

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-122

失速が起こるような高い迎角で、調和振動する
二次元翼に働く空気力に対する半実験的理論

磯 貝 紘 二

1966 年 12 月

航空宇宙技術 研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-100 回転翼の線型理論(Ⅲ)
—揚力線の方程式の解法—
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor
Blades (Ⅲ)
—Method for Solving Lifting-Line
Equations— 1966年2月 市川輝雄
- TR-101 航空機の着氷気象条件について(Ⅰ)
Meteorological Conditions on Aircraft Icing
(Ⅰ) 1966年2月 古関昌次, 田寺木一
泉 日出夫, 太田幹雄
峰岸正勝
- TR-102 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法
(Ⅱ) —迎角のあるとき—
An Approximate Calculation for Super-
sonic Flow Past Bodies of Rocket Vehi-
cles (Ⅱ)
—Linearized Flow with Attack Angel— 1966年3月 谷 喬
- TR-103T Basic Consideration for Treating Non-
Equilibrium Fluids
—A Functional Approach to Non-Equilib-
rium Statistical Mechanics— March 1966 Iwao HOSOKAWA
- TR-104 翼幅方向に一様な揚分布をもつ三次元後退
翼のそり
The Camber Distribution of a Spanwise
Uniformly Loaded Subsonic Wing 1966年4月 河崎俊夫, 海老原正夫
- TR-105 パイロットの心理的負担に関する研究(Ⅰ)
—操縦時の脈拍と呼吸の変化—
A Psychological Study on the Mental
Stress of Pilots (Ⅰ)
—Pulse and Respiratory Rate Dduring
Flight— 1966年4月 三好範子, 百名盛之
岡部正典
- TR-106 遷音速における操縦面の逆効き
On Reversal of Effectiveness of Control
Surfaces in Transonic Flow 1966年5月 神谷信彦, 瀬川晋策
- TR-107 円錐型電磁衝撃波管内の流れ
Ionized Flow in a Conical Shock Tube 1966年5月 松崎利一
- TR-90T The Shape of Mechanical Hysteresis Loop,
Its Deformation Due to Stress Repetition
and Resulting Increase in Flow Stress
(Part 1. Experiment, Part 2. Theory for
Torsion) June 1966 Fujio NAKANISHI, Yasuo
SATO & Fumio NAGAI
- TR-108 二次元遷音速衝動タービン翼列の一実験
Some High-Speed Tests on Impulse
Turbine Cascades 1966年6月 近藤 博, 蓑田光弘
山崎紀雄, 古川 昇
- TR-109 大型空気エセクタの研究
A Study on the Large-Scale Air Ejector 1966年7月 藤井昭一, 五味光男
菅原 昇
- TR-110 電磁流体の非粘性境界層
Some Investigations on Inviscid Boundary
Layer of Magnetohydrodynamics 1966年8月 井上建二
- TR-111T An Asymptotic Solution of the Nonlinear
Equations of Motion of an Airplane Aug. 1966 Hiroshi ENDŌ
- TR-112 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の
作動円盤理論(Ⅱ)
—円周速度のある流れ—
A Theoretical Investigation of the Com-
pressible Flow Through the Axial Turbo-
Machines (Ⅱ)
—Swirling Fluids— 1966年8月 藤井昭一
- TR-113 地面近くでホバリングするヘリコプタ・ロー
タに関する実験
Experimental Study on the Ground Effect
of a Model Helicopter Rotor in Hover-
ing 1966年8月 幸尾治朗, 岡 遠一

失速が起こるような高い迎角で、調和振動する 二次元翼に働く空気力に対する半実験的理論*

磯 貝 結 二**

Semi-Empirical Theory to Estimate the Airforces Acting on the Harmonically Oscillating Two-Dimensional Wing at High Angle of Attack Where Separation Can Occur

By Kozi ISOGAI

The prediction of the airforces acting on the airfoil oscillating at high angles of attack where the flow separation can occur is of great importance for stall flutter analysis.

This paper presents a semi-empirical theory for estimating the unsteady lift forces and moments of the airfoils oscillating in bending and in torsion respectively, by using the experimentally obtained static lift and moment curves incorporated with the aerodynamic hysteresis effect of the separated flow.

The aerodynamic damping coefficients are obtained as the functions of mean angle of attack, amplitude and reduced frequency.

It is shown that the aerodynamic damping is considerably increased due to the aerodynamic hysteresis effect of the separated flow in case of bending oscillation. This is in contrast with the well known fact that the aerodynamic hysteresis effect decreases the aerodynamic damping in torsional oscillation.

The calculated moment loops are compared with the experimental loops obtained by H. Kimura at University of Kyushu.

序 論

失速フラッタは、失速角付近の迎角で作動するタービンブレードや、ヘリコプタのロータあるいは航空機のプロペラにおいて起こる自励振動であり、ことに、タービンブレードの疲労破壊の原因の一つと考えられている^{10,11)}。この自励振動の特長は、振動の1サイクルの一部または全部で、流れが翼面上からはく離する点にある。このため失速角以下で起こる普通の曲げねじれフラッタとは種々の点で違った性質を示す。そのおもなものをあげると、

- (1)自励振動の起こる風速が、曲げねじれフラッタに比べて非常に低いこと。
- (2)フラッタを起こしているときの振動は、曲げねじれのみの一自由度の振動に近いこと。

このような自励振動を予知するには、流れのはく離

が起こるような高い迎角で振動する翼に働く空気力が、時間、風速、振動数、平均迎角、振幅、Reynolds 数によって、どのように変化するかを知る必要がある。

過去に提出された失速領域のフラッタ解析法には、M. Victory¹⁾、F. Sisto²⁾の研究がある。M. Victoryによって提案された解析法では、空気力としては、振動翼実験によって測定されたデータを、そのまま使っている。また F. Sistoの方法では、空気力として、平均動特性なるものが導入されているが、その物理的根拠は明らかにされていない。

振動空気力を純理論的に求めることは、流れのはく離を取り扱わねばならないので、現段階では、非常に困難である。次に考えられることは、半実験的な方法である。このような試みとして、N. Rott³⁾、Halfmanのグループ⁴⁾の研究があるが、これらはまだ試みの段階で、まだ信頼しうる理論は、確立されていない。たとえば、N. Rottの理論は、後縁における Kutta-Joukowskiの条件をゆるめるといふ idea と定常の実験

* 昭和41年11月9日受付

** 機体第一部

から得られるある関係式を使って、非定常空気力を求めるものであるが、その適用の範囲は、失速角以下の弱い粘性効果* に制限されていて、失速フラッタへの拡張の一つの可能性を示すにとどまっている。

本報告では、静的なモーメント迎角曲線、揚力迎角曲線およびはく離流の非定常効果を表わす 3 個の定数を既知として、非定常空気力を求める方法を述べる。

前述のごとく、失速フラッタを起こしたときの振動は、曲げかねじれのみの一自由度の振動であるから、フラッタ条件は、翼自身のもつ摩擦による減衰が無視できれば、空気力が 1 サイクルの間に翼に対してなす仕事が零になる点で与えられる。すなわち、曲げ振動に対して、

$$\oint Ldh=0$$

ねじれ振動に対して、

$$\oint M d\alpha=0$$

である。ここで L は揚力、 h は翼の上下変位、 M はモーメント、 α は迎角である。 \oint は振動の 1 サイクルにわたっての積分を意味する。

それで、空気力は、曲げ振動に対しては揚力、ねじれ振動に対しては、モーメントを求めれば良い。また翼の慣性力と弾性力が空気力に比べて十分大きい場合には、振動は調和振動とみなせるから、翼の振動は調和振動として解析する。

記号

a : 1/2 chord 長を基準として無次元化された翼の回転軸の位置

b : 1/2 chord

$g_L(\alpha)$: 静的な実験から得られる揚力迎角曲線

$g_M(\alpha)$: 静的な実験から得られるモーメント迎角曲線

$h(t)$: (翼の純曲げ振動の場合の垂直方向変位)/ b

h_0 : (翼の純曲げ振動の片振幅)/ b

k : reduced frequency ($b\omega/U'$)

L : 単位 span 当りの揚力

M : (単位 span 当りのねじれモーメント)/ b

t : 時間

U' : 一様流速度

U : U'/b

W : (空気力が 1 サイクルの間に翼に対してな

す仕事)/ b

α : 純ねじれ振動の角変位

α_i : 平均迎角

ρ : (空気密度)・ b^3

ω : 円振動数

1. 失速角付近の迎角で非定常運動する翼に働く空気力についての定性的考察

1.1 ねじれの調和振動をする翼に働く空気力について

振動翼実験から得られたデータ* より、モーメント係数 C_M を縦軸に、迎角 α を横軸にとって描いたループを図 1.1~1.8 に示す。ループになっていない曲線は、静的なモーメント迎角曲線である。

図 1.1~1.4 は平均迎角 $\alpha_i=9^\circ 24'$ の場合を示し、振動の 1 サイクルの一部で失速が起こっている。

この場合の特長は、

- (i) 失速が静的失速角より大きな迎角で起こり、逆に失速からの回復は、静的失速角より低い迎角で起こっている(図 1.1)。
- (ii) (i) の傾向は、reduced frequency $k=b\omega/U'$ が大きくなるにしたがって、大きくなる(図 1.2~1.3)。
- (iii) ある k の値以上になると、失速が起こらなくなる(図 1.4)。

図 1.5~1.8 は、平均迎角 $\alpha_i=17^\circ 24'$ の場合を示し、翼面上の流れは、振動の 1 サイクルを通じて、はく離しているものと思われる。それにもかかわらず図 1.4 と図 1.8 が同じような傾向を示しているのは興味深い。

以上の実験結果から、わかるように、失速現象を含むような空気力の非定常的ふるまいを特長づけるものは、空気力のヒステリシスである。

失速角以下における振動空気力もヒステリシスを示すが、これは翼まわりの circulation の変動に伴って生ずる wake vortex の影響と、翼の吹き下ろしによって、有効迎角が実際の迎角の変化よりも遅れて変化することによって生ずるものである。ここに言うヒステリシスは、以上述べたヒステリシスの原因を徐いても、なおかつ存在するところの(詳しい機構は明らかでないが)はく離流に特有の性質によって、起こされるヒステリシスと解釈されたい。

