

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-100

回転翼の線型理論 (III)

—揚力線の方程式の解法—

市川輝雄

1966年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

回転翼の線型理論* (III)

— 揚力線の方程式の解法 —

市川輝雄**

Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (III)

— Method for Solving Lifting-Line Equations —

By Teruo ICHIKAWA

A method for solving lifting-line integral equations of the rotor blade which have been derived in the previous report is presented. Singularities of the kernels are investigated and the kernels are divided into singular and non-singular parts. By applying a collocation technique, the integral equations are reduced to sets of linear simultaneous algebraic equations.

Some numerical computations are carried out for hovering and forward flight cases and are compared with experimental values published by NACA.

まえがき

前報²で導いた回転翼の揚力線の方程式の解法を述べ、数値計算例を示す。揚力線の方程式を数値計算に適した形に整理し、核の特異部分を分離することが出発点となる。数値解法は固定翼の揚力線理論に対する Multhopp の方法を基調とする。

前報および前々報¹⁾の境界条件の議論には若干の不備な点があるので本報で再論する。

記号については本報で新たに導入するものは少い。断わりなく用いる記号はすべて前報、前々報の意味と同じである。

1. 方程式の無次元化と核の特異部分の分離

ブレードの半翼幅

$$l = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad (1.1)$$

なる量を導入し、これを基準として半径方向の座標を無次元化しておく、後になってこれらを角

* 昭和 41 年 2 月 7 日受付

** 機体第二部

変数の余弦で表わすときにつごうがよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} x &= r/l \\ x' &= r'/l \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

これに伴い、さらに次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= r_1/l \\ y_2 &= r_2/l \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\eta = h/l \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^* &= \Gamma_0/\Omega l^2 \\ G_p^* &= G_p/\Omega l^2 \\ \Delta^* &= \Delta/\Omega l^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

これらの無次元量と (II.4.12)* とを使って揚力線の方程式を次のように整理することができる。

すなわち循環の方程式 (II.2.20) は

$$\begin{aligned} \frac{w_n(x, \psi)}{\Omega l} &= \frac{l}{\pi c} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p^*(x) e^{ip\psi} - \frac{\sqrt{E_0}}{4\pi H_0} \oint_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x'-x} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{y_1}^{y_2} K_1(x, \psi; x') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' + \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{y_1}^{y_2} K_2(x, \psi; x', p) \frac{dG_p^*}{dx'} dx' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{y_1}^{y_2} K_3(x, \psi; x', p) G_p^*(x') dx' \end{aligned} \quad (1.6)$$

循環モーメントの方程式 (II.2.36) は

$$\begin{aligned} \frac{l}{\pi c} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_1(k_p) G_p^*(x) e^{ip\psi} - \frac{1}{8\pi} \oint_{y_1}^{y_2} K_1(x, \psi; x') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' \\ = \frac{H_0}{2\pi c} \oint_{y_1}^{y_2} K_1(x, \psi; x') \frac{\partial \Delta^*}{\partial x'} dx' \end{aligned} \quad (1.7)$$

ここに

$$K_1(x, \psi; x') = -\frac{2l}{c} \frac{\sqrt{(E_0/l^2)b^2 - 2(F_0/l)b \cdot (x'-x) + (x'-x)^2}}{x'-x} \quad (1.8)$$

$$K_2 = K_2^{(1)} + K_2^{(2)} \quad (1.9)$$

$$K_2^{(1)}(x, \psi; x', p) = \frac{l}{H_0} \left(\frac{\sqrt{E_0}/l}{x'-x} - \frac{F_0/l}{|x'-x|} + 2 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\psi} \frac{2m\pi}{N} \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^8} e^{-i\psi\lambda} d\lambda \right) \quad (1.10)$$

$$K_2^{(2)}(x, \psi; x', p) = \frac{i p l}{H_0} \int_0^{+\infty} \left(\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} + \frac{x'-x}{|x'-x|} \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-i\psi\lambda} d\lambda \quad (1.11)$$

$$K_3 = K_3^{(1)} + K_3^{(2)} \quad (1.12)$$

* 文献 (1) および (2) の式を引用するときは式番号の前にそれぞれ I および II を冠して書くことにする。

$$K_3^{(1)}(x, \psi; x', p) = - \frac{l x (x + \eta \sin \chi \sin \psi)}{2 H_0} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{e^{-ip \frac{2m\pi}{N}} \sin \frac{2m\pi}{N}}{\left(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \frac{2m\pi}{N}\right)^{3/2}} \quad (1.13)$$

$$K_3^{(2)}(x, \psi; x', p) = - \frac{ip l}{H_0} \sum_{m=1}^{N-1} e^{-ip \frac{2m\pi}{N}} \int_0^{+\infty} \frac{l G_2}{R_1^3} e^{-ip \lambda} d\lambda \quad (1.14)$$

(1.6) は未知関数として $\Gamma^*(x', \psi)$ と $G_p^*(x')$ とを含むが, (II.1.27) あるいは

$$\Gamma^*(x', \psi) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_p^*(x') e^{ip\psi} \quad (1.15)$$

によって Γ^* を G_p^* で表わせば, G_p^* に関する微積分方程式とみなされる。あるいは

$$G_p^*(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma^*(x', \psi') e^{-ip\psi'} d\psi' \quad (1.16)$$

によって G_p を Γ^* で表わすこともできる。

(1.7) においては未知関数は Δ^* であって, 左辺はこの場合既知関数 (じょう乱関数) とみなされる。

(1.6) の右辺第 2 項の積分は固定翼の揚力線理論に現われるものと同じ形で, 被積分関数は $x' = x$ で無限大となる。このほか核 K_1 と K_2 も同じ点の特異点となる。核 K_3 は基準ブレード以外のブレードあるいはその後流上の渦のみに関係するから, 物理的な考察によっても明らかなように特異点をもたない。

特異点をもつ核はその特異点付近の性質がわかれば, 特異部分を分離して残りの部分には特異点がないようにすることができる。特異部分を添字 S , 非特異部分を添字 NS で表わし

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= K_{1S} + K_{1NS} \\ K_2^{(1)} &= K_{2S}^{(1)} + K_{2NS}^{(1)} \\ K_2^{(2)} &= K_{2S}^{(2)} + K_{2NS}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

と書くと, K_1 の特異点は (1.8) から明らかに 1 位の極で

$$K_{1S} = - \frac{\sqrt{E_0}}{H_0} \frac{1}{x' - x} \quad (1.18)$$

とすることができる。 K_2 の特異部分は付録 A によって

$$K_{2S}^{(1)} = C_1(x, \psi) \log |x' - x| + [C_2(x, \psi) + ip C_3(x, \psi)] \frac{x' - x}{|x' - x|} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} K_{2S}^{(2)} &= ip C_5(x, \psi) \frac{x' - x}{|x' - x|} \log |x' - x| + ip C_6(x, \psi) \log |x' - x| \\ &+ [p C_4(x, \psi) + ip C_7(x, \psi) + ip \log |p| C_8(x, \psi)] \frac{x' - x}{|x' - x|} \end{aligned} \quad (1.20)$$

の形となる。ここに

$$\begin{aligned}
C_1(x, \psi) &= \frac{l^2 x H_0}{8 E_0^{3/2}} \\
C_2(x, \psi) &= -\frac{l}{4H_0} \left[\frac{lF_0}{H_0^2} (x + \eta \sin \chi \sin \psi) - \frac{lx F_0}{2E_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{lx H_0^2}{4E_0^{3/2}} \log \left| \frac{\sqrt{E_0} + F_0}{\sqrt{E_0} - F_0} \right| \right] \\
C_3(x, \psi) &= \frac{l}{2H_0} \\
C_4(x, \psi) &= \frac{\pi l}{4H_0} \\
C_5(x, \psi) &= -\frac{l}{2H_0} \\
C_6(x, \psi) &= \frac{l F_0}{2\sqrt{E_0} H_0} \\
C_7(x, \psi) &= \frac{l}{2H_0} \left[\log \left(\frac{H_0}{l} \right) + \frac{F_0}{2\sqrt{E_0}} \log \left| \frac{\sqrt{E_0} + F_0}{\sqrt{E_0} - F_0} \right| - \gamma \right] \\
C_8(x, \psi) &= -\frac{l}{2H_0}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

で, $C_7(x, \psi)$ における γ はオイラーの常数 (=0.57722) である。

非特異部分 K_{1NS} , $K_{2NS}^{(1)}$, $K_{2NS}^{(2)}$ はそれぞれ (1.8), (1.10), (1.11) で与えられる K_1 , $K_2^{(1)}$, $K_2^{(2)}$ と, それらの特異部分との差の形で与えられる。ただし(1.11)においては付録 A・2 に述べるように積分の上限 $+\infty$ を十分大きい正数 M で置き換える。

(1.17) から (1.20) までを (1.6) に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{w_n(x, \psi)}{\Omega l} &= \frac{l}{\pi c} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p^*(x) e^{ip\psi} - \frac{\sqrt{E_0}}{2\pi H_0} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x'-x} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} \partial x' \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} K_{1NS}(x, \psi; x') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' + \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} K_{2NS}(x, \psi; x', p) \frac{dG_p^*}{dx'} dx' \right. \\
&\quad + (C_1 + ipC_8) \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \log|x'-x| dx' + ipC_5 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \frac{x'-x}{|x'-x|} \log|x'-x| dx' \\
&\quad \left. + [C_2 + |p|C_4 + ip(C_3 + C_7) + ip \log |p|C_8] \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \frac{x'-x}{|x'-x|} dx' \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\psi} \int_{y_1}^{y_2} K_3(x, \psi; x', p) G_p^*(x') dx'
\end{aligned} \tag{1.22}$$

ここに

$$K_{2NS} = K_{2NS}^{(1)} + K_{2NS}^{(2)} \tag{1.23}$$

である。また (1.7) は

$$\begin{aligned}
 & \frac{l}{\pi c} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_1(k_p) G_p^*(x) e^{ip\phi} - \frac{1}{8\pi} \int_{y_1}^{y_2} K_{1NS}(x, \psi; x') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' \\
 & + \frac{\sqrt{E_0}}{8\pi I I_0} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x' - x} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' \\
 & = \frac{H_0}{2\pi c} \int_{y_1}^{y_2} K_{1NS}(x, \psi; x') \frac{\partial \Delta^*}{\partial x'} dx' - \frac{\sqrt{E_0}}{2\pi c} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x' - x} \frac{\partial \Delta^*}{\partial x'} dx' \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

となる。

2. 数 値 解 法

以上によって循環および循環モーメントの方程式は数値的に解きうる形となった。未知関数を含む半径方向の積分は、固定翼の場合の Multhopp の方法³⁾にならって、代表座標点における未知関数の値の1次結合で近似する。また $G_p^* e^{ip\phi}$ を含む p による和は、やはり代表方位角における Γ^* の値の1次結合で近似する。かくして循環および循環モーメントの方程式は、それぞれ代表座標点と代表方位角の個数の積および代表座標点の個数だけの元をもつ連立1次代数方程式となる。

2.1 循環の方程式——半径方向の積分

$$\left. \begin{aligned}
 x &= y_0 + \cos \phi & (0 \leq \phi \leq \pi) \\
 x' &= y_0 + \cos \phi' & (0 \leq \phi' \leq \pi)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

なる変数変換を行なう。ここに

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (2.2)$$

(1) (1.22) の第2項の積分は

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x' - x} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \phi' - \cos \phi} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial \phi'} d\phi' \quad (2.3)$$

Γ^* に付録 B で導出する Multhopp の補間公式 (B.16) を適用すると

$$\Gamma^*(\phi') = \frac{2}{K+1} \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \sum_{k=1}^K \sin k \phi_j \sin k \phi' \quad (2.4)$$

ここに

$$\phi_j = \frac{j\pi}{K+1} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial \phi'} = \frac{2}{K+1} \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \sum_{k=1}^K k \sin k \phi_j \cos k \phi' \quad (2.6)$$

Glauert の積分

$$\int_0^\pi \frac{\cos k \phi'}{\cos \phi' - \cos \phi} d\phi' = \frac{\pi \sin k \phi}{\sin \phi} \quad (2.7)$$

を用いると

$$I_1(\phi) = \frac{1}{K+1} \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \sum_{k=1}^K \frac{k \sin k\phi_j \sin k\phi}{\sin \phi} \quad (2.8)$$

を得る。

$$\phi_i = \frac{i\pi}{K+1} \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (2.9)$$

とし、 $\phi = \phi_i$ における値のみを考える。

$$a_{ij} = \frac{1}{(K+1) \sin \phi_i} \sum_{k=1}^K k \sin k\phi_j \sin k\phi_i \quad (2.10)$$

と置くと

$$I_1(\phi_i) = \sum_{j=1}^K a_{ij} \Gamma^*(\phi_j) \quad (2.11)$$

(2)

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \log |x' - x| dx' = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{dG_p^*}{d\phi'} \log |\cos \phi' - \cos \phi| d\phi' \quad (2.12)$$

G_p^* は複素数値をとるが、(1.16) からその $x' = x_1$ および $x' = x_2$ における値は Γ^* と同じく零となることがわかる。したがって G_p^* にも Multhopp の補間公式が適用できて

$$I_2(\phi) = -\frac{1}{2\pi(K+1)} \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \sum_{k=1}^K k \sin k\phi_j \int_0^\pi (\cos k\phi') \log |\cos \phi' - \cos \phi| d\phi' \quad (2.13)$$

右辺の積分は部分積分して (2.7) を用いると

$$\int_0^\pi (\cos k\phi') \log |\cos \phi' - \cos \phi| d\phi' = -\frac{\pi}{k} \cos k\phi \quad (2.14)$$

なることが証明されるから

$$b_{ij} = \frac{1}{2(K+1)} \sum_{k=1}^K \sin k\phi_j \cos k\phi_i \quad (2.15)$$

と置くと

$$I_2(\phi_i) = \sum_{j=1}^K b_{ij} G_p^*(\phi_j) \quad (2.16)$$

(3)

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \frac{x' - x}{|x' - x|} \log |x' - x| dx' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{dG_p^*}{d\phi'} \frac{\cos \phi' - \cos \phi}{|\cos \phi' - \cos \phi|} \log |\cos \phi' - \cos \phi| d\phi' \end{aligned} \quad (2.17)$$

G_p^* に Multhopp の補間公式を適用して

$$I_3(\phi) = -\frac{1}{2\pi(K+1)} \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \sum_{k=1}^K k \sin k\phi_j \int_0^\pi (\cos k\phi') \frac{\cos \phi' - \cos \phi}{|\cos \phi' - \cos \phi|} \log |\cos \phi' - \cos \phi| d\phi' \quad (2.18)$$

右辺の積分は固定翼の非定常理論において Cicala の関数を含む積分に関連して求められている⁴⁾。すなわち

$$f_k(\phi) = \int_0^\pi \frac{\cos \phi' - \cos \phi}{|\cos \phi' - \cos \phi|} (\log |\cos \phi' - \cos \phi|) \cos k\phi' d\phi' \quad (2.19)$$

と置き、文献 (4) とはやや異なった表現をすると

$$f_k(\phi) = \frac{2}{k} \left\{ [2 \log |\sin \phi| + \log 2 - 1] \sin k\phi - \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \cos k\phi \right\} + g_k(\phi) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.20)$$

で表わされ、ここに $g_k(\phi)$ は初期条件

$$\left. \begin{aligned} g_1(\phi) &= 0 \\ g_2(\phi) &= -\frac{\sin 2\phi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

と、漸化式

$$\begin{aligned} &(k-1)g_{k-1}(\phi) - 2k \cos \phi g_k(\phi) + (k+1)g_{k+1}(\phi) \\ &= 2 \left[\frac{\sin(k-1)\phi}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\phi}{k+1} \right] \quad (k=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.22)$$

によって求められる。

$$c_{ij} = -\frac{1}{2\pi(K+1)} \sum_{k=1}^K k f_k(\phi_i) \sin k\phi_j \quad (2.23)$$

と置くと

$$I_3(\phi_i) = \sum_{j=1}^K c_{ij} G_p^*(\phi_j) \quad (2.24)$$

で表わされる。

(4)

$$I_4 = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} \frac{x' - x}{|x' - x|} dx' = -\frac{1}{2\pi} G_p^*(x) \quad (2.25)$$

あるいは

$$I_4(\phi_i) = -\frac{1}{2\pi} G_p^*(\phi_i) \quad (2.26)$$

(5)

$$I_5 = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} K_{1NS}(x, \psi; x') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x'} dx' = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi K_{1NS}(\phi, \psi; \phi') \frac{\partial \Gamma^*}{\partial \phi'} d\phi' \quad (2.27)$$

K_{1NS} に付録 B の Tchebysheff の補間公式 (B.11) を適用すると

$$K_{1NS}(\phi, \psi; \phi') = \frac{2}{K+1} \sum_{j=1}^{K+1} K_{1NS}(\phi, \psi; \phi_j) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^K \cos k\phi_j \cos k\phi \right) \quad (2.28)$$

ここに

$$\phi_j = \frac{(2j-1)\pi}{2(K+1)} \quad (2.29)$$

Γ^* には Multihopp の補間公式を適用し, 三角関数の積の積分に関する直交関係を用いると

$$I_5(\phi) = -\frac{1}{2(K+1)^2} \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \sum_{J=1}^{K+1} K_{1NS}(\phi, \psi; \phi_J) \sum_{k=1}^K k \sin k\phi_j \cos k\phi_J \quad (2.30)$$

$$d_{jJ} = -\frac{1}{2(K+1)^2} \sum_{k=1}^K k \sin k\phi_j \cos k\phi_J \quad (2.31)$$

と置くと

$$I_5(\phi_i) = \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \sum_{J=1}^{K+1} d_{jJ} K_{1NS}(\phi_i, \psi; \phi_J) \quad (2.32)$$

