

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-112

圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の
作動円盤理論 (II)

—円周速度のある流れ—

藤井 昭一

1966年8月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR- 85 回転翼の線型理論 (II)
—揚力線理論—
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor
Blades (II)
—Lifting-Line Theory— 1965年3月 市川輝雄
- TR- 86 高速多段軸流圧縮機の部分負荷特性の一計算
法
A Method for Predicting the Off-Design
Performance of Multi-Stage Axial-Flow
Compressors Operating in the Transonic
Flow 1965年5月 松木正勝, 藤井昭一
五味光男
- TR- 87 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージ
ェンス (II) 圧縮流理論 (III) 実験的研究
Theoretical Study of Two-Dimensional
Panel Flutter and Panel Divergence in
Subsonic Flow
(II) Compressible Flow Case
(III) Experimental Study 1965年6月 石井孝雄
- TR- 88 尾翼, 胴体結合構造物の地上振動試験結果に
関する定性的な吟味
Qualitative Examinations on the Results
of Ground Vibration Tests of Tail Wing-
Fuselage Combination Structure 1965年6月 塙 武敏, 越出慎一
- TR- 89 垂直突風および航空機の突風応答に関する実
験的研究
An Experimental Investigation on Vertical
Gusts and the Airplane Response 1965年6月 小野幸一, 山根皓三郎
- TR- 90 ヒステリシスループの形, 繰返しによる形の
変化および繰返し後の塑性流動応力の上昇
(第一報 実験, 第二報 ねじりの場合の理
論)
The Shape of Mechanical Hysteresis Loop,
its deformation due to Stress Repetition
and Resulting Increase in Flow Stress
(Part 1. Experiment, Part 2. Thoery for
Torsion) 1965年7月 中西不二夫, 佐藤和郎
永井文雄
- TR- 91 固体プロペラントの割れ目内への火炎伝ば
(I)
Flame Propagation into the Gap of Solid
Propellant Grain (I) 1965年7月 五代富文
- TR- 92 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法
(I) —迎角0のとき—
An Approximate Calculation for Supersonic
Flow Past Rodies of Rocket Vehicles (I)
—Linearized Flow with AxialSymmetry— 1965年8月 谷 喬
- TR- 93 遷音速動安定試験
Dynamic Testing at Transonic Speed 1965年10月 小橋安次郎, 河野長正
西 武徳
- TR- 94 翼幅方向に一樣な揚力分布をもつ半無限の後
退翼
On the Camber Lines of Semi-Infinite
Sweptback Wings which give Uniform
Spanwise Load Distribution 1965年10月 河崎俊夫
- TR- 95 飛行機の縦の操縦特性に関する二三の考察
A Few Comments on the Longitudinal
Handling Qualities of Airplanes 1965年11月 荒木 浩
- TR-96T A Generalized Functional Formalism for
Turbulence Dec. 1965 Iwao Hosokawa
- TR- 97 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の
作動円盤理論 (I) —軸対称流れ—
A Theoretical Investigation of the Com-
pressible Flow Through the Axial Turbo-
Machines (I)
—Non-Swirling Fluids in Ducts— 1965年12月 藤井昭一
- TR- 98 後退角 45°, アスペクト比 4.0 の薄い片持翼
の遷音速フラッタ特性に及ぼすテーパ比の
影響の実験的研究
Some Effects of Taper Ratio on the Tran-
sonic Flutter Characteristics of a Series
of Thin Cantilever Wings Having a
Sweptback Angle of 45° and an Aspect
Ratio 4.0 1965年12月 中井暎一, 高木俊朗
安藤泰勝

圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の

作動円盤理論 (II)*

—円周速度のある流れ—

藤 井 昭 —**

A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (Second Report)

—Swirling Fluids—

By Shoichi FUJII

Actuator disc theories are subjected to treatment in which the blade chord approaches zero and the tangential velocity changes discontinuously. Theories of fluids across actuator discs with the cylindrical flow passage have been evolved by several researchers^{6)~8)}. Recently, a few workers^{9)~11)} have made theoretical approaches to the incompressible flows of turbine or compressor, taking into account the changes of hub and tip radii. The present author, therefore, has carried out a survey of subsonic flows running in turbomachines, together with special reference to both the compressibility and the hub contour. The results for the non-uniform, compressible inviscid flows without the transverse velocity component have been given in an earlier paper¹³⁾ by the author. Accordingly, this paper describes the behavior of swirling flow passing through a row of stationary or rotating cascades replaced by an infinitely thin annular disc.

Another approximate technique which has received considerable attention is the idea of a single parameter developed by other investigators in describing the slope of axial-velocity. While, in this report a similar single parameter $S(z)$ is applied to the radial-velocity profile.

The axial velocity shapes, therefore, are considered to be depending on the differentiation of $S(z)$ with respect to axial co-ordinate z . Thus the problem of three-dimensional flow induced by a row of blades can be simplified using the single parameter as well as the actuator disc.

Other principal assumptions will be made as follows;

(a) The inviscid air considered here is isentropic in the whole region ex-

* 昭和41年5月18日受付

** 原動機部

cept at its disc.

- (b) The radial displacement of the streamlines is very small.
- (c) The rotational velocity fields have the flow pattern near the type of free-vortex.
- (d) The static pressure varies linearly with density.
- (e) The variation of flow passage is so small that we may regard the velocity as the sum of undisturbed and small perturbed quantities.

In addition to the analysis employing the concept of actuator disk, this paper also gives a theory of the three dimensional flow induced by a single row of stationary or rotating blades with finite blade chord and prescribed loading and then the numerical solutions are compared with the corresponding discontinuous approximations.

1. 緒 言

ターボ機械中の流れを厳密に解くことは非常に困難である。外壁や内壁近くに現われる著しい粘性の影響や、翼枚数が有限のために起因する現象、さらに非定常の項まで考慮に入れると膨大な計算になる。粘性の影響をエントロピー変化にのみ帰着させ、円周方向への速度成分変動を無視した場合の任意形状流路を通過する定常圧縮流体に対して、かなり詳しい数値解析法が Wu¹⁾ によって提案された。この方法は亜音速だけでなく超音速圧縮機などにも適用可能と思われるが、計算が大がかりになる。一方、あらかじめ流線の波打ちの形を仮定して問題を解く試みもあり、古くは Wu & Wolfenstein²⁾ により、最近では Brammert & Fiedler³⁾ らによって行なわれているのがその典型的な例であろう。また、McCune^{4),5)} は二重円筒を境界にもつ回転翼列の流れ場を小擾乱の概念を用いて処理し、三次元解（有限翼枚数の解）と従来の無限翼枚数の解（Strip Theory による解）との関係を明らかにした。以上述べたような計算法に対して、一つの回転翼列が無限枚数の翼で形成されているとみなし、かつそれらの翼を軸方向の長さを無視した円盤でおきかえる作動円盤理論（Actuator Disc Theory）に立脚する方法がある。二重円筒を通過する流体に対する作動円盤理論^{6)~8)} はほぼ確立されたようであり、流路変化を伴う非圧縮性流体についても Lewis & Horlock^{9)~11)} らが計算しており、ごく最近、柏原¹²⁾ は任意の流路形状をもつ非圧縮性流体に関して、速度ポテンシャルと流れ関数を直交曲線座標系に選んで、体動円盤の立場から一般的拡張を試みた。要するに、圧縮機やタービンの翼は流体にエネルギーを与えたり、奪ったりする役目を持ちその仕事は翼を通過するときの円周方向速度の変化量と回転速度によって決まってくるものであり、円周方向速度の変化は翼の前縁から後縁にかけてほぼ連続的に起こるが、翼弦長が限りなく小さくなった極限において円周速度は翼を通過するとき不連続変化をするとみなせる。すなわち翼のアスペクト比が無限大であると仮定するのが作動円盤理論である。一方、ターボ機械を流れる流体は高速化す

る傾向にある。それゆえに遷音速圧縮機などの出現をみたわけであるが、これは動翼に対する合成速度が音速を越える部分が局部的に存在するのであって、軸流速度は音速からかなり下の領域にとどめるように空力計算されたものを一般に意味する。他方、翼列の通過前後で密度変化を伴うから平均速度を制御する必要上、外壁や内壁の形状を変化させて流路面積を大きくしたり、小さくしたりせねばならない。その上、流れ様式が自由うず形式のものとは異なる時軸流速度の分布が半径方向に変化し、したがって翼列通過前後の軸流速度差、特に外壁や内壁に近い部分の速度差を適当な大きさにとどめるためにも流路面積を変化させることがしばしばある。また、航空エンジン用多段軸流圧縮機などでは、流量を増大させるために入口の軸流速度をできるだけ上げるが、出口に燃焼器が位置しているから逆に出口に行くにつれて軸流速度をできるだけ下げねばならない。このようなとき流路面積の変化が重要な役割をはたす。したがって現今のターボ機械では圧縮性と壁形状の影響は重要な因子となってきた。

以上のような理由から、筆者は作動円盤的概念のもとに圧縮性と壁形状を同時に加味した流れの解析を進め、円周方向速度をもたない Shear Flow の理論を第 I 報¹³⁾ として報告したので、ここでは円周方向速度が存在する Swirling Flow を考察する。まず誘導した基本方程式を平均半径付近に限定し、壁面近くではこの方程式が近似的に成立するものとする。いわゆる局所適合法を採用した。このようにある半径に着目してターボ機械の流れを論じる方法は、基本的には White head & Beavers¹⁴⁾ によって提案されたもので、軸方向の関数で速度成分の形を規定することは、方程式をかなり簡単化し電子計算機による数値解に適した問題となる。また、作動円盤という仮想面の翼弦上位置については古くから指摘され、空力中心が位置する前縁から25%翼弦に円盤をおく方法、あるいは翼弦の中心または後縁におく計算法も行なわれている。そこで、本報告の最後に作動円盤で翼をおきかえる以前の状態、すなわち翼弦に沿って任意の翼面負荷分布を与えた有限アスペクト比の解を調べ、作動円盤を翼弦の中心においた無限アスペクト比の解と比較した。

2. 理 論

2.1 基礎理論

第 I 報の(1)~(7)式において $\partial/\partial\theta$ の項を零とおくとうずの成分は円筒座標系で、図1をみて

$$\xi = -\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (2)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial(V_\theta r)}{\partial r} \quad (3)$$

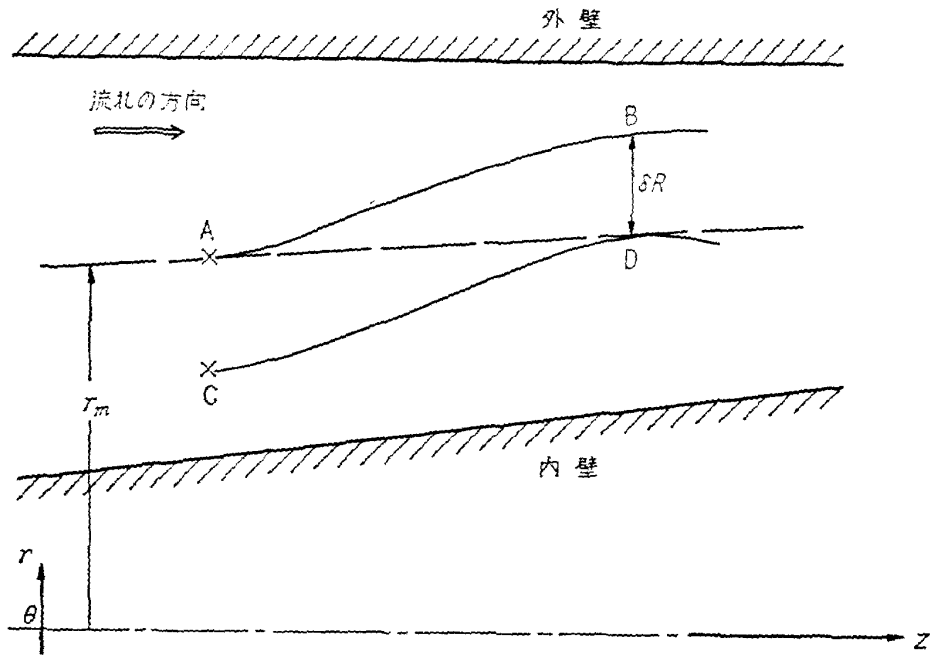


図1 座標系および流線の変位

連続の方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

運動の方程式は

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5)$$

$$\frac{V_r}{r} \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (7)$$

と表わせる。記号について新しく出るものはそのつど説明するが、すでに第I報で用いたものは説明を省略し第7章に一括して集録する。

さて、 V_θ は翼列を通ると不連続的に変化し、その後は次の式で示されるような形にかけると仮定する。

$$V_\theta = C_1(z)r + \frac{C_2(z)}{r} + w \quad (8)$$

ここで $C_1(z)$, $C_2(z)$ は z だけの関数であり、一般にターボ機械の設計では $(C_1 r + C_2/r)$ で示されるような混合うず形式を採用するのが普通である。したがって

$$C_1(z)r + C_2(z)/r \gg w \quad (8)'$$

の関係があるものとする。他の量については第I報と同じように

$$V_z = \frac{G}{\rho_0 A(z)} + u \quad (9)$$

$$V_r = v \quad (10)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (11)$$

$$p = a - \frac{b}{\rho} \quad (12)$$

とおく。(8)~(12) 式を (1)~(7) 式に入れて二次の微小項をすべて省略すると、うず成分は

$$\xi = -\left(C_1' r + \frac{C_2'}{r}\right) - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (13)$$

$$\eta = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (14)$$

$$\zeta = 2C_1 + \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (15)$$

連続の条件は

$$\frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial z} + \frac{Gr}{\rho_0} \left(\frac{1}{A}\right)' + \frac{Gr}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) = 0 \quad (16)$$

運動の方程式は

$$\frac{G}{\rho_0 A} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)^2 \frac{1}{r} - 2w \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) \frac{1}{r} = -\frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \quad (17)$$

$$2C_1 v + \frac{G}{\rho_0 A} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r}\right) + \frac{G}{\rho_0 A} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{G}{\rho_0 A} \left[\frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A}\right)' + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + u \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A}\right)' = -\frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \quad (19)$$

となる。なお、 $(C_1' r + C_2'/r)$ は次に示すような理由から一次の微小項とみなし (17)~(19) 式を導いている。すなわち (6) 式に (1) および (3) 式を入れて変形すると

$$\frac{V_r}{V_z} = \frac{\xi}{\zeta} \quad (20)$$

の関係を得、左辺は明らかに一次の微小項であるから右辺の ξ/ζ も一次の微小量でなければならない。しかるに自由うずに近い流れ形式を仮定すれば、換言すれば $C_1(z)$ が一次の微小項ならば (15) 式から ζ は一次の微小項となり、よって ξ は二次の微小量でなくてはならない。そこで(13) 式より

$$0(\varepsilon^2) \cong -\left(C_1' + \frac{C_2'}{r}\right) - 0(\varepsilon) \quad (21)$$

$0(\varepsilon)$; 一次の微小量

$0(\varepsilon^2)$; 二次の微小量

の関係が得られるから $(C_1' r + C_2'/r)$ は $0(\varepsilon)$ であって、かつ

$$\left(C_1' r + \frac{C_2'}{r}\right) \frac{\partial w}{\partial z} < 0 \quad (22)$$

でなければならない。

(16) 式を r で微分し整理すると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho'}{A} \right) \right] \quad (23)$$

となりこの式と (14), (17) および (19) 式より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial z} - M_0^2 A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) - \frac{G \rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} - \frac{2G \rho_0}{bB} A \left(\frac{1}{A} \right)' \\ & \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{w}{r} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{ただし} \quad M_0^2 = \frac{G^2}{A^2 b} \quad (24)'$$

が得られる。一方 (17) と (19) 式を z , r でそれぞれ微分して $\partial^2 \rho' / (\partial z \partial r)$ の項を消去すると

$$\frac{G}{\rho_0 A} A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = \frac{2}{r} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (25)$$

となり, さらに (18) 式をつかって $\partial w / \partial z$ の項を取り除き次のように表わすこともできる。

$$\frac{G^2}{\rho_0^2 A} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = -4C_1 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{v}{r} \quad (26)$$

