

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-131

風があるときのロケットの運動の  
近似解析およびランチャ角修正法

毛 利 浩

1967 年 4 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |         |  |           |                                  |
|---------|--|-----------|----------------------------------|
| TR-111T | An Asymptotic Solution of the Nonlinear Equations of Motion of an Airplane   | Aug. 1966 | Hiroshi ENDO                     |
| TR-112  | 圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論 (II)<br>—円周速度のある流れ—<br>A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo Machines (II)<br>—Swirling Fluids—  | 1966年8月   | 藤井昭一                             |
| TR-113  | 地面近くでホバリングするヘリコプタ・ロータに関する実験<br>Experimental Study on the Ground Effect of a Model Helicopter Rotor in Hovering   | 1966年8月   | 幸尾治朗, 岡 遠一                       |
| TR-114  | フライングテストベッドの高度制御システムの検討 (I)<br>Analytical and Simulation Studies of the Height Control of the Flying Test Bed (I)  | 1966年8月   | 武田 峻, 甲斐忠夫                       |
| TR-115  | NAL-16 ロケットの研究試作および飛しょう実験 —D型およびIT型—<br>Single-Stage Solid Propellant Rocket (NAL-16)  | 1966年8月   | ロケット性能研究室                        |
| TR-116  | 50 cm 極超音速風洞の計画と構造<br>Design and Construction of the 50 cm Hypersonic Wind Tunnel at National Aerospace Laboratory   | 1966年9月   | 極超音速風洞建設グループ                     |
| TR-117  | 弾性振動方程式の差分解に関するエネルギー不等式<br>Energy Inequalities for the Difference Solutions of Equations of Elastic Vibration  | 1966年10月  | 三好 甫                             |
| TR-118  | 高負荷燃焼器の箱形模型による実験<br>Some Experiments on High Intensity Combustor with Partial Models   | 1966年10月  | 大塚貞吉, 福田 広<br>相波哲朗               |
| TR-119  | 多次元1階準線型双曲形方程式の解の存在について<br>On the Existence of Discontinuous Solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equations  | 1966年10月  | 小島清史                             |
| TR-120  | 航技研フライングテストベッドの姿勢制御方式の検討<br>Analytical and Simulation Studies on the Attitude Control System of the Flying Test Bed  | 1966年11月  | 武田 峻, 堀川勇壮<br>小川敏雄, 森 幹彦         |
| TR-121  | パルスレシオ変調回路およびその修正回路について<br>Some Circuits for Pulse Ratio Modulation and their Modified Circuits  | 1966年11月  | 村上 力                             |
| TR-122  | 失速が起こるような高い迎角で, 調和振動する二次元翼に働く空気力に対する半実験的理論<br>Semi-Empirical Theory to Estimate the Airforces Acting on the Harmonically Oscillating Two-Dimensional Wing at High Angle of Attack Where Separation Can Occur | 1966年12月  | 磯貝紘二                             |
| TR-123  | 姿勢制御用空気ジェットノズルの研究<br>Design and Experimental Study of Air Jet Nozzles for the Attitude Control of VTOL Aircraft  | 1966年12月  | 滝沢直人, 西村博史<br>藤枝郭俊, 田辺義一<br>渋谷昭義 |

# 風があるときのロケットの運動の近似解析 およびランチャ角修正法\*

毛利 浩\*\*

## An Approximate Analytical Solution for Dispersion of Unguided Rockets Due to Wind With Its Application to the Calculation of Wind Compensation for Launching

By Hiroshi MOORI

An approximate analytical method is developed for solving the five-degrees-of-freedom equations of motion (excluding the roll motion about the longitudinal axis) of a rocket with arbitrary wind.

In the early period of the flight, the rocket is assumed to be accelerated uniformly. On this assumption, the equation of motion in pitch, including an aerodynamic damping coefficient is reduced to a linear differential equation of the incident angle, and can be solved exactly. Introducing this solution, equations of flight-path angles are easily integrated, and simple formulae are obtained. The formulae allow quick estimation of the flight path angles. Numerical examples show good agreement with the more exact results obtained by the electronic digital computer.

The formulae are applied to determine launch angles for wind compensation, and a very simple but much trustworthy method is obtained.

### まえがき

風があると、ロケットの進路は思わぬ方向に大きくそれることはよく知られている。最近では、これに関する文献<sup>1)~3)</sup>や参考書も少なくないし、また風に対してロケットの発射角を修正する方法<sup>4),5)</sup>もいくつか発表されている。しかしこれらは主として、電子計算機による解法に重点がおかれているため風とロケットの運動との関係を解析的に明らかにしたものは少ないように思われる。そこでロケットの三次元の運動の方程式に近似解析をほどこし、風がロケットの運動にどのような役割を演ずるか解明してみた。その結果、飛しよう径路角を求める簡単な計算式が得られた。例題による数値計算の結果は電子計算機による精密な計算結果ときわめてよく一致している。さらにこれから導かれた風に対するランチャ角の修正法は筆算だけで十分なくらい簡単であるが、精度はきわめて高いことが確かめられた。

### 記号

記号および角の定義は原則として航空工学に関する記号 (JIS W 0104-1960) の規定にしたがう。

$a$ : ロケットの特性によって決まる定数, 原則として正の値をとる [1/s<sup>4</sup>]

$b$ : 上に同じ [1/s<sup>2</sup>]

$c$ : 上に同じ [無次元]

$A_1, A_2$ : 積分定数 [rad · s]

$B_1, B_2$ : 上に同じ [rad · s]

$C_A$ : 空気力による軸力係数 [無次元]

$C_{N\alpha}$ : 空気力による法線力係数の傾斜 [1/rad]

$C_{mq}$ : 空気力による縦揺れ減衰モーメント係数 [1/rad]

$C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$ : (44) 式であらわされる定積分 [無次元]

$d$ : 重心から風圧中心までの距離 (重心が前にあるときを正とする) [m]

$D$ : ロケットに働く空気抵抗 [kg]

$E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$ : (91) 式であらわされる定積分 [無次元]

\* 昭和41年7月14日受付

\*\* 空気力学第一部

- 元]
- $F_y, F_z$ : ロケットに働く法線力の成分 [kg]
- $F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$ : (50) 式であらわされる関数値 [無次元]
- $G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$ : (49) 式であらわされる関数値 [無次元]
- G: ロケットの重心
- $g$ : 重力の加速度 [m/s<sup>2</sup>]
- $h$ : 地球の表面からの高さ [m]
- $I_x, I_y$ : ロケットの主軸まわりの質量慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>]
- $k$ : ロケットの発射時の推力と重量との比 [無次元]
- $l$ : ロケットの全長 [m]
- $l_a$ : ランチャの有効長さ [m]
- $m$ : ロケットの質量 [kg s<sup>2</sup>/m]
- $n$ : 加速度倍数 [無次元]
- $P, Q$ : ロケットの運動に関する定積分値 [rad]
- $S$ : ロケットの基準面積 [m<sup>2</sup>]
- $S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$ : (43) 式であらわされる定積分 [無次元]
- $t$ : 時間 [s]
- $T$ : ロケットに働く推力 [kg]
- $V$ : ロケットの(対地)速度 [m/s]
- $V_A$ : ロケットの対気速度 [m/s]
- $V_w$ : 風の速度 [m/s]
- $W$ : ロケットの重量 [kg]
- $W_x$ : ロケットの飛しょう面に平行な風速成分 [m/s]
- $W_y$ : ロケットの飛しょう面に垂直な風速成分 [m/s]
- $\alpha$ : 迎角に相当する角 [rad]
- $\beta$ : 横すべり角に相当する角 [rad]
- $\gamma$ : ロケットの速度ベクトルが地球の表面となす角(上昇角) [rad]
- $\delta$ : 風が吹いてくる方向の方位角 [rad]
- $\epsilon$ : ロケットの対地速度ベクトルと対気速度ベクトルとがなす角の地面への投影 [rad]
- $\theta$ : ロケットの機軸が地球の表面となす角(上下角) [rad]
- $\rho$ : 空気密度 [kg/m<sup>3</sup>]
- $\sigma$ : ロケットの速度ベクトルの地球の表面への射影が北の方向となす角(飛しょうの方位

角) [rad]

 $\tau$ : 時間をあらわす変数 [無次元] $\phi$ : ロケットの機軸の地球の表面への射影が北の方向となす角(機軸の方位角) [rad] $\omega$ : 速度ベクトルを含む鉛直面において対気速度ベクトルの投影が速度ベクトルとなす角 [rad]

添字

 $o$ : 地上またはランチャを離脱するときの値であることを示す。 $i$ : 時刻  $t_i$  における値であることを示す。 $\rho$ : 重力に関する項であることを示す。 $w$ : 風に関する項であることを示す。

## 1. 運動の方程式

地球の表面を平面と仮定し、かつロケットはその機軸まわりに軸対称であるとみなす。

いま、ロケットの速度を  $V$ 、速度ベクトルの方向の方位角(地面への投影を北から時計まわりに測った角)を  $\sigma$ 、上下角(速度ベクトルを含む鉛直面内で水平線から上向きに測った角)を  $\gamma$  とし、また、機軸の方位角を  $\phi$ 、上下角を  $\theta$  とすると、ロケットの3次元の運動の方程式\*はつぎのように与えられる。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} [\{\cos \gamma \cos \theta \cos (\sigma - \phi) + \sin \gamma \sin \theta\} (T - D) + \cos \gamma \sin (\sigma - \phi) F_y + \{\cos \gamma \sin \theta \cos (\sigma - \phi) - \sin \gamma \cos \theta\} F_z - g \sin \gamma] \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{mV} [\{\sin \gamma \cos \theta \cos (\sigma - \phi) - \cos \gamma \sin \theta\} (T - D) + \sin \gamma \sin (\sigma - \phi) F_y + \{\sin \gamma \sin \theta \cos (\sigma - \phi) + \cos \gamma \cos \theta\} F_z - \frac{g \cos \gamma}{V}] \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{mV \cos \gamma} [-\cos \theta \sin (\sigma - \phi) (T - D) + \cos (\sigma - \phi) F_y - \sin \theta \sin (\sigma - \phi) F_z] \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{I_y} \left( F_z d + \frac{1}{4} C_{mq} \rho V_A S l^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - \frac{I_y - I_x}{I_y} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \cos \theta \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{1}{I_y} \left( -F_y d + \frac{1}{4} C_{mq} \rho V_A S l^2 \cos \theta \frac{d\phi}{dt} \right)$$