(6)

$$I_6 = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} K_{2NS}(x, \psi; x', p) \frac{dG_p^*}{dx'} dx' = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi K_{2NS}(\phi, \psi; \phi', p) \frac{dG_p^*}{d\phi'} d\phi' \quad (2.33)$$

I_5 と全く同様にして

$$I_6(\phi_i) = \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \sum_{J=1}^{K+1} d_{jJ} K_{2NS}(\phi_i, \psi; \phi_J, p) \quad (2.34)$$

(7)

$$I_7 = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} K_3(x, \psi; x', p) G_p^*(x') dx' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi K_3(\phi, \psi; \phi', p) G_p^*(\phi') \sin \phi' d\phi' \quad (2.35)$$

K_3 に Tchebysheff の補間公式, G_p^* に Multihopp の補間公式を適用し, 三角関数の積の積分に関する直交関係を用いると

$$I_7(\phi) = \frac{1}{4(K+1)^2} \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \sum_{J=1}^{K+1} K_3(\phi, \psi; \phi_J, p) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos k\phi_j \cos k\phi_J \right) \sin \phi_j \quad (2.36)$$

$$e_{jJ} = \frac{\sin \phi_j}{4(K+1)^2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos k\phi_j \cos k\phi_J \right) \quad (2.37)$$

と置くと

$$I_7(\phi_i) = \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \sum_{J=1}^{K+1} e_{jJ} K_3(\phi_i, \psi; \phi_J, p) \quad (3.38)$$

(8) 以上によって循環の方程式 (1.22) の右辺は ϕ_i なる座標点において

$$\begin{aligned} (1.22) \text{ の右辺} &= \frac{l}{\pi c} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A(k_p) G_p^*(\phi_i) e^{ip\phi} + \frac{\sqrt{E_0}}{H_0} I_1(\phi_i) + I_5(\phi_i) \\ &+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \{ I_6(\phi_i) + (C_1 + ipC_6) I_2(\phi_i) + ipC_5 I_3(\phi_i) \\ &+ [C_2 + ip(C_3 + C_7)] + |p|C_4 + ip \log |p|C_8 \} I_4(\phi_i) \} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} I_7(\phi_i) \\ &= -\frac{C_2}{2\pi} \Gamma^*(\phi_i) + \sum_{j=1}^K \Gamma^*(\phi_j) \left\{ \frac{\sqrt{E_0}}{H_0} a_{ij} + C_1 b_{ij} + \sum_{J=1}^{K+1} d_{jJ} K_{1NS}(\phi_i, \psi; \phi_J) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_p^*(\phi_i) e^{ip\phi} \left\{ \frac{l}{\pi c} A(k_p) - \frac{1}{2\pi} [ip(C_3 + C_7) + |p|C_4 + ip \log |p|C_8] \right\} \\
 & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\phi} \sum_{j=1}^K G_p^*(\phi_j) \left\{ ip(C_6 b_{ij} + C_5 c_{ij}) \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{K+1} [d_{jj} K_{2Ns}(\phi_i, \psi; \phi_j, p) + e_{jj} K_3(\phi_i, \psi; \phi_j, p)] \right\} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

となる。係数 a_{ij} , b_{ij} , d_{jj} , e_{jj} の値は付録 C に与える式で計算される。

2.2 循環の方程式—— p による和

(1.15) の無限級数を有限項の級数

$$\Gamma^*(x', \psi) \doteq \sum_{p=-P}^P G_p^*(x') e^{ip\psi} \quad (2.40)$$

で近似する。このとき循環の方程式における p による和は同じ有限項の和となる。(2.40) において G_p^* を

$$G_p^*(x') = \frac{1}{2Q} \sum'_{q=-Q}^Q \Gamma^*(x', \psi_q) e^{-ip\psi_q} \quad (2.41)$$

で定めると、(2.40) は (1.15) の最小 2 乗近似を与える⁶⁾。ここに

$$\left. \begin{aligned} \psi_q &= \frac{q\pi}{Q} \\ Q &\geq P \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

で、 \sum' は $q = \pm Q$ において $1/2$ の重みを加えた和を表わす。 $P = Q$ に選ぶと、代表方位角 ψ_q において (2.40) は (1.15) と一致する。(2.41) はまた

$$G_p^*(x') = \frac{1}{2Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(x', \psi_q) e^{-ip\psi_q} \quad (2.43)$$

と書くことができる。

(1)

$$S_1(\psi) = \sum_{p=-P}^P G_p^*(\phi_i) e^{ip\psi} A(k_p) \quad (2.44)$$

(2.43) を適用し、代表方位角

$$\psi_r = \frac{r\pi}{Q} \quad (r=0, 1, 2, \dots, 2Q-1) \quad (2.45)$$

における値のみを考えると

$$S_1(\psi_r) = \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=-P}^P A(k_p) e^{ip(\psi_r - \psi_q)} \quad (2.46)$$

(II.2.13) によって

$$k_{-p} = -k_p \quad (2.47)$$

(II.2.17) から

$$A(-k_p) = \bar{A}(k_p) \quad (2.48)$$

であることが示される。ここに \bar{A} は A と共役な複素数値の関数を表わす。さらに (II.2.18) を参照すると

$$S_1(\psi_r) = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=1}^P [A'(k_p) \cos p(\psi_r - \psi_q) - A''(k_p) \sin p(\psi_r - \psi_q)] \quad (2.49)$$

ここに A' および A'' は A の実部および虚部を表わす。

(2)

$$S_2(\psi) = \sum_{p=-P}^P ip G_p^*(\phi_i) e^{ip\psi} = \frac{1}{2Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=-P}^P ip e^{ip(\psi - \psi_q)} \quad (2.50)$$

$$p_{rq} = \frac{1}{2Q} \sum_{p=-P}^P ip e^{ip(\psi_r - \psi_q)} \quad (2.51)$$

と置くと

$$S_2(\psi_r) = \sum_{q=0}^{2Q-1} p_{rq} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \quad (2.52)$$

(3)

$$S_3(\psi) = \sum_{p=-P}^P |p| G_p^*(\phi_i) e^{ip\psi} = \frac{1}{2Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=-P}^P |p| e^{ip(\psi - \psi_q)} \quad (2.53)$$

$$s_{rq} = \frac{1}{2Q} \sum_{p=-P}^P |p| e^{ip(\psi_r - \psi_q)} \quad (2.54)$$

と置くと

$$S_3(\psi_r) = \sum_{q=0}^{2Q-1} s_{rq} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \quad (2.55)$$

(4)

$$S_4(\psi) = \sum_{p=-P}^P ip(\log |p|) G_p^*(\phi_i) e^{ip\psi} = \frac{1}{2Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=-P}^P ip(\log |p|) e^{ip(\psi - \psi_q)} \quad (2.56)$$

$$t_{rq} = \frac{1}{2Q} \sum_{p=-P}^P ip(\log |p|) e^{ip(\psi_r - \psi_q)} \quad (2.57)$$

と置くと

$$S_4(\psi_r) = \sum_{q=0}^{2Q-1} t_{rq} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \quad (2.58)$$

$P=Q$ のとき

$$t_{rq} = -\frac{1}{P} \sum_{p=2}^{P-1} p(\log p) \sin \frac{p(r-q)\pi}{P} \quad (2.59)$$

と書くことができる。

(5)

$$S_5(\psi) = \sum_{p=-P}^P e^{ip\psi} \sum_{j=1}^K G_j^*(\phi_j) \sum_{j=1}^{K+1} [d_{jJ} K_{2NS}(\phi_i, \psi; \phi_J, p) + e_{jJ} K_3(\phi_i, \psi; \phi_J, p)]$$

$$= \frac{1}{2Q} \sum_{j=1}^K \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_j, \psi_q) \sum_{p=-P}^P e^{ip(\phi-\phi_q)} \sum_{J=1}^{K+1} [d_{jJ} K_{2NS}(\phi_i, \psi; \phi_J, p) + e_{jJ} K_3(\phi_i, \psi; \phi_J, p)] \quad (2.60)$$

(1.10)–(1.14), (1.19), (1.20) を参照して

$$\left. \begin{aligned} K_{2NS}(x, \psi; x', -p) &= \overline{K_{2NS}(x, \psi; x', p)} \\ K_3(x, \psi; x', -p) &= \overline{K_3(x, \psi; x', p)} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

なることがわかる。ここに $\overline{K_{2NS}}$, $\overline{K_3}$ は K_{2NS} , K_3 の共役複素数値を表わす。また

$$\left. \begin{aligned} K_{2NS}^{(2)}(x, \psi; x', p=0) &= 0 \\ K_3^{(2)}(x, \psi; x', p=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

なることは直ちにわかる。前報²⁾の 5.1 節の議論を参照すると

$$K_3^{(1)}(x, \psi; x', p=0) = 0 \quad (2.63)$$

なることもわかる。 K_{2NS} 等の実部および虚部をそれぞれ $\text{Re } K_{2NS}$ および $\text{Im } K_{2NS}$ 等で表わすと

$$\begin{aligned} S_5(\psi_r) &= \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^K \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_j, \psi_q) \sum_{J=1}^{K+1} \left\{ \frac{1}{2} d_{jJ} K_{2NS}^{(1)}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p=0) \right. \\ &\quad + \sum_{p=1}^P \left\langle [d_{jJ} \text{Re } K_{2NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p) + e_{jJ} \text{Re } K_3(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p)] \cos p(\psi_r - \psi_q) \right. \\ &\quad \left. \left. - [d_{jJ} \text{Im } K_{2NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p) + e_{jJ} \text{Im } K_3(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p)] \sin p(\psi_r - \psi_q) \right\rangle \right\} \quad (2.64) \end{aligned}$$

2.3 揚力線の連立 1 次方程式

以上によって循環の方程式 (1.22) は連立 1 次代数方程式

$$\begin{aligned} W_{ir} &= \sum_{j=1}^K \sum_{q=0}^{2Q-1} (\delta_{ij} \delta_{rq} A_{ir} + \delta_{rj} B_{ijr} + \delta_{ij} C_{irq} + D_{ijrq}) \Gamma^*(\phi_j, \psi_q) \quad (2.65) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, K; r=0, 1, 2, \dots, 2Q-1) \end{aligned}$$

となる。ここに

$$W_{ir} = \frac{w_n(\phi_i, \psi_r)}{Ql} \quad (2.26)$$

$$A_{ir} = -\frac{C_2(\phi_i, \psi_r)}{2\pi} \quad (2.67)$$

$$B_{ijr} = a_{ij} \frac{\sqrt{E_0(\phi_i, \psi_r)}}{H_0(\phi_i, \psi_r)} + b_{ij} C_1(\phi_i, \psi_r) + \sum_{J=1}^{K+1} d_{jJ} K_{1NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J) \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} C_{irq} &= \frac{l}{Q\pi c(\phi_i)} \sum_{p=1}^P [A'(k_p) \cos p(\psi_r - \psi_q) - A''(k_p) \sin p(\psi_r - \psi_q)] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \{p_{rq} [C_3(\phi_i, \psi_r) + C_7(\phi_i, \psi_r)] + s_{rq} C_4(\phi_i, \psi_r) + t_{rq} C_8(\phi_i, \psi_r)\} \quad (2.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ijrq} &= p_{rq} [b_{ij} C_6(\phi_i, \psi_r) + c_{ij} C_5(\phi_i, \psi_r)] \\ &\quad + \frac{1}{Q} \sum_{J=1}^{K+1} \left\{ \frac{1}{2} d_{iJ} K_{2NS}^{(1)}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p=0) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{p=1}^P \left\langle [d_{jJ} \operatorname{Re} K_{2NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p) + e_{jJ} \operatorname{Re} K_3(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p)] \cos p(\psi_r - \psi_q) - [d_{jJ} \operatorname{Im} K_{2NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p) + e_{jJ} \operatorname{Im} K_3(\phi_i, \psi_r; \phi_J, p)] \sin p(\psi_r - \psi_q) \right\rangle \quad (2.70)$$

δ_{ij} , δ_{r_q} は Kronecker の記号である。なお (2.69) における k_p の値は

$$k_p = \frac{pc(\phi_i)}{4H_0(\phi_i, \psi_r)} \quad (2.71)$$

によって与えられる。

同様に循環モーメントの方程式 (1.24) は $2Q$ 組の連立1次方程式

$$F_{ir} = \sum_{j=1}^K E_{ijr} \Delta^*(\phi_j, \psi_r) \quad (i=1, 2, \dots, K; r=0, 1, 2, \dots, 2Q-1) \quad (2.72)$$

となる。ここに

$$E_{ijr} = a_{ij} \frac{\sqrt{E_0(\phi_i, \psi_r)}}{2H_0(\phi_i, \psi_r)} + \sum_{j=1}^{K+1} d_{jJ} K_{1NS}(\phi_i, \psi_r; \phi_J) \quad (2.73)$$

$$F_{ir} = - \frac{c(\phi_i)}{4H_0(\phi_i, \psi_r)} \sum_{j=1}^K E_{ijr} \Gamma^*(\phi_j, \psi_r) + \frac{l}{2Q\pi H_0(\phi_i, \psi_r)} \sum_{q=0}^{2Q-1} \Gamma^*(\phi_i, \psi_q) \sum_{p=1}^P [B_1'(k_p) \cos p(\psi_r - \psi_q) - B_1''(k_p) \sin p(\psi_r - \psi_q)] \quad (2.74)$$

(2.74) において B_1' および B_1'' はそれぞれ B_1 の実部および虚部を表わす。 k_p の値は (2.71) で与えられる。 Γ^* の値は (2.65) の解として求められるから F_{ir} は既知量である。(2.72) は ψ_r の各々の値に対して別々に解かれる。かくして Γ^* と Δ^* とを求めたならば、単位翼幅の揚力は (II.4.7) によって得られる。この場合 Γ^* , Δ^* は discrete な点においてのみ与えられるから、 ψ による微分は数値微分公式によって求める必要がある。(2.65) の左辺の値は付録 F の (F.22) で与えられる。 $A'(k_p)$, $A''(k_p)$, $B_1'(k_p)$, $B_1''(k_p)$ の値は付録 E に掲げる。

2.4 準定常の場合

循環の連立1次方程式 (2.65) がすべての代表方位角における循環の値を同時に未知数として含むのは、循環の方位角による変化の過去の歴史が後流の渦の中に保存されていて、これが現在の循環の値に影響するからである。もし近似的に過去における循環を現在の値と等しいと仮定して解いてよいとすれば、(2.65) は個々の方位角ごとに別々に解けることになり、問題は著しく単純化される。これが準定常の仮定である。

(2.65) において

$$\Gamma^*(\phi_j, \psi_q) = \Gamma^*(\phi_j, \psi_r)$$

と置き、 p のとる値の範囲内で

$$\sum_{q=0}^{2Q-1} \sin p(\psi_r - \psi_q) = \sum_{q=0}^{2Q-1} \cos p(\psi_r - \psi_q) = \sum_{q=0}^{2Q-1} p_{r,q} = \sum_{q=0}^{2Q-1} s_{r,q} = \sum_{q=0}^{2Q-1} t_{r,q} = 0 \quad (2.75)$$

となることを考慮すると、準定常の循環の連立1次方程式

$$W_{ir} = \sum_{j=1}^K \left[\delta_{ij} A_{ir} + B_{ijr} + \sum_{j=1}^{K+1} d_{jj} K_{2NS}^{(1)}(\phi_i, \psi_r; \phi_j, p=0) \right] \Gamma^*(\phi_j, \psi_r) \quad (2.76)$$

を得る。

上の仮定に見合う揚力の式は (II.4.7) において ψ による微分の項を落した形

$$L(r, \psi) = 2 H_0 \rho Q \Gamma_0(r, \psi) \quad (2.77)$$

で与えられる。これは (II.4.3) の ψ による微分の項を落した式から出発すれば得られる。すなわち単位翼幅の揚力は循環のみによって定まるから、循環モーメントの式は不用である。

2.5 垂直飛行の場合

垂直飛行の場合の揚力線の連立1次方程式は (II.5.3) から出発すれば得られるが、(2.76) において $\lambda=0$ と置けばより簡単に得られる。すべての量が方位角に無関係であるから添字 r を取り除く。また A_{ir} は零となり、この場合の揚力線の連立1次方程式は

$$W_i = \sum_{j=1}^K \left[B_{ij} + \sum_{j=1}^{K+1} d_{jj} K_{2NS}^{(1)}(\phi_i, \phi_j) \right] \Gamma^*(\phi_j) \quad (2.78)$$

の形となる。ここに

$$B_{ij} = a_{ij} + b_{ij} C_1(\phi_i) + \sum_{j=1}^{K+1} d_{jj} K_{1NS}(\phi_i, \phi_j) \quad (2.79)$$

$$C_1(x) = \frac{x}{2(\eta^2 + x^2)} \quad (2.80)$$

$$K_{1NS}(x, x') = \frac{1 - \sqrt{1 + (2l/c)^2(x' - x)^2}}{x' - x} \quad (2.81)$$

$$K_{2NS}^{(1)}(x, x') = \frac{1}{x' - x} - C_1(x) \log|x' - x| + \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + x^2}} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \frac{4D_2}{R_1^3} d\lambda \quad (2.28)$$

最後の式の積分の和は (II.5.6) で与えられる。

河田⁶⁾ にならって変形されたベッセル関数に Nicholson の近似公式を適用すると、(II.5.6) の和が実行されて数値計算に適した形

$$\sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \frac{4D_2}{R_1^3} d\lambda = \begin{cases} -N \left\{ \mu + \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left[\frac{1 + \mu'^2}{1 + \mu^2} \right]^{1/4} \left[\frac{1}{e^{Nl} - 1} - \frac{\mu'^2}{2N(1 + \mu'^2)^{3/2}} \log(1 - e^{-Nl}) \right] \right\} & (\mu < \mu') \\ N \left\{ \frac{1}{\mu} + \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left[\frac{1 + \mu'^2}{1 + \mu^2} \right]^{1/4} \left[\frac{1}{e^{-Nl} - 1} + \frac{\mu'^2}{2N(1 + \mu'^2)^{3/2}} \log(1 - e^{-Nl}) \right] \right\} & (\mu > \mu') \end{cases} \quad (2.83)$$