注) * 失速角以下の揚力迎角曲線のこの配は、非粘性理論から予測されるこの配よりも、(実際の流れでは)小さい値を示す。N. Rott は、このような効果が非定常の場合に、どのように影響するかを、求めている。

注) * このデータは九州大学の木村助教授のご好意による。

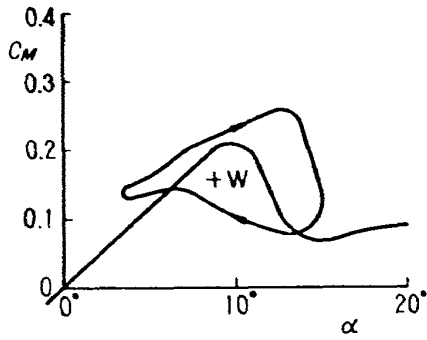


図 1.1 $k=0.068$

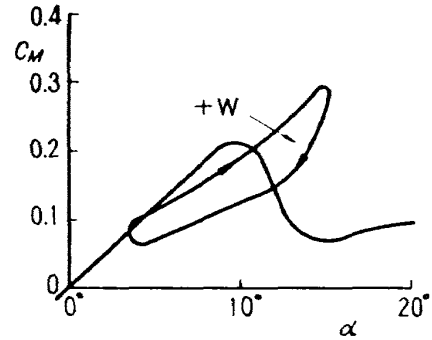


図 1.2 $k=0.250$

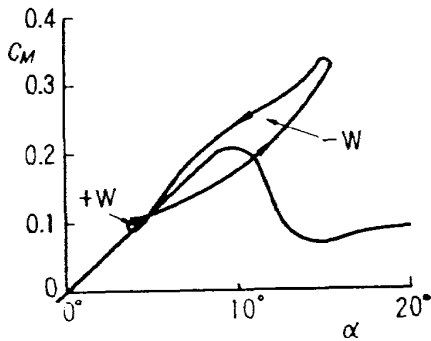


図 1.3 $k=0.383$

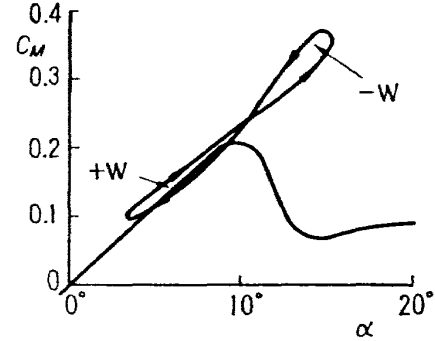


図 1.4 $k=0.505$

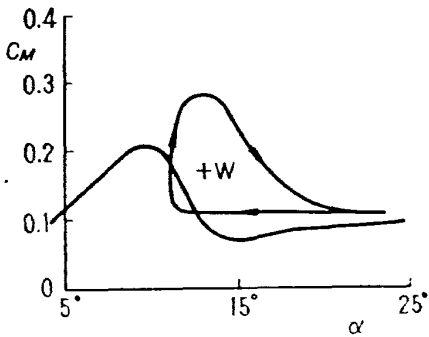


図 1.5 $k=0.061$

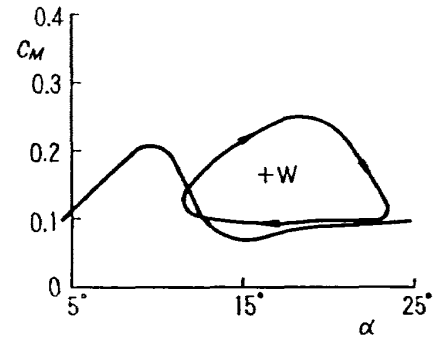


図 1.6 $k=0.251$

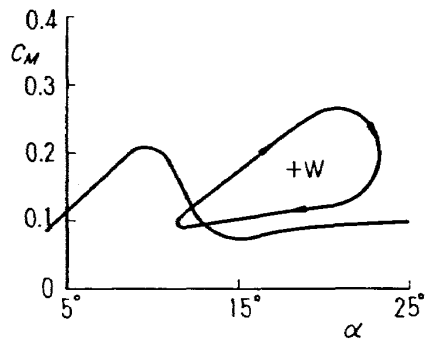


図 1.7 $k=0.369$

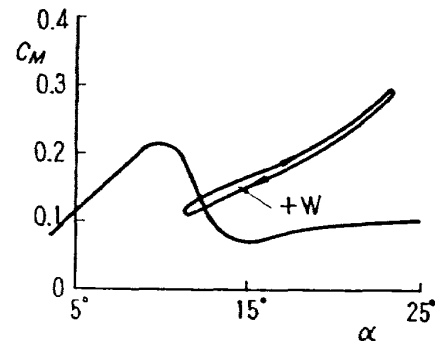


図 1.8 $k=0.521$

図 1 実験によるモーメントループ, (九州大学木村春夫助教授のご好意による)
 ($Re=1.1 \times 10^5$, 翼型: NACA-0012, 回転軸: $1/2$ chord, 振幅: 6° 平均迎角: $9^\circ 24'$ (図1.1~1.4), $17^\circ 24'$ (図1.5~1.8))

1.2 一定の角速度で回転する翼に働く空気力について

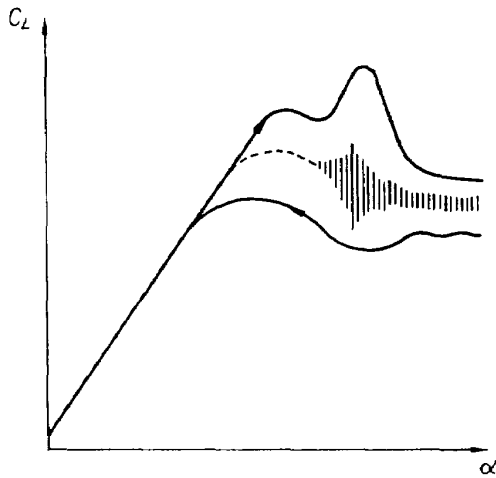


図 2

次に、このようなヒステリシス現象を別の形で示した実験として、W. S. Farren⁵⁾ の実験がある。

図 2 は、この実験で測定された空気力の変動の一般的傾向を示したものである。

これは、翼を低い迎角から高い迎角に向かって、一定の角速度で回転したとき、およびそれと逆の行なったときの normal force を縦軸に、迎角を横軸にとって、示したものである。

点線は、静的な実験による値を示し、帯状の部分は、空気力が、変動 (fluctuate) する範囲を示している。 $\dot{\alpha} > 0$ の場合に現われる peak を除けば、失速してからの、おのおのの場合の曲線が互いに、だいたい平行であることは興味深い。ただし、 $\dot{\alpha}$ は $d\alpha/dt$ を意味する。

1.3 空気力のふるまいを説明するための仮定

まず W.S. Farren の実験結果を説明するために、次のような仮定を置く。

(1) ある迎角 α_1 にあり、上面の流れがはく離した翼の、一つの状態 (図 3.1) を考え、次にその翼面上のはく離領域を固定して、迎角だけ、 α_2 に変えた状態 (図 3.2) を仮想する。

このとき、図 3.1 の状態にあるときの揚力係数を C_{L1}

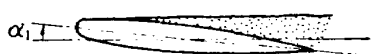


図 3.1



図 3.2

とすると、図 3.2 における揚力係数 C_{L2} は、

$$C_{L2} = C_{L1} + a_L(\alpha_2 - \alpha_1) \tag{1.1}$$

で与えられると仮定する。ここで a_L は、この翼が、失速角以下で持つ揚力傾斜である。

このことは、あるいは離状態にある翼の迎角を変えた場合、もしかりに、その翼面上のはく離領域の形が固定されているとしたら、そのときの揚力の変化は、失速角以下の揚力傾斜を持って変化する、と言い換えることができる。

(2) 準定常的に翼が回転する場合には、このはく離領域が迎角とともに変化して、静的な揚力迎角曲線を与えるのであるが、W. S. Farren の実験のように、一定の角速度で翼を回転させた場合には、このはく離領域が準定常の場合に対して、一定の遅れをもって変化する。たとえば、 $\dot{\alpha} > 0$ の場合には、迎角 α におけるはく離領域の形は、準定常では、 α より $\Delta\alpha$ だけ小さい迎角においてもつはく離領域の形なのである。したがって、静的な揚力迎角曲線を $C_L = g_L(\alpha)$ 、遅れを $\Delta\alpha$ とすると、仮定(1)によって、このときの揚力係数は、

$$C_L = g_L(\alpha - \Delta\alpha) + a_L \Delta\alpha \tag{1.2}$$

で与えられる (図 4 参照)。

$\dot{\alpha} < 0$ の場合も同様な考察から、

$$C_L = g_L(\alpha + \Delta\alpha) - a_L \Delta\alpha$$

調和振動の場合にも、まったく同様な考えが適用できるとする。すなわち、はく離領域の形は、準定常の場合に対して、一定の遅れをもって変化する。

しかし、はく離領域の形の変化が遅れるという仮定だけでは、図 1.4 のように、 k が大きくなると、失速が起こらなくなるという事実や、図 1.8 のようなループの形を説明できない。そこで、次のような仮定を加える。

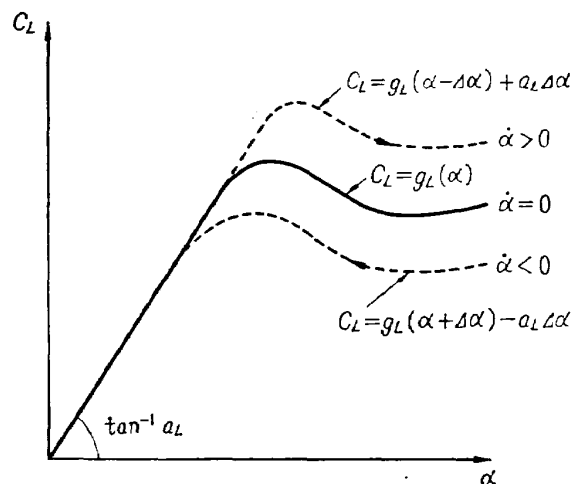


図 4

(3) k が増加するに従って、はく離領域の形は、一定の形（はく離しない状態も含めて）に、かぎりなく近づいていく。

たとえば、図1.4では、はく離しない状態にかぎりなく近づいたことになるし、図1.8では、翼面上のはく離領域があたかも固体であるかのように翼面上にはりついて、翼とはく離領域が一個の翼のようになって運動していると考えられるわけである。