\* 軸対称であるから6分力のうち機軸まわりの回転運動は除外される。

$$+ \frac{I_y - I_x}{I_y} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \quad (5)$$

ここに、 $m$  はロケットの質量、 $T$  は推力、 $D$  は空気の抵抗、 $F_y$  および  $F_z$  は気流の方向が機軸の方向と一致しないために生ずる法線力の成分で、それぞれ機軸を含む鉛直面に垂直な分力とその鉛直面内で機軸に垂直な方向の分力をあらわす。これに航空機に関する記号を準用すると、

$$F_z = -\frac{1}{2} C_{N\alpha} \rho V_A^2 S \alpha \quad (6)$$

$$F_y = -\frac{1}{2} C_{N\alpha} \rho V_A^2 S \beta \quad (7)$$

で与えられる。ここに  $\alpha$  は気流の方向の機軸を含む鉛直面への投影が機軸となす角で、気流が下から当たるときを正とする。また、 $\beta$  は気流の方向が機軸を含む鉛直面となす角で、気流が右から当たるときを正とする。なお、 $C_{N\alpha}$  は法線力係数の傾斜、 $V_A$  は対気速度をあらわす。この他、 $C_{mq}$  は空気力による縦揺れ減衰モーメント係数、 $l$  はロケットの全長、 $d$  はロケットの重心から風圧中心までの距離で、重心が前にあるときを正とする。これ以外に、ロケットに働くモーメントとしてジェット・ダンピング・モーメントがあげられるが、空力減衰モーメントと一括にして取り扱うこととし、ここでは省略する。

## 2. 発射直後の運動

### 2.1 ロケットの運動

ロケットではその静安定特性により、特別の場合の外は常に速度ベクトルの方向が機軸の方向と一致するものとみなすことができる。これによってロケットの飛しょう径路は原則的に質点運動とみなして計算できる。ところが風を受けると一時的にせよ、つりあいがある破れ、それからつりあいを取り戻そうとして新しい運動が起きる。

ここではとくに発射直後のロケットについて、このような場合どのような運動をするかを調べてみる。

運動の変化は成分に分けると、速度そのものの変化と、方向の変化とになり、後者はさらに  $d\gamma$  と  $d\sigma \cos \gamma$  とに分けられる。この二つの方向はたがいに直交していて、進行方向に向って、 $d\gamma$  は上下の、 $d\sigma \cos \gamma$  は左右の変化をあらわす。

### 2.2 速度の変化

まず、(1)式についてロケットの発射直後の速度の変化を調べてみる。上述のように速度ベクトルと機軸とは原則的に一致する性質があって、かりに不一致が生じて、短時間で復元し、いつまでも大きくない違

いを持続することはあり得ない。したがって

$$\cos(\sigma - \phi) = 1$$

$$\cos(\gamma - \theta) = 1$$

とみなすことができる。さらに  $F_z$  および  $F_y$  は (6) および (7) 式で示されるように  $\alpha$  または  $\beta$  に比例するが、 $\alpha$  も  $\beta$  も持続的に大きな値をとらないばかりでなく、発射直後は動圧も小さく、推力や重力の項に比して問題にならないほど小さいので省略されて

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T - D}{m} - g \sin \gamma \quad (8)$$

と書ける。すなわち風の有無は速度の変化にほとんど影響を与えない。

いま、平均推力  $T$  と発射時の重量  $W$  との比を

$$\frac{T}{W} = k$$

とおく。 $T \gg D$  であることを考慮し、燃焼に伴う重量の軽減と増速による抵抗の増加とを見合いにして考えると、たいていのロケットでは

$$\frac{T - D}{m} = kg \quad (9)$$

と近似できる。

これを (8) 式に代入すると

$$\frac{dV}{dt} = (k - \sin \gamma)g$$

となる。とくに  $k$  が十分大きく、かつ発射角  $\gamma_0$  が鉛直に近い場合は、 $\gamma$  が多少変化しても、 $\sin \gamma$  はほとんど変化しないので、 $\gamma$  の代りに  $\gamma_0$  で代表させ、かつ

$$k - \sin \gamma_0 = n \quad (10)$$

とおくと、

$$\frac{dV}{dt} = ng \quad (11)$$

となり、さらに  $t=0$  において  $V=0$  であるから

$$V = ngt \quad (12)$$

を得る。

## 3. 発射直後の縦の径路角変化

### 3.1 $\gamma$ の変化の解析

(2) 式においても

$$\cos(\sigma - \phi) = 1$$

とみなし、また(1)式の場合と同じく  $F_z$  および  $F_y$  の項を無視すると

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{T - D}{mV} \sin(\theta - \gamma) - \frac{g \cos \gamma}{V} \quad (13)$$

となる。

いま、速度ベクトルを含む鉛直面を考え、これに機軸および対気速度ベクトルの投影を画くと、図1のよ

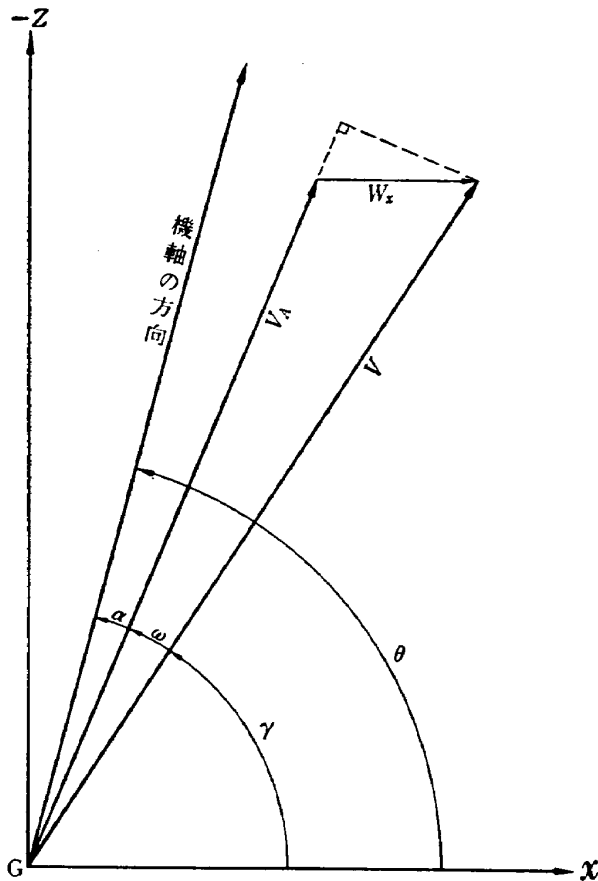


図 1 鉛直面内での速度関係

うになる。 $\theta$  および  $\alpha$  は厳密には機軸を含む鉛直面内で定義されるが、近似的にこの投影面上の値でおきかえて取り扱う。ただし風は水平に吹くものとし、 $W_x$  は風速のこの鉛直面に平行な成分である。図で、 $V$  と  $V_A$  とが挟む角を  $\omega$  と名づけると

$$\theta - \gamma = \omega + \alpha$$

という関係が成立する。さらに  $\omega$  と  $\alpha$  とはいずれも小さいことから

$$\sin(\theta - \gamma) = \sin(\omega + \alpha) = \omega + \alpha$$

と書ける。これと (9), (10) および (12) 式を (13) 式に代入すると

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{n + \sin \gamma}{nt} (\omega + \alpha) - \frac{\cos \gamma}{nt} \quad (14)$$

を得る。そこで

$$d\gamma = d\gamma_1 + d\gamma_2 + d\gamma_3$$

$$d\gamma_1 = \int_{t_0}^t -\frac{\cos \gamma}{nt} dt \quad (15)$$

$$d\gamma_2 = \int_{t_0}^t \frac{n + \sin \gamma}{nt} \omega dt \quad (16)$$

$$d\gamma_3 = \int_{t_0}^t \frac{n + \sin \gamma}{nt} \alpha dt \quad (17)$$

とおくと、 $d\gamma_1$  は重力により、 $d\gamma_2$  は風そのものによ

り、また  $d\gamma_3$  は風などによるロケットの動揺により上昇角が変化する量をあらわす。ただし、 $t_0$  はランチャを離脱する時間とする。

まず、 $d\gamma_1$  について考える。

$$\gamma = \gamma_0 + d\gamma$$

と書くと、 $d\gamma$  は小さいことから

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \gamma_0 \cos d\gamma - \sin \gamma_0 \sin d\gamma \\ &= \cos \gamma_0 - d\gamma \sin \gamma_0 \end{aligned}$$

を得る。これを (15) 式に代入し、さらに  $d\gamma$  を近似的に  $\sqrt{t}$  に比例するものとして (表 1 参照) 取り扱うと容易に積分されて

$$d\gamma_1 = \frac{\cos \gamma_0}{n} (\log_e t_0 - \log_e t) + \frac{2 \sin \gamma_0}{n} d\gamma \quad (18)$$

