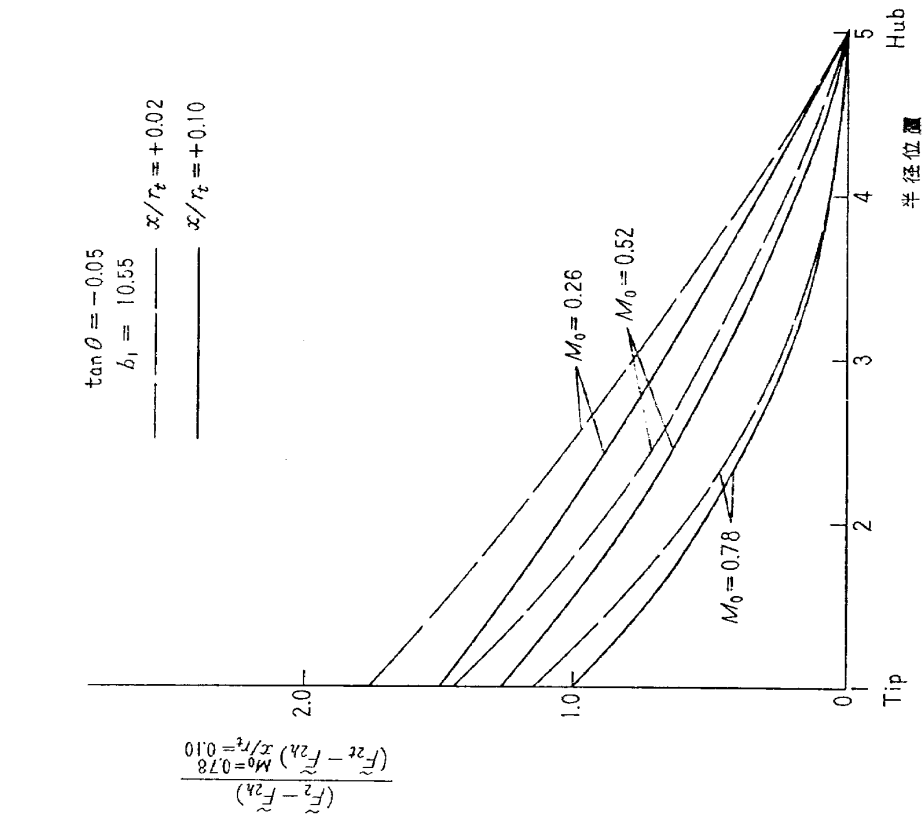


図 13 (a) 広がり流れ (上流)