を得る。ここに

$$t = \sqrt{1+\mu'^2} - \sqrt{1+\mu^2} + \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{1+\mu^2+1})(\sqrt{1+\mu'^2-1})}{(\sqrt{1+\mu^2-1})(\sqrt{1+\mu'^2+1})} \quad (2.84)$$

μ および μ' は (II.5.7) で与えられる。Nicholson の公式は変形されたベッセル関数の次数と argument が大きいとき精度がよいので、(2.88) はブレード枚数 N が大きく h したがって inflow ratio が小さいとき精度がよい。(2.83) の右辺は $\mu' \rightarrow \mu$ なるとき、左辺の積分と正確に同じ特異性をもつことを示すことができる。したがって (2.83) を使用した場合にも (2.82) は特異性をもたない。

(2.78) の左辺の値は (II.5.8), (II.5.9) から得られる。単位翼幅の揚力は (II.5.10) で与えられる。

3. 計 算 例

3.1 ホバリングの場合

ホバリングを含む垂直飛行の場合は前進飛行の場合に比べて流れの様子が単純で、計算およびその結果の考察が比較的容易に行なえるので、この場合について予備的な計算を行なうことは意味がある。線型理論は後流渦が一樣な速度で下方に流されると仮定しているので、本来は inflow が比較的大きくてほぼ一樣とみなせる場合に適用すべきで、ホバリングのように inflow が誘導流れのみからなり半径方向に著しく変化する場合は適用範囲外と考えるべきであるが、適当な実験結果が見当らなかったのでここではホバリング状態を相似する二つの模型実験^{7),8)}の場合につき計算した。

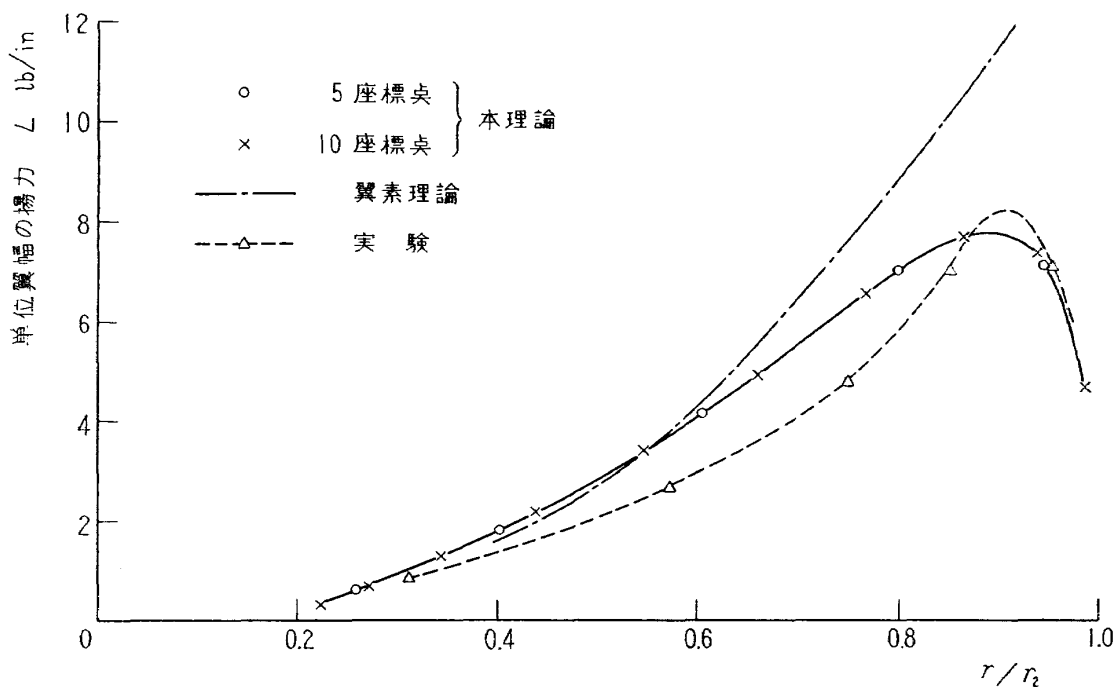


図1 ホバリング状態の揚力分布——実験値は文献(7), ブレード・ピッチ角 $\theta=9.2^\circ$

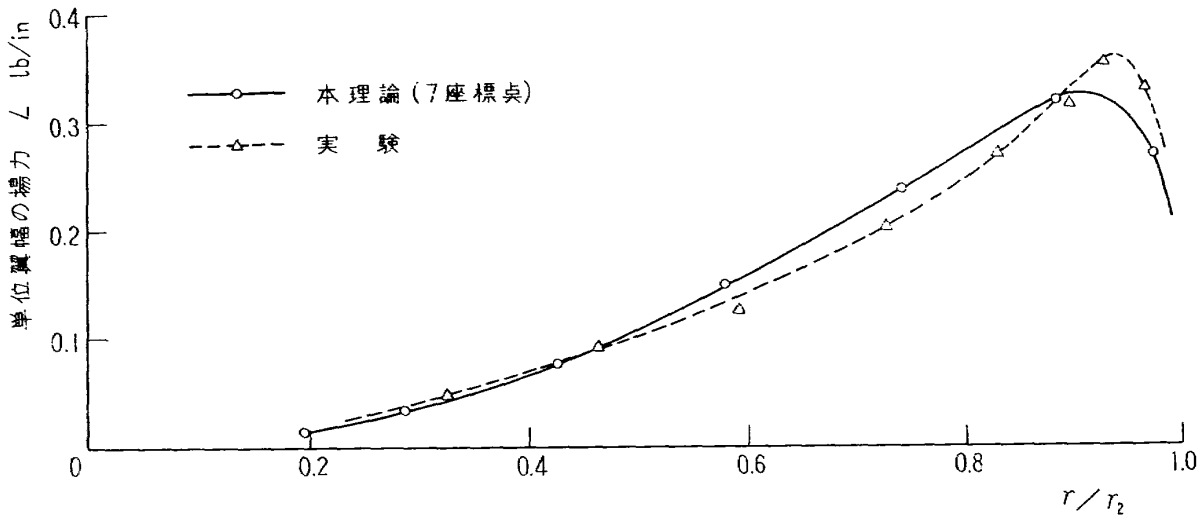


図 2 ホバリング状態の揚力分布——実験値は文献 (8), ブレード・ピッチ角 $\theta=8^\circ$

この場合後流渦はスラスト係数の実験値から運動量理論によって求められる平均の誘導速度で下方に流されると仮定した。

結果を図 1 および図 2 に示す。図 1 の場合は半径方向の代表座標点として 5 点および 10 点を選んだ。両者は完全に一つの曲線上にのることがわかる。翼素理論は回転面上の微小な幅の円環の部分に運動量理論を適用して迎え角の補正を行なう方法で、揚力傾斜は 2π とした。図 2 の場合は代表座標点として 7 点を選んだ。

図 1, 2 に共通した傾向として、計算結果は実験に比べてブレードの内側部分で大きく翼端付近で小さい値を示している。原因としては inflow が不均一であることのほか、後流の断面積が縮小することによって翼端渦が内側に寄ること、遠心力によるブレードの捩れなどが考えられる。

図 1 の場合の K_{1NS} および $K_{2NS}^{(1)}$ の値をそれぞれ図 3 および図 4 に示す。 $K_{2NS}^{(1)}$ の値の計算

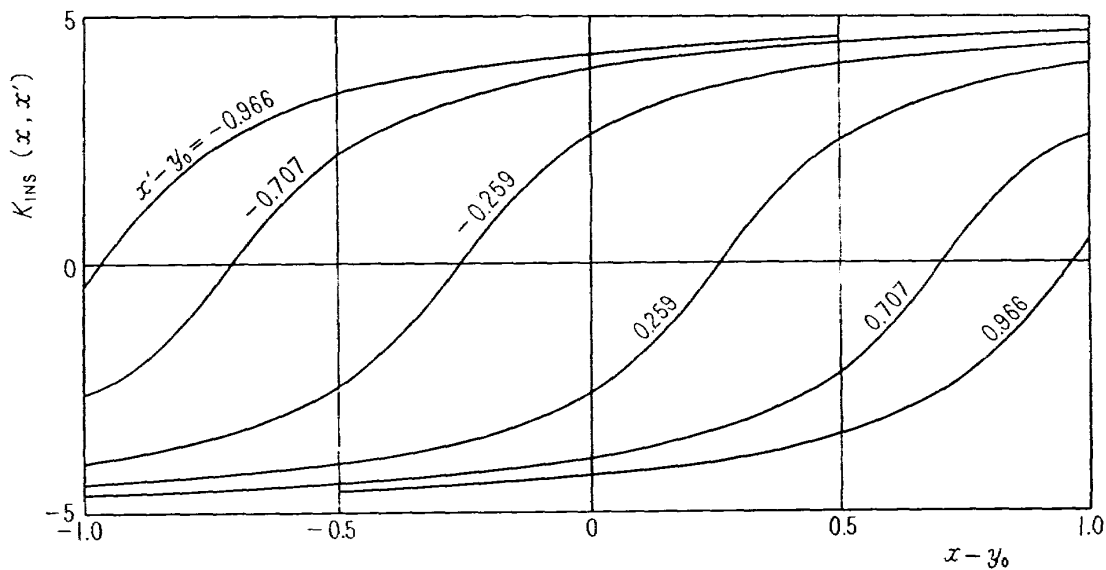


図 3 核 K_{1NS} の値 (図 1 の場合)

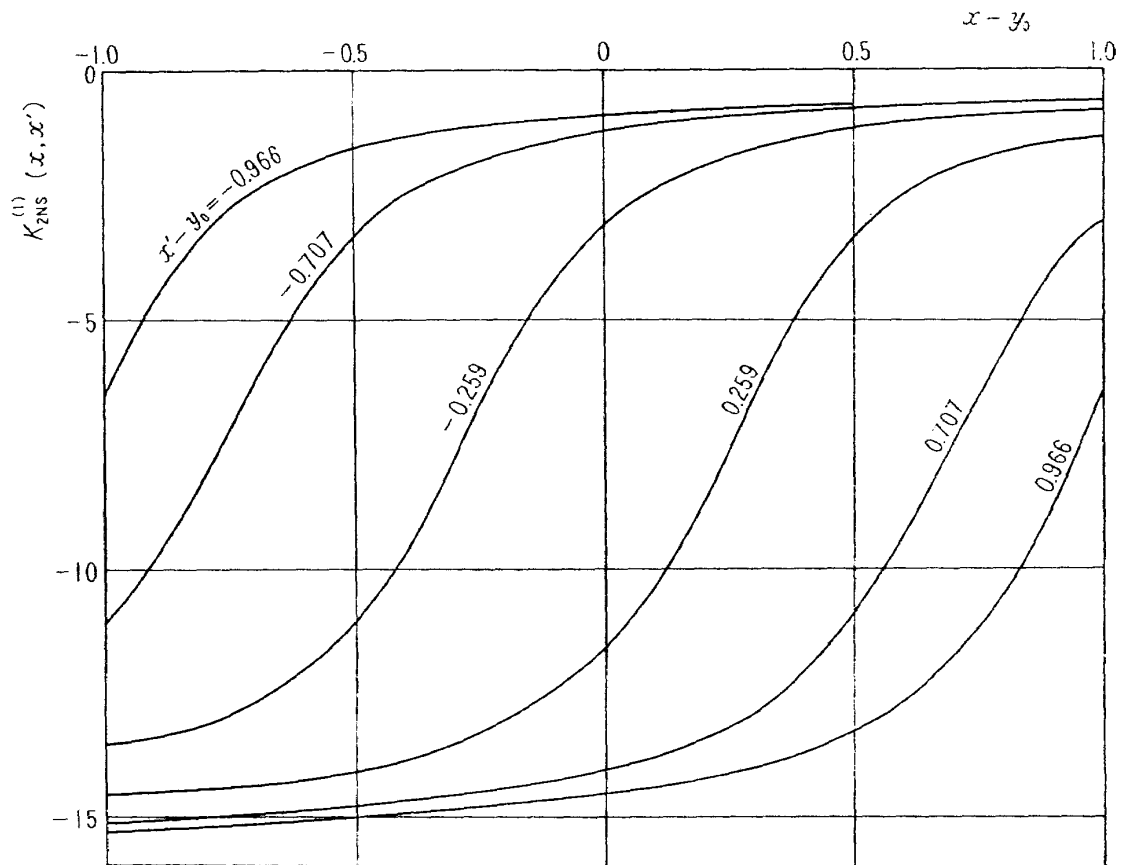


図4 核 $K_{2NS}^{(1)}$ の値 (図1の場合)

には (2.83), (2.84) を用いた。

3.2 前進飛行の場合

計算例として文献(9)の実験の tip-speed ratio $\mu=0.2$ の場合を選んだ。ブレード内外端の半径比 $r_1/r_2=0.205$ であるので、この場合ブレードは常に reversed flow region の外にある。本理論で定義するブレード回転面¹⁾としては tip path plane を採る。後流渦はブレード回転面に垂直な方向には、前進速度の成分と平均の誘導速度との和に等しい速度で流されると仮定する。平均の誘導速度は実験で求められている推力の値から Glauert の式によって計算した。

図5に種々の方位角に対する半径方向の揚力分布を示す。非定常と記したのは方程式 (2.65) と (2.72) を解いて計算した結果である。5個の代表座標点と10個の代表方位角を選んだ。したがって (2.65) は50元連立1次方程式, (2.72) は10組の5元連立1次方程式となる。準定常の場合にも半径方向に5個の代表座標点を選んだ。核 $K_{2NS}^{(1)}$, $K_{2NS}^{(2)}$, $K_3^{(2)}$ に含まれる積分は Filon の公式¹⁰⁾を用いて数値計算により求めた。積分の上限は $\lambda=20\pi$ とし, 0から 6π の間は $\Delta\lambda=\pi/36$, 6π から 20π の間では $\Delta\lambda=\pi/9$ に選んだ。核 $K_3^{(1)}$ はブレード枚数 $N=2$ であることにより消失する。