したがって (26) 式の右辺は自由うずに近い流れのとき二次の微小項になるから

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = 0 \quad (27)$$

と近似できまた (25) 式から

$$C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (28)$$

となる。

2.2 w , $C_1(z)$ および $C_2(z)$

観点を変えて運動の方程式を全エンタルピー H を用いて表わせば(やはり $\partial / \partial \theta$ の項は零とする)

$$\frac{V_\theta}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} - V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial r} \quad (29)$$

$$\frac{V_r}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

$$-V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} - V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (31)$$

(8)~(11) 式を上の方の三つの式に入れて二次の微小項を省略すると (17)~(19) 式に対応する次の式を得る。

$$2C_1 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) + 2C_1 w + \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{\partial H}{\partial r} \quad (32)$$

$$2C_1v + \frac{G}{\rho_0 A} \left(C_1'r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (33)$$

$$\left(C_1r + \frac{C_2}{r} \right) \left(C_1'r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (34)$$

(32) 式に v を, (34) 式に $\{G/(\rho_0 A + u)\}$ をかけて辺々加えると

$$\left[v \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{G}{\rho_0 A} + u \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] H = \frac{G}{\rho_0 A} \eta v + \frac{G}{\rho_0 A} \left(C_1r + \frac{C_2}{r} \right) \left(C_1'r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (35)$$

なる関係が導け, 上式の左辺は全エンタルピーの流線に沿う変化を表わしているから, 定常で断熱流れにおいては外力が働いていない限り零となる。したがって

$$\eta v + \left(C_1r + \frac{C_2}{r} \right) \left(C_1'r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (36)$$

とおける。(14)式からみて η は一次の微小項であるから (36) 式の二次の微小量 ηv を省略すると

$$\left(C_1'r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_L \cong 0 \quad (37)$$

なる関係が得られる。ただしサフィックス L は流線に沿う変化を示す。(28) 式と (37) 式を見比べてみるといま進めている近似の範囲内では $\partial w/\partial z$ の積分路を $r = \text{const}$ なる面にとっても, 流線に沿ってとってもしつかえないことがわかる。そこで, 流線の一つが平均半径に沿って大きくはなれない, すなわち流線の変位量が小さいものとする (37) 式は平均半径 $r = r_m$ に沿って積分でき, 近似的に

$$w = - \int_{\beta}^z \left(C_1'r_m + \frac{C_2'}{r_m} \right) dz + w_0(\beta) \quad (38)$$

となる。ただし作動円盤は $z = \beta$ におかれ, $w_0(\beta)$ はその位置での値を示す。

次に $C_1(z)$ および $C_2(z)$ の形を決定する。(8)' 式からわかるように w に対して $C_1r + C_2/r$ がかなり大きな項となるように定めさえすればよいのであるから $(V_0 - w)r_m$ が平均半径に沿って一定となるようにする。すなわち

$$C_1r_m^2 + C_2 = \text{const.} \quad (39)$$

よってこれを満足する一組の解として

$$C_1(z) = \frac{\bar{a}}{r_m^2} \quad (40)$$

$$C_2(z) = \bar{b} \quad (41)$$

を求めることができる。ただし \bar{a} , \bar{b} は流れ様式パラメータ (Flow Pattern Parameter) と名づける定数である。(40), (41) 式の関係は次のように考えても得られる。図1 で平均半径上にあった A 点は流れている間に平均半径上からずれて点 B の位置にいき, 逆に点 C は平均半径上の点 D に移るものとする。(6) 式からわかるように外力の働いていないとき rV_0 は流線に沿って一定

となることを利用する。

まず

$$(rV_\theta)_B = (rV_\theta)_D + \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} \delta R \quad (42)$$

と表わす。ただし δR は点 B の平均半径 r_m からの変位量、サフィックスはそれぞれその点での rV_θ の値を示すものとする。ところが $(rV_\theta)_B$ は同じ流線上にある $(rV_\theta)_A$ に等しく、かつ $\partial(rV_\theta)/\partial r$ は (3) 式より ζr になるから、結局 (42) 式は

$$(rV_\theta)_A = (rV_\theta)_D + \zeta r \delta R \quad (43)$$

とかける。前述したように ζ は自由うずに近い流れでは一次の微小項と解釈でき、さらに変位 δR が小さな量であるならば近似的に

$$(rV_\theta)_A = (rV_\theta)_D \quad (44)$$

とおけ、平均半径を一つの流線とみなせる。そこで A , D 間に起こる変化を全微分記号で表わせば (44) 式は

$$r_m w + C_1 r_m^2 + C_2 = (r_m + dr_m)(w + dw) + (C_1 + dC_1)(r_m + dr_m)^2 + (C_2 + dC_2) \quad (45)$$

とかける。したがって $w=0$ のとき、すなわち $(V_\theta - w)r_m$ が平均半径に沿って一定となるように定めているのであるから

$$C_1 \propto \frac{1}{r_m^2} \quad (46)$$

$$dC_2 = 0 \quad (47)$$

の関係が導け、これから (40), (41) 式を得ることもできる。

以上から (38) 式の w はさらに簡単になり

$$w = - \int_{\beta}^z C_1' r_m dz \quad (48)$$

とかける。ただし $w_0(\beta)$ は作動円盤のおかれている位置での円周速度の小擾乱であるから、流れは翼すなわち作動円盤によって円周方向に完全に規制されるものと考えて

$$w_0(\beta) = 0 \quad (49)$$

とする。よって平均半径の近傍で V_θ は次のように表わせる。

$$V_\theta = \frac{\bar{a}}{r_m^2} r + \frac{\bar{b}}{r} - \int_{\beta}^z C_1' r_m dz \quad (50)$$

2.3 うず成分 η について

軸流入の場合を取り扱おうと作動円盤通過直後での η は (29) 式を使い、二次の微小項を省略し、 $z=\beta$ での r_m , A , η の値をそれぞれ $r_m(\beta)$, $A(\beta)$, $\eta(r, \beta)$ と表わせば

$$2r \cdot \frac{\bar{a}}{r_m(\beta)} \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r^2} \right] - \frac{G}{\rho_0 A(\beta)} \cdot \eta(r, \beta) = 2r \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} \Omega + \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_0 \quad (51)$$

とかける。ただし Ω は角速度, $(\partial H/\partial r)_0$ は円盤に流入するとき全エンタルピーがもっているこう配である。もし円盤の前方でうずなし流れ, すなわち $(\partial H/\partial r)_0$ が零ならば (51) 式は次のようにかき直せる。

$$\eta(r, \beta) = \frac{\rho_0 A(\beta)}{G} \left[2r \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} \right] \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r^2} - \Omega \right] \quad (52)$$

したがって (27) 式の関係から

$$\eta(r, z) = \frac{A(z)}{A(\beta)} \left[\frac{\rho_0 A(\beta)}{G} \right] \left[2r \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} \right] \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r^2} - \Omega \right] \quad (53)$$

または

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} \\ C_2 &= \bar{b} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

を用いて

$$\eta(r, z) = \left[\frac{A(z)\rho_0}{G} \right] 2r\bar{C}_1 \left(\bar{C}_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) - \left[\frac{A(z)\rho_0}{G} \right] (2r\bar{C}_1\Omega) \quad (55)$$

となる。

さらに

$$\left(\bar{C}_1 r + \frac{C_2}{r} \right) r \equiv g(r) \quad (56)$$

$$\frac{A(z)\rho_0}{G} \equiv R(z) \quad (57)$$

$$G_1(r) = g \frac{dg}{dr} \quad (58)$$

$$G_2(r) = - \left(\frac{dg}{dr} \right) \Omega \quad (59)$$

のように定義すると (55) 式は

$$\eta(r, z) = R(z) \frac{G_1(r)}{r^2} + R(z) G_2(r) \quad (60)$$

と表わせ, $G_2(r)$ は翼列通過後の全エンタルピーのこう配であり, たとえ $(\partial H/\partial r)_0$ が零であっても自由うず形式以外の流れ様式においては, 動翼後で $G_2(r)$ が存在することになり

$$\eta_2(r, z) = R(z) G_2(r) \quad (61)$$

と表わせば $\eta_2(r, z)$ は Lewis¹¹⁾ らの述べている Smoke-ring Vorticity のことであり第 I 報の (34) 式に相当する。一方, 静翼後の流れのときは $G_2(r) = 0$ となるから

$$\eta_1(r, z) = R(z) \frac{G_1(r)}{r^2} \quad (62)$$

とおくと $\eta_1(r, z)$ は Streamwise Vorticity の円周方向成分にはかならない。そこで Bragg & Hawthorne⁷⁾ の導いたうず成分 η の厳密な式

$$\frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{(rV_\theta)}{r^2} \frac{d(rV_\theta)}{d\phi} - \frac{dH}{d\phi} \quad (63)$$

ϕ : 流れ関数

と見比べて (60) 式の近似度を検討すると, η は一次の微小項であるから密度変化の影響は二次の微小量となり (63) 式の左辺で

$$\frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\eta}{r} \right) \approx \left(\frac{\eta}{r} \right) \quad (64)$$

とおいたことになり, さらに (63) 式の右辺の第一項および第二項は r ならびに z の関数であるのを分離して $R(z)$, $G_1(r)$ および $G_2(r)$ なる関数をつかって近似したことになる。

2.4 自由うず流れ様式

(8) 式で $C_1(z)=0$ とおくと自由うず形式となり (48) 式から $w=0$ が得られ, したがってうず成分 $\xi=\zeta=0$ となる。もし $(\partial H/\partial r)_0=0$ ならば η も零となり完全なうずなし流れ場である。一方 $\eta \neq 0$ なるとき (24) 式は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1-M_\theta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_\theta^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ - \frac{G\rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(\frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (65)$$

そこで (65) 式の右辺の最後の項は

$$\frac{G\rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(\frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} = \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{1}{r} M_\theta^2 \quad (66)$$

とかき直せる。ここで M_θ は円周マッハ数を表わし

$$M_\theta^2 = \frac{(C_2/r)^2}{b/\rho_0^2} \quad (67)$$

である。ここで, もし $M_\theta=0$ とおけば第 I 報の (37) 式が得られる。

2.5 $S(z)$ を用いて v の偏微分方程式を常微分方程式にすること

単一パラメータ $S(z)$ を使って半径方向速度が r の二次式

$$v = Sr^2 + \chi_1(S, z)r + \chi_2(S, z) \quad (68)$$

で表示できるものとし, 半径方向の境界条件として

$$Sr_i^2 + \chi_1 r_i + \chi_2 = 0 \quad (\text{外壁}) \quad (69)$$

$$Sr_h^2 + \chi_1 r_h + \chi_2 = V_h(z) \quad (\text{内壁}) \quad (70)$$

を与えると (68) 式は次のようになる。

$$v = S[r^2 + F_2(z)r + F_4(z)] + F_1(z)r + F_3(z) \quad (71)$$

ここに

$$F_1(z) = -\frac{V_h}{r_i(1-\nu)} \quad (72)$$

$$F_2(z) = -r_i(1+\nu) \quad (73)$$

$$F_3(z) = \frac{V_h}{1-\nu} \quad (74)$$

$$F_4(z) = r_i^2\nu \quad (75)$$

$$\nu = \frac{r_h}{r_i} \quad (76)$$

(71) 式を (24) 式に入れて S に関する次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} & S''(1-M_o^2)(r^2+F_2r+F_4) \\ & + S' \left[2(1-M_o^2)(F_2'r+F_4') - 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (r^2+F_2r+F_4) \right] \\ & + S \left[3 + (1-M_o^2)(F_2''r+F_4'') - \frac{F_4}{r^2} - 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2'r+F_4') \right] \\ & = \frac{F_3}{r^2} + 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1'r+F_3') - (1-M_o^2)(F_1''r+F_3'') \\ & + \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G^2}{bA} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) - \frac{G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} - \frac{2G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \\ & \left(C_1r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{w}{r} \end{aligned} \quad (77)$$

上式はある任意の半径上で厳密に満足する式であるからその半径として平均半径 $r_m = (r_i + r_h)/2$ を選び、すなわち局所適合 (local collocation) を行なって (27), (48) および (53) 式を考慮し次の S に関する線型非斉次常微分方程式を導くことができる。

$$\begin{aligned} & S''(1-M_o^2)(r_m^2+F_2r_m+F_4) \\ & + S' \left[2(1-M_o^2)(F_2'r_m+F_4') - 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (r_m^2+F_2r_m+F_4) \right] \\ & + S \left[3 + (1-M_o^2)(F_2''r_m+F_4'') - \frac{F_4}{r_m^2} - 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2'r_m+F_4') \right] \\ & = \frac{F_3}{r_m^2} + 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1'r_m+F_3') - (1-M_o^2)(F_1''r_m+F_3'') \\ & + \frac{2\rho_o A'(z)}{G} \frac{\bar{a}}{r_m(\beta)} \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r_m^2(\beta)} - \Omega \right] - \frac{G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \\ & \left(C_1r_m + \frac{C_2}{r_m} \right)^2 \frac{1}{r_m} + \frac{2G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1r_m + \frac{C_2}{r_m} \right) \frac{1}{r_m} \int_{\beta}^z C_1'r_m dz \quad (78)* \end{aligned}$$

注) * 式で単に r_m とかいてあるのは z だけの関数であり, $r_m(\beta)$ と表わしてあるのは $z=\beta$ での r_m の値を意味する。

なお自由うずで $\eta \neq 0$, すなわち円盤前方流での全エンタルピーこう配 $(\partial H/\partial r)_0$ と円盤通過のとき新たにできるこう配 $(\partial H/\partial r)_1$ が存在するとき (78) 式の右辺は次のようにかき直さねばならない。

$$\begin{aligned} & \frac{F_3}{r_m^2} + 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1' r_m + F_3') - (1 - M_o^2) (F_1'' r_m + F_3'') \\ & - \frac{A'(z) \rho_o}{G} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_0 + \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_1 \right] - \frac{G \rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(\frac{C_2}{r_m} \right)^2 \frac{1}{r_m} \end{aligned} \quad (79)$$

$z = \alpha, \gamma$ をそれぞれ作動円盤からかなりはなれた前方, 後方の位置の座標とすると S に対する条件は次のようにかける。

$z = \alpha, \gamma$ で

$$S = 0 \quad (80)$$

$z = \beta$ で

$$S_1 = S_2 \quad (81)$$

$$S_2' - S_1' = \frac{[\eta]_\beta}{[r_m^2(\beta) + F_2(\beta) r_m(\beta) + F_4(\beta)]} \quad (82)$$

$$[\eta]_\beta = \frac{2\rho_o A(\beta)}{G} \frac{\bar{a}}{r_m(\beta)} \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r_m^2(\beta)} - \Omega \right] \quad (83)$$

自由うず流れ形式のとき (83) 式は

$$[\eta]_\beta = - \frac{\rho_o A(\beta)}{G} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_1 \quad (84)$$

となり, もし $(\partial H/\partial r)_1 = 0$ ならば S および S' は $z = \beta$ で連続する。

2.6 軸流速度

$$\bar{F}(r, z) = \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \eta \right) dr \quad (85)$$

とおき, $\bar{F}(r, z)$ の上流, 下流の値にそれぞれサフィックス 1, 2 を付けて表わせば (53) および (71) 式をつかって

$$\bar{F}_1(r, z) = \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + (S'F_2 + F_1' + SF_2') \frac{r^2}{2} + (S'F_4 + F_3' + SF_4') r \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(r, z) = & \left(\frac{S'}{3} \right) r^3 + (S'F_2 + F_1' + SF_2') \frac{r^2}{2} + (S'F_4 + F_3' + SF_4') r \\ & - \frac{\rho_o A(z)}{G} \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} r^2 + 2\bar{b}(l_n r) - \Omega r^2 \right] \end{aligned} \quad (87)$$

l_n : 理論対数

とかける。したがって軸流速度は上流および下流でそれぞれ

$$V_{z1} = \frac{G}{\rho_o A(z)} + \bar{F}_1(r, z) + f_1(z) \quad (88)$$

$$V_{z2} = \frac{G}{\rho_o A(z)} + \bar{F}_2(r, z) + f_2(z) \quad (89)$$

のように表わせるから連続の条件をまんぞくするように関数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ を決めねばならない。それには第 I 報で行なった方法のほかに次のようにもできる。まずある任意の軸方向位置 z で、連続の式

$$\rho_0 \int_{r_h}^{r_t} u r dr + \frac{G}{\rho_0 A(z)} \int_{r_h}^{r_t} \rho' r dr = 0 \tag{90}$$