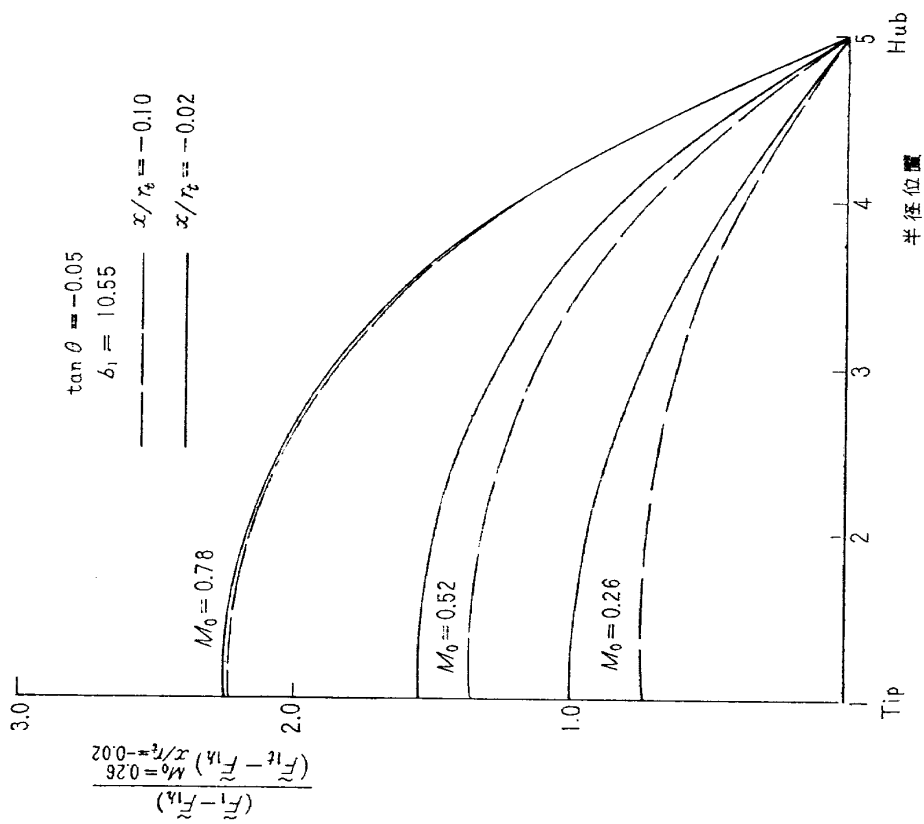


図 13 (b) 広がり流れ (下流)

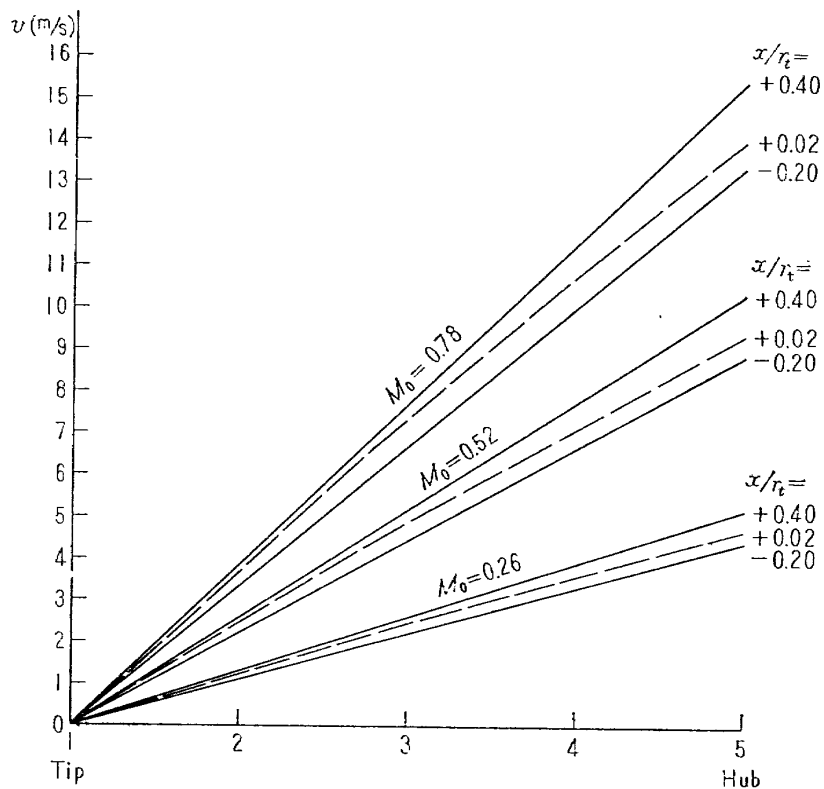


図 14 せばまり流れ ($\tan \theta = 0.05$)