を得る。

つぎに  $d\gamma_2$  については、図 1 から

$$\omega = \frac{W_x \sin(\gamma + \omega)}{V}$$

であるから、これに (12) 式を代入し、かつ

$$\gamma \gg \omega$$

であることを考慮すると

$$\omega = \frac{W_x \sin \gamma}{ngt} \quad (19)$$

を得る。(19) 式を (16) 式に代入すると

$$d\gamma_2 = \int_{t_0}^t \frac{(n + \sin \gamma) W_x \sin \gamma}{n^2 g t^2} dt \quad (20)$$

となる。前述のように、発射角が鉛直に近いものとするとき、 $\sin \gamma$  の代わりに  $\sin \gamma_0$  でおきかえて、定数として取り扱うことができる。さらに  $W_x$  が一定の場合には容易に積分されて

$$d\gamma_2 = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ng} \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right) \quad (21)$$

が得られる。

$d\gamma_3$  についても同様に  $\sin \gamma$  を  $\sin \gamma_0$  でおきかえて積分の外に出すことができるが、 $\alpha$  が未知の関数で、いますぐには積分できないので、かりに

$$\int_{t_0}^t \frac{\alpha}{t} dt = P \quad (22)$$

とあらわすことにすると

$$d\gamma_3 = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} P \quad (23)$$

で与えられる。

### 3.2 $\alpha$ に関する動揺の方程式

そこで  $\alpha$  について考えてみる。図 1 から

$$\theta = \alpha + \omega + \gamma \quad (24)$$

である。さらにこれを  $t$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{aligned}$$

を得る。これらの関係式および (6) 式を (4) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ &- \frac{\rho}{4I_y} C_{mq} V_A S l^2 \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ &+ \frac{\rho}{2I_y} (C_{Na} V_A^2 S d) \alpha \\ &+ \frac{I_y - I_x}{I_y} \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

を得る。なお定義により原則として  $C_{mq}$  は負、 $C_{Na}$  は正の値をとるものとする。

ところで、(19) 式から

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{W_x}{ngt} \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \frac{W_x}{ngt^2} \sin \gamma \\ \frac{d^2\omega}{dt^2} &= \frac{W_x}{ngt} \cos \gamma \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{W_x}{ngt} \sin \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2W_x}{ngt^2} \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} + \frac{2W_x}{ngt^3} \sin \gamma \end{aligned}$$

また、これらと (14) 式とから

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{(n + \sin \gamma) W_x}{n^2 g t^2} \sin \gamma - \frac{\cos \gamma}{nt} + \frac{n + \sin \gamma}{nt} \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \left\{ \frac{(n + 2 \sin \gamma) W_x}{n^2 g t^2} \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{nt} + \frac{\cos \gamma}{nt} \alpha \right\} \frac{d\gamma}{dt} \\ &\quad + \frac{n + \sin \gamma}{nt} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{2(n + \sin \gamma) W_x}{n^2 g t^3} \sin \gamma \\ &\quad + \frac{\cos \gamma}{nt^2} - \frac{n + \sin \gamma}{nt^2} \alpha \end{aligned}$$

を得る。また

$$V_A = V - W_x \cos \gamma = ngt \left( 1 - \frac{W_x}{ngt} \cos \gamma \right)$$

であるから、これらの式を (25) 式に代入し、かつ、 $\alpha$ 、 $\frac{d\alpha}{dt}$ 、 $\frac{d\varphi}{dt}$ 、 $\frac{1}{n}$ 、 $\frac{W_x}{ngt}$  などはいずれも小さいので、これらについて二次以上の項を省略すると  $\alpha$  に関する微分方程式として

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left\{ -\frac{\rho}{4I_y} C_{mq} ng S l^2 t + \frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{1}{t} \right\} \frac{d\alpha}{dt} \\ &+ \left\{ \frac{\rho}{2I_y} C_{Na} n^2 g^2 S d \cdot t^2 - \frac{\rho}{4I_y} C_{mq} (n + \sin \gamma) g S l^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{1}{t^2} \right\} \alpha \\ &= -\frac{\cos \gamma}{n} \left( \frac{\rho}{4I_y} C_{mq} ng S l^2 + \frac{1}{t^2} \right) \quad (26) \end{aligned}$$

を得る。これが加速運動中のロケットの風による動揺の方程式である。

いま

$$\frac{\rho}{2I_y} C_{Na} n^2 g^2 S d = a \quad (27)$$

$$-\frac{\rho}{4I_y} C_{mq} ng S l^2 = b \quad (28)$$

$$\frac{n + \sin \gamma}{n} = c \quad (29)$$

とおくと、(26) 式は

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left( bt + \frac{c}{t} \right) \frac{d\alpha}{dt} + \left( at^2 + bc - \frac{c}{t^2} \right) \alpha \\ &= -\frac{\cos \gamma}{n} \left( b - \frac{1}{t^2} \right) \quad (30) \end{aligned}$$

と書ける。ここに  $a$ 、 $b$  および  $c$  は原則としてすべて正の数である。

さてここでは大型多段ロケットは対象から除くものとする、一般に  $n \gg 1$  であることから

$$c = 1$$

とみなすことができる。さらに発射角  $\gamma_0$  が大きいとすると  $\cos \gamma \ll 1$  となるから (30) 式の右辺は小さくなって無視できる。結局動揺の方程式は

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left( bt + \frac{1}{t} \right) \frac{d\alpha}{dt} + \left( at^2 + b - \frac{1}{t^2} \right) \alpha = 0 \quad (31)$$

となる。

### 3.3 動揺の方程式の解

まず

$$\alpha = \frac{\alpha'}{t}$$

とおいて変数変換をすると (31) 式は

$$\frac{d^2\alpha'}{d\tau^2} + \left( b\tau - \frac{1}{\tau} \right) \frac{d\alpha'}{d\tau} + at^2\alpha' = 0$$

となる。

ここでさらに

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{a} t^2$$

とおくと

$$\frac{d^2\alpha'}{d\tau^2} + \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{d\alpha'}{d\tau} + \alpha' = 0$$

を得る。この微分方程式は容易に解かれ、解は

$$\begin{aligned} \alpha' &= e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}\tau} \left\{ A_1 \sin \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a}} \tau \right) \right. \\ &\quad \left. + A_2 \cos \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a}} \tau \right) \right\} \end{aligned}$$

で与えられる。これより (31) 式の解として

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e^{-\frac{b}{4}t^2}}{t} \left\{ A_1 \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{a - \frac{b^2}{4}} t^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + A_2 \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{a - \frac{b^2}{4}} t^2 \right) \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

が得られる。

ロケットでは一般に

$$a \gg \frac{b^2}{4}$$

であるから、 $b^2/4$  を微小項として省略すると

$$\alpha = \frac{e^{-\frac{b}{4}t^2}}{t} \left\{ A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t^2\right) + A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t^2\right) \right\} \quad (33)$$

と書くことができる。

つぎに、積分定数  $A_1$  および  $A_2$  の求め方について考える。動揺はランチャを離れた瞬間から始まる。したがって初期条件として

$$t=t_0 \text{ において } \theta=\gamma \text{ および } \frac{d\theta}{dt}=0^* \text{ から}$$

$$(\alpha)_{t_0} = -\omega_0 = -\frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \quad (34)$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_0} = -\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0} - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{t_0} = \frac{\cos \gamma_0}{nt_0} + \frac{W_x}{ngt_0^2} \sin \gamma_0 \quad (35)$$

が与えられる。

ところで (35) 式の右辺の第 1 項は重力の作用によるもの、第 2 項は風によるもので、たがいに異質のものであるから両者を分離し、かつランチャ上では  $\gamma = \gamma_0$  であることを考慮すると

$$\left. \begin{aligned} (\alpha)_{t_0} &= 0 \\ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_0} &= \frac{\cos \gamma_0}{nt_0} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

および

$$\left. \begin{aligned} (\alpha)_{t_0} &= -\frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \\ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_0} &= \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

の二つのものからなり立つものとみなすことができる。初期条件 (36) 式から決定される解を  $\alpha_g$ 、(37) 式から決定される解を  $\alpha_w$  とすると、微分方程式が  $\alpha$  に関して線形であることから、 $(\alpha_g + \alpha_w)$  が初期条件 (34) および (35) 式を満足する解となる。いま、 $\alpha_g$  の積分定数を  $A_{1g}$  および  $A_{2g}$ 、 $\alpha_w$  の積分定数を  $A_{1w}$  および  $A_{2w}$  とすると

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_{1g} + A_{1w} \\ A_2 &= A_{2g} + A_{2w} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

\* ランチャの構造により、必ずしも  $d\theta/dt=0$  とはならないが、本題とは関係がないのでここでは 0 とした。必要があればこれを初期条件に加え (35) 式に準じて取り扱えばよい。

となる。ここに  $A_{1g}$  および  $A_{2g}$  は (33) 式に (36) 式を適用することにより

$$\left. \begin{aligned} A_{1g} &= \frac{\cos \gamma_0}{n\sqrt{a}t_0} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \cos\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) \\ A_{2g} &= -\frac{\cos \gamma_0}{n\sqrt{a}t_0} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \sin\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

と与えられる。同様に (37) 式を適用することにより

$$\left. \begin{aligned} A_{1w} &= -\frac{W_x \sin \gamma_0}{ng} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \left\{ \sin\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) + \frac{b}{2\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) \right\} \\ A_{2w} &= -\frac{W_x \sin \gamma_0}{ng} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) - \frac{b}{2\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t_0^2\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

が得られる。

### 3.4 P の決定

かくして  $\alpha$  の表示式が求められたので、(22) 式で定義された  $P$  の値を決定することができる。

(33) 式を (22) 式に代入すると

$$P = \int_{t_0}^t \frac{e^{-\frac{b}{4}t^2}}{t^2} \left\{ A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t^2\right) + A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t^2\right) \right\} dt \quad (41)$$