および小擾乱密度の式 (付録 1 参照)

$$\rho' = \rho_0 \left[\frac{C_0}{\sqrt{V^2 - V_0^2 + C_0^2}} - 1 \right] \tag{91}$$

C_0 : 基準点の音速

V : 合成速度

を満足するような $f_1(z)$, $f_2(z)$ を求めていけばよい。ただし基準点の状態をサフィックス 0 を付けて表わし, 上, 下流を同時に表現するためにサフィックス 1, 2 は省略してある。

2.7 仮想気体近似

翼列理論においても仮想気体による近似は古くから行なわれているが^{15)~17)}, いずれもエネルギー

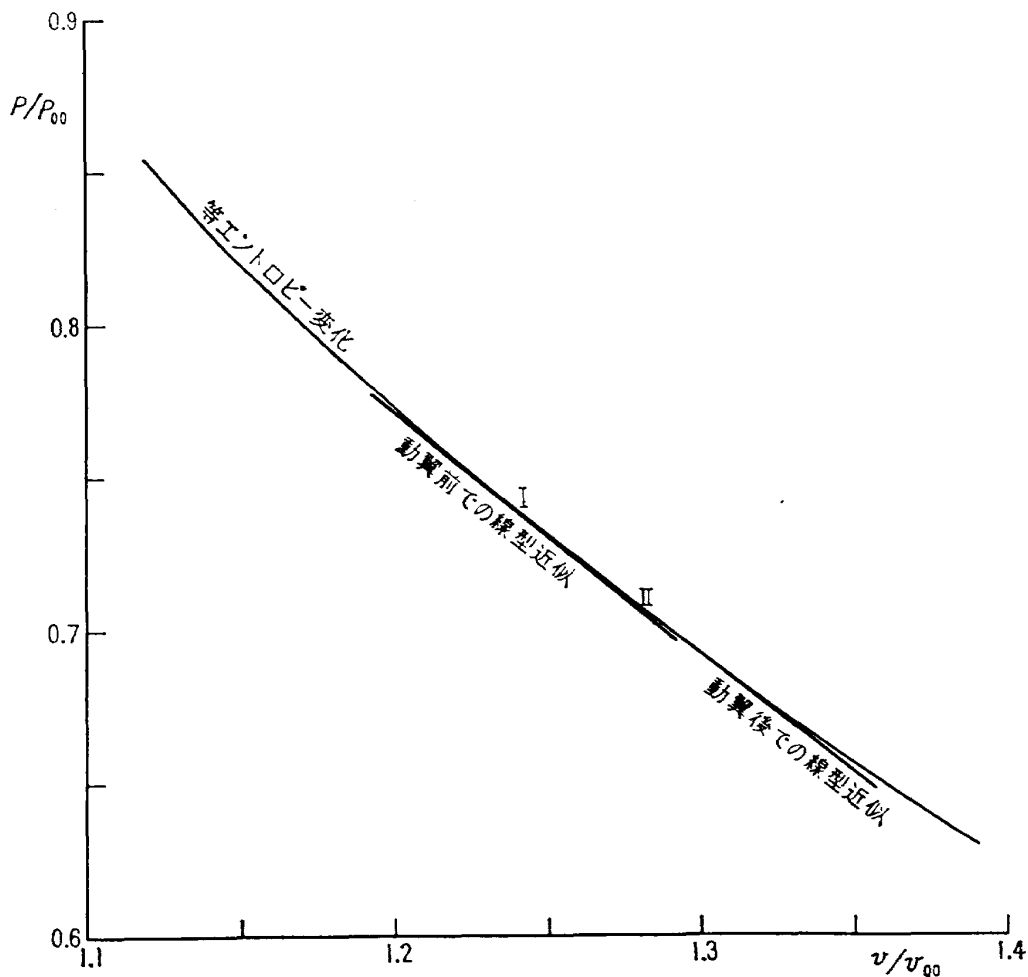


図2 エネルギー・レベルの変化する場合の仮想気体近似

一基準の変化しない場合である。本報告では静翼だけでなく動翼後の流れも合わせて考えているから、全温や全圧が作動円盤の前後で変化している。すなわち円盤の通過前と通過後で独立に等エントロピー場を考えねばならない。したがってターボ機械入口に基準点をおいて決定した定数 a , b をつかった近似式 (12) で動翼後における圧力, 密度の関係まで規制しないで, 円盤通過直後を基準点に選び直して決定した a , b をつかって動翼後の状態を線型近似すべきである。これらのことを具体的に数値例をあげて以下に説明する。 p を圧力, v を比体積とし, 入口状態の値にサフィックス I , せき上め状態の値にサフィックス ∞ を付けて表わすと, 図 2 をみて入口状態 I でそのこう配まで等エントロピー変化の場合と等しくなるようにすれば, (12) 式は次のようになる。

$$\frac{p}{p_{\infty}} - \frac{p_I}{p_{\infty}} = -\frac{C_I^2}{p_{\infty}v_{\infty}} \left(\frac{v_{\infty}}{v_I} \right)^2 \left(\frac{v}{v_{\infty}} - \frac{v_I}{v_{\infty}} \right) \quad (92)$$

C_I : 入口での音速

入口状態 I で全温 288°K , 全圧 $1.033 \times 10^4 \text{kg/m}^2$, 空気流量 9.8kg/s および流路面積 0.0453m^2 , (外径 0.2m , 入口ボス比 0.80) のとき

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_I}{p_{\infty}} &= 0.740 \\ \frac{v_I}{v_{\infty}} &= 1.240 \\ -\frac{C_I^2}{p_{\infty}v_{\infty}} \left(\frac{v_{\infty}}{v_I} \right)^2 &= -0.846 \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

となり, この定数を動翼前方で使用する。次に, 動翼通過直後の状態をサフィックス II を付けて表わし, 動翼によって 15°C の全温上昇が得られ断熱効率を 100% とすれば, II の状態では全温 303°K 全圧 $1.225 \times 10^4 \text{kg/m}^2$ に変化し, 面積は壁の傾斜のために 0.0435m^2 になると規定するとき

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{II}}{p_{\infty}} &= 0.708 \\ \frac{v_{II}}{v_{\infty}} &= 1.280 \\ -\frac{C_{II}^2}{p_{\infty}v_{\infty}} \left(\frac{v_{\infty}}{v_{II}} \right)^2 &= -0.790 \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

が動翼後で使う定数となる。要するに動翼のとき円盤で線型近似の定数が不連続変化する。

3. 数 値 例

(78) 式で表わされる S の二階常微分方程式の数値解について述べる。まず (78) 式は次のように正規化できる。

$$S'' + f(z)S' + g(z)S = k(z) \quad (96)$$

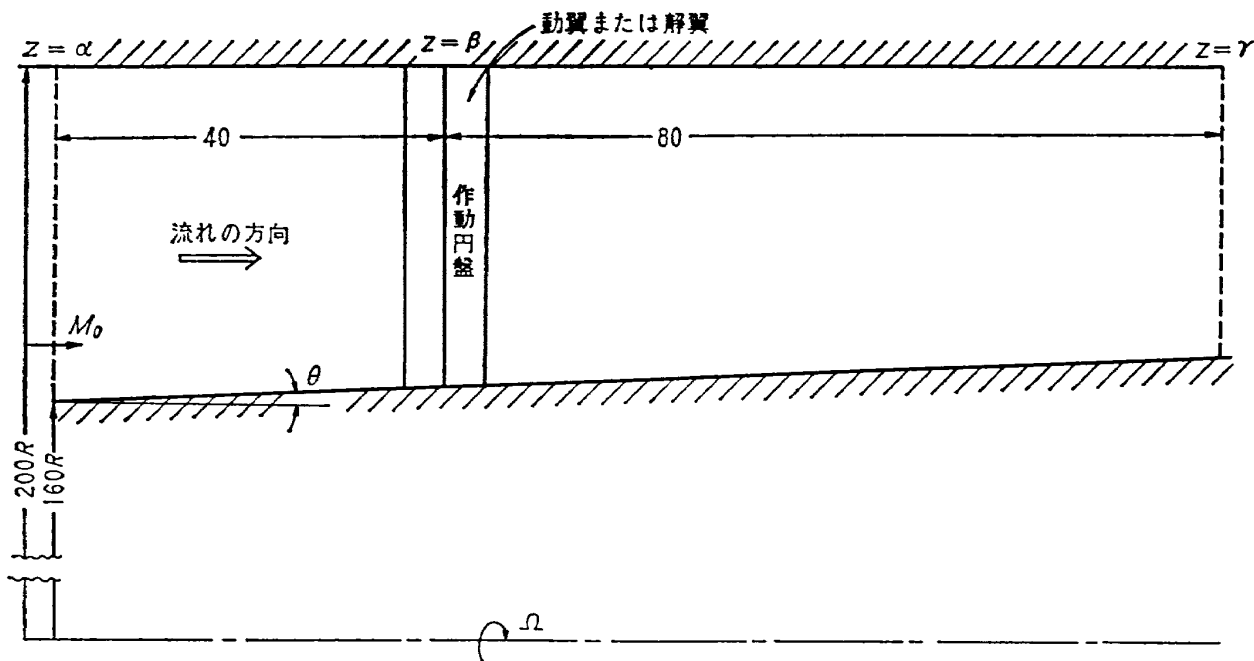


図3 数値例の圧縮機 (単位mm)

ここで

$$f(z) = 2 \left\{ \frac{F_2' r_m + F_4'}{r_m^2 + F_2 r_m + F_4} - \frac{M_o^2}{1 - M_o^2} A \left(\frac{1}{A} \right)' \right\} \quad (97)$$

$$g(z) = \frac{F_2'' r_m + F_4''}{r_m^2 + F_2 r_m + F_4} + \frac{1}{(1 - M_o^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4)} \left\{ 3 - \frac{F_4}{r_m^2} - 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_2' r_m + F_4') \right\} \quad (98)$$

$$k(z) = \frac{1}{(1 - M_o^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4)} \left\{ \frac{F_3}{r_m^2} + 2M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' (F_1' r_m + F_3') - (1 - M_o^2)(F_1'' r_m + F_3'') + p(z) \right\} \quad (99)$$

$$p(z) = \frac{2A' \rho_o}{G} \frac{\bar{a}}{r_m(\beta)} \left\{ \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta)} + \frac{\bar{b}}{r_m^2(\beta)} - \Omega \right\} - \frac{G \rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m} \right)^2 \frac{1}{r_m} + \frac{2G \rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m} \right) \frac{1}{r_m} \int_{\beta}^z C_1'(z) r_m dz \quad (100)$$

そこで (96) 式を二点境界値問題として、図3のように静翼または動翼のみを付けた場合について計算した。まず翼を作動円盤でおきかえ、入口ボス比0.8, 外径 $r_i=200\text{mm}$, $\alpha=0$, $\beta=40\text{mm}$, $\gamma=120\text{mm}$ と規定し α から γ までの区間を 2mm 間隔で60等分し S についての59元連立方程式を立てた (付録2参照)。作動円盤からかなり離れた位置にあるとみなせる $z = \alpha, \gamma$ で (80) の境界条件が成立し、円盤の位置では (81) および (82) の条件をみたすように連立方程式を電子計算機 (HIPAC 103) で解いた。流れ様式パラメータについては $\bar{a}=-1$, $\bar{b}=10$ と定め、せばまり流れ

($\tan \theta = +0.05$) の場合、静翼と動翼 ($\Omega = 1,700 \text{sec}^{-1}$) に関してそれぞれ流量を三種類変えて計算したのが図4であり、広がり流れ ($\tan = -0.05$) の場合について同じような数値解を試みたのが図5である。いずれも縦軸に単一パラメータ $S(z)$ を、横軸に入口から測った軸方向への長さを記入した。静翼の場合はマッハ数が高くなるほど $S(z)$ の絶対値も大きくなるが、動翼のときは逆にマッハ数が低くなるほど $S(z)$ の値が大きくなることがわかった。次に軸流速分布の様子を知るために (86) および (87) 式の \bar{F}_1, \bar{F}_2 を計算し内壁での値 $\bar{F}_{1n}, \bar{F}_{2n}$ との差をとり、さらに無次元化するためある代表の値でわったものを縦軸にプロットしたのが図6~9である。たとえば

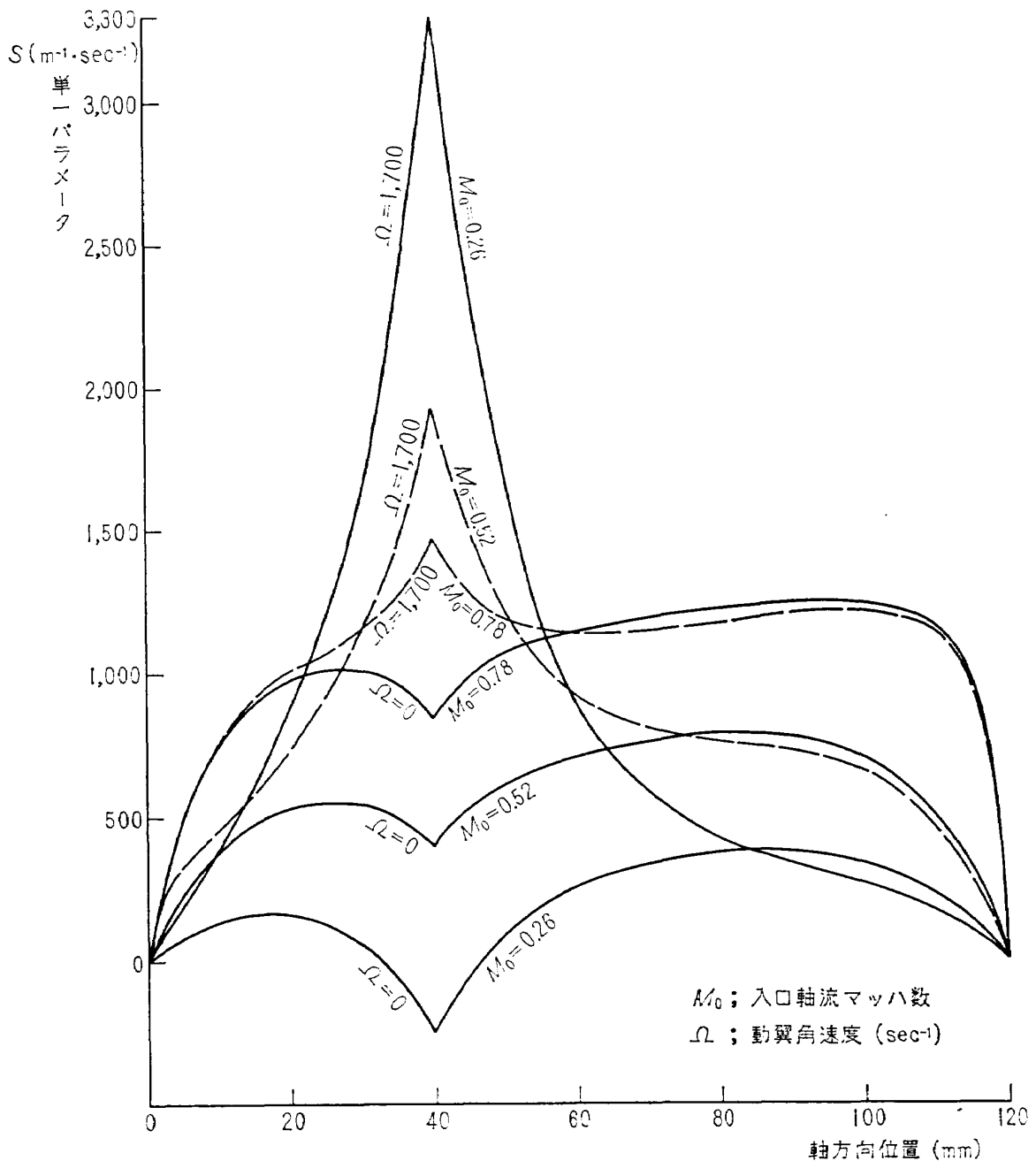


図4 せばまり流れ ($\tan = +0.05, \bar{a} = -1, \bar{z} = 10$)