図6には同じ結果の $r/r_2=0.85$ および 0.56 における値をブレード方位角 ψ に対してプロットした。理論値は非定常の計算のみを示す。

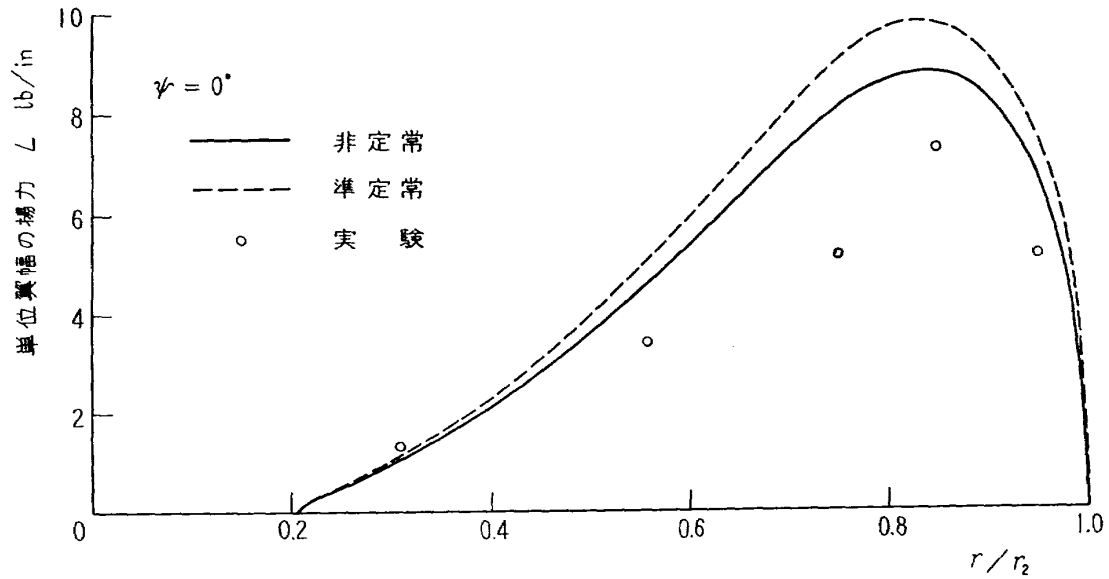


図 5 前進飛行状態の揚力分布:—実験値は文献 (9), $\mu=0.2$ (a) $\psi=0^\circ$

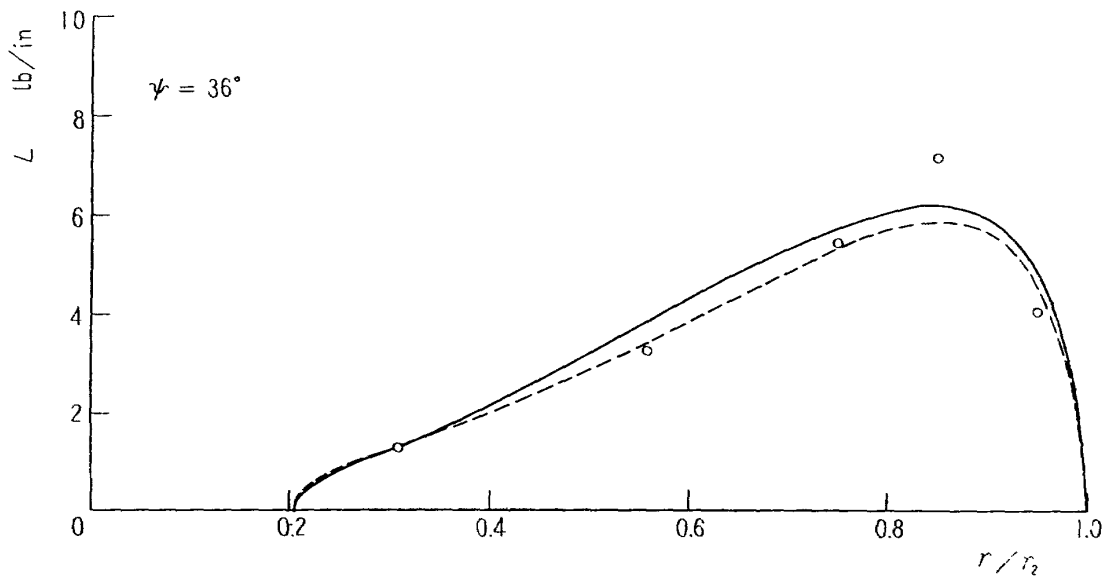


図 5 (b) $\psi=36^\circ$

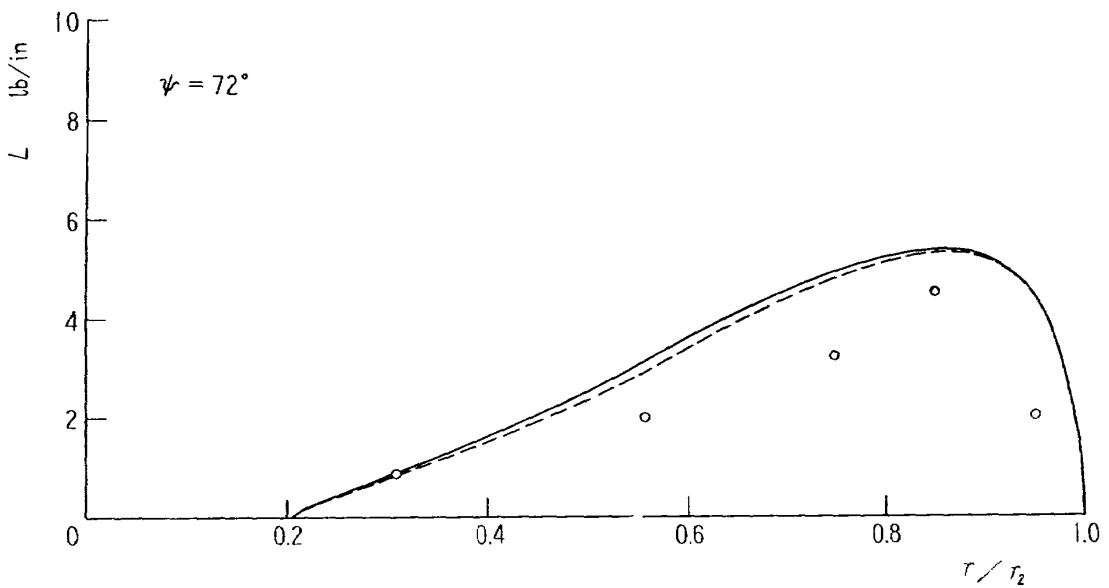


図 5 (c) $\psi=72^\circ$

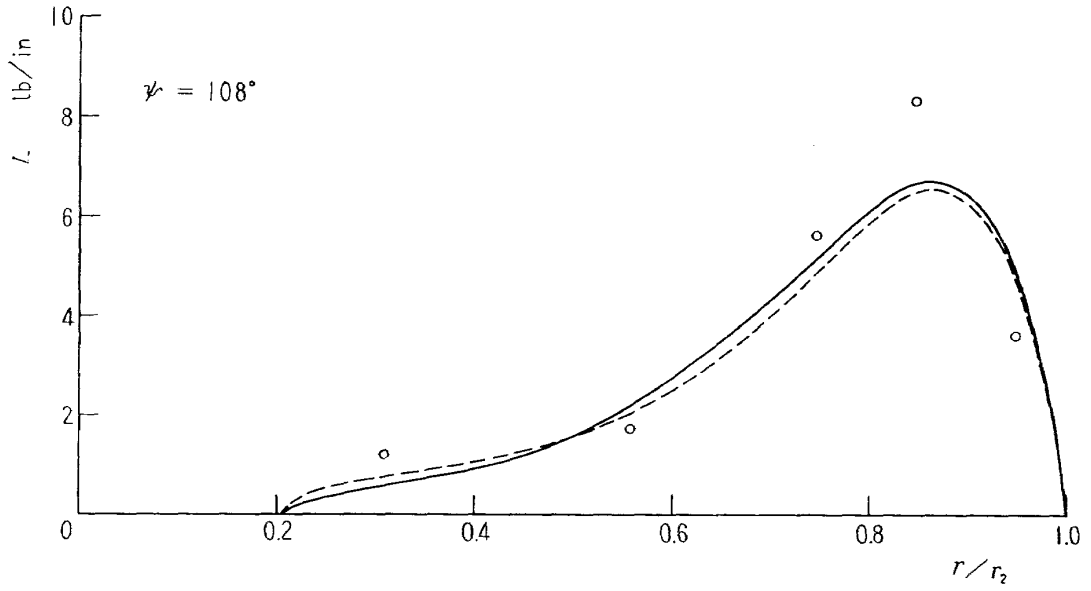


図 5 (d) $\psi = 108^\circ$

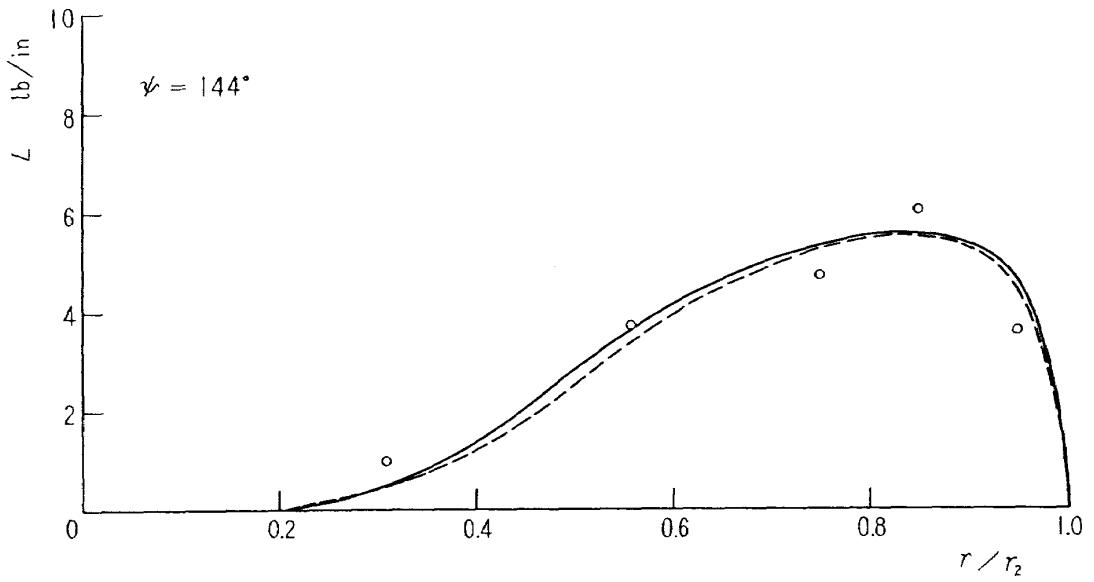


図 5 (e) $\psi = 144^\circ$

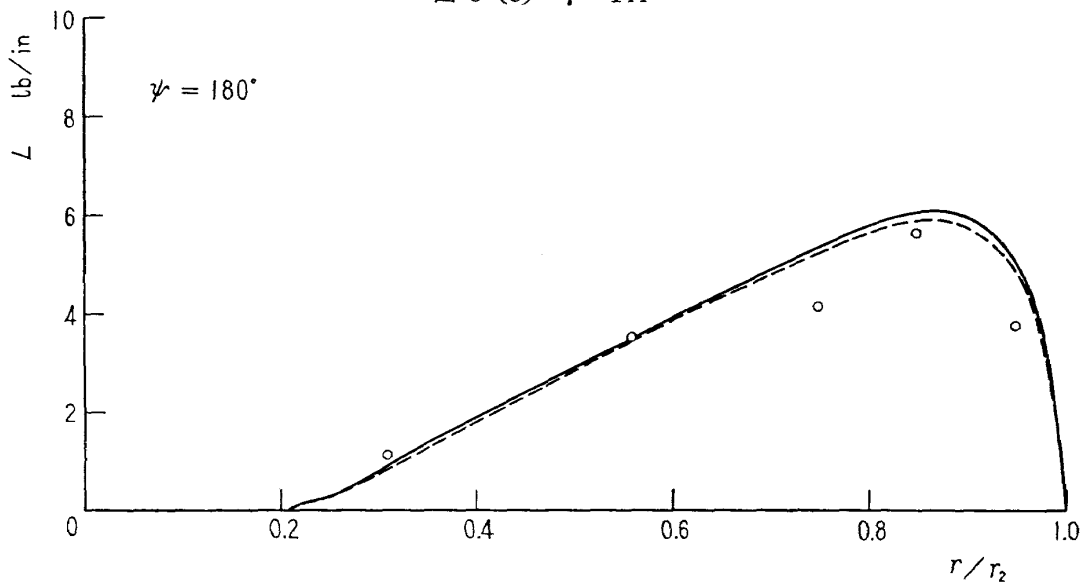


図 5 (f) $\psi = 180^\circ$

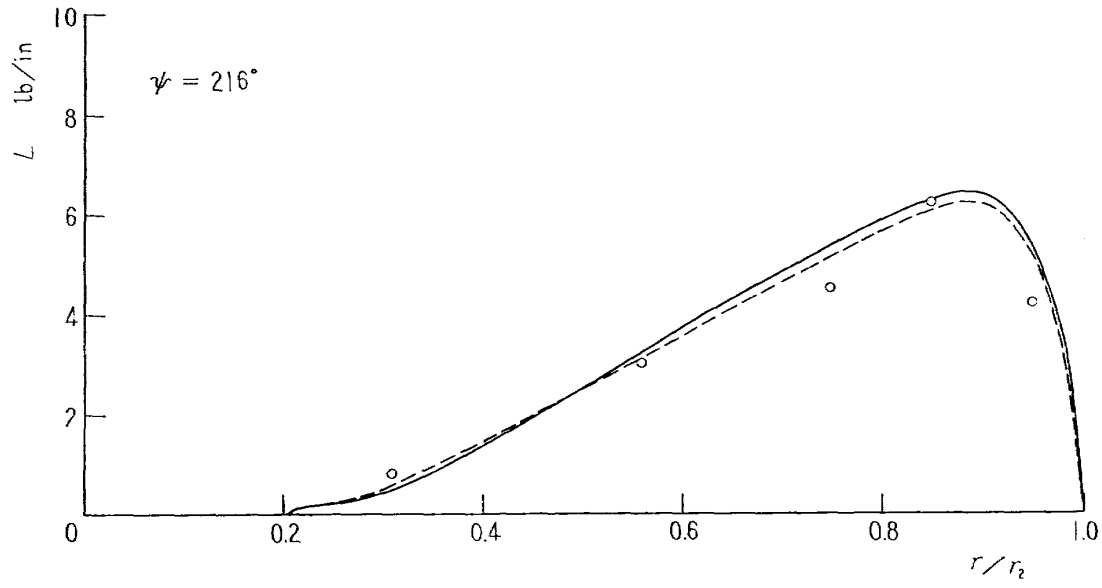


図 5 (g) $\psi = 216^\circ$

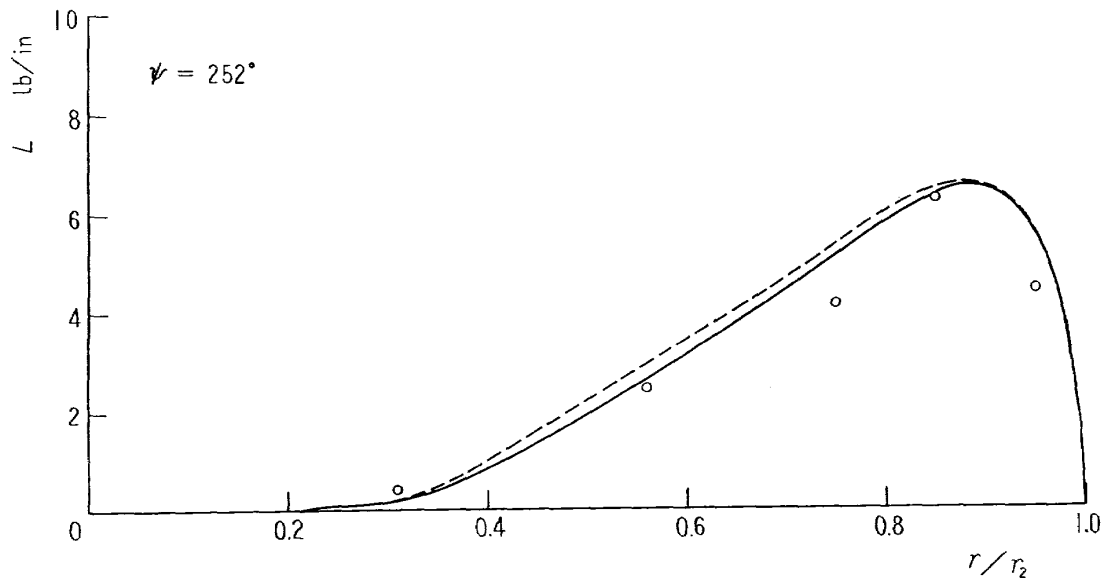


図 5 (h) $\psi = 252^\circ$

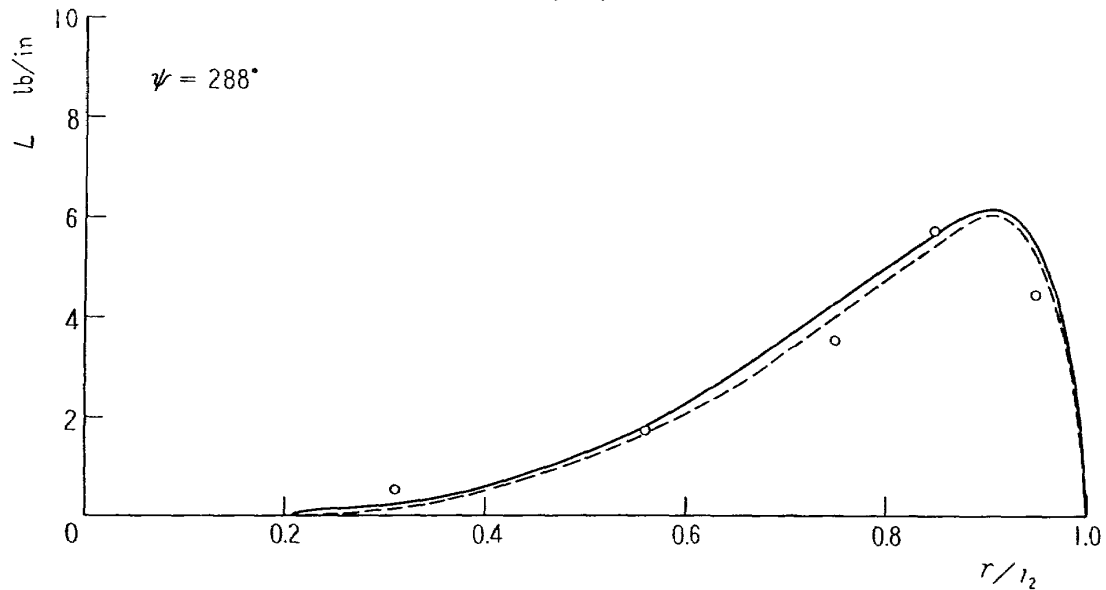


図 5 (i) $\psi = 288^\circ$

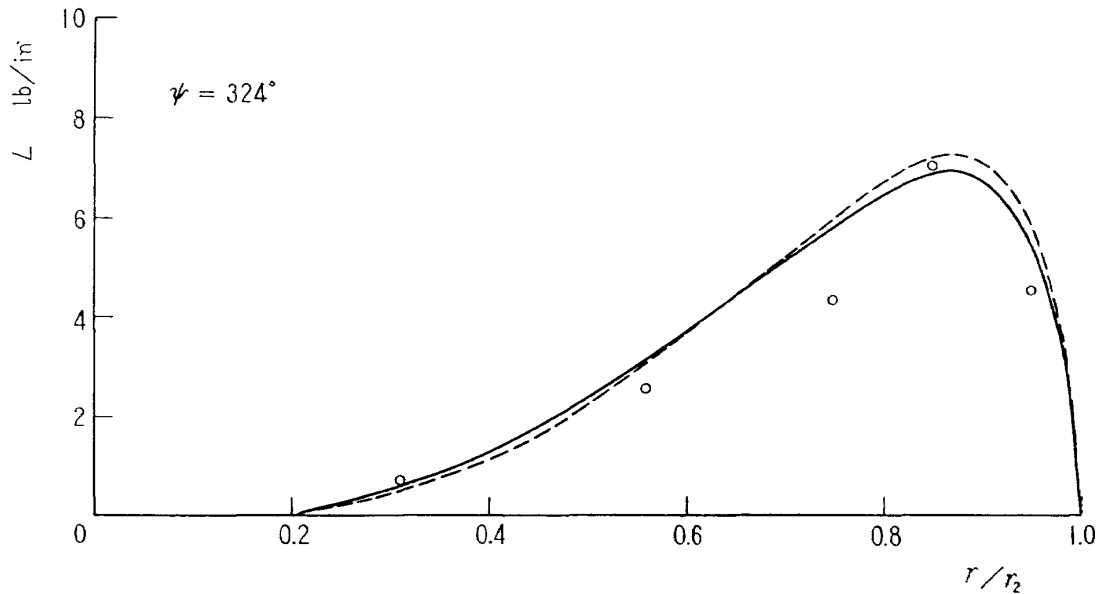
図 5 (j) $\psi=324^\circ$

図 5 および図 6 によってわかることは

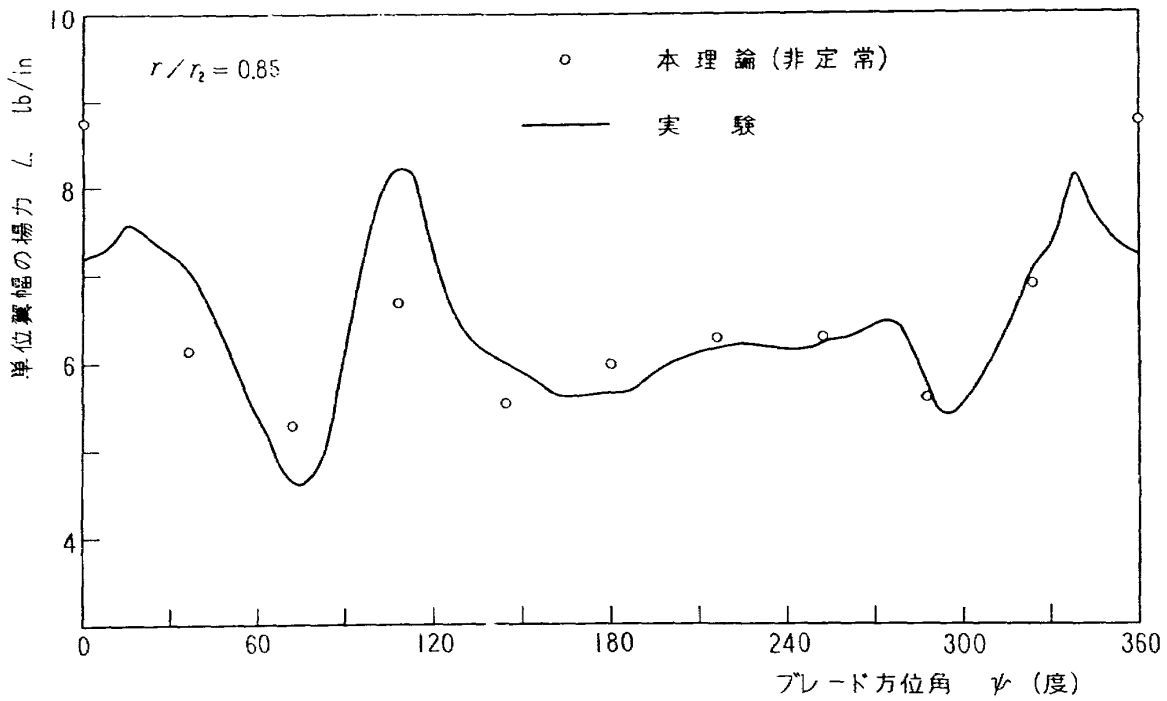
(1) $\psi=0^\circ$ を除いて非定常と準定常の計算値の差は小さい。しかしこれは常に正しいとは限らない。この場合はブレード回転面に垂直な前進速度の成分より平均の誘導速度のほうが大きい。推力が小さくしたがって平均の誘導速度が小さくて後流渦面の間隔が密な場合にはより大きい非定常効果が予想される。

(2) 半径方向の揚力分布は、理論と実験とがやや傾向の異なる分布形を示している。すなわち実験は $r/r_2=0.75$ と 0.95 において相対的にやや低い値を示し、このため実験による分布は理論のそれと比べてとがった形をしている。この傾向はホバリング状態の場合にも見られたことで、遠心力などの影響によってブレードがねじれていることが推測される。

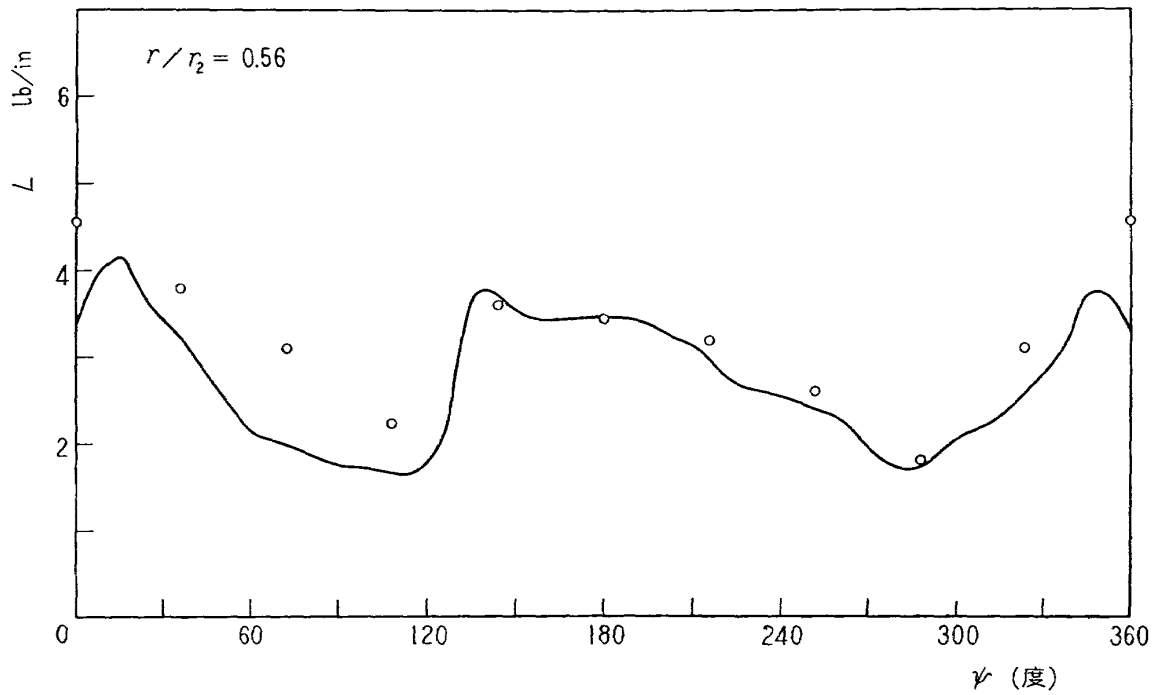
(3) 実験値は $\psi=0^\circ$ において谷を形成しておりこのため理論値と大きく食い違っているが、これはハブあるいはマストの後流の影響と考えられる。この推測の裏づけは文献 (11) の Figure 60 ($Z/R=-0.1$), Figure 66 ($Z/R=-0.07$) などによって与えられよう。

(4) $\psi=60^\circ$ から 120° 付近にかけて揚力が急激な変化をする範囲で、理論と実験の一致がよくない。この急激な変化は先行するブレードの翼端渦の上をブレードが通過する際に起こるものであるから¹²⁾、このときのブレードと渦との垂直距離は変化の量に大きい影響をもつはずである。実際の翼端渦は渦相互間の干渉によって複雑な運動をされると考えられるので、これが渦は一様な inflow によって流されると仮定した計算値との不一致の主要な原因であろう。

(5) このような急激な揚力変化を計算するためには 10 個の代表方位角では不足であることがわかる。代表座標点も 5 点では少ない。しかし計算に必要な仕事量は代表座標点、方位角の個数のほぼ 2 乗に比例して増大する。



(a) $r/r_1=0.85$



(b) $r/r_2=0.56$

図 6 前進飛行状態の揚力の変化——実験値は文献 (9), $\mu=0.2$

図 7 は準定常の計算で代表座標点としてそれぞれ 5 点, 11 点, 17 点を採用した場合の比較である。5 点の計算と 17 点の計算は翼端付近で 20% 程度の差を示している。

む す び

回転翼の線型理論の最後の段階として揚力線の方程式の数値解法を示し, 例について計算を行な

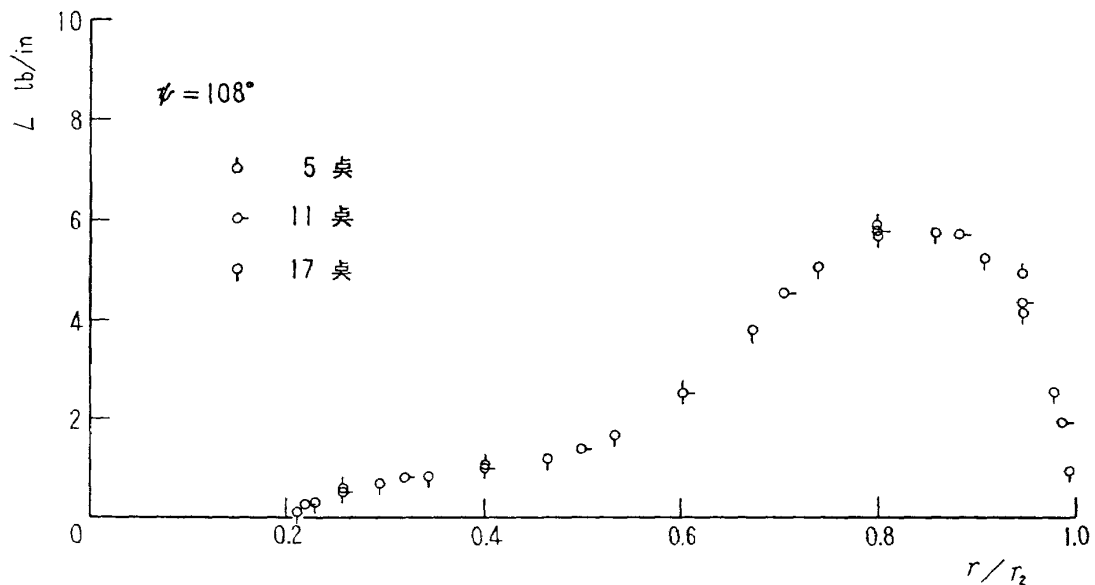


図 7 代表座標点数の影響 (準定常)

った。全体として計算値は実験値とかなりの程度的一致を示しているが、細部についてはなお不満足な点がある。それは主として (1) 選んだ代表座標点、代表方位角の個数が少ないこと、(2) 実験値の精度にも疑いがないわけではないこと*、(3) 線型理論では越えることのできない限界などに基づくものと思われる。(1) については計算費用の点でやむをえなかった。(2) については精度のよい実験を行なうことが望まれる。(3) は渦相互間の干渉の効果などを考慮しえないことに基づくが、限界がどの辺に存在するかを定めるにはなお多くの計算と実験の比較が必要であろう。

この研究の多くの部分は飛行実験部において行なった。種々の面で一方ならずお世話になった東京大学鷺津教授に深く感謝致します。

付 録 A. 核 の 特 異 性

A. 1 $K_2^{(1)}$ の特異性

$K_2^{(1)}$ に含まれる積分の中、基準ブレードに対応する

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} e^{-ip\lambda} d\lambda \quad (\text{A. 1})$$

の被積分関数は $\lambda=0$, $x'=x$ で無限大となるから、この積分は $x'=x$ を特異点としてもつであろう。その特異性の少くとも一部分は、核 $K_2^{(1)}$ を導いた過程すなわち前報²⁾ 1.2 節で行なった操作を顧慮すれば、(1.10) の第 1 項、第 2 項と相殺することが期待される。(A. 1) の積分の特異性は被積分関数の $\lambda=0$, $x'=x$ の近傍の性質のみによるから、 ε を小さい正数として積分

* 実験条件の中で文献 (9) に記載されていない事項につき NASA に問い合わせたところ、やや古い実験であるので精度については保証し難い旨の注意があった。

$$I=2\int_0^\epsilon \frac{D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} e^{-ip\lambda} d\lambda \quad (\text{A. 2})$$

もしくはこれを実部と虚部に分けて

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } I &= 2 \int_0^\epsilon \frac{D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} \cos p\lambda d\lambda \\ \text{Im } I &= -2 \int_0^\epsilon \frac{D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} \sin p\lambda d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 3})$$

の $x'=x$ の近傍の性質を調べればよい。被積分関数に含まれる $R_1|_{m=0}$ と $D_2|_{m=0}$ は (II.1.19) と (II.1.41) から

$$R_1^2|_{m=0}/l^2 = \eta^2 \lambda^2 + x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \lambda - 2(\eta \sin \lambda)\lambda [x \cos \psi - x' \cos (\psi - \lambda)] \quad (\text{A. 4})$$