2. 問題のモデル化

1の仮定を考慮して十分一般性をもちうるモデルを考える。

2.1

(1) 実際の流れにおいて翼に働く空気力の変動は、非圧縮、非粘性の完全流体中にある翼まわりの circulation の変動のみによって表現できると仮定する*。

このようなモデルでは抵抗を説明できないが、フラッタの解析では、抵抗は重要な意味を持たない。

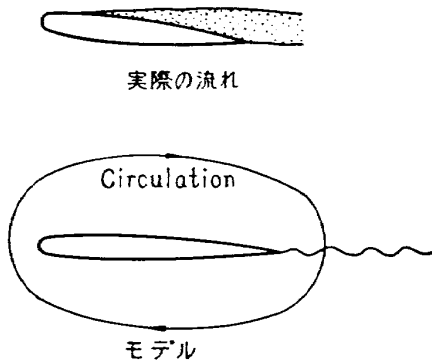


図5

(2) 完全流体中で微小運動をする翼に働く空気力は、Kármán と Sears⁶⁾ によって、次のように求められている。以下翼弦長を2として話をすすめる。翼の進行方向は X の負の方向とする。

単位 Span 当りの揚力は、上向きを正に取って、

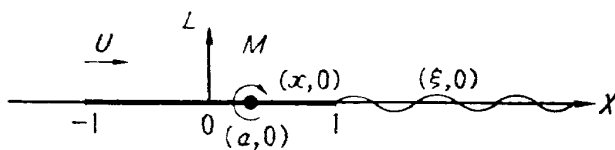


図6

注) * Circulation の変動によって、翼の後縁から生ずる、Wake Vortex による影響は考慮する。

$$L = -\rho(d/dt) \int_{-1}^1 \gamma_0(x) x dx + \rho U \Gamma_0 + \rho U \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.1)$$

ここで、 γ_0 : wake vortex の影響がない場合に、翼の幾何学的形状および翼の運動によって決まる vorticity で、定常の場合の薄翼理論より求まる。

Γ_0 : $\gamma_0(x)$ によって決まる翼まわりの全 circulation。

$\gamma(\xi)$: wake vortex における vorticity の分布。

(2.1) 式は次の三つの部分からなっている。

$$(a) L_1 = -\rho(d/dt) \int_{-1}^1 \gamma_0(x) x dx$$

apparent mass による寄与と呼ばれるもので、circulation のない流れの場において、加速された流体の質量の反作用によって生ずる空気力。

$$(b) L_0 = \rho U \Gamma_0$$

quasi-steady lift と呼ばれるもので、翼の瞬間迎角をそのまま保った場合に働く空気力。

$$(c) L_2 = \rho U \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1}$$

これは wake 内の vorticity 分布 $\gamma(\xi)$ の誘導によって翼に発生する空気力。

また、単位 span 当りの a 点まわりの頭上げモーメントは、参考文献 6) の (14) 式を変形して、

$$M = 1/2 \rho (d/dt) \int_{-1}^1 \gamma_0(x) \{x^2 - (1/2 + 2ax)\} dx - \rho U \int_{-1}^1 \gamma_0(x) (x-a) dx + \rho U (1/2 + a) \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.2)$$

(2.2) 式も揚力の場合と同様に次の三つの項からなっている。

$$(a) M_1 = 1/2 \rho (d/dt) \int_{-1}^1 \gamma_0(x) \{x^2 - (1/2 + 2ax)\} dx$$

apparent mass による寄与の項。

$$(b) M_0$$

quasi-steady moment

$$(c) M_2 = \rho U (1/2 + a) \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1}$$

wake vortex による寄与の項。

(a) の apparent mass の項は、他の項より小さいこと、およびその物理的意味からして、線形理論（はく離が起こらない場合の理論）より得られた結果を用いる。

(b) の quasi-steady lift および moment は翼の静的な揚力曲線および、モーメント曲線に、はく離流のヒステリシス効果を考慮して求める。

(c) の wake vorticity による寄与の項は、翼の静的揚力曲線から quasi-steady circulation Γ_0 が求まるから、後縁における境界条件より $\gamma(\xi)$ が決まり、この項を決定することができる。

そこで (b) の quasi-steady lift および moment を求めるときにどのようなモデルを作るかが最も重要な問題となる。粘性流体特有の現象であるヒステリシス効果は、この段階で考慮される。「1.3」に述べた仮定を、仮想翼という概念を導入することによって、モデルの中に取り入れていくことにする。

2.2 quasi-steady moment および lift

quasi-steady lift の場合を例にとり、モデルを説明する。moment の場合もまったく同様に取り扱える。

(1) 静的な実験で得られた $C_L-\alpha$ 曲線上の各点に対応するある仮想的な翼を想像し、そのそれぞれの翼は次の二つ条件を満足するものとする。

(a) 任意の点 $(\alpha, g_L(\alpha))$ に対応する仮想翼が迎角 α に保たれたときの揚力係数は $g_L(\alpha)$ である (図 7 参照)。

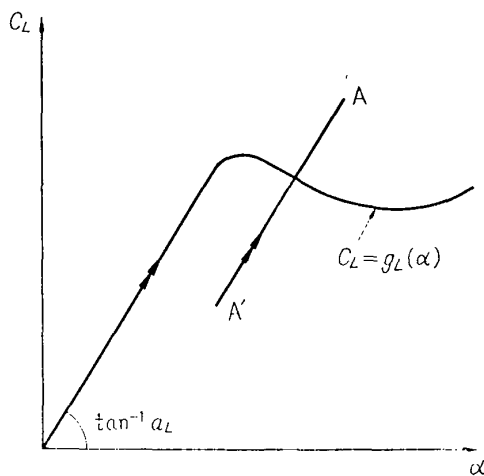


図 7

(b) 任意の点 $(\alpha, g_L(\alpha))$ に対応する仮想翼が α の近傍で準定常的にその迎角を変えた場合、そのときの揚力係数は、実際の翼が静的失速角以下で示す揚力傾斜 a_L で変化する (図 7 の直線 AA')。

たとえば、実際の翼が平均迎角 α_i のまわりで、準定常的に 1 サイクルの振動をしたときの空気力の変動は (a) によって、各瞬間の迎角に対応する仮想翼が、迎角の変化にしたがって次々に変えることによって得られるものと一致する。これは「1.3」の仮定 1 のモデル化である。

(2) 振動数が零でない場合には、ヒステリシス現象を考慮するため次の仮定をもうける。

仮想翼の変化は、迎角の変化と一致せずにある位相遅れをもって変化する。言い換えると、たとえば、迎角が α である仮想翼は、迎角 α に対応する仮想翼ではなく、 α より時間的に位相の遅れた迎角 $\alpha_{eq} = \alpha(t-\tau)$ に対応する仮想翼であるとする。

ここで、 τ は定数である。

仮定(1)の (b) によってこのときの C_L の値は、図 8 を参照して

$$C_L = g_L(\alpha_{eq}) + a_L(\alpha - \alpha_{eq}) \quad (2.3)$$

で与えられることがわかる。

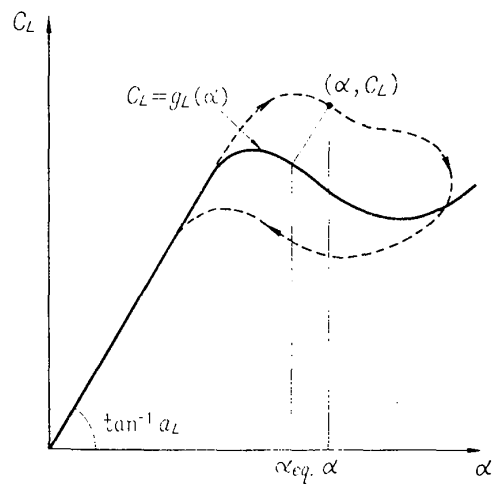


図 8

ここで、もし $\alpha = \alpha_i + \alpha_0 \sin(\omega t)$ とすれば、 $C_L(t)$ は、図 8 における点線のように変化するだろう。

これは「1.3」の仮定 2 をモデル化したことになる。

(3)「1.3」に述べたように、はく離領域の変化の遅れという考え方だけでは、不十分であるから、さらに仮定 3 に述べたことをモデル化する必要がある。仮定 3 は、前述の仮想翼がある一つの迎角に対応する仮想翼に収束する、ということによってモデル化される。そこで、この収束は $e^{-\gamma_1 k}$ (γ_1 : 定数) に比例して起こると仮定する。

こう仮定することは、はく離領域の形が、 $e^{-\gamma_1 k}$ に比例して、ある一定の型に収束することを意味するが、このような効果には、空気の粘性が支配的な役割をはたしていると思われる。それで、粘性による現象は、おおむね、指数関数で表わされることから、このような関数形を仮定した。

結局、翼の変位を $\alpha = \alpha_i + \alpha_0 \sin \omega t$ とすると、仮想翼の変化の様子を決める迎角 α_{eq} は、

$$\alpha_{eq} = \alpha_i - \alpha_0 \eta (1 - e^{-\tau_1 k}) + \alpha_0 e^{-\tau_1 k} \sin(\omega t - \phi) \quad (2.4)$$

で与えられる。

ここで、仮想翼は、迎角 $\alpha_p = \alpha_i - \eta \alpha_0$ に対応する仮想翼に収束すると仮定した。 η は $-1 < \eta < 1$ を満足する定数である。図 1.8 を見ると、 η はだいたい、1 に近い値に取るのが良いと思われる。また位相遅れ ϕ は、N. Rott³⁾, J. R. Schnittger⁸⁾ に従って、 k と近似的に $\phi = \tau_2 k$ の関係にあると仮定する。

ここにでてきた 3 個の未知定数は「1. 3」に述べた仮定が正しければ、振動する翼のはく離領域の運動から決定されるから、将来、解析的にかあるいは、はく離領域の運動を実験的に測定するかによって決定できるであろう。