図6(a)の縦軸の値は $(\tilde{F}_1 - \tilde{F}_{1h})$ を、 $M_0=0.78$, $x/r_i=-0.10$ のときの外壁と内壁における差 $(\tilde{F}_1 - \tilde{F}_{1h})$ で割ったものである。横軸は外壁から内壁までを4等分した半径位置を意味し、 x は作動円盤を起点とし下流方向をプラスにとってある。図6および図8が示すように静翼の場合、マッハ数が大きくなるほど軸方向に流れて生ずる速度分布の変化量も大きくなる。しかるに図7および図9の動翼の場合、マッハ数が大きくなると速度分布の変化量は小さくなる傾向を示している。

図10～図13に半径方向の速度 v を軸方向の距離3箇所についてプロットした。 $x/r_i=0.40$ は $z=r$ に、 $x/r_i=-0.20$ は $z=\alpha$ に相当するから、それらの位置で v は直線的に変化し、作動円盤直後

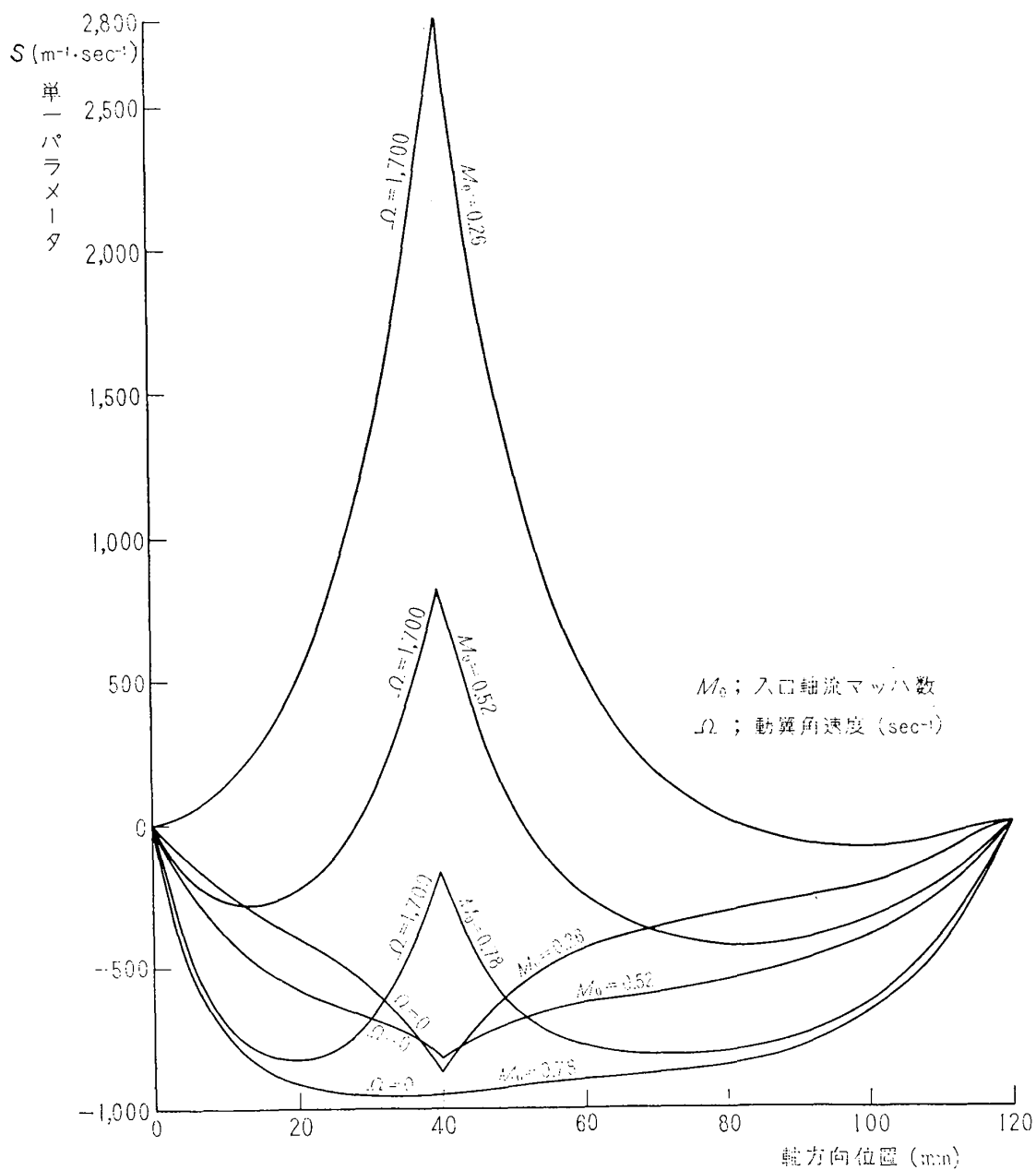


図5 広がり流れ ($\tan\theta=-0.05$, $\bar{a}=-1$, $\bar{\delta}=10$)