を得る。いま

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{a}}$$

とにおいて変数変換を行なうと無次元化されて

$$P = A_1 \sqrt{a} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{e^{-\frac{b}{4\sqrt{a}}\tau^2}}{\tau^2} \sin \frac{\tau^2}{2} d\tau + A_2 \sqrt{a} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{e^{-\frac{b}{4\sqrt{a}}\tau^2}}{\tau^2} \cos \frac{\tau^2}{2} d\tau \quad (42)$$

となる。そこで

$$S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \int_{0.1}^{\tau} \frac{e^{-\frac{b}{4\sqrt{a}}\tau^2}}{\tau^2} \sin \frac{\tau^2}{2} d\tau \quad (43)$$

$$C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \int_{0.1}^{\tau} \frac{e^{-\frac{b}{4\sqrt{a}}\tau^2}}{\tau^2} \cos \frac{\tau^2}{2} d\tau \quad (44)$$

と定義すると\*\*、(42) 式は

$$P = A_1 \sqrt{a} \left\{ S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - S_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\}$$

\*\* この定積分の下限を 0 とすると積分値は無量大となり都合が悪い。一方下限から  $\tau_0$  までの積分値は (45) 式で相殺になるから、下限を任意に選んでも  $P$  の値には影響がない。そこで 0 以外のなるべく小さな値という意味で便宜上 0.1 を選んだ。



$$+A_2 \sqrt{a} \left\{ C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - C_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (45)$$

とあらわすことができる。(43) および (44) 式は  $b/\sqrt{a}$  をパラメータとして与えることにより容易に数値積分されて、図2および図3のように与えられる。 $A_1$  および  $A_2$  はすでに求められているので、これにより  $P$  の値は容易に計算できる。しかしこのままでは不便なので、つぎのように再整理を試みる。すなわち(45) 式の右辺に (38), (39) および (40) の各式を代入した結果を、便宜上重力による項と風による項との二つに分け、それぞれ  $P_g$  および  $P_w$  として

$$P = P_g + P_w \quad (46)$$

とあらわし、かつ

$$P_g = \frac{\cos \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (47)$$

$$P_w = -\frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (48)$$

とおくと

$$G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \frac{e^{\frac{b}{4\sqrt{a}}\tau_0^2}}{\tau_0} \left[ \left\{ S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - S_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \cos \frac{\tau_0^2}{2} - \left\{ C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - C_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \sin \frac{\tau_0^2}{2} \right] \quad (49)$$

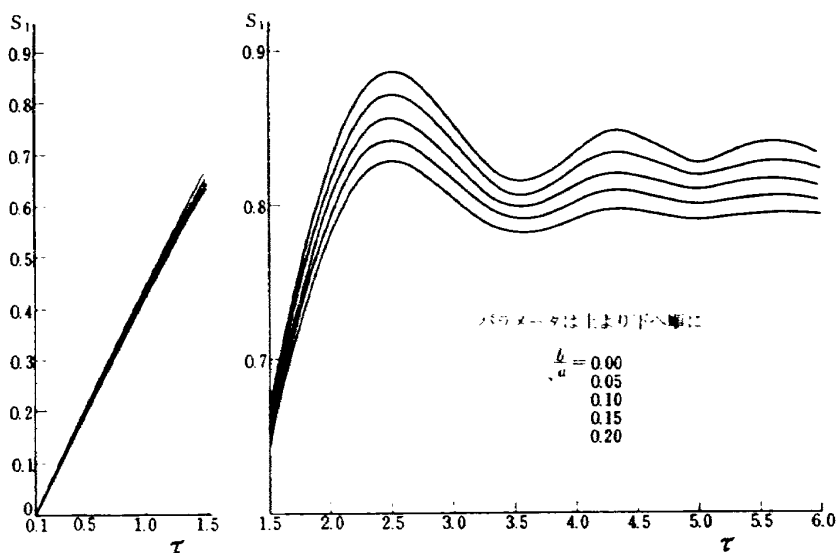


図 2  $S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$

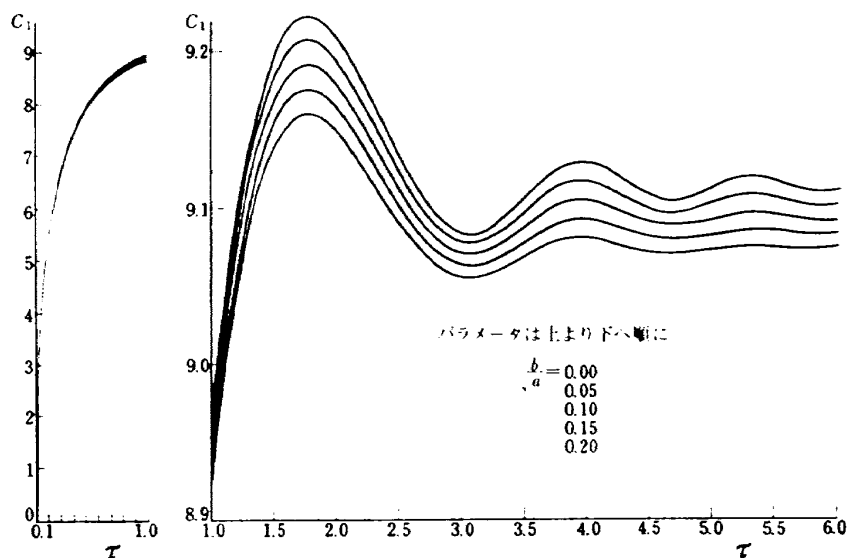


図 3  $C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$

$$F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \tau_0 e^{\frac{b}{\sqrt{a}} \tau_0^2} \left[ \left\{ S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - S_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \left( \sin \frac{\tau_0^2}{2} + \frac{b}{\sqrt{a}} \cos \frac{\tau_0^2}{2} \right) + \left\{ C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - C_1\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \left( \cos \frac{\tau_0^2}{2} - \frac{b}{2\sqrt{a}} \sin \frac{\tau_0^2}{2} \right) \right] \quad (50)$$

と書ける。

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sqrt[4]{a} t \\ \tau_0 &= \sqrt[4]{a} t_0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

である。

この関数  $G(\tau_0, b/\sqrt{a})$  および  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  をあ

らかじめ計算しておけばきわめて簡単に  $P$ 、したがって  $\Delta r_3$  の値が求められる。すなわち

$$\Delta r_3 = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \left\{ \frac{\cos \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (52)$$

である。ところで、 $G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  および  $F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  は (49) および (50) 式から知られるように、 $\tau_0$  と  $b/\sqrt{a}$  の関数であるだけでなく、 $\tau$  の関数でもある。一例として、 $\tau_0=0.68$  に対する計算結果を示すと図 4 および図 5 のようになる。すなわち、いずれも  $\tau=\tau_0$  付近では急激に変化するが、 $\tau$  が増すにつれて速やかに減衰し、やがて一定の値に落ちつく。この極限值は同時に全体の平均値ともみなしうる。過渡現象を論ずるには  $\tau$  に対する変化を詳細に知る必要もあろうが、

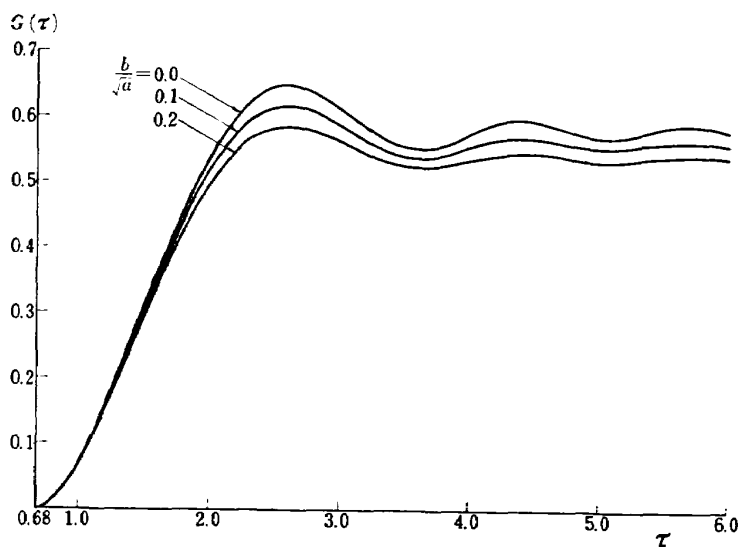


図 4  $\tau_0=0.68$  に対する  $G(\tau)$

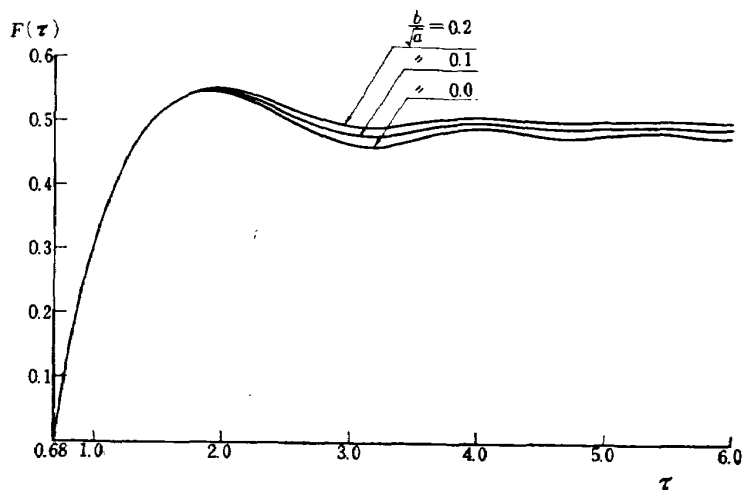


図 5  $\tau_0=0.68$  に対する  $F(\tau)$

巨視的に風による飛しょう径路の変化を求めるだけならば、この平均値もしくは極限值がわかれば十分である。すなわち  $G(\tau_0, b/\sqrt{a})$  および  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  の値としては  $\tau$  があまり大きくない場合を除き、 $\tau \rightarrow \infty$  のときの値で代表させて取り扱うことができる。この極限值は (49) および (50) 式中の  $S_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  および  $C_1\left(\tau, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  の代りに  $S_1\left(\infty, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  および  $C_1\left(\infty, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  を代入することにより容易に計算できる。付図1および2にはこの計算結果が  $b/\sqrt{a}$  をパラメータにして図示されている。