$$\begin{aligned} 4D_2|_{m=0}/l^3 &= x(\eta^2 - x'^2) + (x^2 - x'^2)\eta \sin \lambda \sin \psi - x(\eta \sin \lambda \cos \psi)^2 \\ &+ x' \{ (x + \eta \sin \lambda \sin \psi)\eta \sin \lambda \cos \psi - \lambda [\eta^2 + x\eta \sin \lambda \sin \psi - (\eta \sin \lambda \cos \psi)^2] \} \sin \lambda \\ &+ x' \{ (x^2 - \eta^2) + (\eta \sin \lambda \cos \psi)^2 - \lambda(x + \eta \sin \lambda \sin \psi)\eta \sin \lambda \cos \psi \} \cos \lambda \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

と書き直される。これらを $\lambda=0$, $x'=x$ の近傍で Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} R_1^2|_{m=0}/l^2 &= a_{20}\lambda^2 + a_{11}\lambda(x'-x) + (x'-x)^2 + a_{30}\lambda^3 + a_{21}\lambda^2(x'-x) \\ &+ a_{40}\lambda^4 + a_{31}\lambda^3(x'-x) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

$$4D_2|_{m=0}/l^3 = e_{01}(x'-x) + e_{20}\lambda + e_{02}(x'-x)^2 + e_{30}\lambda^3 + e_{21}\lambda^2(x'-x) + \dots \quad (\text{A. 7})$$

の形となる。

$1/R_1^3|_{m=0}$ の因子は (A.5) の形では λ による積分の際に不つごうであるから、まず

$$\frac{1}{R_1^2|_{m=0}/l^2} = \frac{g(\lambda, x')}{f(\lambda, x')} \quad (\text{A. 8})$$

$$\begin{aligned} f(\lambda, x') &= a_{20}\lambda^2 + a_{11}\lambda(x'-x) + (x'-x)^2 + b_{12}\lambda(x'-x)^2 + b_{03}(x'-x)^3 \\ &+ b_{13}\lambda(x'-x)^3 + b_{04}(x'-x)^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

$$g(\lambda, x') = 1 + c_{10}\lambda + c_{01}(x'-x) + c_{20}\lambda^2 + c_{11}\lambda(x'-x) + c_{02}(x'-x)^2 + \dots \quad (\text{A. 10})$$

と置く。すなわち分母には λ の3乗以上のべきを含まないようにすることができる。ここに b_{12} , b_{03} , \dots ; c_{10} , c_{01} , \dots は係数を比較することにより a_{20} , a_{11} , \dots で表わされる。(A.8) からさらに

$$\frac{1}{R_1^3|_{m=0}/l^3} = \frac{[g(\lambda, x')]^{3/2}}{[f(\lambda, x')]^{3/2}} \quad (\text{A. 11})$$

右辺の分母はそのままとし、分子を

$$\begin{aligned} [g(\lambda, x')]^{3/2} &= h(\lambda, x') \\ &= 1 + d_{10}\lambda + d_{01}(x'-x) + d_{20}\lambda^2 + d_{11}\lambda(x'-x) + d_{02}(x'-x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} g \frac{\partial h}{\partial \lambda} &= \frac{3}{2} h \frac{\partial g}{\partial \lambda} \\ g \frac{\partial h}{\partial x'} &= \frac{3}{2} h \frac{\partial g}{\partial x'} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 13})$$

の関係から係数を比較して, d_{10}, d_{01}, \dots は c_{10}, c_{01}, \dots したがって a_{20}, a_{11}, \dots で表わされる。

(A. 7), (A. 11), (A. 12) と $\cos p\lambda, \sin p\lambda$ の Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} \frac{4D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} \cos p\lambda &= [f(\lambda, x')]^{-3/2} [e_{01}(x'-x) + e_{20}\lambda^2 + f_{11}\lambda(x'-x) + f_{02}(x'-x)^2 \\ &+ f_{30}\lambda^3 + g_{21}\lambda^2(x'-x) + f_{12}\lambda(x'-x)^2 + f_{03}(x'-x)^3 + \dots] \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

$$\begin{aligned} \frac{4D_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} \sin p\lambda &= [f(\lambda, x')]^{-3/2} \cdot p [e_{01}\lambda(x'-x) + e_{20}\lambda^3 \\ &+ f_{11}\lambda^2(x'-x) + f_{02}\lambda(x'-x)^2 + \dots] \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

の形となる。ここに $f_{11}, f_{02}, \dots; g_{21}, \dots$ は $a_{20}, a_{11}, \dots; e_{01}, e_{20}, \dots$ で表わされる。(A. 14), (A. 15) において $f(\lambda, x')$ は 1 次以下の項を欠いているから, $[f(\lambda, x')]^{-3/2}$ なる因子は λ と $|x'-x|$ とが零に近づくとき 3 位の無限大となる。したがって残りの因子における 4 次以上の項は, $\lambda=0, x'=x$ において連続な項を付加するに過ぎず, 特異性を調べるためには必要でない。

$f(\lambda, x')$ は λ に関して 2 次式であるから

$$f(\lambda, x') = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (\text{A. 16})$$

と書き,

$$I_n = \int_0^\varepsilon \frac{\lambda^{n-1}}{(a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} d\lambda \quad (n=1, 2, 3, 4) \quad (\text{A. 17})$$

と置くと (A. 3) の積分は

$$\begin{aligned} \text{Re } I &= \frac{1}{2} \{ [e_{01}(x'-x) + f_{02}(x'-x)^2 + f_{03}(x'-x)^3] I_1 + [f_{11}(x'-x) + f_{12}(x'-x)^2] I_2 \\ &+ [e_{20} + g_{21}(x'-x)] I_3 + f_{30} I_4 + \text{連続項} \} \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

$$\text{Im } I = -\frac{p}{2} \left\{ [e_{01}(x'-x) + f_{02}(x'-x)^2] I_2 + f_{11}(x'-x) I_3 + e_{20} I_4 + \text{連続項} \right\} \quad (\text{A. 19})$$