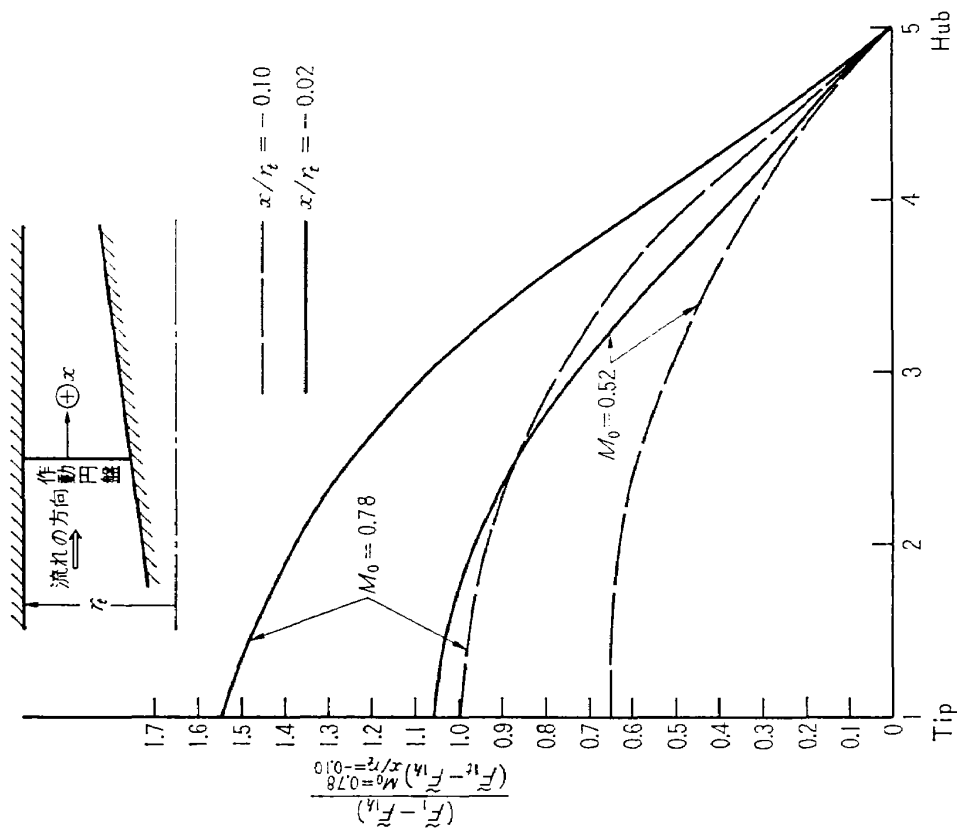


図 6 (a) $\tan\theta=0.05, \Omega=0$

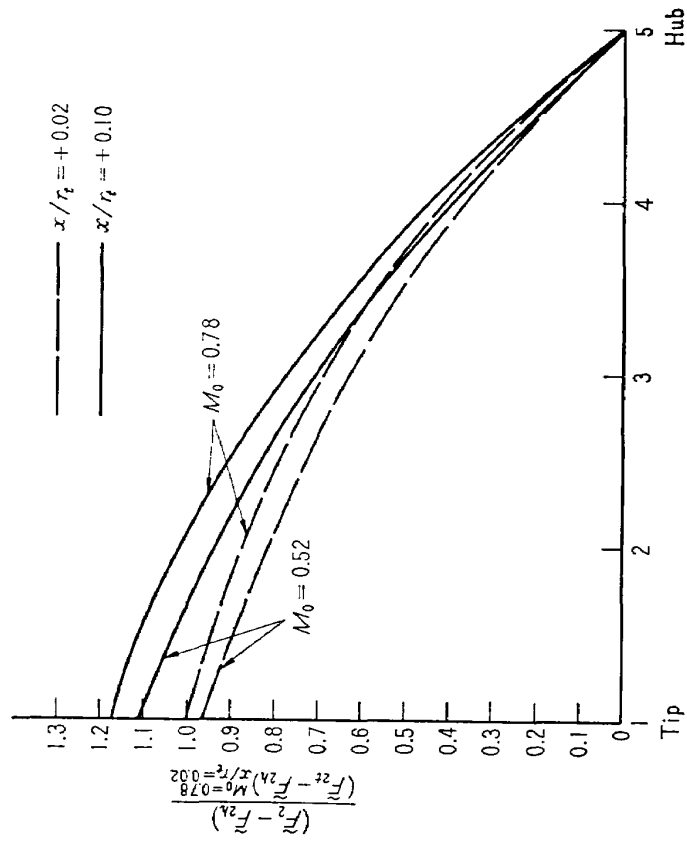


図 6 (b) $\tan\theta=0.05, \Omega=0$

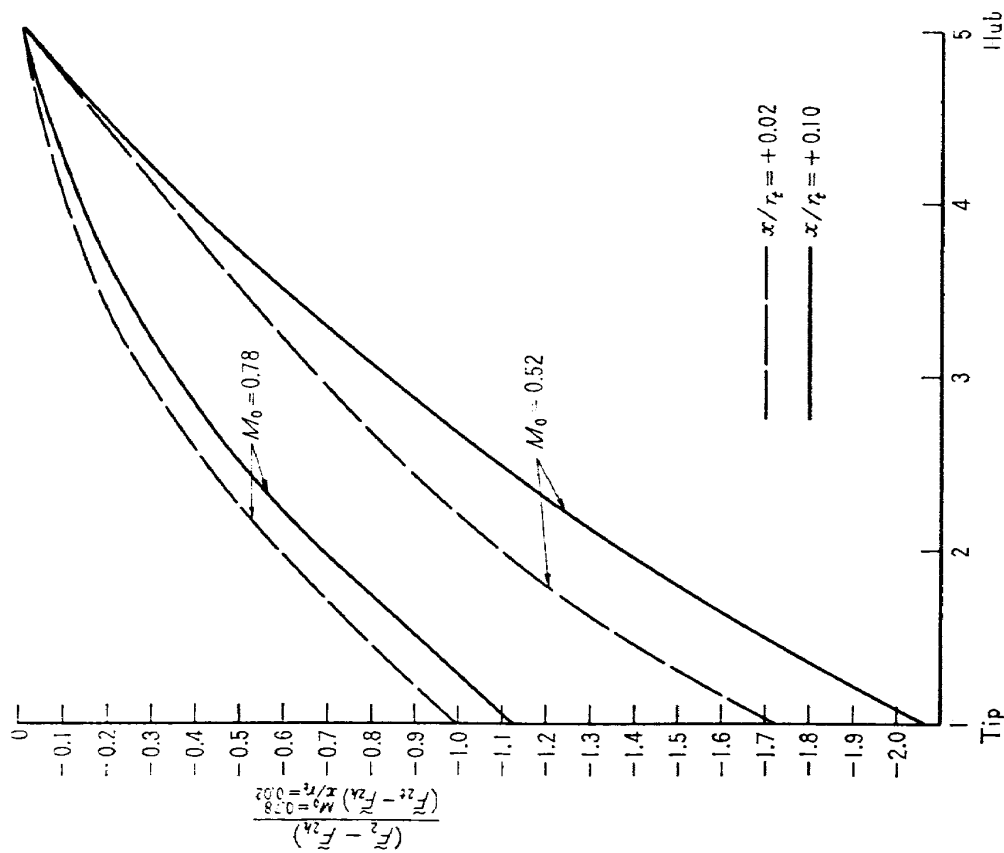


図 7 (b) $\tan\theta = 0.05$, $\Omega = 1,700$

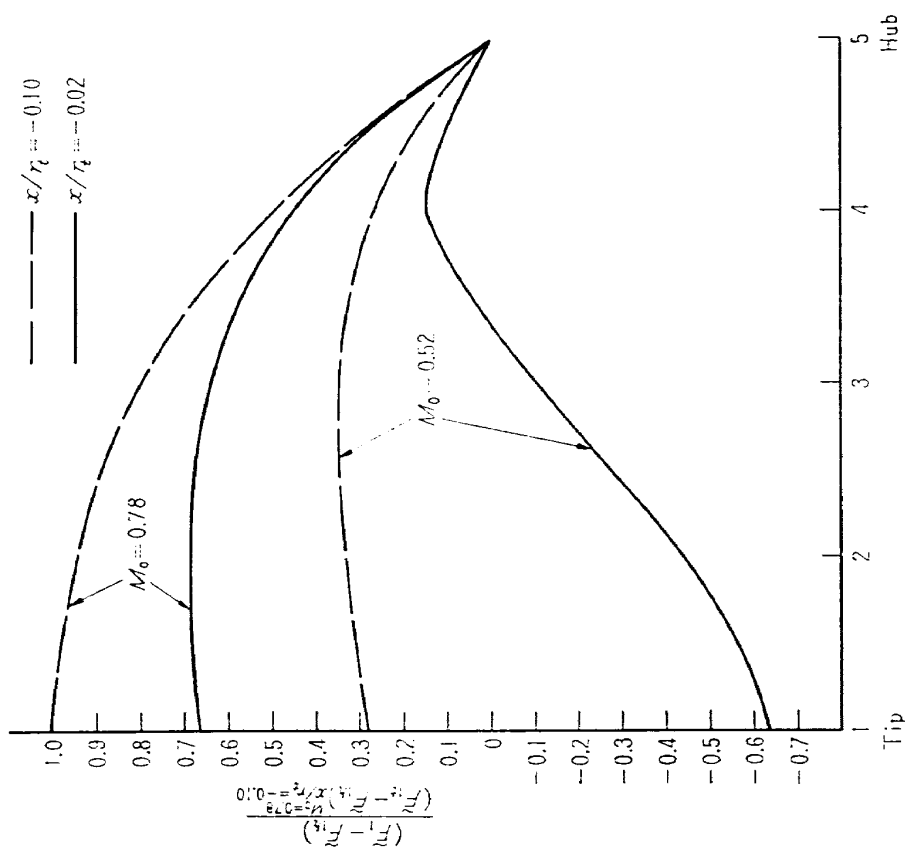


図 7 (a) $\tan\theta = 0.05$, $\Omega = 1,700$

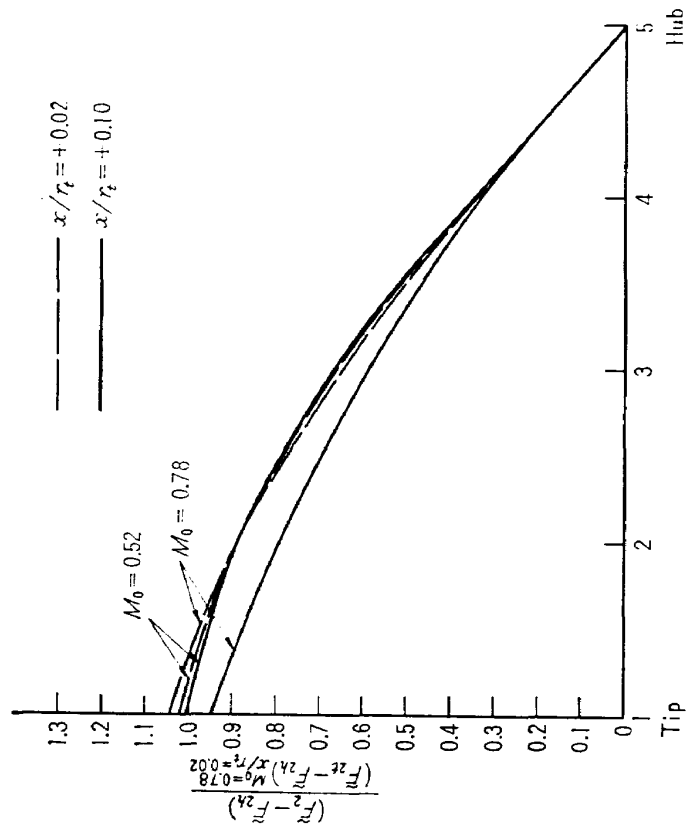


図 8 (b) $\tan\theta = -0.05, \Omega = 0$

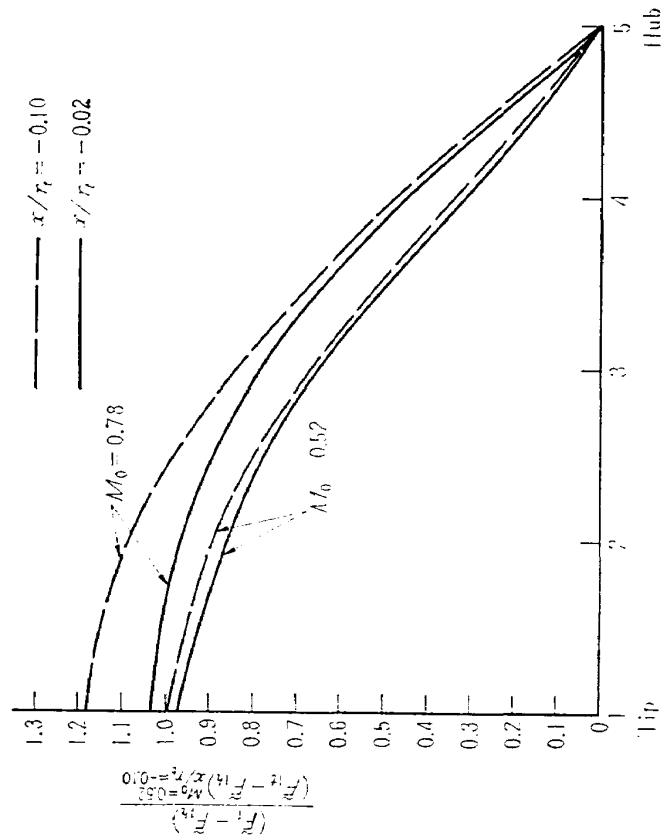


図 8 (a) $\tan\theta = -0.05, \Omega = 0$

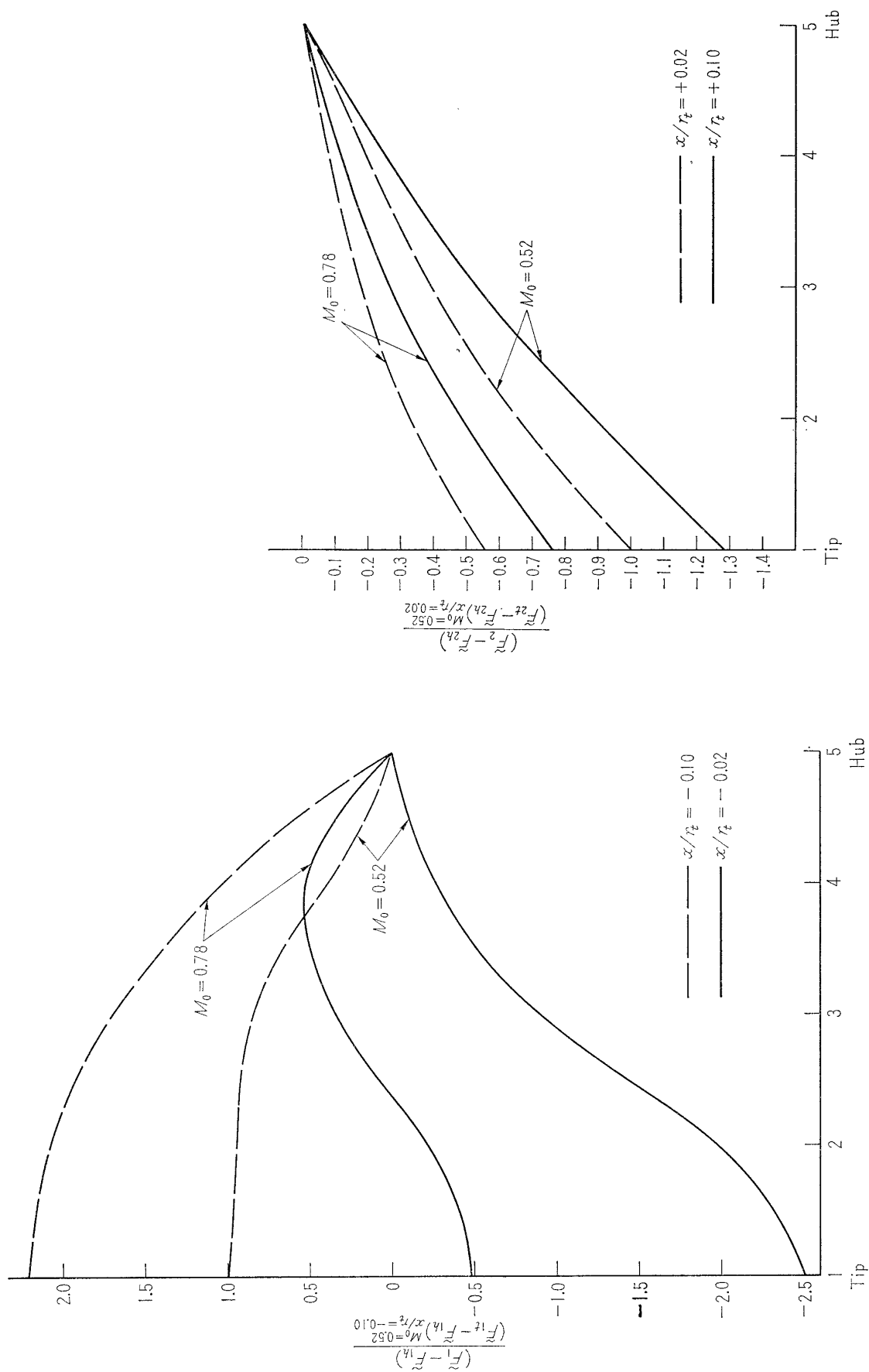


図9 (b) $\tan\theta = -0.05, \Omega = 1,700$

図9 (a) $\tan\theta = -0.05, \Omega = 1,700$

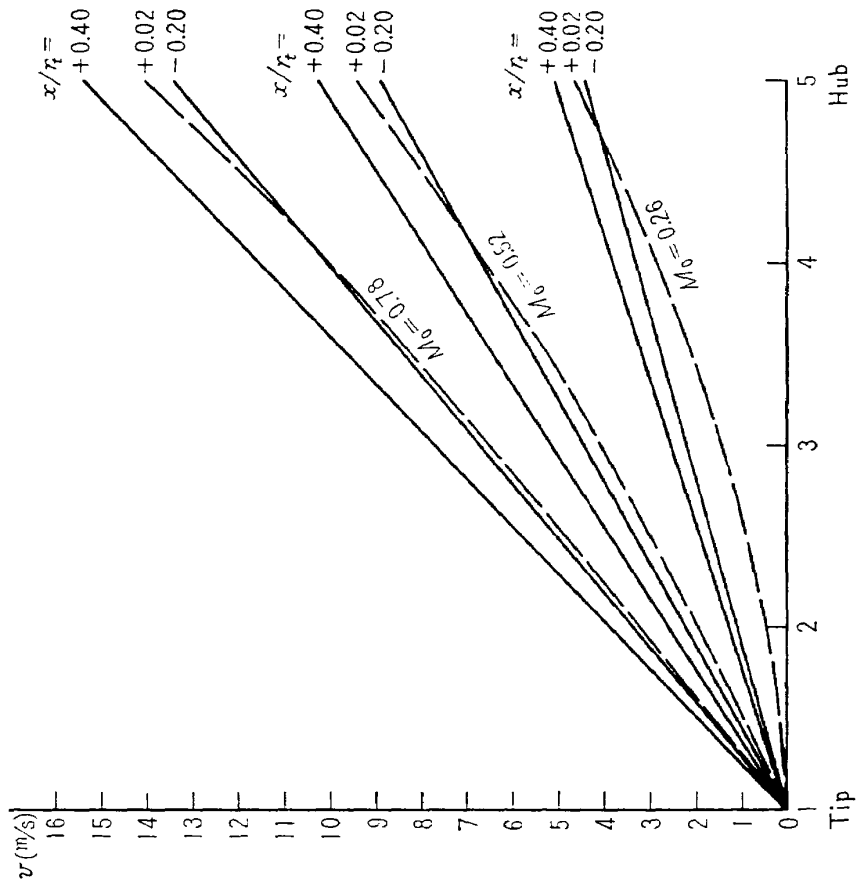


図11 $\tan\theta=0.05, \Omega=1,700$

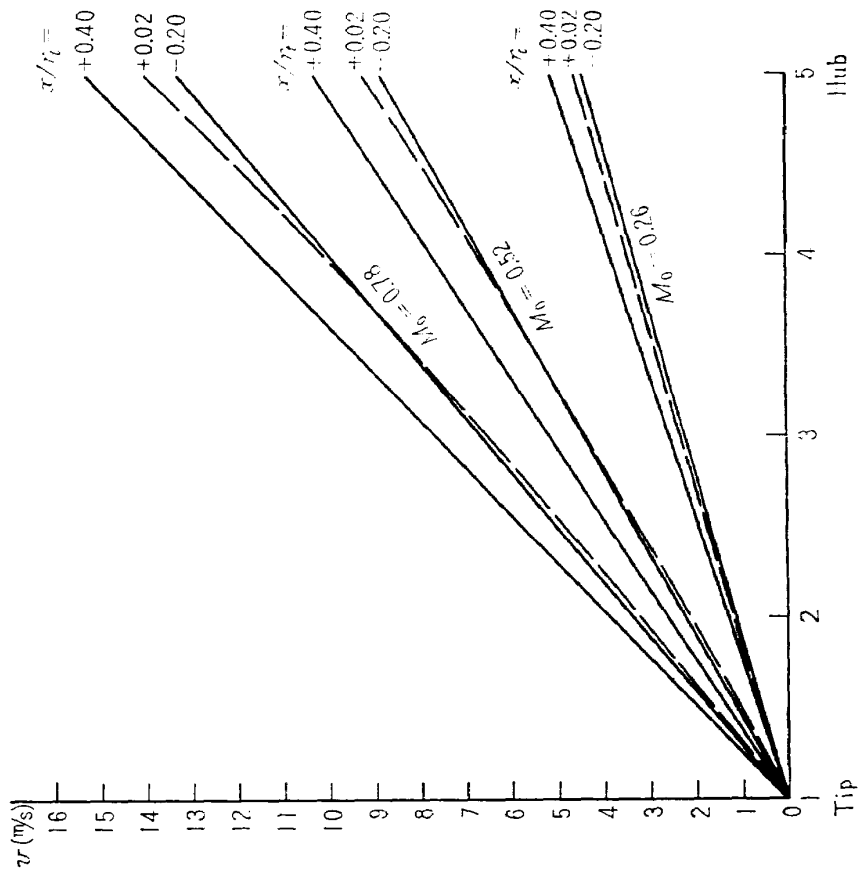


図10 $\tan\theta=0.05, \Omega=0$

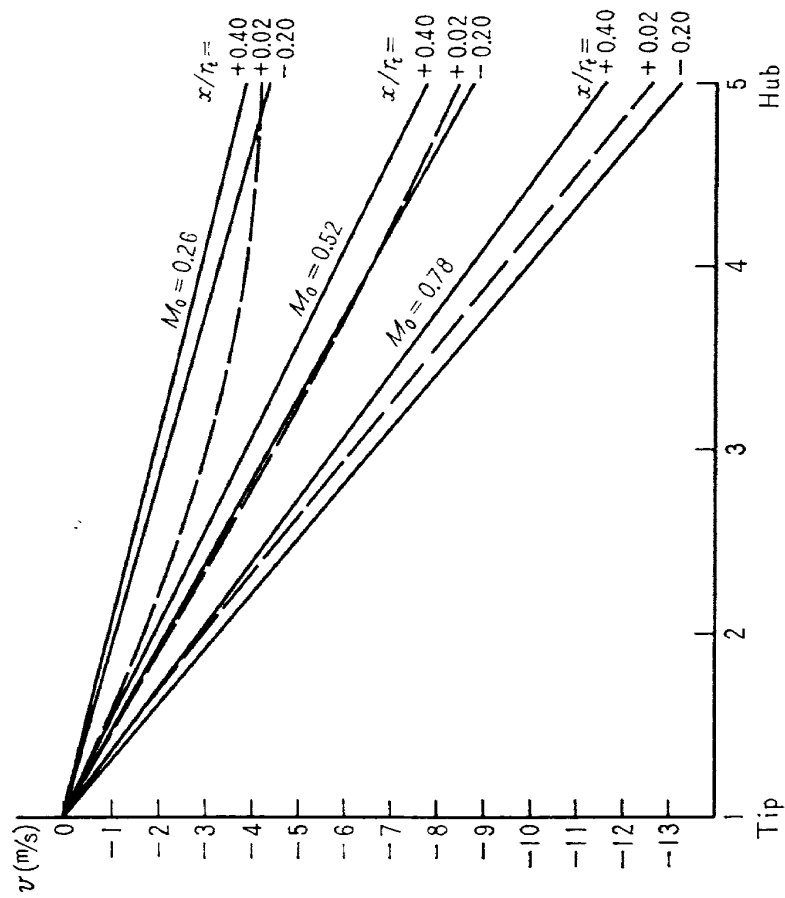


図12 $\tan\theta = -0.05$, $\Omega = 0$

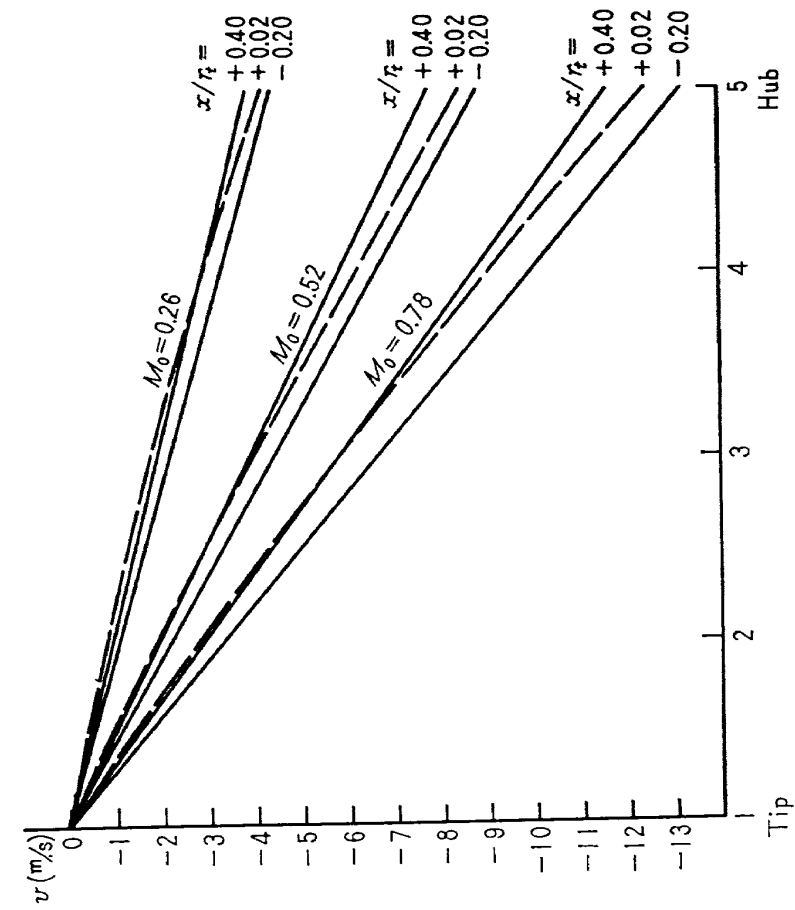


図13 $\tan\theta = -0.05$, $\Omega = 1,700$

$x/r_i=0.02$ では二次曲線を呈する。 v についても図10および図12の静翼の場合と、図11および図13の動翼の場合ではマッハ数の速度分布におよぼす影響が相異していることがわかる。すなわち前者ではマッハ数が低くなれば作動円盤直後でも v の分布は直線に近い形になるのに反し、後者では低マッハ数になるほどそりの強い放物線となる。