結局、quasi-steady lift は (2.3) 式で与えられ、 α_{eq} としては、(2.4) 式を用いることになる。

3. 振動空気力に対する半実験式

前節で論じたモデルを使って、「3. 1」で純曲げ振動に対する揚力、「3. 2」で純ねじれ振動に対するモーメントを求めることにする。

3. 1 純曲げ振動

翼の垂直方向変位は、

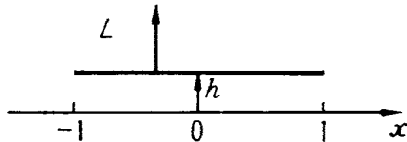


図 9

$$h = h_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

とする。

(a) apparent mass による空気力 L_1
線形理論から得られる結果をそのまま使って (付記 1),

$$L_1 = \pi \rho \omega^2 h_0 \cos \omega t \quad (3.2)$$

(b) quasi-steady lift L_2

翼の有効迎角 α_e は、

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \alpha_i - \dot{h}/U \\ &= \alpha_i + h_0 k \sin \tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで、 $k = \frac{\omega}{U}$, $\tau = \omega t$

この迎角に対する α_{eq} は「2」の議論によって、(2.4) 式を使って、

$$\alpha_{eq} = \alpha_i - h_0 k \eta (1 - e^{-\tau_1 k}) + h_0 k e^{-\tau_1 k} \sin(\tau - \tau_2 k) \quad (3.4)$$

(2.3) 式に対応する式は、

$$\begin{aligned} C_{L0}(\tau) &= a_L h_0 k \{ (\eta + \sin \tau) - e^{-\tau_1 k} (\eta + \sin(\tau - \tau_2 k)) \} \\ &+ g_L (\alpha_i - h_0 k \eta + h_0 k e^{-\tau_1 k} (\eta + \sin(\tau - \tau_2 k))) \end{aligned} \quad (3.5)$$

さらに、wake vorticity による寄与 L_2 を計算するには、 C_{L0} を Fourier 級数に展開しておく必要がある。

$$C_{L0} \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau' + b_n \sin n\tau') \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} a_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{L0}(\tau') \cos n\tau' d\tau' \\ b_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{L0}(\tau') \sin n\tau' d\tau' \end{aligned} \quad (3.7)$$

ただし、 $\tau' = \tau - \tau_2 k$

結局、quasi-steady lift は、

$$\begin{aligned} L_0 &= \rho U^2 \left\{ a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(\omega t - \tau_2 k) \right. \\ &\left. + b_n \sin n(\omega t - \tau_2 k)) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(c) wake vortex による寄与

$$L_2 = \rho U \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1}$$

任意の瞬間における翼まわりの全 circulation Γ は、参考文献 6) の (10 a) 式より

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 + \int_1^{\infty} (\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1) \\ &\times \gamma(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Δt 時間に Γ の値が $\Delta \Gamma$ 変化したとすると、後縁からは、それに対応する counter vortex を生じ、それは、 $\xi = 1$ と $\xi = 1 + U \Delta t$ の間にある。

ゆえにうずに関する定理により、

$$-\Delta \Gamma = \gamma(1) U \Delta t$$

これより、

$$d\Gamma/dt = -\gamma(1) U \quad (3.10)$$

後縁から発生した wake vortex は、一様流の速度で後方に流れていくから、

$$\gamma(\xi) = g(t - \xi/U) \quad (3.11)$$

と置ける。ここで g はある未知関数である。

(3.10) 式に (3.9) と (3.11) 式を代入して、

$$\begin{aligned} -Ug(t-1/U) &= d\Gamma_0/dt \\ &+ \int_1^{\infty} (\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1) dg(t - \xi/U) \\ &/dt \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.12)$$

ところで、quasi-steady lift L_0 は

$$L_0 = \rho U \Gamma_0$$

であるから、(3.8) 式を使って、

$$\Gamma_0(t) = U \left\{ a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(\omega t - \gamma_2 k) + b_n \sin n(\omega t - \gamma_2 k)) \right\} \quad (3.13)$$

未知関数 $g(t)$ を次のように Fourier 級数で仮定すると,

$$g(t) \sim p_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n(\omega t - \gamma_2 k) + q_n \sin n(\omega t - \gamma_2 k)) \quad (3.14)$$

(3.11) 式と (3.14) 式より,

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= g(t - \xi/U) \\ &= p_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos(n(\omega t - \gamma_2 k) - n\omega\xi/U) \\ &\quad + q_n \sin(n(\omega t - \gamma_2 k) - n\omega\xi/U)] \\ &= p_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos(n\omega\xi/U) \\ &\quad - q_n \sin(n\omega\xi/U)] \cos n\tau' \\ &\quad + [p_n \sin(n\omega\xi/U) \\ &\quad + q_n \cos(n\omega\xi/U)] \sin n\tau' \end{aligned} \quad (3.15)$$

また,

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= g(t - 1/U) \\ &= p_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos(n\omega/U) - q_n \sin(n\omega/U)] \\ &\quad \times \cos n\tau' + [p_n \sin(n\omega/U) + q_n \cos(n\omega/U)] \\ &\quad \times \sin n\tau' \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.15) 式と (3.16) 式を (3.12) 式に代入して, p_n, q_n を決定すると,

$$p_0 = 0 \quad (3.17)$$

$$p_n = (n\omega)(b_n A_{1n} + a_n A_{2n}) / (A_{1n}^2 + A_{2n}^2) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$q_n = (n\omega)(b_n A_{2n} - a_n A_{1n}) / (A_{1n}^2 + A_{2n}^2) \quad (3.18)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\cos(n\omega/U) \\ &\quad - (n\omega/U) \int_1^{\infty} (\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1) \\ &\quad \times \sin(n\omega\xi/U) d\xi \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \sin(n\omega/U) \\ &\quad - (n\omega/U) \int_1^{\infty} (\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1) \\ &\quad \times \cos(n\omega\xi/U) d\xi \end{aligned} \quad (3.20)$$

これで $\gamma(\xi)$ が求まった。

ところで L_2 は, $L_2 = \rho U \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1}$ で与えられるから, これに (3.15) 式を代入して,

$$\begin{aligned} L_2 &= \rho U \sum_{n=1}^{\infty} [(p_n R_n - q_n I_n) \cos n\tau' + (p_n I_n + q_n R_n) \\ &\quad \times \sin n\tau'] \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで,

$$R_n = \int_1^{\infty} \cos(n\omega\xi/U) / \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi, \quad (3.22)$$

$$I_n = \int_1^{\infty} \sin(n\omega\xi/U) / \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi \quad (3.22)$$

(3.21) 式を書き直して,

$$\begin{aligned} L_2 &= \rho U^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(p_n R_n - q_n I_n) / U \cos n\tau' \\ &\quad + (p_n I_n + q_n R_n) / U \sin n\tau'] \end{aligned} \quad (3.23)$$

ところで,

$$(p_n R_n - q_n I_n) / U = a_n (F(nk) - 1) + b_n G(nk)$$

$$(p_n I_n + q_n R_n) / U = -a_n G(nk) + b_n (F(nk) - 1)$$

を示すことができる (付記 2)。

ただし, $C(k) = F(k) + iG(k)$ は Theodorsen 関数である。

ゆえに,

$$\begin{aligned} L_2 &= \rho U^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n (F(nk) - 1) + b_n (G(nk) - 1)) \\ &\quad \times \cos n\tau' + (-a_n G(nk) + b_n (F(nk) - 1)) \sin n\tau'] \end{aligned} \quad (3.24)$$

全揚力は, (a), (b), (c) で求めた各項を加え合わせて, (3.2), (3.8), (3.24) の各式より,

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_0 + L_2 \\ &= \rho U^2 [\pi k^2 h_0 \cos \omega t + a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n \cos n(\omega t - \gamma_2 k) \\ &\quad + b_n \sin n(\omega t - \gamma_2 k)) + (a_n (F(nk) - 1) \\ &\quad + b_n G(nk)) \cos n(\omega t - \gamma_2 k) + (-a_n G(nk) \\ &\quad + b_n (F(nk) - 1)) \sin n(\omega t - \gamma_2 k)\}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

そこで, W を 1 サイクルの間の空気が翼に対してなす仕事 ($W = \oint L dh$) とするとき,

$$b_{1L}^* = W / (\rho U^2 h_0)$$

で定義される無次元係数を求めると*,

$$\begin{aligned} b_{1L}^* &= -(1/h_0) [\cos \gamma_2 k (b_1 F(k) - a_1 G(k)) \\ &\quad + \sin \gamma_2 k (a_1 F(k) + b_1 G(k))] \end{aligned} \quad (3.26)$$

ところで, 係数 a_1, b_1 は, (3.5) 式の第 2 項を, $\alpha_{e\eta}$ の時間に関する平均値 $X_1 = \alpha_i - h_0 k \eta (1 - e^{-\tau_1 k})$ の近傍で, 三次までの Taylor 級数に展開して, (3.5) 式を (3.8) 式に代入して計算すると,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_L h_0 k \sin \gamma_2 k \\ b_1 &= a_L h_0 k \cos \gamma_2 k + (g_L'(X_1) - a_L) Y_1 \\ &\quad + (g_L'''(X_1) / 3!) \cdot (3/4) Y_1^3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで, $g_L' = dg_L/d\alpha$, $g_L''' = d^3 g_L/d\alpha^3$

また, $X_1 = \alpha_i - h_0 k \eta (1 - e^{-\tau_1 k})$

$$Y_1 = h_0 k e^{-\tau_1 k} \quad (3.28)$$

3.2 純ねじれ振動

翼の変位を,

$$\alpha = \alpha_i + \alpha_0 \sin \omega t \quad (3.29)$$

注) * $b_{1L}^* > 0$ のときは negative damping, $b_{1L}^* < 0$ のときは, positive damping になる。

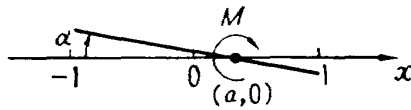


図 10

とする。

(a) apparent mass による寄与 M_1

線形理論から得られる結果をそのまま使って (付記 3)

$$M_1 = 2\rho U^2 \left\{ (\pi/2)(1/8 + a^2)k^2\alpha_0 \sin\omega t + (\pi/2)ak\alpha_0 \cos\omega t \right\} \quad (3.30)$$