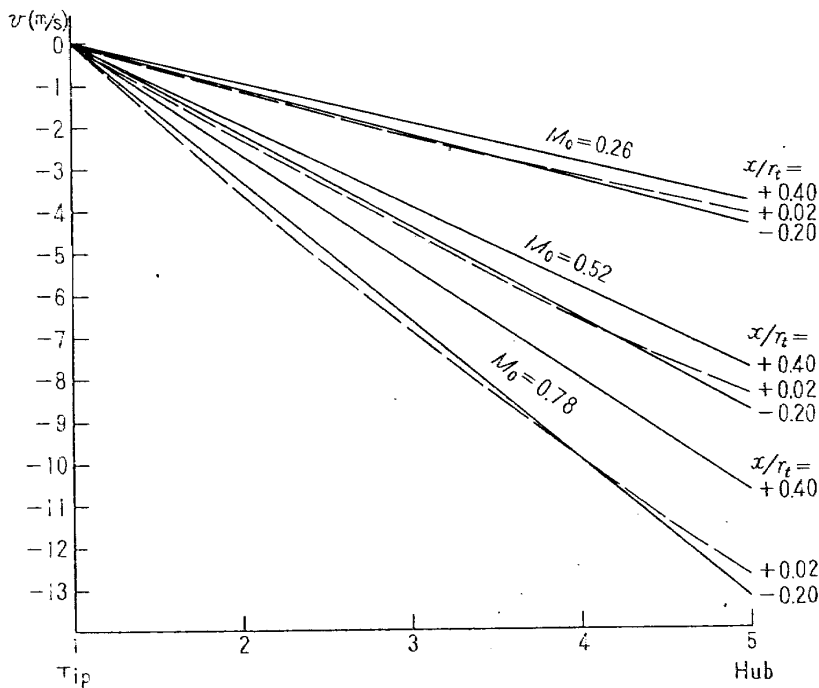


図 15 広がり流れ ($\tan \theta = -0.05$)

次に (43) 式によって半径速度 v を計算したのが図 14 および図 15 である。いずれのときも作動円盤通過直後を表わす $x/r_t=0.02$ ではマッハ数が大きいほどその強い放物線になっているが、このことは v の値は S に比例し軸速のようにその微係数には全く関係しないため、高マッハ数になるほど S の絶対値が大きくなった図 11 の結果に起因している。

5. あ と が き

傾斜のある流路を通過する円周方向速度のない圧縮性流体を取り扱った。傾斜および Shear の度合が著しくない場合限定すると、速度および密度は小擾乱を受けるとみなせるから問題を線型化でき、さらに単一パラメータ S を導入することによって平均半径の近傍で近似的に成立する線型常微分方程式を導いた。この微分方程式の数値解には電子計算機 (HIPAC 103) を用いた。

計算した数値例については、せばまり流れではマッハ数が高いほど上、下流とも半径速度や軸流速度の分布度合が大きくなるが、広がり流れではマッハ数の増加につれて上、下流とも半径速度は大きくなるが、軸流速度の分布度合は下流では逆に小さくなる結果を得た。

誘導した方程式を円筒流れの場合に還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、減衰係数のほかは完全に一致した。減衰係数は本理論のほうがベッセル関数を用いる方法に比べて約 10% 小さい。

文 献

- 1) S.L. Bragg and W.R. Hawthorne; Some Exact Solutions of the Flow Through Annular Cascade Actuator Discs, J. Aero. Sci., (1950/4) pp. 243-249.
- 2) F.E. Marble; The Flow of a Perfect Fluid Through an Axial Turbomachine with Prescribed Blade Loading, J. Aero. Sci. (1948/8) pp. 473-485.
- 3) J.H. Horlock; Some Actuator-Disc Theories for the Flow of Air Through an Axial Turbo-Machine, R. & M. No. 3030, (1952/12)
- 4) D.S. Whitehead and G.S. Beavers; A Single-Parameter Theory of Vortex Flow in Turbo-Machines, R. & M. 3335, (1961/8)
- 5) W.T. Howell; Approximate Three-Dimensional Flow Theory for Axial Turbo-Machines, Aero. Quarterly, Vol. 14, Part 2, (1963/5) pp. 125-142.
- 6) J.H. Horlock; The Compressible Flow Through Cascade Actuator Discs, Aero. Quarterly. (1958/5) pp. 110-130.
- 7) J.H. Horlock and R.I. Lewis; Shear Flows in Straight-Sided Nozzles and Diffusers, Int. J. Mech. Sci. Vol. 2. (1961/4) pp. 251-266.
- 8) R.I. Lewis and J.H. Horlock; Non-Uniform Three-Dimensional and Swirling Flows Through Diverging Ducts and Turbo-Machines, Int. J. Mech. Sci., Vol. 3. (1961/11) pp. 170-196.
- 9) R.I. Lewis; A Theoretical Investigation of The Rotational Flow of Incompressible Fluids Through Axial Turbo-Machines with Tapered Annulus Walls, Int. J. Mech. Sci. Vol. 6. (1964) pp. 51-75.
- 10) C. Seippel; Three-Dimensional Flow in Multi-Stage Turbines, The Brown Boveri Review, Vol. 45,