(A. 17) の積分を実行し, a, b, c を (A. 9) の係数で表わし, さらに連続項を除くと

$$\begin{aligned} \text{Re } I &= \frac{e_{01}}{4a_{20} - a_{11}^2} \left(\frac{2\sqrt{a_{20}}}{x'-x} - \frac{a_{11}}{|x'-x|} \right) - \frac{e_{20}}{2a_{20}^{3/2}} \log |x'-x| - \left\{ \frac{e_{01}}{4a_{20} - a_{11}^2} \left[b_{12} - \frac{a_{11}c_{01}}{2} \right. \right. \\ &+ a_{11} \left(\frac{f_{02}}{e_{01}} - \frac{4a_{20}c_{01} - 2a_{11}b_{12}}{4a_{20} - a_{11}^2} \right) + \frac{1}{e_{01}} \left(\frac{a_{11}e_{20}}{a_{20}} - 2f_{11} \right) \Big\} \\ &+ \frac{e_{20}}{4a_{20}^{3/2}} \log \left| \frac{a_{11} + 2\sqrt{a_{20}}}{a_{11} - 2\sqrt{a_{20}}} \right| \frac{x'-x}{|x'-x|} + \text{連続項} \end{aligned} \quad (\text{A. 20})$$

$$\text{Im } I = -\frac{2 p e_{01}}{4 a_{20} - a_{11}^2} \frac{x' - x}{|x' - x|} + \text{連続項} \quad (\text{A. 21})$$

係数 a_{20}, a_{11}, \dots を計算して代入すると, かなり長い計算の後に

$$\begin{aligned} \text{Re } I = & -\frac{\sqrt{E_0}/l}{x' - x} + \frac{F_0/l}{|x' - x|} + \frac{l x H_0^2}{8 E_0^{3/2}} \log |x' - x| - \frac{1}{4} \left[\frac{l F_0}{H_0^2} (x + \eta \sin \chi \sin \psi) - \frac{l x F_0}{2 E_0} \right. \\ & \left. - \frac{l x H_0^2}{4 E_0^{3/2}} \log \left[\frac{\sqrt{E_0} + F_0}{\sqrt{E_0} - F_0} \right] \right] \frac{x' - x}{|x' - x|} + \text{連続項} \end{aligned} \quad (\text{A. 22})$$

$$\text{Im } I = \frac{p}{2} \frac{x' - x}{|x' - x|} + \text{連続項} \quad (\text{A. 23})$$

を得る。(A.22) の第1項と第2項は予想通り (1.10) のかっこ内の第1項および第2項と相殺することがわかる。したがって $K_2^{(1)}$ の特異性は対数的なものと, 有限の不連続である。

A.2 $K_2^{(2)}$ の特異性

核 $K_2^{(2)}$ については次の3点を調べる必要がある。

(1) $\lambda=0, x' \neq x$ のとき被積分関数は有限の値をとるかどうか。有限でない場合には積分の下限が零であることによる収束性はどうか。

(2) 積分の上限が $+\infty$ であることによる収束性は如何。

(3) $x'=x$ における特異性。

まず (1) の点に関しては $K_2^{(2)}$ を導いた過程 (前報²⁾ の 1.1 節参照) から考えて, 有限の値をとることが期待される。(II.1.20), (II.1.21), (II.1.22) から

$$\begin{aligned} G_2|_{m=0}/l^2 = & -\frac{1}{2} \{ (x + \eta \sin \chi \sin \psi)(x - \lambda \eta \sin \chi \cos \psi) \sin \lambda \\ & + [(\eta \cos \chi)^2 + (x + \eta \sin \chi \sin \psi) \eta \sin \chi \sin \psi] \lambda \cos \lambda \} \end{aligned} \quad (\text{A. 24})$$

$$S_1/l^2 = (\eta \cos \chi)^2 \lambda^2 + [(x - \lambda \eta \sin \chi \cos \psi) \sin \lambda + (\eta \sin \chi \sin \psi) \lambda \cos \lambda]^2 \quad (\text{A. 25})$$

$$T_1/l = x' + (\eta \sin \chi \sin \psi) \lambda \sin \lambda + (-x + \lambda \eta \sin \chi \cos \psi) \cos \lambda \quad (\text{A. 26})$$

と書き直される。 $R_1^2|_{m=0}/l^2$ は (A.4) で与えられる。これらの関数を $\lambda=0$ の近傍で Taylor 展開して $(T_1 G_2 / S_1 R_1)|_{m=0}$ の比を考えると, $x' \neq x$ のとき

$$\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} = -\frac{1}{2 \lambda} \frac{x' - x}{|x' - x|} \left\{ 1 + \frac{l F_0 \cdot (x + \eta \sin \chi \sin \psi)}{2 H_0^2} \lambda \right\} + O(\lambda) \quad (\text{A. 27})$$

したがって

$$\left[\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} + \frac{x' - x}{|x' - x|} \frac{1}{2 \lambda} \right]_{\lambda=0} = -\frac{l F_0 \cdot (x + \eta \sin \chi \sin \psi)}{4 H_0^2} \frac{x' - x}{|x' - x|} \quad (\text{A. 28})$$

すなわち $K_2^{(2)}$ の被積分関数は $x' \neq x$ のとき, $\lambda=0$ で有限の値をとり, 積分の下限が零であることによる収束性に問題はない。

つぎに (2) の点について調べるため, 積分

$$\int_a^{+\infty} \frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} e^{-i d \lambda} d\lambda \quad (\text{A. 29})$$

を考える。ここに $a > 0$ とする。 $\lambda \rightarrow +\infty$ のとき

$$\begin{aligned} R_1|_{m=0}/l &\rightarrow \lambda \eta \\ G_2|_{m=0}/l^2 &\rightarrow \lambda(b \sin \lambda + c \cos \lambda) \\ S_1/l^2 &\rightarrow \lambda^2[d + (e \sin \lambda + f \cos \lambda)^2] \\ T_1/l &\rightarrow \lambda(x'/\lambda + g \sin \lambda + h \cos \lambda) \end{aligned}$$

の形となるから

$$\begin{aligned} \frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} e^{-i p \lambda} &\rightarrow \frac{x'}{\eta} \cdot \frac{b \sin \lambda + c \cos \lambda}{d + (e \sin \lambda + f \cos \lambda)^2} \cdot \frac{e^{-i p \lambda}}{\lambda^2} \\ &+ \frac{1}{\eta} \cdot \frac{(b \sin \lambda + c \cos \lambda)(g \sin \lambda + h \cos \lambda)}{d + (e \sin \lambda + f \cos \lambda)^2} \cdot \frac{e^{-i p \lambda}}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{A. 30})$$

第1項を被積分関数とする積分が収束することは直ちにわかる。第2項を被積分関数とする積分の収束性を調べるため、Dirichlet の積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{A. 31})$$

を考える。(A. 31) はいわゆる条件付収束の積分で、これが収束するのは被積分関数の符号が π の周期で交替するため、長さ π 毎に区切った相隣る区間の積分がほとんど相殺することによる¹³。

同様の考え方を当面の積分

$$\frac{1}{\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(b \sin \lambda + c \cos \lambda)(g \sin \lambda + h \cos \lambda)}{d + (e \sin \lambda + f \cos \lambda)^2} \cdot \frac{e^{-i p \lambda}}{\lambda} d\lambda \quad (\text{A. 32})$$

に適用すると、 p が奇数のときには π 毎に区切った相隣る区間の寄与が上と同じくほとんど相殺するが、 p が偶数のときには相殺せずに加え合わされる。すなわち (A. 32) は p が偶数のとき収束しないであろう。

(1.11) の残りの項の積分は Dirichlet 型の積分となり、上限が $+\infty$ であることによる収束性に問題はない。いずれにしても $K_2^{(2)}$ はこのままの形では、 p が偶数のとき収束しないであろうことがわかった。このような事情は $K_2^{(2)}$ を生ずる元の積分 (II.1.6) を x' について部分積分して (II.1.7) の形にしたためである。部分積分する以前の形で考えてみよう。(1.6) と (1.11) を参照して $K_2^{(2)}$ を含む積分

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} dx' \int_0^{+\infty} \left(\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} + \frac{x' - x}{|x' - x|} \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-i p \lambda} d\lambda \quad (\text{A. 33})$$

を考える。 M を大きい正の数として、 λ に関する積分を

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^M + \int_M^{+\infty}$$

のように分ける。(II.1.6), (II.1.7) を参照し、 $G_p^*(y_1) = G_p^*(y_2) = 0$ なることを考慮すると

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dG_p^*}{dx'} dx' \int_M^{+\infty} \left(\frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} + \frac{x'-x}{|x'-x|} \cdot \frac{1}{2\lambda} \right) e^{-ip\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} G_p^* dx' \int_M^{+\infty} \frac{IG_2}{R_1^3} \Big|_{m=0} e^{-ip\lambda} d\lambda - G_p^*(x) \int_M^{+\infty} \frac{e^{-ip\lambda}}{\lambda} d\lambda \quad (\text{A. 34})$$

右辺に現われる λ に関する二つの積分はいずれも収束し、 M を十分大きくとればいか程でも小さくすることができる。したがって左辺に対しても同様で、結局 (A.33) において λ に関する積分の上限 $+\infty$ を十分大きい正の数 M で置き換えてもよい。かくして (1.11) においても上限を M で置き換えることにすれば (2) の点の収束性は解決する。

最後に (3) の特異性については、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を小さい正の数とし、かつ $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ として

$$I = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{T_1 G_2}{S_1 R_1} \Big|_{m=0} e^{-ip\lambda} d\lambda + \frac{1}{2} \frac{x'-x}{|x'-x|} \int_{\varepsilon_1}^{+\infty} \frac{e^{-ip\lambda}}{\lambda} d\lambda \right\} \quad (\text{A. 35})$$

を考える。当面の特異性がすべて上の積分に含まれていることは明らかである。第1項の積分は $K_2^{(1)}$ の場合とほぼ同様に処理する。第2項については

$$\int_{\varepsilon_1}^{+\infty} \frac{\cos p\lambda}{\lambda} d\lambda = \int_{|p|\varepsilon_1}^{+\infty} \frac{\cos |p|\lambda}{|p|\lambda} d(|p|\lambda) = - \left(\gamma + \log |p|\varepsilon_1 + \int_0^{|\varepsilon_1|} \frac{\cos t - 1}{t} dt \right) \quad (\text{A. 36})$$

$\gamma = 0.57721$ (Euler の常数)

および

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin p\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{p}{|p|} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{A. 37})$$

を考慮すると

$$\text{Re } I = - \frac{1}{2} \frac{x'-x}{|x'-x|} \log |x'-x| + \frac{F_0}{2\sqrt{E_0}} \log |x'-x|$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\log (H_0/l) + \frac{F_0}{2\sqrt{E_0}} \log \left| \frac{\sqrt{E_0} + F_0}{\sqrt{E_0} - F_0} \right| - \gamma - \log |p| \right] \frac{x'-x}{|x'-x|} + \text{連続項} \quad (\text{A. 38})$$

$$\text{Im } I = - \frac{p}{|p|} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x'-x}{|x'-x|} + \text{連続項} \quad (\text{A. 39})$$

すなわち $K_2^{(2)}$ の特異性は $K_2^{(1)}$ と同じ形のもののほか、(A. 38) の第1項の形のものを含んでいる。

付録 B. 二つの補間公式

Gauss-Mehler の積分公式¹⁴⁾とよばれる

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j) \quad (\text{B. 1})$$

から出発する。ここに H_j は加重数、 a_j は代表点の座標で、共に指数 α および β に対して定まる。 $f(x)$ が $(2n-1)$ 次を越えない多項式するとき (B.1) は厳密に成立つ。

(1) $\alpha=\beta=-1/2$ のとき

$$H_j = \frac{\pi}{n}, \quad a_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$$

すなわち

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\cos \frac{2j-1}{2n} \pi\right) \quad (\text{B. 2})$$

(B. 2) は Tchebysheff の積分公式とよばれている。

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ f(x) &= \varphi(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 3})$$

と置くと

$$\int_0^\pi \varphi(\theta) d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \varphi\left(\frac{2j-1}{2n} \pi\right) \quad (\text{B. 4})$$

(2) $\alpha=\beta=1/2$ のとき

$$H_j = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left(\frac{j\pi}{n+1} \right), \quad a_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}$$

すなわち

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin^2 \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) f\left(\cos \frac{j\pi}{n+1}\right) \quad (\text{B. 5})$$

(B. 3) の置き換えを行なうと

$$\int_0^\pi \varphi(\theta) \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin^2 \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \varphi\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad (\text{B. 6})$$

補間公式 (1)

関数 $g(\theta)$ は区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ で有限項の Fourier 余弦級数で表わされるとする。すなわち

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M a_k \cos k\theta \quad (\text{B. 7})$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos k\theta d\theta \quad (\text{B. 8})$$

(B. 8) において $\cos k\theta$ は $x = \cos \theta$ の k 次 (高々 M 次) の多項式で表わされ、したがって (B. 7) によって $g(\theta)$ は x の M 次の多項式で表わされる。すなわち $g(\theta) \cos k\theta$ は x の $M+k$ 次 (高々 $2M$ 次) の多項式で表わされるから、(B. 8) に (B. 4) を適用し、 $n=M+1$ に選ぶと

$$a_k = \frac{2}{M+1} \sum_{j=1}^{M+1} g(\theta_j) \cos k\theta_j \quad (\text{B. 9})$$

ここに

$$\theta_j = \frac{2j-1}{2(M+1)} \pi \quad (\text{B. 10})$$

したがって

$$g(\theta) = \frac{2}{M+1} \sum_{j=1}^{M+1} g(\theta_j) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^M \cos k\theta_j \cos k\theta \right) \quad (\text{B. 11})$$

これを Thebysheff の補間公式とよぶことにする。 $2n-1=2(M+1)-1 > 2M$ であるから、(B. 9) したがって (B. 11) は (B. 7) が正確である限り正確な式である。

補間公式 (2)

関数 $h(\theta)$ は区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ で有限項の Fourier 正弦級数で表わされるとする。すなわち

$$h(\theta) = \sum_{k=1}^N b_k \sin k\theta \quad (\text{B. 12})$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(\theta) \sin k\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{h(\theta)}{\sin \theta} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{B. 13})$$

(B. 13) において $\sin k\theta/\sin \theta$ は $x=\cos \theta$ の $k-1$ 次 (高々 $N-1$ 次) の多項式で表わされ、したがって $h(\theta)/\sin \theta$ は x の $N-1$ 次の多項式で表わされる。すなわち $(h(\theta)/\sin \theta) (\sin k\theta/\sin \theta)$ は $N+k-2$ 次 (高々 $2(N-1)$ 次) の多項式で表わされるから、(B. 13) に (B. 6) を適用し、 $n=N$ に選ぶと

$$b_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N h(\theta_j) \sin k\theta_j \quad (\text{B. 14})$$

ここに

$$\theta_j = \frac{j\pi}{N+1} \quad (\text{B. 15})$$

したがって

$$h(\theta) = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N h(\theta_j) \sum_{k=1}^N \sin k\theta_j \sin k\theta \quad (\text{B. 16})$$

(B. 16) は Multhopp⁸⁾ によって得られた。 $2n-1=2N-1 > 2(N-1)$ であるから (B. 14) したがって (B. 16) は (B. 12) が正確である限り正確な式である。

Tchebysheff の座標点 (B. 10) と Multhopp の座標点 (B. 15) を比較すると、 $M=N$ のときこれは交互に位置して一致することがない。これは核を数値的に評価するに際して有利な性質である。

付 録 C. 係数 $a_{ij}, b_{ij}, d_{jJ}, e_{jJ}$

揚力線の方程式の半径方向の積分に必要な係数 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{jJ}, e_{jJ}$ は、この中 c_{ij} を除いて、和の演算を実行した形で表わすことができる。

a_{ij} は Multhopp⁸⁾ が用いた係数と本質的には同じもので (Multhopp の記号は b_{jn})

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= \frac{K+1}{4 \sin \phi_i} \\ a_{ij} &= \frac{(-1)^{i-j}-1}{2(K+1)} \frac{\sin \phi_i}{(\cos \phi_i - \cos \phi_j)^2} \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 1})$$

で計算される。その他の係数も Multhopp とほぼ同じ方針で計算すると

$$\left. \begin{aligned} b_{ii} &= 0 \\ b_{ij} &= \frac{1 - (-1)^{i-j}}{4(K+1)} \frac{\sin \phi_j}{\cos \phi_i - \cos \phi_j} \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 2})$$

$$d_{jJ} = - \frac{(-1)^{j-J}}{4(K+1)^2} \frac{\sin \phi_j \sin \phi_J}{(\cos \phi_j - \cos \phi_J)^2} \quad (\text{C. 3})$$

$$e_{jJ} = \frac{(-1)^{j-J}}{4(K+1)^2} \frac{\sin \phi_j \sin \phi_J}{\cos \phi_j - \cos \phi_J} \quad (\text{C. 4})$$

となる。以上において ϕ_i, ϕ_j, ϕ_J はそれぞれ (2.9), (2.5), (2.29) 式で与えられる。

付録 D. 係数 p_{rq}, s_{rq}

循環の方程式において p による和を処理する際に必要となる係数 p_{rq}, s_{rq}, t_{rq} の中, p_{rq} と s_{rq} は $P=Q$ なるとき容易に和の演算が実行されて

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= 0 \\ p_{rq} &= \frac{(-1)^{r-q}}{2} \cot \frac{(r-q)\pi}{2P} \quad (r \neq q) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D. 1})$$

$$\left. \begin{aligned} s_{rr} &= \frac{P+1}{2} \\ s_{rq} &= \frac{1}{2} \quad (r \neq q, r-q = \text{偶数}) \\ s_{rq} &= -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{P} \operatorname{cosec}^2 \left[\frac{(r-q)\pi}{2P} \right] \right\} \quad (r-q = \text{奇数}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D. 2})$$