かくして  $d\gamma_1$ ,  $d\gamma_2$  および  $d\gamma_3$  のすべてが決定されたので、これらの結果を加え合せると

$$d\gamma = \frac{\cos \gamma_0}{n} (\log_e t_0 - \log_e t) + \frac{2 \sin \gamma_0}{n} d\tau + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\cos \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}$$

となる。これを  $d\gamma$  について解くと

$$d\gamma = \frac{\cos \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \right\} \quad (53)$$

が得られる。

### 3.5 風速の変化による $d\gamma$ の増分

これまでの議論はすべて風速を一定として取り扱ってきたが、風速の変化がある場合にはどうなるか調べてみる。そのため、始めに風速が  $W_x$  であったものが、 $t = t_i$  において  $W_x + \Delta W_x$  に変わった場合について考える。

$d\gamma_1$  は風には直接関係しないので、 $d\gamma_2$  と  $d\gamma_3$  について検討すればよい。 $\Delta W_x$  による増分をそれぞれ  $d(d\gamma_2)$  および  $d(d\gamma_3)$  と書くと、まず  $d(d\gamma_2)$  は(21)式から

$$d(d\gamma_2) = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\Delta W_x \sin \gamma_0}{ng} \left( \frac{1}{t_i} - \frac{1}{t} \right) \quad (54)$$

と与えられる。ここに添字  $i$  は  $t = t_i$  における値であることを示す。

同様に (23) 式から

$$d(d\gamma_3) = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \int_{t_i}^t \frac{\Delta \alpha}{t} dt = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \Delta P \quad (55)$$

と与えられる、前述のように  $\alpha$  に関する微分方程式は

線形であるから、初期条件

$$\left. \begin{aligned} (\Delta \alpha)_{t_i} &= -\frac{\Delta W_x \sin \gamma_i}{ngt_i} \\ \left( \frac{d(\Delta \alpha)}{dt} \right)_{t_i} &= \frac{\Delta W_x \sin \gamma_i}{ngt_i^2} \end{aligned} \right\}$$

から容易に  $\Delta \alpha$  は決定され、これを (41) 式に代入することにより

$$\Delta P = -\frac{\Delta W_x \sin \gamma_i}{ngt_i} F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$$

が得られる。これより  $\sin \gamma_i$  を  $\sin \gamma_0$  で近似すると

$$d(d\gamma_3) = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\Delta W_x \sin \gamma_0}{ngt_i} F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (56)$$

を得る。ここに

$$\tau_i = \sqrt{a} t_i \quad (57)$$

である。(56) と (54) 式とを加え合せると

$$d(d\gamma) = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\Delta W_x \sin \gamma_0}{ngt_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_i}{t} \right\}$$

を得る。さらに (18) 式の第2項を考慮に入れると、最終的に

$$d(d\gamma) = \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{\Delta W_x \sin \gamma_0}{ngt_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_i}{t} \right\} \quad (58)$$

となる。

## 4. 発射直後の横の径路角の変化

### 4.1 $\sigma$ の変化の解析

(2) 式と同様に、(3)式においても  $F_y$  および  $F_z$  を無視し、かつ

$$\cos \gamma = \cos \theta$$

とみなすと

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{T-D}{mV} \sin(\sigma - \phi) \quad (59)$$

と近似できる。

一方、機軸および速度ベクトルの水平面への投影を考え、北を  $N$  軸、東を  $E$  軸にとると、図6のようになる。定義により

$$\sigma - \phi = \frac{\beta}{\cos \gamma} + \epsilon \quad (60)$$

であるが、さらに  $\beta$  および  $\epsilon$  をともに小さいものとみなすと

$$\sin(\sigma - \phi) = \sin\left(\frac{\beta}{\cos \gamma} + \epsilon\right) = \frac{\beta}{\cos \gamma} + \epsilon$$

と書ける。これと (9) および (12) 式を (59) 式に代入すると

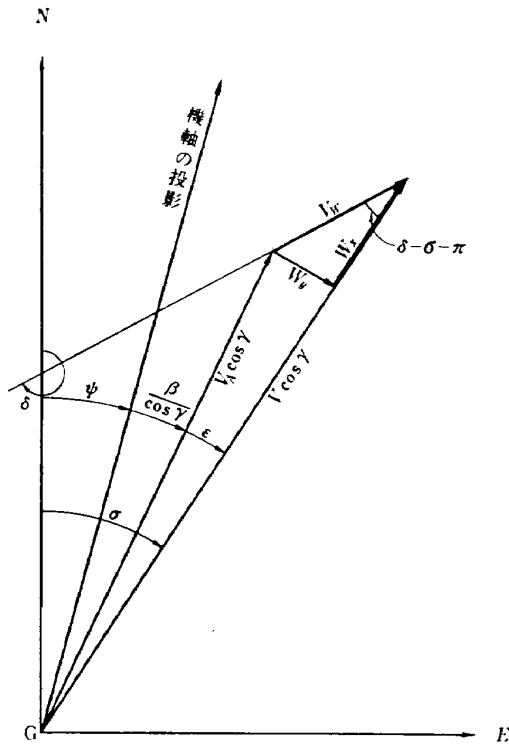


図 6 速度関係の水平面への投影

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{n + \sin \gamma}{nt} \left( \frac{\beta}{\cos \gamma} + \epsilon \right) \quad (61)$$

を得る。

そこで、 $\gamma$  と同様に

$$\Delta\sigma_1 = \int_{t_0}^t -\frac{n + \sin \gamma}{nt} \epsilon dt \quad (62)$$

$$\Delta\sigma_2 = \int_{t_0}^t -\frac{n + \sin \gamma}{nt} \frac{\beta}{\cos \gamma} dt \quad (63)$$

とおくことにする。

つぎに、図から近似的に

$$\epsilon = \frac{W_y}{V \cos \gamma} = \frac{W_y}{ngt \cos \gamma} \quad (64)$$

を得る。ここに  $W_y$  は速度ベクトルを含む鉛直面に直角な風の成分である。

(64) 式を (62) 式に代入すると

$$\Delta\sigma_1 = \int_{t_0}^t -\frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{W_y}{\cos \gamma} \frac{1}{ngt^2} dt \quad (65)$$

を得る。ここで  $\sin \gamma$  は前にも述べたように、その変化が  $n$  に比して非常に小さいので、近似的に  $\sin \gamma_0$  でおきかえることができる。  $\cos \gamma$  の方はそういうわけにはゆかないので、 $t_0$  と  $t$  との間での  $\gamma$  の適当な値を選んで代表値とすることにより、定数として取り扱うことにする。代表値  $\bar{\gamma}$  として最も平凡な与え方は変域  $t_0$  から  $t$  の間での単純平均をとることであるが、被積分式の形からみて、むしろ  $t$  の小さい側に比重をかける方が妥当な値が得られるので、ここでは  $\gamma_0$

と  $\gamma_t$  との平均値と  $\gamma_0$  とでもう一度平均値をとったものを  $\bar{\gamma}$  として使うことにする。すなわち

$$\bar{\gamma} = (\gamma_0 + (\gamma_0 + \gamma_t)/2)/2$$

と定義する。ここでも、 $W_x$  と同様に、 $W_y$  が一定の場合には容易に積分されて

$$\Delta\sigma_1 = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{ng \cos \bar{\gamma}} \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right) \quad (66)$$

を得る。

(62) 式についても同様に取り扱い、かつ

$$\int_{t_0}^t \frac{\beta}{t} dt = Q \quad (67)$$

とおくと

$$\Delta\sigma_2 = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{Q}{\cos \bar{\gamma}} \quad (68)$$

となる。

#### 4.2 $\beta$ に関する動揺の方程式

$Q$  を求めるために  $\beta$  の変化について調べる。

$$\phi = \sigma - \epsilon - \frac{\beta}{\cos \gamma}$$

という関係を  $t$  について微分すると

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma} \frac{d\gamma}{dt}$$

を得る。ここで  $\beta$  および  $d\gamma/dt$  はともに小さいから、その積は高次の微小量として省略されて

$$\cos \gamma \frac{d\phi}{dt} = \cos \gamma \frac{d\sigma}{dt} - \cos \gamma \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{d\beta}{dt}$$

となる。なお  $\beta$  と  $d\gamma/dt$  の他にも  $d\beta/dt$ ,  $\epsilon$ ,  $d\epsilon/dt$ ,  $d\sigma/dt$  などはずべて同程度の微小量とみなしうるので、これからはこれらについて二次以上の積はすべて無視できるものとして取り扱う。これより上式を  $t$  についてもう 1 度微分すると

$$\frac{d}{dt} \left( \cos \gamma \frac{d\phi}{dt} \right) = \cos \gamma \frac{d^2\sigma}{dt^2} - \cos \gamma \frac{d^2\epsilon}{dt^2} - \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

となる。一方 (61) 式から

$$\cos \gamma \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{n + \sin \gamma}{nt} (\beta + \epsilon \cos \gamma)$$

を得る。これをさらに微分すると

$$\cos \gamma \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{n + \sin \gamma}{nt^2} (\beta + \epsilon \cos \gamma) - \frac{n + \sin \gamma}{nt} \left( \frac{d\beta}{dt} + \cos \gamma \frac{d\epsilon}{dt} \right)$$