(b) quasi-steady moment M_0

翼面上の x なる点における有効迎角は、

$$\alpha_e = \alpha + (x-a)/U\dot{\alpha} \quad (3.31)$$

このように翼面上の各点で α_e が変わるため、静的なモーメント曲線から M_0 を求めるときにどこの有効迎角をとったら良いかが問題となる。しかし、失速が起こらない場合の理論では、 $x=a/(1+2a)$ 点の有効迎角が等価な迎角となるので、これから類推してこの問題でも $x=a/(1+2a)$ 点の有効迎角をとることにする (付記 4)。

$x=a/(1+2a)$ 点の有効迎角は、(3.31) 式から、

$$\alpha_e(\tau) = \alpha_i + \alpha_0 \sqrt{1 + \{2a^2/(1+2a)\}^2} \sin(\tau + \varphi_q) \quad (3.32)$$

ただし、 $\varphi_q = \tan^{-1}(-k \cdot 2a^2/(1+2a))$ 、 $\tau = \omega t$

ゆえに、以下純曲げ振動の場合とまったく同様な考え方から quasi-steady moment 係数 C_{M0} は、static のモーメント迎角曲線を $C_M = g_M(\alpha)$ とすると、

$$\begin{aligned} C_{M0}(\tau) &= a_M \alpha_0 \sqrt{1 + k^2 \{2a^2/(1+2a)\}^2} \\ &\times \{ \eta + \sin(\tau + \varphi_q) - e^{-\tau_1 k} (\eta + \sin(\tau + \varphi_q - \tau_2 k)) \} \\ &+ g_M(\alpha_i - \alpha_0 \eta \sqrt{1 + k^2 \{2a^2/(1+2a)\}^2} \\ &+ \alpha_0 \sqrt{1 + k^2 \{2a^2/(1+2a)\}^2} \cdot e^{-\tau_1 k} \\ &\times (\eta + \sin(\tau + \varphi_q - \tau_2 k)) \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

後の計算につごうが良いように、 $\tau + \varphi_q - \tau_2 k = \tau_2$ とおき、 C_{M0} を τ_2 について Fourier 級数に展開して、

$$C_{M0} \sim a'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\tau_2 + b'_n \sin n\tau_2) \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{M0}(\tau_2) \cos n\tau_2 d\tau_2 \\ b'_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{M0}(\tau_2) \sin n\tau_2 d\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

ゆえに、quasi-steady moment M_0 は、

$$\begin{aligned} M_0 &= 2\rho U^2 \{ a'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n(\omega t + \varphi_q - \tau_2 k) \\ &+ b'_n \sin n(\omega t + \varphi_q - \tau_2 k)) \} \end{aligned} \quad (3.36)$$

(c) wake vorticity による寄与の項

$$M_2 = \rho U(1/2+a) \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi / \sqrt{\xi^2 - 1}$$

失速しない場合の理論からの類推によって、3/4 chord 点 ($x=1/2$) の有効迎角 (付記 5)、

$$\alpha_e = \alpha_i + \alpha_0 \sqrt{1 + k^2(1/2-a)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_w) \quad (3.37)$$

をとって、quasi-steady moment の場合とまったく同様にして、static の $C_L - \alpha$ 曲線から、quasi-steady lift に対する式を次のようにうることができる。

$$\begin{aligned} C_{L0} &= a_L \alpha_0 \sqrt{1 + k^2(1/2-a)^2} (\eta + \sin(\tau_3 + \tau_2 k) \\ &- e^{-\tau_1 k} (\eta + \sin\tau_3)) \\ &+ g_L(\alpha_i - \alpha_0 \sqrt{1 + k^2(1/2-a)^2} (\eta - e^{-\tau_1 k} \\ &+ \alpha_0 \sqrt{1 + k^2(1/2-a)^2} \cdot e^{-\tau_1 k} \sin\tau_3)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

ただし、 $\tau_3 = \omega t + \varphi_w - \tau_2 k$ 、 $\varphi_w = \tan^{-1}k(1/2-a)$

後の計算につごうが良いように、 C_{L0} を Fourier 級数に展開して、

$$C_{L0} \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau_3 + b_n \sin n\tau_3) \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{L0}(\tau_3) \cos n\tau_3 \cdot d\tau_3 \\ b_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} C_{L0}(\tau_3) \sin n\tau_3 \cdot d\tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

quasi-steady circulation Γ_0 と C_{L0} の間には、

$$\Gamma_0 = UC_{L0}$$

の関係があるので、(3.39) 式を使って、

$$\Gamma_0 = U \{ a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau_3 + b_n \sin n\tau_3) \} \quad (3.41)$$

また、wake vorticity $\gamma(\xi)$ は、 g を未知関数として、

$$\gamma(\xi) = g(t - \xi/U)$$

と置けるから、今この未知関数を、次のように、Fourier 級数で仮定すると、

$$\begin{aligned} g(t) &\sim p_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n(\omega t + \varphi_w - \tau_2 k) \\ &+ q_n \sin n(\omega t + \varphi_w - \tau_2 k)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

境界条件 (3.12) 式を使って、純曲げ振動の場合とまったく同様にして、 p_n 、 q_n を求めて、 $\gamma(\xi)$ を決定することができる。結局 M_2 として次式を得る。

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\rho U^2 [(1/2)(1/2+a) \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \{ (p_n R_n - q_n I_n) / U \cos n\tau_3 \\ &+ (p_n I_n + q_n R_n) / U \sin n\tau_3 \}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここで、 p_n 、 q_n 、 I_n 、 R_n に対しては、(3.17)、(3.18)、(3.22) の各式がそのままなりたつ、ただし係数 a_n 、 b_n には、(3.40) 式を用いる。

したがって、(3.43) 式の項 $(p_n R_n - q_n I_n)/U$, $(p_n I_n + q_n R_n)/U$ は、Theodorsen 関数 $C(k) = F(k) + iG(k)$ を使って、(3.23) 式で与えられるから、

$$M_2 = 2\rho U^2 [(1/2)(1/2+a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n(F(nk)-1) + b_n G(nk)) \cos n(\omega t + \varphi_w - \gamma_2 k) + (-a_n G(nk) + b_n(F(nk)-1)) \sin n(\omega t + \varphi_w - \gamma_2 k) \}] \quad (3.44)$$

全モーメントは、(3.30), (3.36), (3.44) の各式より、

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_0 + M_2 \\ &= 2\rho U^2 [(\pi/2)(1/8+a^2)k^2\alpha_0 \sin \omega t \\ &\quad + (\pi/2)ak\alpha_0 \cos \omega t + a_0'/2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos n(\omega t + \varphi_q - \gamma_2 k) \\ &\quad + b_n \sin n(\omega t + \varphi_q - \gamma_2 k)) + (1/2)(1/2+a) \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n(F(nk)-1) + b_n G(nk)) \\ &\quad \times \cos n(\omega t + \varphi_w - \gamma_2 k) + (-a_n G(nk) \\ &\quad + b_n(F(nk)-1)) \sin n(\omega t + \varphi_w - \gamma_2 k) \}] \end{aligned} \quad (3.45)$$

そこで、 $b_{1M}^* = W/(2\rho U^2 \alpha_0)$, (ただし、 $W = \oint M d\alpha$ で定義される無次元係数を求めると、

$$\begin{aligned} b_{1M}^* &= (1/\alpha_0) [(\pi/2)ak\alpha_0 + \cos \gamma_2 k \\ &\quad \{1/\sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} (a_1' - kb_1'2a^2/(1+2a)) \\ &\quad + (1/2)(1/2+a)/\sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} ((F(k)-1) \\ &\quad \times (a_1+k(1/2-a)b_1) + G(k)(b_1-(1/2-a)ka_1))\} \\ &\quad - \sin \gamma_2 k \{1/\sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} \\ &\quad \times (b_1'+ka_1'2a^2/(1+2a)) + (1/2) \\ &\quad \times (1/2+a)/\sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} ((F(k)-1) \\ &\quad \times (b_1-k(1/2-a)a_1) \\ &\quad - G(k)(a_1+(1/2-a)kb_1))\}] \end{aligned} \quad (3.46)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_1' &= a_M \alpha_0 \sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} \cdot \sin \gamma_2 k \\ b_1' &= a_M \alpha_0 \sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} \cos \gamma_2 k \\ &\quad + (g_M'(X_2) - a_M) Y_2 + (g_M'''(X_2)/3!)(3/4) Y_2^3 \\ X_2 &= \alpha_i - \alpha_0 \eta \sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} (1 - e^{-\tau_1 k}) \\ Y_2 &= \alpha_0 \sqrt{1+k^2\{2a^2/(1+2a)\}^2} \cdot e^{-\tau_1 k} \\ a_1 &= a_L \alpha_0 \sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} \cdot \sin \gamma_2 k \\ b_1 &= a_L \alpha_0 \sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} \cdot \cos \gamma_2 k \\ &\quad + (g_L'(X_3) - a_L) Y_3 + (g_L'''(X_2)/3!)(3/4) \cdot Y_3^3 \\ X_3 &= \alpha_i - \alpha_0 \eta \sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} (1 - e^{-\tau_1 k}) \\ Y_3 &= \alpha_0 \sqrt{1+k^2(1/2-a)^2} e^{-\tau_1 k} \end{aligned} \quad (3.47)$$

4. 結果に対する討論および実験結果との比較

4.1 純曲げ振動

(3.26) 式で与えられる b_{1L}^* から、ヒステリシス効果が空力的な damping にどのような影響を与えているかを知ることができる。

ところで、後述するように、純ねじれ振動に対する半実験式を実験値と比較することによって、未知定数 τ_1, τ_2 の値は、それぞれ、 $\tau_1 \approx 1.0$, $\tau_2 \approx 4.5$ で与えられる。純曲げ振動に対する半実験式は、純ねじれ振動の場合とまったく同じ仮定から出発したわけであるから、純曲げ振動においても、 $\tau_1 \approx 1.0$, $\tau_2 \approx 4.5$ と考えてよい。したがって、非定常はく離流のヒステリシス効果を表わす位相遅れ $\phi = \gamma_2 k \approx 4.5k$ は、 $k \approx 0.35$ で $\pi/2$ にも達することになる。

簡単のため (3.27) 式において、 g_L''' を無視して、(3.27) 式を (3.26) 式に代入して整理すると、

$$b_{1L}^* = -a_L k F(k) - k(g_L'(X_1) - a_L) F(k) e^{-\tau_1 k} \times \cos \gamma_2 k - k(g_L'(X_1) - a_L) G(k) e^{-\tau_1 k} \sin \gamma_2 k$$