となる。

付録 E. $A(k_p), B_1(k_p)$ の値

$$A(k_p) = A'(k_p) + iA''(k_p) \quad (\text{E. 1})$$

$$B_1(k_p) = B_1'(k_p) + iB_1''(k_p) \quad (\text{E. 2})$$

$k_p > 0$ のとき, (II.2.17) と (II.2.37) から

$$\left. \begin{aligned} A'(k_p) &= \frac{\pi}{2} k_p \{ [J_0(k_p) - N_1(k_p)] \cos k_p + [J_1(k_p) + N_0(k_p)] \sin k_p \} - 1 \\ A''(k_p) &= \frac{\pi}{2} k_p \{ -[J_1(k_p) + N_0(k_p)] \cos k_p + [J_0(k_p) - N_1(k_p)] \sin k_p \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 3})$$

$$\left. \begin{aligned} B_1'(k_p) &= 1 + \frac{\pi}{2} [J_1(k_p) \cos k_p + N_1(k_p) \sin k_p] - \frac{1}{2} A'(k_p) \\ B_1''(k_p) &= -\frac{1}{k_p} + \frac{\pi}{2} [J_1(k_p) \sin k_p - N_1(k_p) \cos k_p] - \frac{1}{2} A''(k_p) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 4})$$

表 1 A (k_p), B₁ (k_p) の値

k_p	A'	A''	B ₁ '	B ₁ ''
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.2669	0.5714	-0.0175	-0.1377
0.4	0.4861	0.9079	-0.0487	-0.2575
0.6	0.6782	1.1730	-0.0853	-0.3648
0.8	0.8515	1.3977	-0.1243	-0.4627
1.0	1.0107	1.5956	-0.1644	-0.5531
1.2	1.1587	1.7741	-0.2051	-0.6373
1.4	1.2977	1.9379	-0.2458	-0.7164
1.6	1.4289	2.0899	-0.2863	-0.7910
1.8	1.5537	2.2322	-0.3265	-0.8619
2.0	1.6728	2.3665	-0.3662	-0.9294
2.2	1.7869	2.4939	-0.4055	-0.9940
2.4	1.8967	2.6154	-0.4442	-1.0560
2.6	2.0025	2.7317	-0.4824	-1.1157
2.8	2.1049	2.8434	-0.5201	-1.1732
3.0	2.2039	2.9510	-0.5572	-1.2288
3.2	2.3001	3.0548	-0.5938	-1.2825
3.4	2.3936	3.1555	-0.6299	-1.3348
3.6	2.4846	3.2530	-0.6655	-1.3855
3.8	2.5733	3.3476	-0.7006	-1.4348
4.0	2.6599	3.4399	-0.7352	-1.4828
4.2	2.7445	3.5296	-0.7693	-1.5296
4.4	2.8273	3.6172	-0.8030	-1.5754
4.6	2.9083	3.7028	-0.8362	-1.6201
4.8	2.9877	3.7865	-0.8690	-1.6638
5.0	3.0656	3.8683	-0.9014	-1.7066
5.2	3.1419	3.9484	-0.9334	-1.7485
5.4	3.2170	4.0270	-0.9650	-1.7896
5.6	3.2907	4.1041	-0.9963	-1.8298
5.8	3.3632	4.1799	-1.0272	-1.8695
6.0	3.4645	4.2541	-1.0577	-1.9083
6.2	3.5047	4.3273	-1.0879	-1.9466
6.4	3.5738	4.3992	-1.1178	-1.9841
6.6	3.6419	4.4699	-1.1473	-2.0211
6.8	3.7091	4.5395	-1.1766	-2.0575
7.0	3.7752	4.6081	-1.2055	-2.0933
7.2	3.8405	4.6756	-1.2341	-2.1286
7.4	3.9049	4.7423	-1.2624	-2.1633
7.6	3.9684	4.8080	-1.2905	-2.1977
7.8	4.0613	4.8729	-1.3184	-2.2315
8.0	4.0932	4.9368	-1.3459	-2.2649
8.2	4.1545	5.0001	-1.3731	-2.2978
8.4	4.2151	5.0624	-1.4002	-2.3303
8.6	4.2748	5.1240	-1.4269	-2.3625
8.8	4.3340	5.1848	-1.4535	-2.3941
9.0	4.3925	5.2452	-1.4798	-2.4256
9.2	4.4505	5.3046	-1.5059	-2.4565
9.4	4.5078	5.3634	-1.5318	-2.4871
9.6	4.5646	5.4216	-1.5575	-2.5174
9.8	4.6206	5.4793	-1.5829	-2.5474
10.0	4.6764	5.5363	-1.6083	-2.5771

$k_p=0\sim 10.0$ に対する $A'(k_p)$, $A''(k_p)$, $B_1'(k_p)$, $B_1''(k_p)$ の値を表 1 および 図 8, 9 に示す。

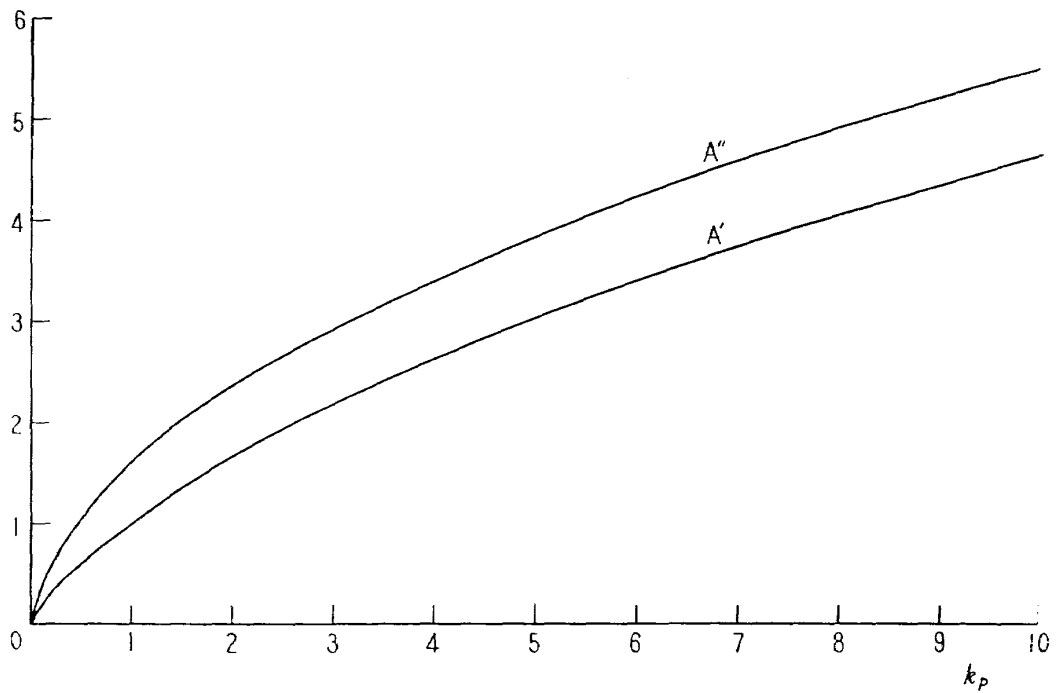


図 8 $A(k_p)$ の値

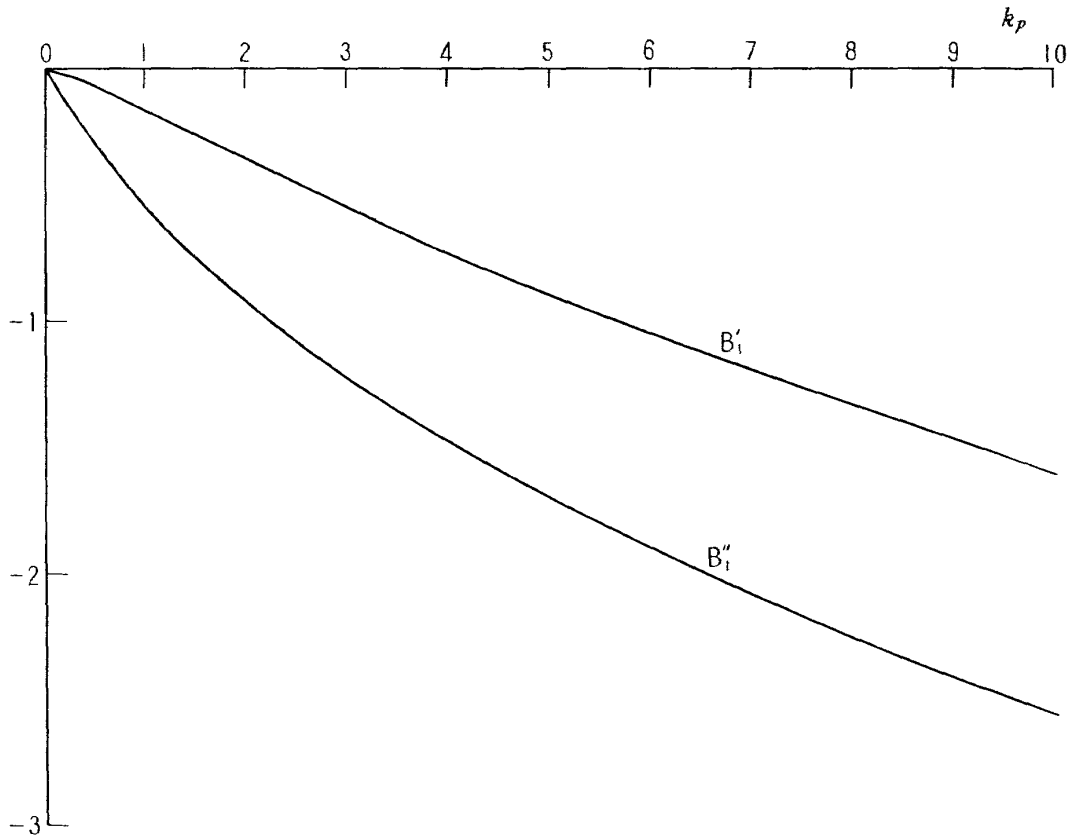


図 9 $B(k_p)$ の値

付録 F. 境界条件再論

これまでに行なった境界条件の議論^{1),2)}には若干の不備な点があり, 結果として導びかれた w_n (r, ψ) を与える式 (II.3.22) には不用の項が含まれているので, ここで境界条件について再論する。

ブレード面 $F_B=0$ の上で流れがこれに接する条件は

$$\frac{\partial F_B}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial F_B}{\partial x} + v \frac{\partial F_B}{\partial y} + (W+w) \frac{\partial F_B}{\partial z} = 0 \quad (\text{F. 1})$$

(I.1.8) を参照すると (F.1) は

$$\Omega \left(\frac{\partial F_B}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial F_B}{\partial \tau} \right) + \mathbf{q} \cdot \text{grad } F_B = 0 \quad (\text{F. 2})$$

と書ける。 \mathbf{q} はじょう乱速度ベクトルである。前報²の付録 G を参照して

$$\text{grad } F_B = [\mathbf{r}_\sigma \ \mathbf{r}_\tau \ \mathbf{r}_r] \begin{pmatrix} (\text{grad } F_B)_\sigma \\ (\text{grad } F_B)_\tau \\ (\text{grad } F_B)_r \end{pmatrix} \quad (\text{F. 3})$$

と書くと

$$\begin{pmatrix} \partial F_B / \partial \sigma \\ \partial F_B / \partial \tau \\ \partial F_B / \partial r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{grad } F_B)_\sigma \\ (\text{grad } F_B)_\tau \\ (\text{grad } F_B)_r \end{pmatrix} \quad (\text{F. 4})$$

をえる。両式から

$$\text{grad } F_B = [\mathbf{r}_\sigma \ \mathbf{r}_\tau \ \mathbf{r}_r] \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_\tau \cdot \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_\sigma & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_\tau & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{r}_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial F_B / \partial \sigma \\ \partial F_B / \partial \tau \\ \partial F_B / \partial r \end{pmatrix} \quad (\text{F. 5})$$

一方

$$\mathbf{q} = [w_\sigma \ u_\tau \ v_r] \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\sigma \\ \mathbf{r}_\tau \\ \mathbf{r}_r \end{pmatrix} \quad (\text{F. 6})$$

と書くと

$$\mathbf{q} \cdot \text{grad } F_B = [w_\sigma \ u_\tau \ v_r] \begin{pmatrix} \partial F_B / \partial \sigma \\ \partial F_B / \partial \tau \\ \partial F_B / \partial r \end{pmatrix} \quad (\text{F. 7})$$

となる。ブレード面の方程式を

$$F_B \equiv \sigma - \sigma_B(\tau, r, \psi) = 0 \quad (\text{F. 8})$$

の形に書くと

$$\frac{\partial F_B}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial F_B}{\partial \tau} = -\frac{\partial \sigma_B}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial F_B}{\partial r} = -\frac{\partial \sigma_B}{\partial r} \quad (\text{F. 9})$$

$w_\sigma, u_\tau, v_r; \partial \sigma_B / \partial \tau, \partial \sigma_B / \partial r$ は小さい量と考えられるからそれらの積を省略すると

$$\mathbf{q} \cdot \text{grad } F_B = w_\sigma \quad (\text{F. 10})$$

したがって (F.2) は

$$w_\sigma = \Omega \left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial \sigma_B}{\partial \tau} \right) \quad (\text{F. 11})$$

となる。さらに \mathbf{n} は $\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_\tau$ に垂直であることを考慮すると (F.6) から

$$w_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma) w_\sigma \quad (\text{F. 12})$$

(II.G.8), (II.G.11) によって

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma = -\frac{1}{2H} rh \cos \chi \quad (\text{F. 13})$$

(I.3.8) を参照すると

$$\frac{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma)}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma)}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{F. 14})$$

であることがわかるから

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\sigma) \sigma_B = n_B \quad (\text{F. 15})$$

と書くと (F.11) は

$$w_n = \Omega \left(\frac{\partial n_B}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial n_B}{\partial \tau} \right) \quad (\text{F. 16})$$

(F.16) は線型化された境界条件の回転揚力面に適した形を与え、直進揚力面の線型理論の場合と同様、ブレード面上の代りにブレード軌跡面上で満足させる。この場合 n_B はブレード軌跡面を基準とし法線 \mathbf{n} の方向に測ったブレード面の座標を表わす。

前報²⁾の3節を参照して、ブレード面の z 座標を

$$z_B = -\beta(\xi - e) + \eta \tan \theta \quad (\text{F. 17})$$

で与えたとき、揚力線理論に見合う境界条件の形を求めてみよう。ブレード軌跡面の z 座標は、 ξ 軸の付近では

$$z_L = \eta \tan \theta_0 \quad (\text{F. 18})$$

ここに $\tan \theta_0$ は (II.3.10) で与えられる。明らかに

$$n_B|_{\sigma=0} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})_{\sigma=0} (z_B - z_L) \quad (\text{F. 19})$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})_{\sigma=0} = \left[\frac{1}{H} (\mathbf{r}_\tau \times \mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{k} \right]_{\sigma=0} = \frac{1}{2H_{\sigma=0}} \left[r + h \sin \chi \sin \left(\psi - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (\text{F. 20})$$

(F.17) から (F.20) までと (II.3.5), (II.3.12), (II.3.13) を用い、 τ の2次以上の項を省

略すると

$$n_B|_{\sigma=0} = -\frac{r+h \sin \chi \sin \psi}{2 H_0} (r-e) \beta + \tau \left\{ H_0 \theta_1 + \frac{h \sin \chi \cos \psi}{4 H_0} \left[\left(\frac{h \cos \chi}{2 H_0} \right)^2 (r-e) - (r+h \sin \chi \sin \psi) \right] \beta \right\} \quad (\text{F. 21})$$

これを (F. 16) に代入し, $\tau=0$ とおくと

$$w_n(r, \psi) = w_n|_{\sigma=\tau=0} = Q \left\{ 2 H_0 \theta_1 - \frac{r+h \sin \chi \sin \psi}{2 H_0} \left[(h \sin \chi \cos \psi) \beta + (r-e) \frac{d\beta}{d\psi} \right] \right\} \quad (\text{F. 22})$$

すなわち $w_n(r, \psi)$ は (II. 3. 22) の代りに (F. 22) を用いるべきである。 θ_1 は (II. 3. 23) で与えられる。

(I. 2. 13) の形の境界条件は Reissner¹⁵⁾ によるが, F_L の関数形を任意に選んだ場合一般には正しくない。(I. 2. 13) を導びくには (F. 1) を $F_L=0$ の上で近似的に満足させねばならないが, そのためには近似的に

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\frac{\partial F_L}{\partial n} \right]_{\sigma=0} = 0 \quad (\text{F. 23})$$

なる条件を満たすように F_L の関数形を選ぶ必要があることを示すことができる。この条件の下では (II. 3. 1) は (F. 16) と同等であることが示される。

文 献

- 1) 市川輝雄; 回転翼の線型理論 (I), 揚力面理論, 航技研報告 TR-68 (昭和 39)
- 2) 市川輝雄; 回転翼の線型理論 (II), 揚力線理論, 航技研報告 TR-85 (昭和 40)
- 3) H. Multhopp; Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln, Lufo., Bd. 15, Nr. 4 (1938/6) pp. 153-169
- 4) E. Reissner and J.E. Stevens; Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings, II-Methods of Calculation and Examples of Application, NACA TN 1195 (1947) p. 37
- 5) C. Lanczos; Applied Analysis, Prentice Hall (1956) pp. 229-234
- 6) 河田三治; Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to Propeller Theory, 航研報告 172 号 (1939) pp. 10-12
- 7) J.P. Rabbott, Jr.; Static-Thrust Measurements of the Aerodynamic Loading on a Helicopter Rotor Blade, NACA TN 3688 (1956)
- 8) J.R. Meyer, Jr. and G. Falabella, Jr.; An Investigation of the Experimental Aerodynamic Loading on a Model Helicopter Rotor Blade, NACA TN 2953 (1953)
- 9) J.P. Rabbott, Jr., and G.B. Churchill; Experimental Investigation of the Aerodynamic Loading on a Helicopter Rotor Blade in Forward Flight, NACA RM L 56 I07 (1956)
- 10) R.W. Hamming; Numerical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill (1962) pp. 319-321
- 11) H.H. Heyson, and S. Katzoff; Induced Velocities near a Lifting Rotor with Nonuniform Disk Loading, NACA Rep. 1319 (1957)