4. 有限アスペクト比の理論

4.1 基礎式

今までは作動円盤によって不連続的にその前後で流れ場が変化するものとした。すなわち翼の軸方向長さを無視した無限アスペクト比の場合をみつかったが、この章では翼の軸方向長さを考慮する有限アスペクト比について考える。まず、図14のような流路内を翼の中も含めて、通過する非粘性で定常な圧縮性がある流体に関する運動の方程式は外力 F_r , F_θ , F_z の項も考えて

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r \quad (101)$$

$$\frac{V_r}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = F_\theta \quad (102)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \quad (103)$$

のように表わされる。したがって (17), (18) および (19) 式に対応して

$$\frac{G}{\rho_0 A} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)^2 \frac{1}{r} - 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) \frac{w}{r} = -\frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + F_r \quad (104)$$

$$2C_1 v + \frac{G}{\rho_0 A} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = F_\theta \quad (105)$$

$$\frac{G}{\rho_0 A} \left[\frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A}\right)' + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + u \frac{G}{\rho_0 A} A \left(\frac{1}{A}\right)' = -\frac{b}{\rho_0^3} \frac{\partial \rho'}{\partial z} + F_z \quad (106)$$

が (8)~(12) 式で示される小擾乱のもとで、有限アスペクト比の場合の運動方程式となる。そこで、連続の式は翼の厚みのために変化を受けないとすると (16) 式がそのまま使えるから、(16) 式を r で微分して

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) = 0 \quad (107)$$

を得るが、この式の最後の項は (104), (106) 式を利用して

$$\begin{aligned} \frac{G}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\rho'}{A}\right) &= -\frac{G^2}{bA^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{G^2}{bA^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G^2}{bA^2} A \left(\frac{1}{A}\right)' \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{G^2}{bA^2} A \left(\frac{1}{A}\right)' \eta \\ &+ \frac{G\rho_0}{bA} \frac{\partial F_z}{\partial r} + \frac{G\rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A}\right)' F_r - \frac{G^2}{bA^2} A \left(\frac{1}{A}\right)' \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{G\rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A}\right)' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)^2 \frac{1}{r} \\ &+ \frac{2w}{r} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) \frac{G\rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A}\right)' \end{aligned} \quad (108)$$

のように表わせ、さらに (107) 式の左辺第4項の u は (14) 式より消去できるから、結局 (107) 式は (108) 式を使って

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1-M_o^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2 \frac{G^2}{bA^2} A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{\partial v}{\partial z} \\ & = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G^2}{bA^2} A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) - \frac{G\rho_o}{bA} \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} \right) - \frac{G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' F_r \\ & \quad - \frac{G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} - \frac{2G\rho_o}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' w \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \end{aligned} \quad (109)$$

となる。また、(104), (106) 式から (14) 式を考慮して

$$\frac{G}{\rho_o A} A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{A} \right) = 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{1}{r} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \quad (110)$$

が導ける。この (110) 式の右辺第1項は (105) 式を使って

$$2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{1}{r} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{1}{r} \left(F_\theta \frac{\rho_o A}{G} - 2 C_1 v \frac{\rho_o A}{G} \right) \quad (111)$$

のようにかける。前章までの無限アスペクト比の場合は翼の中のことは一切考えず作動円盤前後では $F_\theta = 0$ とし、さらに自由うずか、またはそれに近い流れ形式を取り扱ったので (111) 式の右辺は二次の微小量となり無視できたが、有限アスペクト比のときは翼の中の運動も合わせて考えているから、一般には F_θ が存在しており、しかもそれを二次の微小量とはみなしていないから (111) 式は省略できない。そこで (111) 式を (110) 式に入れると外力 F_z に関する項が表面上から消えて

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1-M_o^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2 M_o^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{\partial v}{\partial z} \\ & = \frac{\partial \eta}{\partial z} - 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{1}{r} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{G\rho_o}{bA} - \frac{G\rho_o}{bA} A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r}{A} \right) \\ & \quad - \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{G\rho_o}{bA} - 2 w \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{G\rho_o}{bA} \end{aligned} \quad (112)$$

の関係を得る。

4.2 外力について

(104)~(106) 式で導入した外力 $\vec{F}(F_r, F_\theta, F_z)$ は Wu¹⁾ の述べているように、多くの翼枚数を考えたとき翼面が円周方向に非常に薄い流体におよぼす圧力に起因すると解釈でき、または Through-flow 理論あるいは Large-number-of-thin-blades 理論でいう翼と翼にはさまれた流体におよぼす翼力を、円周方向に平均したものとみなせる。したがって \vec{F} と翼に対する相対速度は直交するから

$$v F_r + \left(\frac{G}{\rho_o A} + u \right) F_z + \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} + w - \Omega r \right) F_\theta = 0 \quad (113)$$

の関係が成立する。Vavra¹⁸⁾らが言うように Normal blade またはそれに近い翼では F_r は省略できるから (113) 式は近似的に

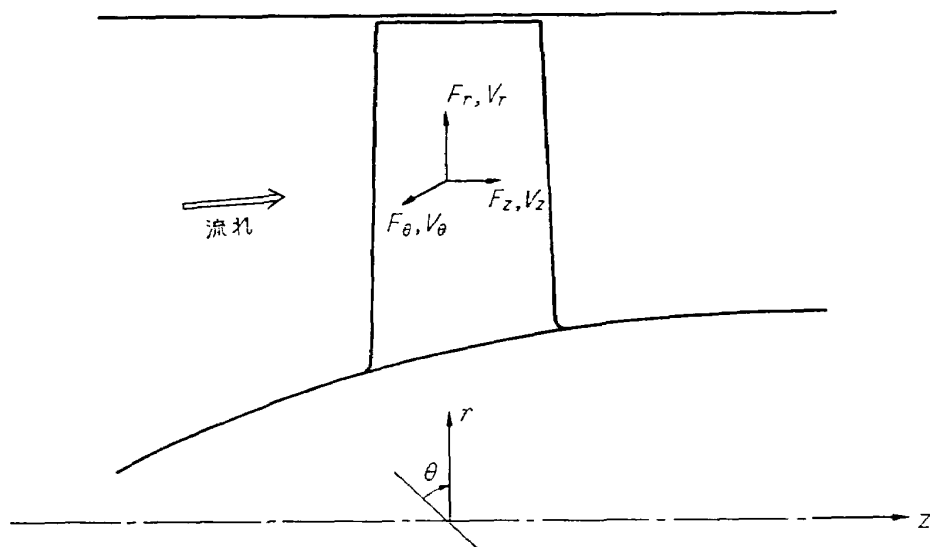


図14 座標系と外力

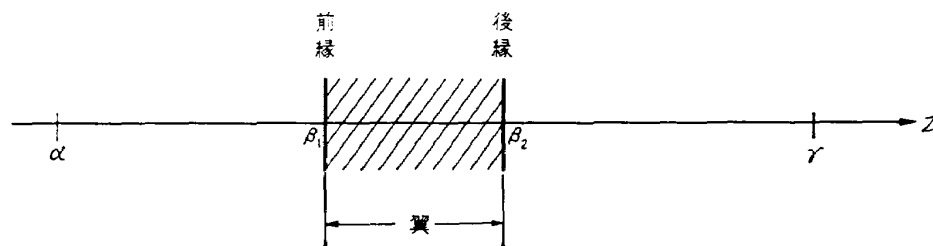


図15 有限アスペクト比

$$\frac{G}{\rho_0 A} F_z + \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} - \Omega r \right) F_\theta = 0 \quad (114)$$

とおける。(114) 式を r で微分しこれに (105) 式の関係を入れ、やはり今度の場合も自由うずに近い流れ様式を仮定すると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_z}{\partial r} &= \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \Omega \right) \\ &+ \left(C_1' - \frac{C_2'}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} \right) \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} - \Omega r \right) \end{aligned} \quad (115)$$

が得られる。翼の中では円周方向速度は設計者によって定められた $C_1 r + C_2/r$ にしたがって確実に転向するならば

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

の条件が成立し、したがって (115) 式は次のように積分できる。

$$F_z = -C_1 C_1' r^2 - \frac{C_2 C_2'}{r^4} + \Omega C_1' r^2 + r(z) \quad (115)'$$

ここに $r(z)$ は単なる z の関数である。一方、(13), (105) 式から自由うずに近い流れ様式のとき

$$F_\theta = -\left(\frac{G}{\rho_0 A}\right) \xi \quad (117)$$

と表わせ、 F_θ は束縛うずに関係している。

4.3 単一パラメータ $S(z)$ に関する線型非斉次常微分方程式

全エンタルピー H の半径方向こう配を表わす式は外力まで含めて次のようにかきくだせる。

$$\frac{V_\theta}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial r} - V_s \frac{V_r}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial r} + F_r \quad (118)$$

例によって小擾乱近似 (8)~(10) 式を上式に入れ二次の微小量を省略し、さらに翼の中では半径方向の外力 F_r と w を無視すると

$$2C_1\left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) - \frac{G}{\rho_0 A} \eta = 2C_1 r \Omega + \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_0 \quad (119)$$

となり、翼に流入するときもっているこう配 $(\partial H/\partial r)_0$ は、いまの場合考えなくても問題の本質には影響がないから省略すると (119) 式は η について

$$\eta = \left\{2C_1\left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) - 2C_1 r \Omega\right\} \frac{\rho_0 A}{G} \quad (120)$$

のように変形できる。(120) 式を (112) 式に入れ $F_r=0$ および (116) 式の条件が成立するものとすれば、翼の中を通過する場合の v に関する次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1-M_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A}\right)' \frac{\partial v}{\partial z} \\ & = \left\{2C_1\left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) - 2C_1 r \Omega\right\} \frac{\rho_0}{G} A' \\ & + \frac{\rho_0 A}{G} \left\{2C_1' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) + 2C_1 \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r}\right) - 2C_1' r \Omega\right\} \\ & - 2\left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right) \frac{1}{r} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r}\right) \frac{G \rho_0}{b A} - \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)^2 \frac{1}{r} A \left(\frac{1}{A}\right)' \frac{G \rho_0}{b A} \quad (121) \end{aligned}$$

したがって無限アスペクト比の場合と同様に v が r に関する二次式に従うものと仮定すれば、(71)~(76)式が成立し (78) 式を導いたときと同じ手法によって

$$\begin{aligned} & S'(1-M_0^2)(r_m^2 + F_2 r_m + F_4) \\ & + S' \left[2(1-M_0^2)(F_2' r_m + F_4') - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A}\right)' (r_m^2 + F_2 r_m + F_4) \right] \\ & + S \left[3 + (1-M_0^2)(F_2'' r_m + F_4'') - \frac{F_4}{r_m^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A}\right)' (F_2' r_m + F_4') \right] \\ & = \frac{F_3}{r_m^2} + 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A}\right)' (F_1' r_m + F_3') - (1-M_0^2)(F_1'' r_m + F_3'') \\ & + \left\{2C_1\left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m}\right) - 2C_1 r_m \Omega\right\} \frac{\rho_0}{G} A' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_0 A}{G} \left\{ 2C_1' \left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m} \right) + 2C_1 \left(C_1' r_m + \frac{C_2'}{r_m} \right) - 2C_1' r_m \Omega \right\} \\
& - 2 \left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m} \right) \frac{1}{r} \left(C_1' r_m + \frac{C_2'}{r_m} \right) \frac{G \rho_0}{bA} - \left(C_1 r_m + \frac{C_2}{r_m} \right) \\
& \quad \frac{1}{r_m} A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{G \rho_0}{bA}
\end{aligned} \tag{122}$$

の関係が得られ、これは翼の力を考慮したとき平均半径 r_m の近傍で近似的に成立する S の線型二階の常微分方程式である。

4.4 連続の性質について

以上のようにして導いた (122) 式を翼の中の流れに、(78) 式は翼力の働かない場所にそれぞれ適用して全領域の流れを決定することができるが、そのままに翼に流入するときと流出するときの連続性を調べておかねばならない。まず、記号 $L[v]$ は

$$L[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - 2M_0^2 A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{\partial v}{\partial z} \tag{123}$$

と定義すれば、(112) 式は $F_r = 0$, $w = 0$ および $\partial w / \partial z = 0$ として翼の中では

$$\begin{aligned}
L[v] = & \frac{\partial \eta}{\partial z} - 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{1}{r} \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} \right) \frac{G \rho_0}{bA} - \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \\
& \quad \frac{1}{r} A \left(\frac{1}{A} \right)' \frac{G \rho_0}{bA}
\end{aligned} \tag{124}$$

とかけ、一方、これに相当する式で外力の働かない場所では (24), (27) 式より

$$L[v] = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{G \rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} - \frac{2G \rho_0}{bA} A \left(\frac{1}{A} \right)' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \frac{w}{r} \tag{125}$$

と表わせる。ここで (124) 式の $\partial \eta / \partial z$ は (120) 式から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial z} = & \left\{ 2C_1 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) - 2C_1 r \Omega \right\} \frac{\rho_0}{G} A' \\
& + \frac{\rho_0 A}{G} \left\{ 2C_1' \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) + 2C_1 \left(C_1' r + \frac{C_2'}{r} \right) - 2C_1' r \Omega \right\}
\end{aligned} \tag{126}$$

で与えられ、しかるに翼の力が働かない場所での $\partial \eta / \partial z$ は (53) 式から

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = A' \frac{\rho_0}{G} 2r \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta_2)} \left[\frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta_2)} + \frac{\bar{b}}{r^2} - \Omega \right] \tag{127}$$

と導ける。図15に示すように翼が $z = \beta_1$ から β_2 まであり、翼に流入する以前の領域 $\alpha \leq z < \beta_1$ で回転速度がないうずなし流れの場合 (すなわち $C_1 = C_2 = 0$) にかぎって取り扱うものとする、そこでは $L[v] = 0$ なる方程式に支配される。一方、翼にかこまれた領域 $\beta_1 \leq z \leq \beta_2$ では (124) 式に流れは支配されるから、翼の前縁に相当する $z = \beta_1$ で $L[v]$ の各係数が連続であるためには、いい換えれば $L[v] = 0$ から (124) 式で表わされる $L[v]$ に不連続変化を起さずに接続するには (126) 式をみて、動翼 ($\Omega \neq 0$) のとき

$$C_1'(\beta_1)=0 \tag{128}$$

でなければならない。静翼 ($\Omega=0$) のときは必ずしも (128) 式の条件は必要でない。しかし、 $L[v]$ の係数が $z=\beta_1$ で連続するだけでなく、なめらかに接続するためには、すなわち物理的にはなめらかに翼に流入するときは動、静翼とも

$$\left. \begin{aligned} C_1'(\beta_1) &= 0 \\ C_2'(\beta_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{129}$$

なる条件を満足しなければならない。次に、翼から流出した後の領域 $\beta_2 < z \leq r$ で流れは (125) 式に支配されることを考慮し、翼の後縁にあたる $z=\beta_2$ で Kutta-Joukowski の条件をみたすように (126) 式の C_1, C_2 を定めねばならない。すなわち

$$\left. \begin{aligned} C_1(\beta_2) &= \frac{\bar{a}}{r_m^2(\beta_1)} \\ C_2(\beta_2) &= \bar{b} \end{aligned} \right\} \tag{130}$$

および

$$\left. \begin{aligned} C_1'(\beta_2) &= 0 \\ C_2'(\beta_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{131}$$