ここで、 $X_1 = \alpha_i - h_0 k \eta (1 - e^{-\tau_1 k})$

(a) $k \ll 1$ の場合には、 k^2 以上の項を無視すると

$$b_{1L}^* = -k F(k) g_L'(\alpha_i)$$

ゆえに、この場合には、ヒステリシス効果は、無視できて、空力的 damping は静的な揚力曲線のこう配に支配される。たとえば、 $F(k) > 0$ であるから、 $g_L'(\alpha_i) < 0$ であれば、 $b_{1L}^* > 0$ で、negative damping になることがわかる。

(b) k^2 以上の項が無視できるのは、たかだか、 $k < 0.1$ である。 $k > 0.1$ に対しては、位相遅れ $\phi = \gamma_2 k$ を $\cos \phi$ の形で含む第 2 項が急速に小さくなる。たとえば、 $k \approx 0.35$ で $\phi = 4.5k = \pi/2$ になって、第 2 項は零、第 3 項は $-(g_L' - a_L) k G(k) e^{-\tau_1 k}$ になる。したがって、

$$b_{1L}^* = -a_L k F(k) - (g_L'(X_1) - a_L) k G(k) e^{-\tau_1 k}$$

これは、 $F(k) > 0$, $g_L' \leq a_L$, $G(k) < 0$ であるから、各項はともに負で $b_{1L}^* < 0$ 、したがって、positive damping になることがわかる。ところで、はく離流の非定常効果* のない場合 ($\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$) には、任意の k の値に対して $b_{1L}^* = -g_L' k F(k)$ すなわち $b_{1L}^* > 0$ となって ($g_L' < 0$ の場合を考えている) negative damping になることを考えると、 $k \approx 0.35$ ではく離流の非定常効果、ことにヒステリシス効果が

注) * 位相遅れ $\phi = \gamma_2 k$ で表わされるヒステリシス効果および $e^{-\tau_1 k}$ で表わされるはく離領域の収束効果 (1.3 参照)。

非常に大きくきいていることがわかる。

したがって、 $k > 0.1$ では、ヒステリシス効果を見捨てることはできない。Halfman⁴⁾ や Rainey⁹⁾ の実験において negative damping が観測されなかったのは、このようなヒステリシス効果によるものと思われる。 $k \approx 0.35$ の場合について議論したが、実際上問題になる k の範囲 ($0 < k < 1$) では、ヒステリシス効果は常に positive damping に寄与していることを容易に示すことができる。

このように、純曲げ振動において、ヒステリシス効果が negative damping を押さえるように作用していることは、純ねじれ振動の場合に、ヒステリシス効果が、negative damping 発生に大きく寄与していることと対照的である。

4.2 純ねじれ振動

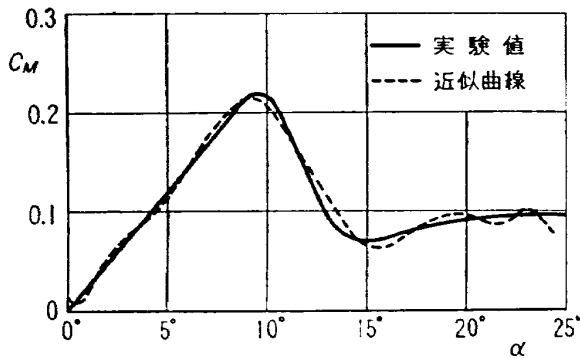


図 11.1 NACA 0012 に対するモーメント迎角曲線

($Re = 1.1 \times 10^5$, 縦横比; ∞ , 回転軸 1/2 chord)

「1」でとり上げた実験結果と比較するため、NACA-0012 に対する静的な揚力曲線およびモーメント曲線を、それぞれ次のような α の多項式で近似する。

$$g_L(\alpha) = .1093 - .004015p_1(x) - .06992p_2(x) + .08996p_3(x) + .009040p_4(x) - .06737p_5(x) + .0007466p_6(x) + .05047p_7(x) - .002068p_8(x) - .03473p_9(x)$$

$$g_M(\alpha) = .6602 + .2894p_1(x) - .3218p_2(x) + .1414p_3(x) + .04882p_4(x) - .06982p_5(x) + .001094p_6(x) + .02938p_7(x) - .01138p_8(x) - .001762p_9(x)$$

ここで、 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_9(x)$ はそれぞれ一次、二次、……九次の Legendre の多項式である。ただし、 $x = \alpha/12 - 1$ 実験値およびその近似式 $g_L(\alpha), g_M(\alpha)$ を図11に示す。

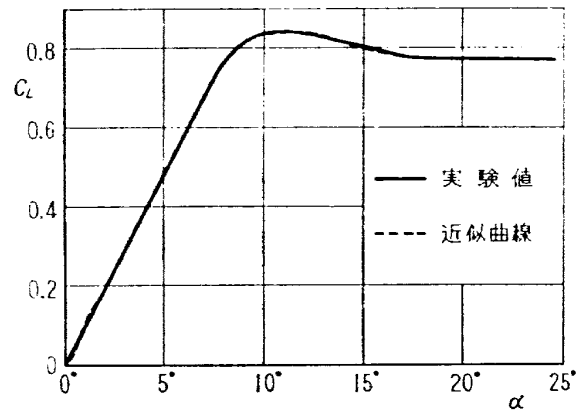


図 11.2 NACA-0012 に対する揚力迎角曲線

($Re = 1.7 \times 10^5$, 縦横比; ∞)

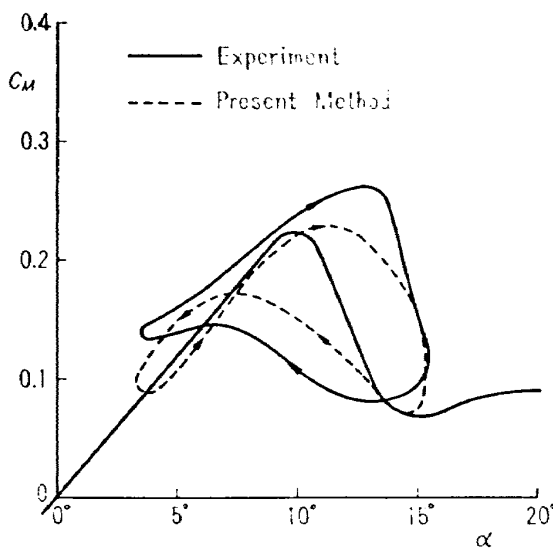


図 12.1 $k = 0.068$

($Re = 1.1 \times 10^5$, 翼型; NACA-0012, 回転軸; 1/2 chord, 振幅; 6°)

(平均迎角; $9^\circ 24'$ (図12.1~12.4), $17^\circ 24'$ (図12.5~12.8))