- 12) J. Scheiman, and L.H. Ludi; Qualitative Evaluation of Effect of Helicopter Rotor-Blade Tip Vortex on Blade Airloads, NASA TN D-1637 (1963)
- 13) R. Courant; Differential and Integral Calculus, Vol. I, Blackie and Son (1937) pp. 251-252
- 14) Z. Kopal; Numerical Analysis, Chapman and Hall (1955) pp. 381-384
- 15) E. Reissner; Boundary Value Problems in Aerodynamics of Lifting Surfaces in Non-Uniform Motion, Bulletin of the Am. Math. Soc., Vol. 55, No. 9 (1949/9) pp. 825-850

既 刊 報 告

- | | | | |
|-------|---|----------|----------------------------|
| TR- 1 | 遷音速風洞測定部に関する予備実験
Preliminary Investigation of N.A.L. Transonic
Wind-Tunnel Test-Section | 1960年2月 | 平木 一, 石井孝雄
大島信彦 |
| TR- 2 | 遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機
I. 模型送風機による性能試験
22.5 MW Main Blower for N.A.L. Transonic
Wind Tunnel
I. Performance Test of the Model Blower | 1960年5月 | 山内正男, 松木正勝
塩入淳平, 富永守之 |
| TR- 3 | 風洞用角度計の試作実験
An Experiment on Angle Measuring Instru-
ments of Airplane Models in Wind Tunnel Test | 1960年8月 | 小橋安次郎, 長洲秀夫
高島一明, 波木井 潔 |
| TR- 4 | 回転円板の強度
Strength of Rotating Discs | 1960年9月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR- 5 | 航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音速
フラッタ試験設備の計画と整備試験
Design and Development of N.A.L. 60 cm×60
cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for
Flutter Testing | 1960年12月 | 中井暎一, 橋 瓜 宏
中村泰治 |
| TR- 6 | 高温歪ゲージの温度特性
Temperature Characteristics of High Tempera-
ture Strain Gage | 1960年12月 | 竹中幸彦 |
| TR- 7 | 遷音速風洞の測定部
On the Transonic Test Section | 1961年1月 | 村崎寿満 |
| TR- 8 | 繰返し荷重試験装置の予備試験
Preliminary Study for Development of Repeat-
ed Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft
Structures | 1961年3月 | 竹内和之, 飯田宗四郎 |
| TR- 9 | 遷音速流小擾乱理論の研究 (I)
—非線型補正理論—
Studies on the Small Disturbance Theory of
Transonic Flow (I)
—Non-Linear Correction Theory— | 1961年3月 | 細川 巖 |
| TR-10 | 喰違い角の大きい減速翼列の研究
Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades | 1961年3月 | 松木正勝, 高原北雄
西脇英夫, 森田光男 |
| TR-11 | 軟鋼円板の回転による降伏
Yielding of Rotating Discs of Mild Steel | 1961年4月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-12 | 薄肉開断面梁の自由振動について
On the Natural Vibration of Thin-Walled Bea-
ms of Open Cross Section | 1961年5月 | 川井忠彦, 埴 武敏 |
| TR-13 | 衝撃波と境界層の干渉についての実験的研究
Experimental Results of the Interaction between
Shock Wave and Turbulent Boundary Layer | 1961年7月 | 須郷道也, 伝田幸雄 |
| TR-14 | 電磁流体の圧縮性境界層
On Compressible Boundary Layer in Magneto-
dynamics | 1961年7月 | 須郷道也, 小沢五郎 |
| TR-15 | 振動翼用圧力ピックアップの試作・校正
Miniature Pressure Pickups for Measuring the
Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic
Flow | 1961年8月 | 石井孝雄, 柳沢三憲 |
| TR-16 | 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法
による数値解法
On the Difference Method Solutions of the
Mixed Boundary Value Problems of Parabolic
Partial Differential Equations | 1961年11月 | 樋口一雄, 三好 甫 |

TR-17	荷電ビームによる気流密度測定の理論的考察 A Theoretical Comment on the Charge-Beam Method of Measuring Gas Density	1961年12月	和田 勇, 細川 巖 三好 甫
TR-18	前置静翼々列と喰違い角の大きい減速翼列の二 次元低速翼列性能と回転翼列性能との比較 Comparison of Inlet Guide Vane and High Stagger Compressor Blade Performance in a Rotor and in Cascade	1961年11月	松木正勝
TR-19	高速翼車の回転強度 Strength on High-Speed Rotor	1961年12月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-20	Blasius 型微分方程式の両側無限遠境界値問題の 数値解法 A Numerical Method for Solving Blasius' Type Differential Equation	1962年1月	樋口一雄, 戸川隼人
TR-21	遷音速における二次元操縦面の研究 (I) An Investigation of Two-dimensional Control Surface at Transonic Speed (I)	1962年1月	神谷信彦
TR-22	変断面梁の曲げ自由振動について On the Free Lateral Vibration of a Beam with Variable Cross Section	1962年2月	川井忠彦, 戸川隼人 林 洋一
TR-23	いくつかの型の偏微分方程式の境界値問題のモン テカルロ法による解法とその実験 Monte Carlo Solutions of the Boundary Value Problems for Some Types of Partial Differen- tial Equations	1962年2月	樋口一雄, 高橋利之 鳥海良三
TR-24	航空技術研究所のターボ・ジェットエンジン要 素試験設備 Test Facilities of Turbo-jet Engine Components at N. A. L.	1962年2月	航空技術研究所原動機部
TR-25	航空技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の計画と構 造 Desing and Construction of the 2m×2m Transonic Wind Tunnel at the National Aeronautical Laboratory	1962年3月	航空技術研究所
TR-26	吹出式超音速風洞のノズルの予備実験 Preliminary Tests of Supersonic Nozzles for the Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1962年3月	河崎俊夫, 岡部裕二郎 尾形吉和, 安藤 尚
TR-27	非定常遷音速流の近似解析 An Approximate Analysis for Unsteady Transonic Flow	1962年7月	細川 巖, 三好 甫
TR-9T	Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Nonlinear Correction Theory—	July 1962	Iwao HOSOKAWA
TR-28	疲労亀裂について On Fatigue Cracks	1962年8月	竹中幸彦
TR-29	1m×1m 吹出式超音速風洞の計画と構造 On the Design and Construction of the 1m×1m Supersonic Blow-down Wind Tunnel	1962年10月	空気力学第二部
TR-30	平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings	1962年10月	川井忠彦, 埴 武敏 戸川隼人, 高橋利之 越出慎一
TR-31	熱応力を受ける薄翼の安定とその微小捩り振動 について On the Instability and Small Natural Torsional Vibration of a Thin Wing under a Thermal Stress	1962年11月	川井忠彦, 林 洋一 戸川隼人
TR-32	補強板の圧縮強度に関する一解析 A Method of Analysis on the Compressive Strength of Stiffened Plates	1962年11月	川井忠彦, 江川幸一

TR-33	主翼繰返し荷重試験装置 Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Wing Structures	1962年12月	竹内和之, 飯田宗四郎 小野幸一
TR-34	高速軸流圧縮機の研究 (I) —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (I) —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝, 大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究 (II) —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (II) —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相
TR-36	衝撃波風洞による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田 勇, 松崎利一
TR-37T	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu WADA
TR-38	鑄鉄のような脆性材料からなる円板の回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究 (第1報) —その性能におよぼす各種因子の影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor (I) —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉, 鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full-Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之, 川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉦一
TR-42	非定常境界層の相似解とその安定 A Similar Solution of Unsteady Laminar Boundary Layer and Its Stability Characteristics	1963年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について (流入角の大きい減速翼列の予備実験) Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤 博, 蓑田光弘 坂口 一, 山崎紀雄
TR-45	固有値問題 ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem ($\sum \lambda^k A_k$) $x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦, 泉 日出夫 戸川隼人, 林 洋一
TR-47	鑄鉄円板の回転破壊におけるコリオリの力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年7月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林 二 識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究 (III) —翼の厚さの影響— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (III) —Effects of Blade Thickness—	1963年9月	松木正勝, 宮地敏雄 大山耕一, 吉田晃 西脇英夫, 岩部柱相

TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の 数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction	1963 年 9 月	樋口一雄, 能美 力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unstable System	1963 年 9 月	武田 峻
TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pabble-Bed Heater	1963 年 9 月	林 二 識
TR-53	円管流の非定常熱伝達 (第1報) 一壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963 年 10 月	林 二 識
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による 数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963 年 10 月	三好 甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor which Has a Boss	1963 年 11 月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-56	亜音速および遷音速における二次元非定常空気 力の測定 (第I報) Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I)	1963 年 11 月	中村泰治, 田辺義一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of an Oscillating Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度 500 フィートないし 10,000 フィートにお ける上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of Gust Velocities from 500 to 10,000 feet Altitude	1964 年 1 月	竹内和之, 小野幸一 山根皓三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Date Reduction System and Its Performance	1964 年 1 月	田畑浄治, 中 正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness	1964 年 1 月	埜 武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音 速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数 の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964 年 2 月	中井暎一, 小原 瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964 年 2 月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964 年 3 月	小橋安次郎, 遠藤 浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁わい計器の応用 Some Developments of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964 年 3 月	幸尾治朗

TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of Stability Characteristics of Unsteady Laminar Boundary Layer	1964年7月	小橋安次郎, 恩地 瑛
TR-66	変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の場合) Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates)	1964年6月	川井忠彦, 堀武敏 越出慎一, 戸川隼人 落合 薫
TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964年4月	井上建二, 野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論 (I) —揚力面理論— Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I) —Lifting Surface Theory—	1964年6月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究 (I) An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964年7月	鳥崎忠雄, 能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory	1965年1月	松浦陽恵, 樋口一雄 池谷光栄, 堀川勇壮 村上力, 百名盛典 三好範子, 岡部正典
TR-71	塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation	1964年7月	中西不二夫, 佐藤和郎
TR-71T	Three Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity	September 1964	Fujio NAKANISHI Yasuo SATO
TR-72	補助翼バスのに関する実験 Some Experiments on Control-Surface Buzz	1965年1月	中村泰治, 田辺義一
TR-72T	Some Experiments on Control-Surface Buzz	November 1964	Yasuharu NAKAMURA Yoshikazu TANABE
TR-73	軸対称凝み点付近の溶融層の安定性 Stability of the Melted Layer near the Axisymmetric Stagnation Point	1964年11月	相原康彦
TR-74	遷音速パネルフラッタの研究 The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter	1964年11月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-75	統計流体力学の初期値問題について On the Initial-Value Problem in Statistical Hydromechanics	1964年12月	細川 巖
TR-76	高速軸流圧縮機の研究 (IV) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV)	1965年1月	大山耕一, 松木正勝 西脇英夫, 岩部柱相 片山泰治
TR-77	Galerkin 法の収束性について On the Convergence of the Galerkin's Method	1965年1月	鳥海良三
TR-78	二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法 Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems	1965年1月	三好 甫

TR-79	引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の大振幅振動の影響について Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates under Initial Tension or Compression	1965年1月	田寺木一, 古関昌次 泉 日出夫
TR-80	変分法直接解法において解に及ぼす束縛の数値的影響 Numerical Effect of Constraints in Calculus of the Direct Variational Method	1965年1月	塙 武敏, 越出慎一
TR-81	FRP コーティングの断熱特性 Thermal Insulation Characteristics of FRP Coating	1965年1月	竹中幸彦, 江川幸一 小川鉦一
TR-82	多段軸流圧縮機の部分負荷特性の簡易計算法 A Simple Method of Calculating the Off-design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressor	1965年2月	松木正勝, 藤井昭一
TR-83	亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (I) —非圧縮流理論— Theoretical Study of Two-Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (I) —Incompressible Flow Case—	1965年2月	石井孝雄
TR-84	遷音速タービン翼列二次元試験 (II) Experimental Investigation on Transonic Turbine Cascades (II)	1965年3月	近藤 博, 養田光弘 山崎紀雄
TR-85	回転翼の線型理論 (II) —揚力線理論— Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (II) —Lifting-Line Theory—	1965年3月	市川輝雄
TR-86	高速多段軸流圧縮機の部分負荷特性の一計算法 A Method for Predicting the Off-design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressors Operating in the Transonic Flow	1965年5月	松木正勝, 藤井昭一 五味光男
TR-87	亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (II) 圧縮流理論 (III) 実験的研究 Study of Two Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (II) Compressible Flow Case (III) Experimental Study	1965年6月	石井孝雄
TR-88	尾翼, 胴体結合構造物の地上振動試験結果に関する定性的な吟味 Qualitative Examinations on the Results of Ground Vibration Tests of Tail Wing-Fuselage Combination Structure	1965年6月	塙 武敏, 越出慎一
TR-89	垂直突風および航空機の突風応答に関する実験的研究 An Experimental Investigation on Vertical Gusts and the Airplane Response	1965年6月	小野幸一, 山根皓三郎
TR-90	ヒステリシスループの形, 繰返しによる形の変化および繰返し後の塑性流動応力の上昇 (第一報実験, 第二報ねじりの場合の理論) The Shape of Mechanical Hysteresis Loop, its deformation due to Stress Repetition and Resulting Increase in Flow Stress (Part 1. Experiment, Part 2. Theory for Torsion)	1965年7月	中西不二男, 佐藤和郎 永井文雄
TR-91	固体プロペラントの割れ目内への火炎伝ば (I) Flame Propagation into the Gap of Solid Propellant Grain (I)	1965年7月	五代富文
TR-92	ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき— An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (I) —Linearized Flow with Axial Symmetry—	1965年8月	谷 喬
TR-93	遷音速動安定試験 Dynamic Testing at Transonic Speed	1965年10月	小橋安次郎, 河野長正 西 武徳

- TR-94 翼幅方向に一樣な揚力分布をもつ半無限の後退翼
On the Camber Lines of Semi-Infinite Sweptback Wings which give Uniform Spanwise Load Distribution 1965 年 10 月 河崎 俊夫
- TR-95 飛行機の縦の操縦特性に関する二三の考察
A Few Comments on the Longitudinal Handling Qualities of Airplanes 1965 年 11 月 荒木 浩
- TR-96 A Generalized Functional Formalism for Turbulence December 1965 Iwao Hosokawa
- TR-97 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (I) —軸対称流れ—
A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (I)
—Non-Swirling Fluids in Ducts— 1965 年 12 月 藤井 昭一
- TR-98 後退角 45°, アスペクト比 4.0 の薄い片持翼の遷音速フラッタ特性に及ぼすテーパ比の影響の実験的研究
Some Effects of Taper Ratio on the Transonic Flutter Characteristics of a Series of Thin Cantilever Wings Having a Sweptback Angle of 45° and an Aspect Ratio 4.0 1965 年 12 月 中井 暎一, 高木 俊朗
安藤 泰勝
- TR-99 計器のよみやすさに関する研究
A Study of Dial Legibility 1966 年 2 月 三好 範子, 岡部 正典
石川 澄子

<p>NAL TR-100 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (III) —揚力線の方程式の解法— 1966年2月 36ページ</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-100 III. 629.13.014.7</p>	<p>NAL TR-100 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (III) —揚力線の方程式の解法— 1966年2月 36ページ</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-100 III. 629.13.014.7</p>
<p>前報で導いた回転翼の揚力線の積分方程式の解法を示す。核の特異性を明らかにし、特異部分を分離した。代表座標点、代表方位角を選ぶことにより、積分方程式は連立1次代数方程式となり数值的に解くことができる。 ホバリングおよび前進飛行の場合につき数値計算を行ない、NA-CAで行なわれた実験結果と比較した。</p>		<p>前報で導いた回転翼の揚力線の積分方程式の解法を示す。核の特異性を明らかにし、特異部分を分離した。代表座標点、代表方位角を選ぶことにより、積分方程式は連立1次代数方程式となり数值的に解くことができる。 ホバリングおよび前進飛行の場合につき数値計算を行ない、NA-CAで行なわれた実験結果と比較した。</p>	
<p>NAL TR-100 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (III) —揚力線の方程式の解法— 1966年2月 36ページ</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-100 III. 629.13.014.7</p>	<p>NAL TR-100 航空宇宙技術研究所 回転翼の線型理論 (III) —揚力線の方程式の解法— 1966年2月 36ページ</p>	<p>I. 市川輝雄 II. NAL TR-100 III. 629.13.014.7</p>
<p>前報で導いた回転翼の揚力線の積分方程式の解法を示す。核の特異性を明らかにし、特異部分を分離した。代表座標点、代表方位角を選ぶことにより、積分方程式は連立1次代数方程式となり数值的に解くことができる。 ホバリングおよび前進飛行の場合につき数値計算を行ない、NA-CAで行なわれた実験結果と比較した。</p>		<p>前報で導いた回転翼の揚力線の積分方程式の解法を示す。核の特異性を明らかにし、特異部分を分離した。代表座標点、代表方位角を選ぶことにより、積分方程式は連立1次代数方程式となり数值的に解くことができる。 ホバリングおよび前進飛行の場合につき数値計算を行ない、NA-CAで行なわれた実験結果と比較した。</p>	

航空宇宙技術研究所報告100号

昭和41年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1,880
電話武蔵野三鷹(042)44-9171(代表)

印刷所 笠井出版印刷社
東京都港区西新橋1の21の8