となる。また (64) 式の逐次微分から

$$\cos \gamma \frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{W_y}{ngt^2}$$

$$\cos \gamma \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \frac{2W_y}{ngt^3}$$

を得る。

これらの関係式を (5) 式に代入し、さらに

$$\cos \theta = \cos \gamma$$

とみなし、かつ高次の項を省略することにより

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \left\{ -\frac{\rho}{4I_y} C_{mq} n g S l^2 t + \frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{1}{t} \right\} \frac{d\beta}{dt} + \left\{ \frac{\rho}{2I_y} C_{N\alpha} n^2 g^2 S d \cdot t^2 - \frac{\rho}{4I_y} C_{mq} (n + \sin \gamma) g S l^2 - \frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{1}{t^2} \right\} \beta = 0 \quad (69)$$

を得る。これは (26) 式の右辺を 0 とおいたものと完全に一致する。これより (26) 式と (69) 式とは同一の振動をあらわすものといえる。考えてみれば  $W_x$  といい、 $W_y$  といっても、もとは一つであるから、それによって起きる振動は 1 種類しかないわけで、 $\alpha$  および  $\beta$  はおのおのその  $x$  および  $y$  方向の成分に他ならない。したがって、(33) 式の  $\alpha$  の表示式は積分定数を変えれば、そのまま  $\beta$  の表示式とみなすことができる。

### 4.3 $\Delta\sigma$ の計算式

$\beta$  の表示式の積分定数を求めるための初期条件は  $\alpha_w$  の場合と同様に

$t = t_0$  において

$$\left. \begin{aligned} (\beta)_{t_0} &= -\varepsilon_0 \cos \gamma_0 = -\frac{W_y}{ngt_0} \\ \left( \frac{d\beta}{dt} \right)_{t_0} &= -\left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_0 \cos \gamma_0 = \frac{W_y}{ngt_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

で与えられる。

いま

$$\beta = \frac{e^{-\frac{b}{4}t^2}}{t} \left\{ B_1 \sin \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t^2 \right) + B_2 \cos \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t^2 \right) \right\} \quad (71)$$

とあらわすと

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\frac{W_y}{ng} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \left\{ \sin \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t_0^2 \right) + \frac{b}{2\sqrt{a}} \cos \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t_0^2 \right) \right\} \\ B_2 &= -\frac{W_y}{ng} e^{\frac{b}{4}t_0^2} \left\{ \cos \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t_0^2 \right) - \frac{b}{2\sqrt{a}} \sin \left( \frac{\sqrt{a}}{2} t_0^2 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

となる。

この  $\beta$  の式を (67) 式に代入すると、 $P$  を求めたときと全く同じ演算によって  $Q$  が求められる

$$Q = -\frac{W_y}{ngt_0} F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \quad (73)$$

を得る。ここに  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  は (53) 式におけるものと全く同じである (付図 2 参照)。

(73) 式を (68) 式に代入すると  $\Delta\sigma_2$  が得られるから、これと (66) 式とを加え合せると

$$\Delta\sigma = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{ngt_0 \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1 - F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - \frac{t_0}{t} \right\} \quad (74)$$

が得られる。

(74) 式は  $W_y$  が一定の場合であって、これから  $t = t_i$  において  $W_y + \Delta W_y$  に変化した場合の  $\Delta\sigma$  の増分は

$$\Delta(\Delta\sigma) = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\Delta W_y}{ngt_i \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1 - F \left( \tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - \frac{t_i}{t} \right\} \quad (75)$$

で与えられる。

## 5. 一般の風に対するロケットの径路角

### 5.1 基本の径路角

かくして、 $W_w$  および  $W_y$  が一定の場合の縦および横の径路角の変化は (53) および (74) 式で与えられることがわかった。

ところで、 $W_w$  および  $W_y$  は風の  $\sigma$  方向およびこれに直角の方向の成分であって、風速の絶対値を  $V_w$ 、風向(風が吹いてくる方向の方位角)を  $\delta$  とすると

$$W_x = -V_w \cos(\delta - \sigma) \quad (76)$$

$$W_y = -V_w \sin(\delta - \sigma) \quad (77)$$

で定義される。したがって、かりに風向風速ともに一定であっても、 $\sigma$  が変化するとそれに伴って  $W_x$  も  $W_y$  もともに変化する。また、風向風速そのものも、ロケットのように飛しょう範囲が広がると少なくとも高度による変化は無視できなくなる。

そこで、ある基準の風速成分に対して (53) および (74) 式を用いて求めた径路角を基本もしくは第一次の解とし、これに風速成分の変化に対する補正を加えることにより最終の径路角を決定することにする。この補正值と  $\Delta W_x$  または  $\Delta W_y$  との関係は (58) および (75) 式で与えられる。これらはいずれも  $\Delta W_x$  または  $\Delta W_y$  とそのときのロケットの速度との比にある係数をかけたもので表わされるから、ロケットの速度が増すにつれてだんだん小さくなり、ついには無視できるようになる。このことから、ロケットのおおよその飛しょう径路はランチャを離れるときの風速成分で決まるものといえる。

いま、ランチャの上下角を  $\gamma_0$ 、方位角を  $\sigma_0$  とし、地上付近での風速を  $V_w1$ 、風向を  $\delta_1$  とすると、ランチャを離れる瞬間の風速成分は

$$W_{x0} = -V_{w1} \cos(\delta_1 - \sigma_0) \quad (78)$$

$$W_{y0} = -V_{w1} \sin(\delta_1 - \sigma_0) \quad (79)$$

となる。この風速成分を基準にとると、基本の径路角は

$$\begin{aligned} \gamma = & \gamma_0 + \frac{\cos \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t \right. \\ & + \frac{n+\sin \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \\ & + \frac{n+\sin \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \frac{W_{x0} \sin \gamma_0}{ngt_0} \left\{ 1-F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{t_0}{t} \right\} \right. \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_0 - \frac{n+\sin \gamma_0}{n} \frac{W_{y0}}{ngt_0 \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1-F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right. \\ & \left. - \frac{t_0}{t} \right\} \quad (81) \end{aligned}$$

ただし

$$= (\gamma_0 + (\gamma_0 + \gamma_t) / 2) / 2 \quad (82)$$

で与えられる、

### 5.2 横風による方向変換に対する補正

横風によるロケットの方向変換の大部分は比較的早い時期に実現するので、これに対する補正は上空での風速変化に対する補正に先立って行なう必要がある。

補正項はすべて二次的なものと考えてよいから、方向変換としては (81) 式について考えればよい。この式の中で  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  は  $t$  の十分大きいところでは  $t$  に無関係であるとして取り扱ってきたが、 $t$  の小さいところではすでに述べたように、図5のように変化する。ここで問題になるのはむしろ  $t$  の小さいときであるから、その変化を無視するわけにゆかない、そこで、図5の曲線のうちの1本を図7に写し、改めて

検討してみる。これは一見複雑な変化を示しているが、この図の上に

$$F(\tau) = 1 - \frac{\tau_0}{\tau}$$

および

$$F(\tau) = F(\infty)$$

という2本の線を引いてみると、それぞれもとの曲線の前半および後半と細部を除きよく一致しているのがみられる。2本の線の交点の横座標を  $\tau_1$  とすると、

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{1-F(\infty)} \quad (83)$$

である。変数を  $\tau$  から  $t$  に直し

$$t_1 = \frac{t_0}{1-F(\infty)} \quad (84)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} t_1 > t > t_0 \text{ において } F(\tau) &= 1 - \frac{t_0}{t} \\ t > t_1 \text{ において } F(\tau) &= F(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

と近似することができる。ただしこの  $F(\infty)$  は付図2で与えられる  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  の値を意味する。

(81) 式の  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  をこの  $F(\tau)$  でおきかえ  $t$  について微分すると

$$\begin{aligned} t_1 \geq t \text{ において } \frac{d\sigma}{dt} &= 0 \\ t > t_1 \text{ において } \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{n+\sin \gamma_0}{n} \frac{W_{y0}}{ng \cos \bar{\gamma}} \frac{1}{t^2} \end{aligned} \quad (86)$$

を得る。

一方、 $\sigma$  を変数として

$$W_x = -V_{w1} \cos(\delta_1 - \sigma)$$

$$W_y = -V_{w1} \sin(\delta_1 - \sigma)$$

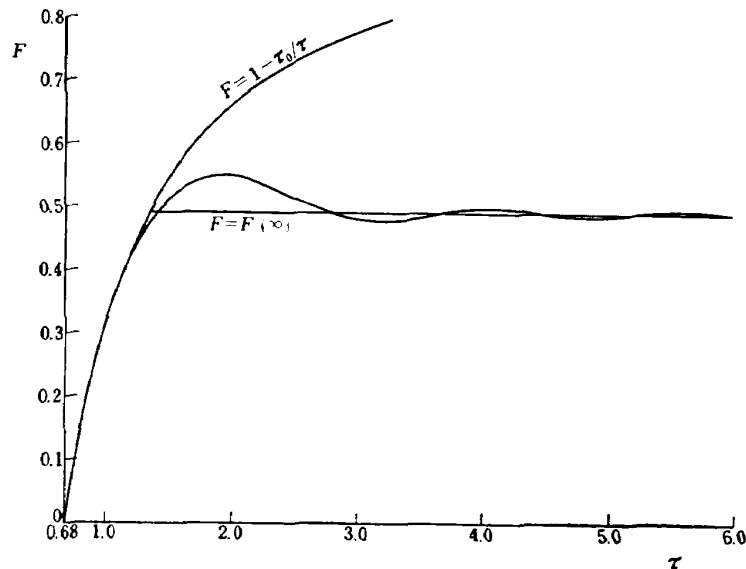


図7  $F(\tau)$  の近似

を  $t$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dW_x}{dt} &= -V_{w1} \sin(\delta_1 - \sigma) \frac{d\sigma}{dt} = W_y \frac{d\sigma}{dt} \\ \frac{dW_y}{dt} &= V_{w1} \cos(\delta_1 - \sigma) \frac{d\sigma}{dt} = -W_x \frac{d\sigma}{dt} \end{aligned}$$