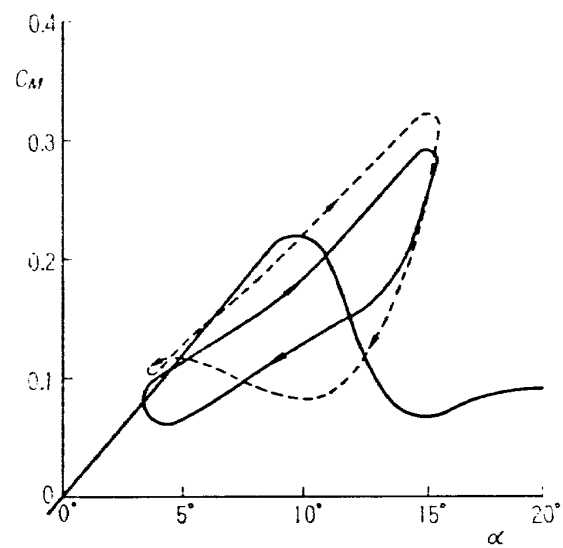


図 12.2 $k = 0.250$

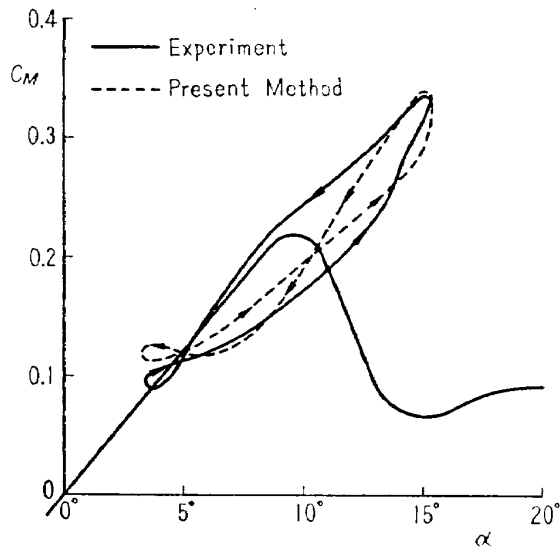


図 12.3 $k=0.383$

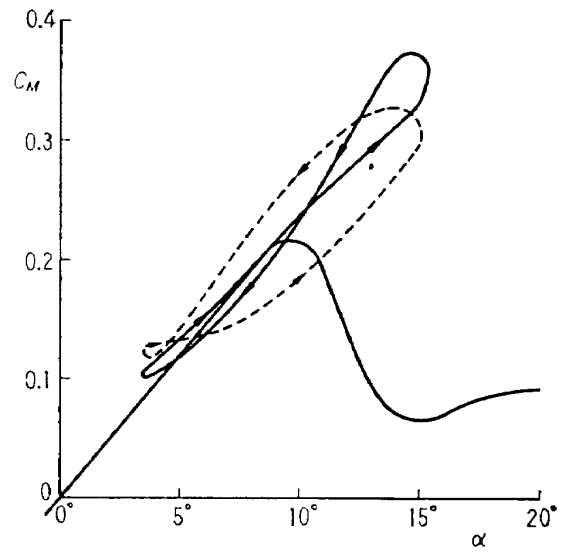


図 12.4 $k=0.505$

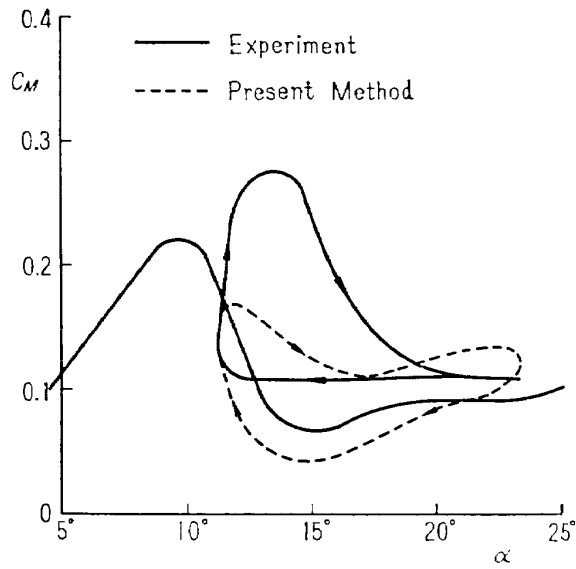


図 12.5 $k=0.061$

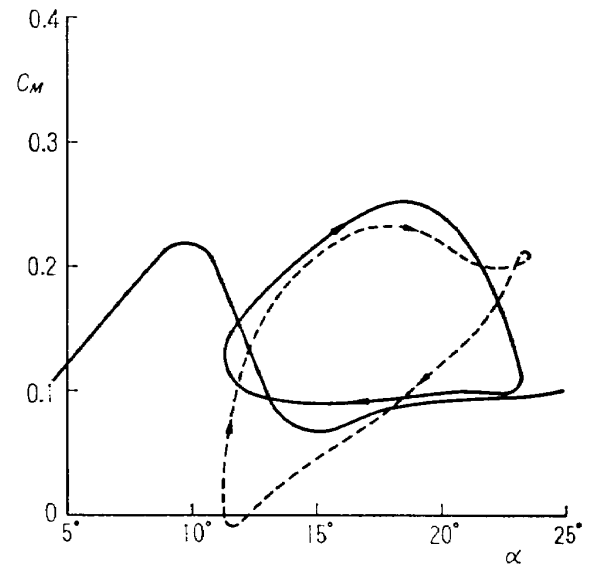


図 12.6 $k=0.251$

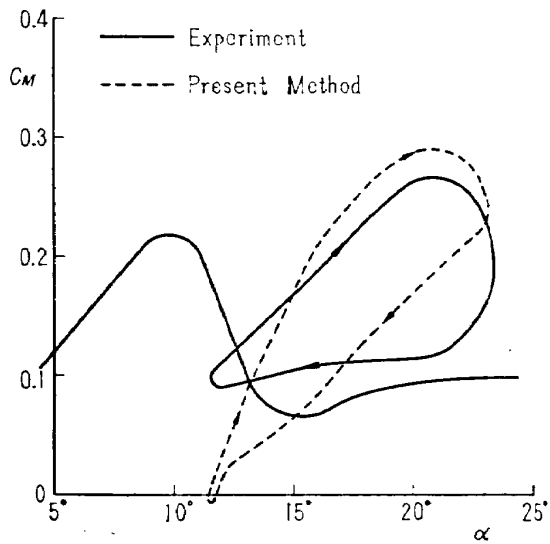


図 12.7 $k=0.369$

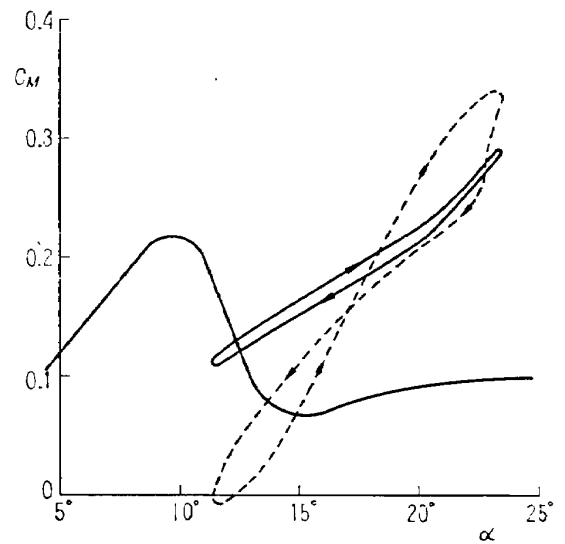


図 12.8 $k=0.521$

未知数 γ_1 , γ_2 , η は計算されたモーメントループが実験と合うように $\gamma_1=1.0$, $\gamma_2=4.5$, $\eta=1$ に取った。

(3.45) 式を計算した結果および実験値を図12に示す。

5. 結 論

(1) 失速が起こるような高迎角で曲げあるいはねじれの一自由度の調和振動をする二次元翼に働く、揚力およびモーメントに対する半実験式を求め得た。

この方法では、静的な揚力-迎角曲線および、はく離流の非定常効果を表わす3個の定数 γ_1 , γ_2 , η は既知でなければならない。

(2) 純ねじれ振動の場合、計算されたモーメントループは、reduced frequency k の小さいところでは、実験値とかなり良く一致しているが、 k の大きいところでは不十分である。

(3) 純曲げ振動においては、はく離流のヒステリシス効果は、空力的な damping を増加する。

この研究に際し、御指導いただいた九州大学の河島佑男教授ならびに貴重な実験データをお借し下さった木村春夫助教授に厚くお礼申し上げます。計算に当っては、当所の電子計算機 Datatron 205 を使用し、計算の一部を計測部の宮崎国男氏に依頼した。

文 献

- 1) M. Victory; Flutter at High Incidence, R. & M. No.2048 (1943/1)
- 2) F. Sisto; Stall Flutter in Cascades, J. Aero. Sci. (1953/9) pp. 598-604
- 3) N. Rott and George; An Approach to the Flutter Problem in Real Fluid, J. Aero. Sci. Preprint No. 509 (1955)
- 4) R. L. Halfman, H. C. Johnson and S. M. Haley; Evaluation of High-Angle-of-Attack Aerodynamic Derivative Data and Stall Flutter Prediction Technique, NACA TN 2533 (1951)
- 5) W. S. Farren; The Reaction on a Wing Whose Angle of Incidence Is Changing Rapidly, R. & M. No. 1648, (1935/1)
- 6) Th. von Kármán and W. R. Sears; Airfoil Theory for Non-Uniform Motion, J. Aero. Sci. (1938) pp. 379-390
- 7) W. F. Durand; Aerodynamic Theory, Vol. 2 (1935) pp. 37, Julius Springer Verlag.

- 8) J. R. Schnittger; Single Degree of Freedom Flutter of Compressor Blades in Separated Flow, J. Aero. Sci. (1954) pp. 27-35
- 9) A. G. Rainey; Measurement of Aerodynamic Forces for Various Mean Angles of Attack on an Airfoil Oscillating in Pitch and on Two Finite-Span Wings Oscillating in Bending with Emphasis on Damping in the Stall, NACA TN 3643 (1956)
- 10) A. D. S. Carter and D. A. Kilpatrick; Self-Excited Vibration of Axial-Flow Compressor Blades, Proc. I. Mech. E., Vol. 171, No. 7 (1957)
- 11) E. K. Armstrong and R. E. Stevenson; Some Practical Aspects of Compressor Blade Vibration; J. Roy. Aero. Soci., Vol. 64, No. 591 (1960/3)

付記 1

文献 6) の (27) 式で、翼の垂直方向速度 w (下向き正) を

$$w = A_0 U e^{i\omega t} \quad (27)$$

とすると、翼の垂直方向変位 (上向き正)

$$h = h_0 e^{i\omega t} \quad (27.1)$$

の間に

$$\dot{h} = -w \quad (27.2)$$

の関係がある。(27) 式と (27.1) 式を (27.2) 式に代入して

$$A_0 = -(i\omega h_0)/U \quad (27.3)$$

文献 6) によると、曲げ振動の場合の L_1 は、

$$L_1 = \pi \rho i \omega U A_0 e^{i\omega t} \quad (27.4)$$

これに、(27.3) 式を代入して、

$$L_1 = \pi \rho \omega^2 h_0 e^{i\omega t}$$

$h = h_0 \cos \omega t$ のときには、

$$L_1 = \pi \rho \omega^2 h_0 \cos \omega t$$

付記 2

本文の (3.19) と (3.20) 式から

$$\begin{aligned} A_{2n} - iA_{1n} &= \sin(nk) + i\cos(nk) \\ &- (nk) \int_1^\infty \left(\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1 \right) e^{-ink\xi} \cdot d\xi \\ &= -nk (e^{-ink}/(ink)) \\ &+ \int_1^\infty \left(\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1 \right) e^{-ink\xi} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.20.1)$$

ただし、 $k = \omega/U$, $i = \sqrt{-1}$

ところで、文献 6) pp. 384~385 の脚注によると、

$$\int_1^\infty \left(\sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} - 1 \right) e^{-ink\xi} \cdot d\xi$$

$$+ \{1/(ink)\} e^{-ink} = K_0(ink) + K_1(ink) \quad (3.20.2)$$

ここで, K_0, K_1 は第2種変形 Bessel 関数

$$\text{また, } K_n(ik) = \pi H_n^{(2)}(k)/(2i^{n+1}) \quad (3.20.3)$$

ここで, $H_n^{(2)}(k)$ は Hankel の第2関数 (3.20.3) 式より,

$$\left. \begin{aligned} K_0(ik) &= -(\pi i/2)H_0^{(2)}(k) \\ K_1(ik) &= -(\pi/2)H_1^{(2)}(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.20.4)$$

(3.20.4) 式を (3.20-2) 式に代入し, さらにそれを (3.20.1) 式に代入すると,

$$\left. \begin{aligned} A_{2n} &= (\pi/2)nkH_1^{(2)}(nk) \\ A_{1n} &= (-\pi/2)nkH_0^{(2)}(nk) \end{aligned} \right\} \quad (3.20.5)$$

一方, 本文 (3.22) 式より,

$$R_n - iI_n = \int_1^\infty e^{-ink\xi/\sqrt{\xi^2-1}} d\xi$$

ところで, $\int_1^\infty e^{-ink\xi/\sqrt{\xi^2-1}} d\xi = K_0(ink)$ であるから (文献 6) p. 384 の脚注参照) (3.20.4) を使って,

$$R_n = 0, \quad I_n = (\pi/2)H_0^{(2)}(nk) \quad (3.20.6)$$

ところで,

$$\begin{aligned} (1/U)(p_n R_n - q_n I_n) &\equiv M, \quad (1/U)(p_n R_n - q_n I_n) \\ &\equiv N \end{aligned} \quad (3.20.7)$$