と規制する。したがって入口、出口の条件 (129)~(131) 式を満足すれば $\beta_1 < z < \beta_2$ で $C_1(z), C_2(z)$ がどのように変化してもよいが、正弦または余弦関数に従うと考えるのが適当であろう。実際、Wu¹⁹⁾ がかなり厚いタービン翼列の翼間流れの数値解で得た結果によっても円周方向速度の変化は sinusoidal とみなせる。したがって今後の数値計算の便宜上

$$C_1(z) = \frac{\bar{a}}{2r_m^2(\beta_2)} \left[1 - \cos\left(\frac{z-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\pi\right) \right] \tag{132}$$

$$C_2(z) = \frac{\bar{b}}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{z-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\pi\right) \right] \tag{133}$$

と置いて問題を進めることにする。このような形で翼の中での円周方向速度変化を定めることは、(132), (133) 式を使って

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) = \frac{\pi}{\beta_2 - \beta_1} \left[\frac{\bar{a}}{2r_m^2(\beta_2)} r + \frac{\bar{b}}{2r} \right] \sin\left(\frac{z-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\pi\right) \tag{134}$$

となるから 50%翼弦 $z=(\beta_1+\beta_2)/2$ のところで V_θ に最も急激な変化が起こる、すなわち翼弦の中心付近に最大の負荷がかかっている翼型であると解釈できる。

5. 有限アスペクト比の数値例

(132), (133) 式で与えられる翼面負荷のもとで (122) 式で表わされる単一パラメータ S の解を求めるわけであるが、第3章で調べた無限アスペクト比の数値解と比較するために、第3章のとき

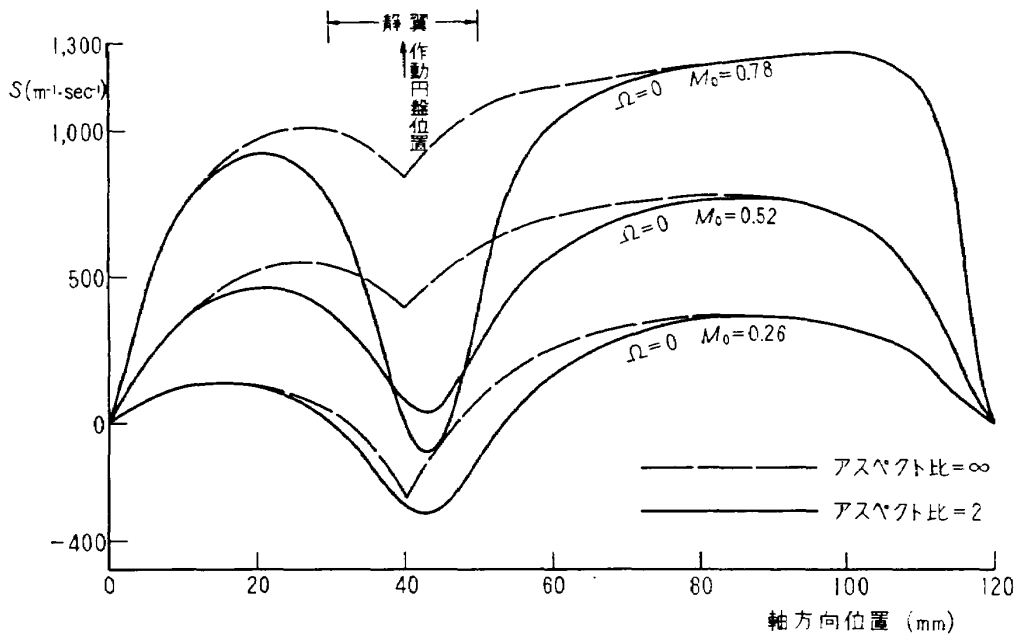


図16 せばまり流れ ($\tan \theta = 0.05$, $\bar{a} = -1$, $\bar{\delta} = 10$)

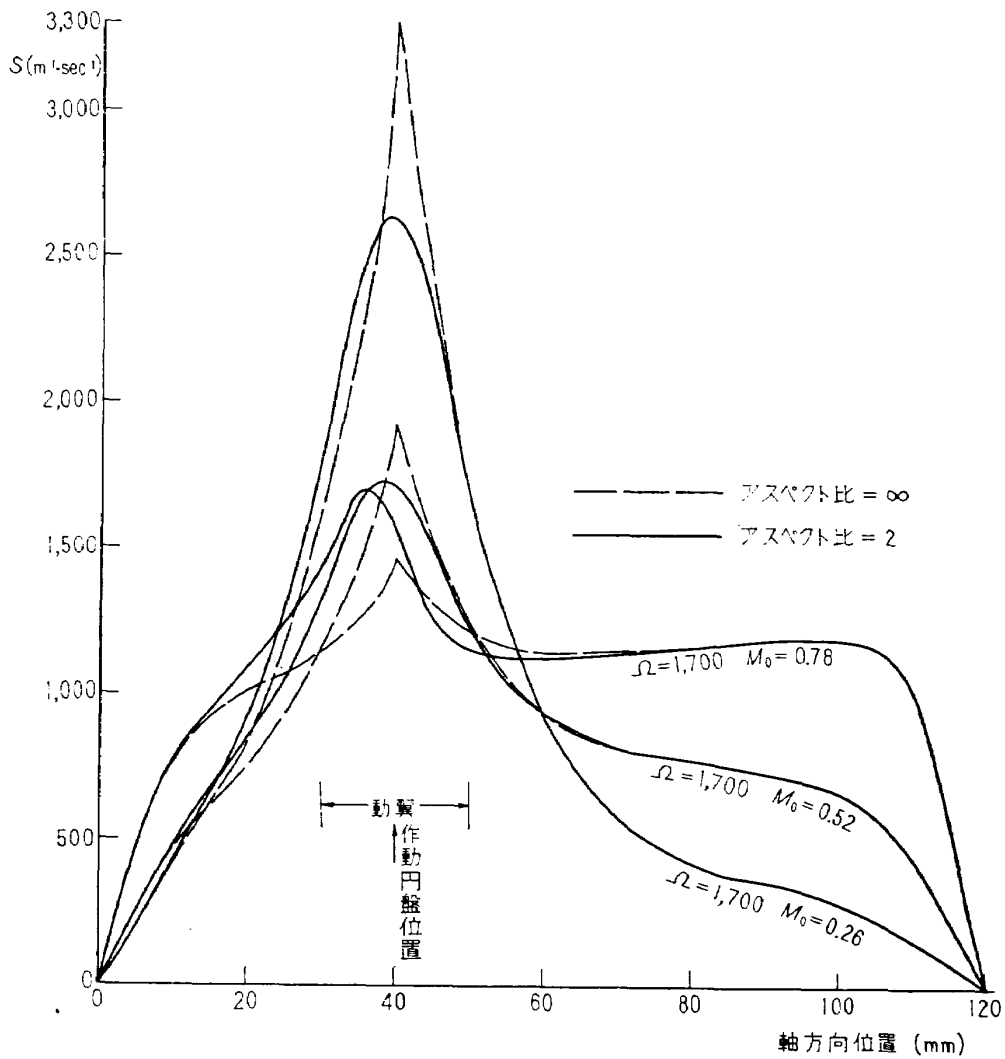


図17 せばまり流れ ($\tan \theta = 0.05$, $\bar{a} = -1$, $\bar{\delta} = 10$)

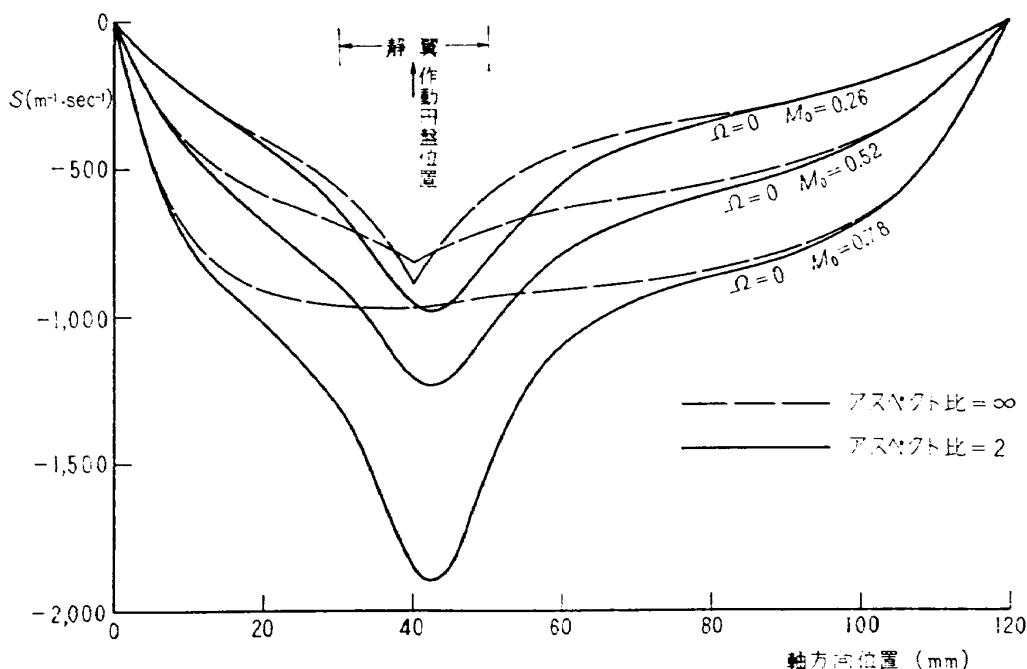


図18 広がり流れ ($\tan \theta = -0.05$, $\bar{a} = -1$, $\bar{b} = 10$)

と同じ流れ様式パラメータ $\bar{a} = -1$, $\bar{b} = 10$ を使い、せばまり流れ ($\tan \theta = 0.05$) の場合、静翼について計算したのが図16であり、動翼に関する解は図17である。広がり流れ ($\tan \theta = -0.05$) の場合の動、静翼に関する解はそれぞれ図18, 19に示す。いずれも計算の対象にした圧縮機の内壁、外壁などの幾何学的形状は第3章のそれと同一のものであり、ただ、翼の軸方向長さを20mmにとったので、アスペクト比は約2になった。アスペクト比が無限大の場合との対照のために図4, 5に示した計算結果をもう一度図16~19にプロットした。これらの計算結果からわかることは、当然のことであるが無限アスペクト解が円盤のところどころに不連続変化があるのに対して、有限アスペクト解は翼の中でなめらかに連結しており、この場合動翼における S の値の極大値は翼弦の中心より前縁によっているが、静翼中ではその極小値が翼弦の中心より後縁側で起こっている。動翼のとき、翼の力が働いている場所以外では有限アスペクト比の解と、無限アスペクト比との相異はわずかであるが、静翼では前縁の前方10mmぐらい、後縁の後方約20mmの間は有限、無限アスペクト比でかなりな差が現われている。

6. 結 語

動翼または静翼を付けた軸流ターボ機械を流れる圧縮性流体を、作動円盤理論の立場から調べた。流線の移動は微小であるとし、自由うず流れ形式かまたはそれに近い流れ形式に限定して問題を進めた。速度および密度が小擾乱をうけるとして線型化した近似の範囲内では、円周方向のうず成分は密度変化の影響を受けず Smoke-ring と Streamwise Vorticity に分離できた。また、圧

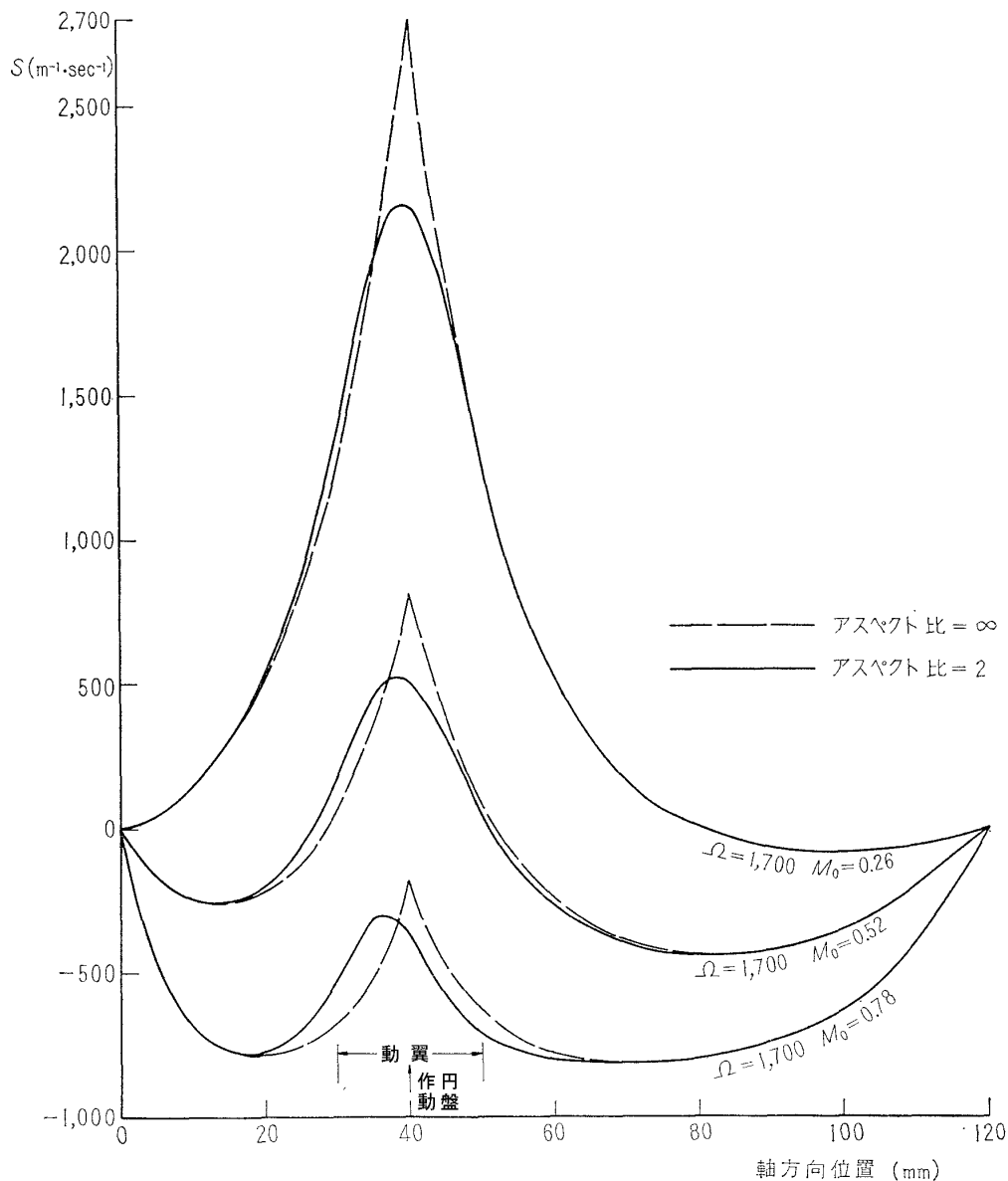


図19 広がり流れ ($\tan \theta = -0.05$, $\bar{a} = -1$, $b = 10$)

力と密度の間に仮想気体近似を用いた。

数値解を求めた例に限って言えば、動翼と静翼の流れでは両者に著しい相異を示し、前者の場合はマッハ数が高いほど S が上、下流で小さくなるのに反し、後者では S が大きくなる。換言すれば動翼のみを付けた流れ場ではマッハ数が大きいほど作動円盤の上、下流に及ぼす影響が小さい。翼を作動円盤でおきかえる以前の状態、すなわち有限アスペクト比の場合についても計算し、作動円盤の考えから求めた無限アスペクト比の解と比べてみると、動翼では両者に大きな差はなかったが、静翼では翼の上、下流ともかなりの差異が生じた。

なお、本研究の遂行中に Horlock²⁰⁾が壁形状と圧縮性を考えた半径方向平衡に関する論文を発表した。これは翼の影響をまったく受けない場所での傾斜流路における圧縮流体の状態に関する計算