を得る。

これに (86) 式を代入すると

$t > t_1$  において

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y W_{y0}}{ng \cos \bar{\gamma}} \frac{1}{t^2} \quad (87)$$

および

$$\frac{dW_y}{dt} = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_x W_{y0}}{ng \cos \bar{\gamma}} \frac{1}{t^2} \quad (88)$$

となる。この右辺の  $W_y$  および  $W_x$  はともに  $t$  の関数であるが、変化は少ないので、おのおの平均値  $\bar{W}_y$  または  $\bar{W}_x$  でおきかえることにより定数化して取り扱える。両辺に  $dt$  をかけ、 $t$  の代りに  $t_i$  とかくと

$$dW_x = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\bar{W}_y W_{y0}}{ng \cos \bar{\gamma}} \frac{1}{t_i^2} dt_i \quad (89)$$

$$dW_y = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\bar{W}_x W_{y0}}{ng \cos \bar{\gamma}} \frac{1}{t_i^2} dt_i \quad (90)$$

を得る。まず (89) 式を (58) 式の  $\Delta W_x$  のところへ代入し、 $t_i$  について  $t_1$  から  $t$  まで積分すると、横風による方向変換に対する  $\Delta \gamma$  の補正項として

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_x &= -\frac{(n + \sin \gamma_0)^2}{n(n - 2 \sin \gamma_0)} \frac{\bar{W}_y W_{y0} \sin \gamma_0}{n^2 g^2 \cos \bar{\gamma}} \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{t_i^3} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{1}{t_i^2} \right] dt_i \\ &= -\frac{(n + \sin \gamma_0)^2}{n(n - 2 \sin \gamma_0)} \frac{\bar{W}_y W_{y0} \sin \gamma_0}{n^2 g^2 \cos \bar{\gamma}} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} \right)^2 - \sqrt{a} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{\tau_i^3} F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) d\tau_i \right\} \end{aligned}$$

を得る。ところで

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{\tau_i^3} F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) d\tau_i$$

は  $\tau_i$  が少し大きくなると被積分値はたちまち 0 に近づくので、 $\tau$  がかなり大きい場合には  $\tau_1$  だけの関数とみなせる。 $\tau_1$  はまた (83) 式で示されるように  $\tau_0$  の関数であるから、結局この積分値は  $\tau_0$  の関数となる。いま

$$E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{\tau_i^3} F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) d\tau_i \quad (91)$$

とおくと、 $E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right)$  は  $b/\sqrt{a}$  をパラメータとして  $\tau_0$  に対して付図 3 のように与えられる。さらに  $t_1$  の代りに (84) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_x &= -\frac{(n + \sin \gamma_0)^2}{n(n - 2 \sin \gamma_0)} \frac{\bar{W}_y W_{y0} \sin \gamma_0}{(ng t_0)^2 \cos \bar{\gamma}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}^2 - \tau_0^2 E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right] \end{aligned} \quad (92)$$

となる。同様に (90) 式を (75) 式に代入して積分すると

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x &= -\left( \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \right)^2 \frac{\bar{W}_x W_{y0}}{(ng t_0)^2 \cos \bar{\gamma}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}^2 - \tau_0^2 E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right] \end{aligned} \quad (93)$$

が得られる。

### 5.3 上空での風速変化に対する補正

実際の風は場所と時間とで複雑に変化するが、ある短い時間の平均を考えると巨視的には高度だけの関数として取り扱える。とくにロケットの飛しよう径路の修正には、発射直前に観測されたある高度ごとの平均の風向風速がそのまま用いられることが多いので、このような場合について考える。

まず、地表から高度  $h_1$  までのものを 1 番とし、以下順次番号をつけ、一般に高度  $h_{i-1}$  から  $h_i$  までの平均風速を  $V_{wi}$ 、風向を  $\delta_i$  とする。

一方、 $\sigma$  は厳密には上空でも少しずつ変化するが、変化の大部分は発射直後に生ずるので、 $h_1$  より上空では (81) 式に (93) 式を加えた  $\sigma_1$  で近似できる。したがってそれぞれの高度における風速成分は

$$W_{xi} = -V_{wi} \cos(\delta_i - \sigma_1) \quad (94)$$

および

$$W_{yi} = -V_{wi} \sin(\delta_i - \sigma_1) \quad (95)$$

とみなせる。このうち  $W_{x1}$  および  $W_{y1}$  はロケットが地上風によって方向変換を終えた状態での風速成分であって、 $W_{x0}$  から  $W_{x1}$ 、 $W_{y0}$  から  $W_{y1}$  への風速成分の変化に対しては (92) および (93) 式で補正がすんでいる。したがってここでは  $W_{x1}$  および  $W_{y1}$  からの変化をとりあげればよい。すなわち  $i=1$  から必要なところまで

$$\Delta W_{xi} = W_{xi+1} - W_{xi}$$

$$\Delta W_{yi} = W_{yi+1} - W_{yi}$$

によって階差を求めておく。ロケットの側からみると、高度が  $h_i$  に達するごとに  $\Delta W_{xi}$  および  $\Delta W_{yi}$  の風速変化を受けることになる。また  $h_i$  に達する時間は

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{ng \sin \gamma_0}} \quad (96)$$

に相当する。したがって (58) および (75) 式から上空における風速変化に対する補正項として

$$\Delta\gamma_h = \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{\sin \gamma_0}{ng} \sum \frac{\Delta W_{xi}}{t_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_i}{t} \right\} \quad (97)$$

$$\Delta\sigma_h = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{1}{ng \cos \bar{\gamma}} \sum \frac{\Delta W_{yi}}{t_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_i}{t} \right\} \quad (98)$$

が得られる。

#### 5.4 各高度における風の影響

これまでの議論では、風速分布を風速を横軸に高度を縦軸にとったとすると、これを縦に分割して取り扱ってきたことになる。ここで少し脇道にそれるが風速分布を横に分割して、燃焼終了直前の径路角に対する各高度ごとの風の影響を別々にとりあげてみる。いま各高度における径路角の変化量を  $\Delta\gamma_{wi}$  および  $\Delta\sigma_{wi}$  とし、

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma_0 + \sum \Delta\gamma_{wi} \quad (99)$$

$$\Delta\sigma = \sum \Delta\sigma_{wi} \quad (100)$$

とすると、 $\Delta\gamma_0$  は風に無関係な項であるから

$$\Delta\gamma_0 = \frac{\cos \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (101)$$

で与えられる。つぎに地上から最初の高度  $h_1$  までの風による分は

$$\Delta\gamma_{w1} = \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \left[ \frac{W_{x0} \sin \gamma_0}{ng t_0} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{W_{w1} \sin \gamma_0}{ng t_1} \left\{ 1 - F\left(\tau_1, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \right] + \Delta\gamma_s \quad (102)$$

$$\Delta\sigma_{w1} = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \left[ \frac{W_{y0}}{ng t_0 \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{W_{y1}}{ng t_1 \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1 - F\left(\tau_1, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \right] + \Delta\sigma_s \quad (103)$$

となる。ただし  $\Delta\gamma_s$  および  $\Delta\sigma_s$  は (92) および (93) 式で与えられる方向変換に対する補正項をあらわし、 $t_1$  および  $\tau_1$  は高度  $h_1$  に達する時間すなわち

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{ng \sin \gamma_0}}$$

$$\tau_1 = \sqrt[4]{a} t_1$$

であり、 $W_{x1}$  および  $W_{y1}$  は (94) および (95) 式で  $i=1$  としたときの風速成分である。

高度  $h_1$  より上空では方向変換による補正は省略できるので、一般に高度  $h_{i-1}$  から  $h_i$  までの風による径路角の変化を  $\Delta\gamma_{wi}$  および  $\Delta\sigma_{wi}$  とすると

$i \geq 2$  に対して

$$\Delta\gamma_{wi} = \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{W_{wi} \sin \gamma_0}{ng} \left[ \frac{1}{t_{i-1}} \left\{ 1 - F\left(\tau_{i-1}, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{1}{t_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \right] \quad (104)$$

$$\Delta\sigma_{wi} = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_{yi}}{ng \cos \bar{\gamma}} \left[ \frac{1}{t_{i-1}} \left\{ 1 - F\left(\tau_{i-1}, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{1}{t_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \right] \quad (105)$$

で与えられる。

## 6. 数値計算例

### 6.1 ロケットの要目および定数

単段ロケット NAL-16-TR を例にとって数値計算を試みる。このロケットのおもな要目はつぎのとおりである。

平均推力	$T=1400 \text{ kg}$
全重量	$W=119.4 \text{ kg}$
全長	$l=3.88 \text{ m}$
基港面積	$S=0.0214 \text{ m}^2$
慣性モーメント	$I_y=12.375 \text{ kgms}^2$
重心から風圧中心までの距離	$d=1.11 \text{ m}$
法線力係数の傾斜	$C_{Na}=24.0 \text{ /rad}$
縦揺れ減衰モーメント係数	$C_{mq}=-6.1 \text{ /rad}$