と置くと, (3.20.7) 式に本文の (3.17), (3.18) 式を代入し $k = \omega/U$ に注意して整理すると,

$$M = nk/(A_{1n}^2 + A_{2n}^2) \{a_n(A_{2n}R_n + A_{1n}I_n) - b_n(A_{2n}I_n - A_{1n}R_n)\} \quad (3.20.8)$$

$$N = nk/(A_{1n}^2 + A_{2n}^2) \{a_n(A_{2n}I_n - A_{1n}R_n) + b_n(A_{2n}R_n + A_{1n}I_n)\} \quad (3.20.9)$$

(3.20.8), (3.20.9) にそれぞれ, (3.20.5), (3.20.6) 式を代入すると,

$$M = -1/(H_0^{(2)}(nk)^2 + H_1^{(2)}(nk)^2) \{a_n H_0^{(2)}(nk)^2 + b_n (H_0^{(2)}(nk) \cdot H_1^{(2)}(nk))\} \quad (3.20.10)$$

$$N = 1/(H_0^{(2)}(nk)^2 + H_1^{(2)}(nk)^2) \times \{-a_n H_0^{(2)}(nk) \cdot H_1^{(2)}(nk) + b_n H_0^{(2)}(nk)^2\} \quad (3.20.11)$$

ところで, Theodorsen 関数 $C(k) = F(k) + iG(k)$ は,

$$F(k) + iG(k) = H_1^{(2)}(k)/(H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k))$$

で定義されるから,

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(nk)^2/(H_0^{(2)}(nk)^2 + H_1^{(2)}(nk)^2) \\ = -(F(nk) - 1) \\ H_0^{(2)}(nk) \cdot H_1^{(2)}(nk)/(H_0^{(2)}(nk)^2 \\ + H_1^{(2)}(nk)^2) = -G(nk) \end{aligned} \right\} \quad (3.20.12)$$

(3.20.12) をそれぞれ (3.20.10) と (3.20.11) 式に代入して

$$\begin{aligned} M &= b_n G(nk) + a_n (F(nk) - 1) \\ N &= -a_n G(nk) + b_n (F(nk) - 1) \end{aligned}$$

付記 3

文献 7) p. 37 によると (定常薄翼理論), 垂直方向の風速分布 v_y を有する翼の vorticity 分布 $\gamma(x)$ および (kutta の条件より決まる) 翼まわりの circulation Γ は, 文献 7) の (6.15) と (6.16) 式より求めることができる。

$$\begin{aligned} v_y &= \sum_1^\infty (kB_k/a'^{(k+1)}) \cdot (\text{sink}\theta/(2\text{sin}\theta)) \\ v_x &= \Gamma/(4\pi a' \text{sin}\theta) + \sum_1^\infty (kB_k/a'^{(k+1)}) \\ &\quad \times (\text{cosk}\theta/(2\text{sin}\theta)) \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\bar{\gamma} = \Gamma/(2\pi a' \text{sin}\theta) + \sum_1^\infty (kB_k/a'^{(k+1)}) (\text{cosk}\theta/\text{sin}\theta) \quad (6.16)$$

ところで, $a' = (1/4)\text{chord}$ であるから, 本論文では $a' = 1/2$, また $x = 2a' \text{cos}\theta$ であるから, $x = \text{cos}\theta$ ($0 < \theta < \pi$)

$\bar{\gamma}, \Gamma$ はそれぞれ本論文の γ_0, Γ_0 に等しい。以上のことを考慮すると, (6.15), (6.16) 式はそれぞれ

$$\begin{aligned} v_y &= \sum_1^\infty (kB_k)/(1/2)^{(k+1)} \cdot \text{sink}\theta/(2\text{sin}\theta) \\ v_x &= \Gamma_0/(2\pi \text{sin}\theta) \\ &\quad + \sum_1^\infty (kB_k)/(1/2)^{(k+1)} \cdot \text{cosk}\theta/(2\text{sin}\theta) \\ \gamma_0 &= \Gamma_0/(\pi \text{sin}\theta) + \sum_1^\infty (kB_k)/(1/2)^k \cdot \text{cosk}\theta/\text{sin}\theta \end{aligned} \quad (6.15.1)$$

ところで, ねじれ振動の場合 v_y は,

$$\begin{aligned} v_y &= -U(\alpha + (x-a)/U\dot{\alpha}) \\ &= a\dot{\alpha} - U\alpha - \dot{\alpha}\text{cos}\theta \end{aligned} \quad (6.15.2)$$

で与えられるから, (6.15.1) と比較して,

$$\begin{aligned} B_1 &= (1/2)(a\dot{\alpha} - U\alpha), \quad B_2 = -\dot{\alpha}/16, \quad B_3 = B_4 \\ &= \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.15.3)$$

(6.15-3) 式を (6.15.1) の v_x の式に代入し, 後縁 ($\theta=0$) で $v_x = \text{finite}$ という条件 (kutta の条件) より,

$$\Gamma_0 = G_0 e^{i\omega t} = 2\pi(1/2-a)\dot{\alpha} + 2\pi U\alpha \quad (6.15.4)$$

さらに, (6.15.3), (6.15.4) 式を (6.16.1) 式に代入して

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \{2\pi(1/2-a)\dot{\alpha} + 2\pi U\alpha\}/(\pi \text{sin}\theta) \\ &\quad + 2(a\dot{\alpha} - U\alpha)\text{cos}\theta/\text{sin}\theta - \dot{\alpha}\text{cos}2\theta/\text{sin}\theta \end{aligned} \quad (6.15.5)$$

ところで, apparent mass による寄与 M_1 は,

$$M_1 = (1/2)\rho d/dt \int_{-1}^1 \gamma_0(x) \{x^2 - (1/2 + 2ax)\} dx$$

であるから, これに (6.15.5) を代入して計算すると,

$$M_1 = \pi\rho(1/8 + a^2)\dot{\alpha} - \pi\rho Ua\dot{\alpha}$$

これは $\alpha = \alpha_0 \text{sin}\omega t$ のときには,

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\pi\rho U^2 \{(\pi/2)(1/8 + a^2)k^2\alpha_0 \text{sin}\omega t \\ &\quad + (\pi/2)ak\alpha_0 \text{cos}\omega t\} \end{aligned} \quad (6.15.6)$$

付記 4

quasi-steady moment は本文の (2.2) 式の第2項から、

$$M_0 = -\rho U \int_{-1}^1 \gamma_0(x)(x-a)dx \quad (2.2.1)$$

ところで、ねじれ振動では、 γ_0 が付記3の (6.15.5) 式で与えられるから、それを (2.2.1) 式に代入して、

$$M_0 = 2\pi\rho U^2(1/2+a)(\alpha - a^2/(1/2+a)\dot{\alpha}/U) \quad (2.2.2)$$

(2.2-2) 式は、翼面上の各点で、有効迎角が変わることを考慮して求めたことになる。

一方、翼面上の任意の点 x における有効迎角、 $\alpha_x = \alpha + (x-a)\dot{\alpha}/U$ にモーメント迎角曲線のこう配 $dM_0/d\alpha = 2\rho U^2\pi(1/2+a)$ を乗じて M_0 を求めると、

$$M_0 = 2\pi\rho U^2(1/2+a)(\alpha + (x-a)\dot{\alpha}/U) \quad (2.2.3)$$

(2.2.3) 式において、 $x = a/(1+2a)$ とおけば、(2.2.3) 式と (2.2.2) 式は等価になるゆえ、quasi-steady moment M_0 を、静的な $C_M - \alpha$ 曲線から求めるときには、 $x = a/(1+2a)$ 点の有効迎角をとれば良いことがわかる。

付記 5

線形理論 (失速しない場合) での quasi-steady circulation Γ_0 はねじれ振動に対して、付記3の (6.15.4) 式より

$$\Gamma_0 = 2\pi U(\alpha + (1/2-a)\dot{\alpha}/U) \quad (6.15.4)$$

で与えられる。

一方、 $\Gamma_0 = UC_{L0}$ であり、 C_{L0} は翼面上の任意の点 x の有効迎角

$$\alpha_x = \alpha + (x-a)\dot{\alpha}/U$$

を使って、

$$C_{L0} = 2\pi(\alpha + (x-a)\dot{\alpha}/U)$$

で与えられるから、

$$\Gamma_0 = 2\pi U(\alpha + (x-a)\dot{\alpha}/U) \quad (6.15.4')$$

(6.15.4') において、 $x = 1/2$ と置けば、(6.15.4') 式は、(6.15.4) 式と等価になるから、quasi-steady circulation を、静的な $C_L - \alpha$ 曲線から求めるときには、 $x = 1/2$ (3/4 chord 点) の有効迎角をとれば良いことになる。

TR-114	フライングテストベッドの高度制御システムの検討 (I) Analytical and Simulation Studies of the Height Control of the Flying Test Bed (I)	1966年8月	武田 峻, 甲斐忠夫
TR-115	NAL-16 ロケットの研究試作および飛しょう実験 -D型およびIT型- Single-Stage Solid Propellant Rocket (NAL-16)	1966年8月	ロケット性能研究室
TR-116	50cm 極超音速風洞の計画と構造 Design and Construction of the 50cm Hypersonic Wind Tunnel at National Aerospace Laboratory	1966年9月	極超音速風洞建設グループ
TR-117	弾性振動方程式の差分解に関するエネルギー不等式 Energy Inequalities for the Difference Solutions of Equations of Elastic Vibration	1966年10月	三好 甫
TR-118	高負荷燃焼器の箱形模型による実験 Some Experiments on High Intensity Combustor with Partial Models	1966年10月	大塚貞吉, 福田 広 相波哲朗
TR-119	多次元1階準線型双曲型方程式の解の存在について On the Existence of Discontinuous Solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equations	1966年10月	小島清史
TR-120	航技研フライングテストベッドの姿勢制御方式 Analytical and Simulation Studies on the Attitude Control System of the Flying Test Bed	1966年11月	武田 峻, 堀川勇壮 小川敏雄, 森 幹彦
TR-121	パルスレシオ変調回路およびその修正回路について Some Circuits for Pulse Ratio Modulation and their Modified Circuits	1966年11月	村上 力

航空宇宙技術研究所報告122号

昭和41年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171 (代表)

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