であることを付記する。

7. 記 号

r, θ, z	円筒座標系
r, θ, z	球面座標系
V_r, V_θ, V_z	円筒座標における r, θ および z 方向の速度成分
v, w, u	小擾乱によるそれぞれ r, θ および z 方向の速度成分 ただし v は比体積にも使っている
V	合成速度 $\sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_z^2}$
V_h	内壁における半径方向速度
$w_\theta(\beta)$	作動円盤においてある位置での円周方向小擾乱の値
Ω	角速度
ϕ	流れ関数
M_0	軸流マッハ数 $G/(A_1\sqrt{b})$ ただしグラフに記入されている M_0 はその数値計算の対象とした圧縮機入口での軸流マッハ数
M_θ	円周方向マッハ数
p	静 圧
ρ	密 度
ρ'	密度の小摂動量
ρ_0	基準点での密度
C_0	基準点での音速
H	全エンタルピー
G	流量を重力の加速度定数で割ったもので、流量パラメータと呼ぶ
$C_1(z), C_2(z)$	流れ様式を規定する z の関数 または C_1, C_2
\bar{a}, \bar{b}	流れ様式パラメータ
a, b	仮想気体定数
$A(z)$	有効流路面積を表わし z の関数である または A
r_m	平均半径
δR	平均半径からの流線の変位量

r_i, r_h	中心からそれぞれ外壁, 内壁までの半径
ν	ポス比 r_h/r_i
α, γ	作動円盤からかなりはなれた上, 下流での z の座標
β	作動円盤のおかれている z の座標
F_r, F_θ, F_z	外力の r, θ, z 方向の成分
\vec{F}	合成外力
$S(z)$ または S	単一パラメータ
$F_1(z), F_2(z), F_3(z)$ および $F_4(z)$	半径方向の境界条件から定める z の関数
$\tilde{F}_1(r, z), \tilde{F}_2(r, z)$ または \tilde{F}_1, \tilde{F}_2	軸流速度分布を示す r, z の関数
$f_1(z), f_2(z)$	連続の条件をみたすために \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 につけ加える量
$(\partial H/\partial r)_0$	作動円盤上流での H の半径方向こう配

サフィックスその他

r, θ, z	半径, 円周および軸方向の成分
0	特に断らないかぎり基準点の状態
1, 2	作動円盤上, 下流の状態
m	平均半径
t	外壁
h	内壁
' (プライム)	z についての微分記号 ただし ρ' は密度の小擾乱量

付録 1. 仮想気体での小擾乱密度

本文の (12) 式の定数 b は入口状態 (サフィックス 0 を付ける) を基準点にとると

$$b = \rho_0^2 C_0^2 \quad (\text{A. 1})$$

となり, ベルヌイーの式

$$VdV + \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (\text{A. 2})$$

を考慮して次の方程式を得る。

$$VdV + \rho_0^2 C_0^2 \frac{d\rho}{\rho^3} = 0 \quad (\text{A. 3})$$

したがって $V=V_0$ で $\rho=\rho_0$ になるように積分定数を定めると

$$\frac{V^2 - V_0^2}{C_0^2} + 1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \quad (\text{A. 4})$$

が得られ、擾乱密度は

$$\rho' = \rho - \rho_0 = \rho_0 \left[\frac{C_0}{\sqrt{V^2 - V_0^2 + C_0^2}} - 1 \right]$$

のように表わせる。

付録 2. 数値例の詳細

z の関数 ν を使って $r_m = r_i(1+\nu)$, $A = \pi r_i^2(1-\nu^2)$ とかけるから $\nu' = d\nu/dz$ とすると (97)~(99) 式はそれぞれ

$$f(\nu) = -4 \left\{ \frac{\frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \nu \nu'}{(1-\nu^2) \left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\}} + \frac{\nu'}{(1-\nu)} \right\} \quad (\text{A. 5})$$

$$g(\nu) = - \frac{4(3\nu^2 + 2\nu + 3)}{\left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\} r_i^2} + \frac{\frac{8G^2}{b\pi^2 r_i^4}}{\left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\}} \cdot \frac{\nu \nu'}{(1-\nu^2)(1-\nu)} \quad (\text{A. 6})$$

$$k(\nu) = - \frac{16G\nu'}{\left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\} \rho_0 \pi r_i^5} \cdot \frac{1}{(1-\nu^2)(1-\nu)} - \frac{\frac{8G^2}{b\pi^2 r_i^4} \nu \nu'}{\left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\} r_i^2 (1-\nu^2)(1-\nu)^2} \left\{ V_h' + \frac{\nu' V_h}{(1-\nu)} \right\} - \frac{4\nu}{r_i^2(1-\nu)^2} \frac{G}{\rho_0 \pi r_i} \frac{dk_1(\nu)}{dz} - \frac{4(1+\nu)^2}{\left\{ (1-\nu)^2(1+\nu)^2 - \frac{G^2}{b\pi^2 r_i^4} \right\} r_i^2} p(\nu) \quad (\text{A. 7})$$

ただし

$$V_h = \frac{G}{\rho_0 \pi r_i} \frac{\nu'}{(1-\nu^2)} \quad (\text{A. 8})$$

$$V_h' = \frac{2G}{\rho_0 \pi r_i} \frac{\nu \nu' \nu''}{(1-\nu^2)^2} \quad (\nu'' = 0) \quad (\text{A. 9})$$

$$k_1(\nu) = \frac{\nu \nu'}{(1-\nu^2)(1-\nu)^2} \left(1 + \frac{2\nu}{1+\nu} \right) \quad (\text{A. 10})$$

$$p(\nu) = - \frac{(8\bar{a} r_i \rho_0 \pi) \nu \nu'}{G(1+\nu(\beta))} \left\{ \frac{4\bar{a}}{r_i^2(1+\nu(\beta))^2} + \frac{4\bar{b}}{r_i^2(1+\nu(\beta))^2} - \Omega \right\}$$

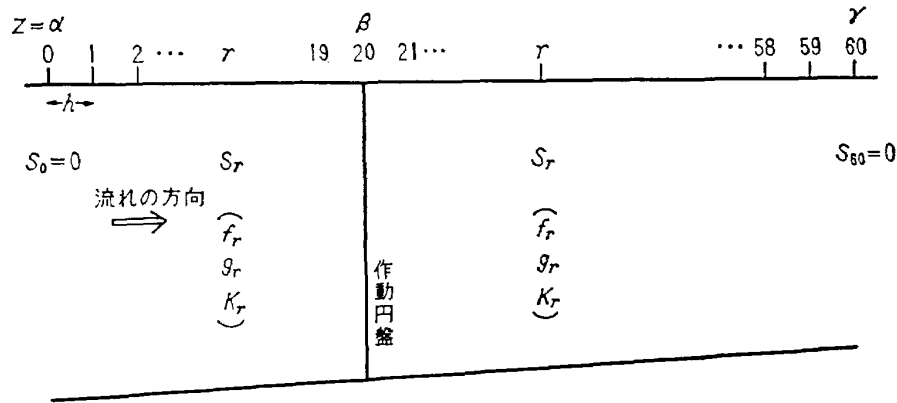
$$-\frac{16G\rho_0(\bar{a}+\bar{b})\nu\nu'}{\pi r_i^5 b(1-\nu^2)^2(1+\nu)^2} \left[\frac{(\bar{a}+\bar{b})}{(1+\nu)} + 4\bar{a} \left\{ \frac{1}{1+\nu(\beta)} - \frac{1}{1+\nu} \right\} \right] \quad (\text{A. 11})$$

$\nu(\beta) : z=\beta$ での ν の値

とかける。いま、内壁の傾き角が一定の場合を扱っているから

$$\nu = (z-\alpha)\nu' + \nu(\alpha) \quad (\text{A. 12})$$

$\nu(\alpha) : z=\alpha$ での ν の値



付図 1

なる関係が成立する。付図 1 のように区間を 60 等分し入口から順次 0, 1, 2, …, 60 と番号を付け、サフィックス r を用いて r 番目の点での関数値を表わし、かつ一区間の長さを h とすれば

$1 \leq r \leq 19$ では

$$S_{r-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_r \right) - S_r (2 - h^2 g_r) + S_{r+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_r \right) = h^2 k_r \quad (\text{A. 13})$$

$21 \leq r \leq 60$ では、作動円盤後の $k(\nu)$ の値を K_r と表わせば

$$S_{r-1} \left(1 - \frac{1}{2} h f_r \right) - S_r (2 - h^2 g_r) + S_{r+1} \left(1 + \frac{1}{2} h f_r \right) = h^2 K_r \quad (\text{A. 14})$$

さらに $r=20$ では微係数のとび $S'_{21} - S'_{19} = \Delta S'$ を考慮して

$$\begin{aligned} & S_{19} \left(1 + \frac{q_0}{p_0} \right) - S_{20} \left(\frac{r_0}{p_0} + \frac{r_0}{q_0} \right) + S_{21} \left(1 + \frac{p_0}{q_0} \right) \\ & = h^2 \left(\frac{k_{20}}{p_0} + \frac{K_{20}}{q_0} \right) + 2h \Delta S' \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= 1 - \frac{1}{2} h f_{20} \\ r_0 &= 2 - h^2 g_{20} \\ p_0 &= 1 + \frac{1}{2} h f_{20} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 16})$$

とかけるから、 $S_0 = S_{60} = 0$ なる境界条件を与えてつごう59元線型連立方程式を作ることができる。

文 献

- 1) C. H. Wu; A General Through-Flow Theory of Fluid Flow with Subsonic or Supersonic Velocity in Turbomachines of Arbitrary Hub and Casing Shapes, NACA TN 2302 (1951/3)
- 2) C. H. Wu & L. Wolfenstein; Application of radial-equilibrium conditions to axial-flow compressor and turbine design, NACA Rep.955 (1950)
- 3) Von K. Brammert und K. Fiedler; Strömung in axialen Turbomaschinen, Ingenieur-Archiv XXXIII, (1964) pp. 322-329.
- 4) J. E. McCune; A Three-Dimensional Theory of Axial Compressor Blade Rows—Application in Subsonic and Supersonic Flows, J. Aero/Space Sci. (1958/9) pp. 544-560.
- 5) J. E. McCune; The Transonic Flow Field of an Axial Compressor Blade Row, J. Aero/Space Sci. (1958/10) pp. 616-626.
- 6) F. E. Marble; The Flow of a Perfect Fluid Through an Axial Turbomachine with Prescribed Blade Loading, J. Aero. Sci. (1948/8) pp. 473-485.
- 7) S. L. Bragg and W. R. Hawthorne; Some Exact Solutions of the Flow Through Annular Cascade Actuator Disks, J. Aero. Sci. (1950/4) pp. 243-249.
- 8) J. H. Horlock; Some Actuator-Disc Theories for the Flow of Air Through an Axial Turbo-Machine, R. & M. No. 3030 (1952/12)
- 9) J. H. Horlock and R. I. Lewis; Shear Flows in Straight-Sided Nozzles and Diffusers, Int. J. of Mech. Sci., Vol. 2 (1961/4) pp. 251-266.
- 10) R. I. Lewis and J. H. Horlock; Non-Uniform Three-Dimensional and Swirling Flows Through Diverging Ducts and Turbo-Machines, Int. J. of Mech. Sci., Vol. 3 (1961/11) pp. 170-196.
- 11) R. I. Lewis; A Theoretical Investigation of The Rotational Flow of Incompressible Fluids Through Axial Turbo-Machines with Tapered Annulus Walls, Int J. of Mech. Sci., Vol. 6 (1964/2) pp. 51-75.
- 12) 柏原康成; 軸流流体機械における流路形状を考慮した Actuator Disc 理論, 日本機械学会論文集, 第31巻第224号 (昭和40/4)
- 13) 藤井昭一; 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (Ⅰ)—軸対称流れ—, 航技研報告 TR-97 (昭和40/12)
S. Fujii; A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (First Rep.) —Non-Swirling Fluids in Ducts—, NAL TR-97(1965/12) (Original in Japanese)
- 14) D. S. Whitehead and G. S. Beavers; A Single-Parameter Theory of Vortex Flow in Turbo-Machines, R. & M. No. 3335 (1961/8)
- 15) C. Lin; On the Subsonic Flow Through Circular and Straight Lattices of Airfoils, J. of Math. & Physics, Vol. 28. No. 2, (1949/7)
- 16) J. Stanitz; Design of Two-Dimensional Channels with Prescribed Velocity Distributions along the Channel Walls, NACA Rep. 115, (1951/7) pp. 153-176.
- 17) H. Yeh; The Development of Cascade Profiles for High Subsonic Potential Flows, J. Aero. Sci., (1952/9) pp. 630-638.
- 18) M. H. Vavra; Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines, John Wiley & Sons, Inc. New

- York, (1960) pp. 265-271.
- 19) C. H. Wu & C. A. Brown; Method of Analysis for Compressible Flow Past Arbitrary Turbomachine Blades on General Surface of Revolution, (1951/7) NACA TN 2407
 - 20) J. H. Horlock; Pseudo-Radial Equilibrium in Flared Annuli, Aero. Quarterly, Vol. 16, Part 1, (1965/2) pp. 83-91.
 - 21) 藤井昭一; 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (第2報), 第15回応用力学連合講演会論文抄録集, 第II・III部 (昭和40/9) pp. 37-38.
 - 22) S. Fujii; A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (2nd Rep.), Proceedings of the 15 the Japan National Congress for Applied Mechanics (出版予定)
 - 23) S. Fujii; Compressible Shear Flows in the Duct with Varying Cross Sectional Area, J. of the Royal Aero. Soci., London (出版予定)

TR-99	計器のよみやすさに関する研究 A Study of Dial Legibility	1966年2月	三好範子, 岡部正典 石川澄子
TR-100	回転翼の線型理論(Ⅲ) —揚力線の方程式の解法— Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (Ⅲ) —Method for Solving Lifting-Line Equations—	1966年2月	市川輝雄
TR-101	航空機の着氷気象条件について(Ⅰ) Meteorological Conditions on Aircraft Icing (Ⅰ)	1966年2月	古閑昌次, 田寺木一 泉日出夫, 太田幹雄 峰岸正勝
TR-102	ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (Ⅱ)—迎角のあるとき— An Approximate Calculation for Super- sonic Flow Past Bodies of Rocket Vehi- cles (Ⅱ) —Linearized Flow with Attack Angle—	1966年3月	谷 喬
TR-103T	Basic Considerations for Treating Non- Equilibrium Fluids —A Functional Approach to Non-Equili- brium Statistical Mechanics—	March 1966	Iwao HOSOKAWA
TR-104	翼幅方向に一様な揚力分布をもつ三次元後退 翼のそり The Camber Distribution of a Spanwise Uniformly Loaded Subsonic Wing	1966年4月	河崎俊夫, 海老原正夫
TR-105	パイロットの心理的負担に関する研究(Ⅰ) —操縦時の脈拍と呼吸の変化— A Psychological Study on the Mental Stress of Pilots (Ⅰ) —Pulse and respiratory rate during fight—	1966年4月	三好範子, 百名盛之 岡部正典
TR-106	遷音速における操縦面の逆効き On Reversal of Effectiveness of Control Surfaces in Transonic Flow	1966年5月	神谷信彦, 瀬川晋策
TR-107	円錐型電磁衝撃波管内の流れ Ionized Flow in a Conical Shock Tube	1966年5月	松崎利一
TR-90T	The Shape of Mechanical Hysteresis Loop its Deformation due to Stress Repetition and Resulting Increase in Flow Stress Part 1. Experiment Part 2. Theory for Torsion	June 1966	Fujio NAKANISHI, Yasuo SATO & Fumio NAGAI
TR-108	二次元遷音速衝動タービン翼列の一実験 Some High-Speed Tests on Impulse Tunline Cascades	1966年6月	近藤博, 蓑田光弘 山崎紀雄, 古川昇
TR-109	大型空気エジェクタの研究 A Study on the Large-scale Air Ejector	1966年7月	藤井昭一, 五味光男 菅原昇
TR-110	電磁流体の非粘性境界層 Some Investigations on Inviscid Boundary Layer of Magnetohydrodynamics	1966年8月	井上建二
TR-111T	An Asymptotic Solution of the Nonlin- ear Equations of Motion of an Airplane	Aug.1966	Hiroshi ENDO

航空宇宙技術研究所報告112号

昭和41年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)

印刷所 奥村印刷株式会社
東京都千代田区西神田1-10