No. 3. (1958/3)

- 11) L. Fox; The Numerical Solution of Two-Point Boundary Problems in Ordinary Differential Equations, Oxford 1957, pp. 67-105. pp. 328-332.
- 12) Von L. Crocco; Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation, ZAMM, Band 17, Heft 1, (1937/2) Seite 1-7.
- 13) J.L. Livesey and J.T. Turner; The generation of symmetrical duct velocity profiles of high uniform shear, J. Fluid Mech. (1964), Vol. 20, Part 2, pp. 201-208

<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>	<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>
<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>	<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>
<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>	<p>NAL TR-97 航空宇宙技術研究所 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) 一軸対称流れ一</p> <p>1965年12月 27ページ</p> <p>二重円筒の境界をもつ軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Actuator Disk Theories) は、多くの研究者によってほぼ確立された観を呈している。さらに、傾斜する流路を境界とする非圧縮性流体の場合も二三の研究がある。したがって、この研究は傾斜があるターボ機械の流路を圧縮流体が通過する場合を取り扱ったものであり、その第1報として円周方向速度のない Shear Flow を考えた。傾斜および Shear の度合が著しくないときに限定して問題を線型化し、かつ二三の数値例を計算した。また、誘導した方程式を円筒流れに還元すると従来の作動円盤理論の式と形式上、一致した。</p>	<p>I. 藤井昭一 II. NAL TR-97 III. 621.63</p>

TR-90	ヒステリシスループの形, 繰返しによる形の変化および繰返し後の塑性流動応力の上昇 (第1報 実験, 第2報 ねじりの場合の理論) The Shape of Mechanical Hysteresis Loop, its deformation due to Stress Repetition and Resulting Increase in Flow Stress (Part 1. Experiment, Part 2. Theory for Torsion)	1965年7月	中西不二夫, 佐藤和郎 永井文雄
TR-91	固体プロペラントの割れ目内への火炎伝ば (I) Flame Propagation into the Gap of Solid Propellant Grain (I)	1965年7月	五代富文
TR-92	ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (I) —Linearized Flow with Axial Symmetry—	1965年8月	谷 喬
TR-93	遷音速動安定試験 Dynamic Testing at Transonic Speed	1965年10月	小橋安次郎, 河野長正 西 武徳
TR-94	翼幅方向に一様な揚力分布をもつ半無限の後退翼 On the Camber Lines of Semi-Infinite Sweptback Wings which give Uniform Spanwise Load Distribution	1965年10月	河崎俊夫
TR-95	飛行機の縦の操縦特性に関する二三の考察 A Few Comments on the Longitudinal Handling Qualities of Airplanes	1965年11月	荒木 浩
TR-96T	A Generalized Functional Formalism for Turbulence	Dec. 1965	Iwao HOSOKAWA

航空宇宙技術研究所報告97号

昭和40年12月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1,880 電話武蔵野三鷹(0422) 44-9171(代表)
印刷所	笠井出版印刷社 東京都港区西新橋1の21の8