ただし、これらはいずれも発射時または発射直後の値である。またランチャの有効長さは

$$l_a = 4.30 \text{ m}$$

とする。

いま、ランチャの上下角を

$$\gamma_0 = 70^\circ \text{ (または } 80^\circ)$$

とし、必要な定数を計算すると

$$n = 10.78 \quad (10.73)$$

$$t_0 = 0.285 \text{ s} \quad (0.287 \text{ s})$$

$$a = 31.8 \text{ s}^{-4}$$

$$b = 0.534 \text{ s}^{-2}$$

$$b/\sqrt{a} = 0.0945$$

$$\tau_0 = \sqrt[4]{a} t_0 = 0.678$$

$$G(\tau_0, b/\sqrt{a}) = 0.56$$

$$F(\tau_0, b/\sqrt{a}) = 0.49$$

$$E(\tau_0, b/\sqrt{a}) = 0.031$$

を得る。

### 6.2 正面からの風に対する計算例

まず、正面から一様な風が吹いている場合について計算する。この場合、方位角は変化しないから上下角



の変化だけを考えればよく、かつ補正項が不要であるから、(80)式がそのまま最終結果となる。いま、(80)式を

$$r = r_0 + \Delta r_I + \Delta r_{II} + \Delta r_{III} \quad (106)$$

とおき、かつ単位をラジアンから度に変換すると

$$\Delta r_I = 57.3 \frac{1}{1-2s} \frac{\cos \gamma_0}{n} (\log_e t_0 - \log_e t) \quad (107)$$

$$\Delta r_{II} = 57.3 \frac{1+s}{1-2s} \frac{\cos \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (108)$$

$$\Delta r_{III} = 57.3 \frac{1+s}{1-2s} \frac{sW_{x0}}{gt_0} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \quad (109)$$

ただし

$$s = \frac{\sin \gamma_0}{n} \quad (110)$$

と書ける。

ランチャの上下角を70°としたときの無風時および5 m/sの向い風の際の、 $t=5$ 秒および10秒における径路角の計算結果は表1および表2のようになる。さらに同じ5 m/sの向い風についてランチャ角を80°としたときの結果は表3で示される。なお、参考のために、電子計算機を用いて、運動の方程式をRunge-Kutta法で直接解いて求めた解を各表の最下段に付記

表1 無風時における計算例

無 風 $\gamma_0=70^\circ$		
$t$	5 s	10 s
$\Delta r_I$	- 6.31°	- 7.83°
$\Delta r_{II}$	1.34°	1.34°
$\Delta r_{III}$	0	0
$\Delta r$	- 4.97°	- 6.49°
$r$	65.03°	63.51°
電子計算機の解	64.74°	63.07°

表2 正面の風に対する計算例 (1)

$W_{x0}=-5 \text{ m/s}$ $\gamma_0=70^\circ$		
$t$	5 s	10 s
$\Delta r_I$	- 6.31°	- 7.83°
$\Delta r_{II}$	1.34°	1.34°
$\Delta r_{III}$	- 5.33°	- 5.67°
$\Delta r$	-10.30°	-12.16°
$r$	59.70°	57.84°
電子計算機の解	60.03°	57.79°

表3 正面の風に対する計算例 (2)

$W_{x0}=-5 \text{ m/s}$ $\gamma_0=80^\circ$		
$t$	5 s	10 s
$\Delta r_I$	- 3.25°	- 4.04°
$\Delta r_{II}$	0.69°	0.69°
$\Delta r_{III}$	- 5.66°	- 6.02°
$\Delta r$	- 8.22°	- 9.37°
$r$	71.78°	70.63°
電子計算機の解	72.19°	70.67°

しておいた。電子計算機の解には推力、空力係数などの細かい変化が計算に入っているが、近似解にはこれらの考慮がされていないにもかかわらず、比較的良好に合っているものといえる。

### 6.3 斜めの風に対する計算例

つぎに、ランチャの角度が上下角70°、方位角90°のとき、方位角50°の方向から6.5 m/sの風が吹く場合の $t=5$ 秒および10秒における径路角を求めてみる。

風のデータを(78)および(79)式に入れると

$$W_{x0}=-4.98 \text{ m/s} \quad W_{y0}=4.18 \text{ m/s}$$

が得られる。

まず、 $W_{x0}$ を(80)式に入れて $r$ の第一次の値を計算する。これを(82)式に入れて $\bar{r}$ を求め、この $\bar{r}$ と $W_{y0}$ とを(81)式に入れると $\sigma$ の第一次の解が得

表4 斜めの風に対する計算例

$\gamma_0=70^\circ$ $\sigma_0=90^\circ$		
$W_{x0}=-4.98 \text{ m/s}$ $W_{y0}=4.18 \text{ m/s}$		
$t$	5 s	10 s
$\Delta r$	-10.28°	-12.14°
$r$ (第一次)	59.72°	57.86°
$\bar{r}$	67.43°	66.97°
$\Delta \sigma$	-10.34°	-10.66°
$\sigma$ (第一次)	79.66°	79.34°
$\bar{W}_x$	- 4.10°	- 4.08°
$\bar{W}_y$	4.91°	4.92°
$\Delta r_s$	- 0.45°	- 0.51°
$r$	59.27°	57.36°
$\Delta \sigma_s$	0.88°	0.96°
$\sigma$	80.54°	80.30°
電子計算機の解 $r$ $\sigma$	59.78° 81.59°	57.49° 81.16°

られる。この  $\sigma$  を (85) および (86) に入れて求めた  $W_x$  および  $W_y$  をそれぞれ  $W_{x0}$  および  $W_{y0}$  と平均したものを  $\bar{W}_x$  および  $\bar{W}_y$  とすると、(92) および (93) 式によって  $\Delta\gamma_s$  および  $\Delta\sigma_s$  が計算されるので、これをさきの第一次の  $\gamma$  および  $\sigma$  に補正值として加える。これらの計算式では角度の単位はラジアンであらわされているから、度に直すには(107)~(109)式と同様に 57.3 をかける必要がある。計算の結果は電子計算機による解とともに表 4 に示されている。高度による風速の変化が与えられているときは、この結果にさらに (95) および (96) 式で計算した  $\Delta\gamma_h$  および  $\Delta\sigma_h$  を加算すればよい。

## 7. 検 討

これらの計算例から、この計算法は簡単ではあるが、きわめて精度のよい結果が得られることがわかった。しかしこれは偶然の結果であってはならないので、ここで計算の仮定に検討を加える。とくに、この計算法では単純化のためにいくつかの変化量を定数化して取り扱ってきたが、その近似が適正であるか否かによって結果の精度が左右されるので、その点についても検討をする。

### (1) $k$ および $n$

ここでは一応推力を一定と仮定して議論を進めてきたが、実際には推力曲線は中だるみのことが多く、これと空気抵抗の成長とを組み合わせると加速度は単調に減少する傾向を示すことが多い。ただし大型ロケットの場合には、推力重量比が小さくなる結果、加速度が小さくなるとともに空気抵抗の推力に対する比率も小さくなり、推力を一定とすると、重量の減少に反比例して加速度は尻上りに増加する傾向がみられることも少なくない。いずれにせよ、加速度は一定というより、 $t$  の一次式で変化すると考えるべきである。

そこで (9) 式の代りに

$$\frac{T-D}{m} = (k+k_1t)g \quad (111)$$

とおき、この追加項によって、これまでの計算値にどれだけの差異を生ずるかを調べてみる。

(111) 式を (8) 式に代入し

$$\left. \begin{aligned} k - \sin \gamma_0 &= n \\ k_1 &= 2n_1 \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

とおくと

$$\frac{dV}{dt} = (n+2n_1t)g \quad (113)$$

となり、さらに

$$V = (n+n_1t)gt \quad (114)$$

を得る。

これらの関係を (13) 式に代入すると、(15)、(16) および (17) 式の代りに

$$\Delta\gamma_1 = \int_{t_0}^t -\frac{\cos \gamma}{(n+n_1t)t} dt \quad (115)$$

$$\Delta\gamma_2 = \int_{t_0}^t \frac{n + \sin \gamma_0 + 2n_1t}{(n+n_1t)t} \omega dt \quad (116)$$

$$\Delta\gamma_3 = \int_{t_0}^t \frac{n + \sin \gamma_0 + 2n_1t}{(n+n_1t)t} \alpha dt \quad (117)$$

を得る。

まず、(115) 式において (15) 式と同様に

$$\cos \gamma = \cos \gamma_0 - \Delta\gamma \sin \gamma_0$$

とおいて積分を遂行し、高次の微小項を省略すると

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_1 &= \frac{\cos \gamma_0}{n} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t + \frac{n_1}{n}(t-t_0) \right\} \\ &\quad + \frac{2 \sin \gamma_0}{n} \Delta\gamma \end{aligned} \quad (118)$$

となる。

つぎに、(116) 式に

$$\omega = \frac{W_x \sin \gamma_0}{(n+n_1t)gt}$$

を代入して積分すると

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_2 &= \frac{W_x \sin \gamma_0}{ng} \left[ \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \left\{ -\frac{1}{t} - \frac{n_1}{n+n_1t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2n_1}{n} \log_e t + \frac{2n_1}{n} \log_e (n+n_1t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n_1}{n} \log_e t + \frac{2n_1}{n+n_1t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2n_1}{n} \log_e (n+n_1t) \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

となる。この式の第 2 項以下は第 1 項に比べてずっと小さいので省略すると (21) 式に帰する。

また、(117) 式は書き直すと

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_3 &= \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \int_{t_0}^t \frac{\alpha}{t} dt \\ &\quad + \frac{n - \sin \gamma_0}{n} \int_{t_0}^t \frac{n_1 \alpha}{n+n_1t} dt \end{aligned} \quad (119)$$

となる。この式の第 2 項は近似的に

$$\frac{n - \sin \gamma_0}{n} \frac{n_1}{n} \int_{t_0}^t \alpha dt$$

とみなせるが、 $\alpha$  の積分値はその性質上  $P$  よりもずっと小さい上、 $n_1/n$  の絶対値はきわめて小さいので、この項は高次の微小量として省略できる。すなわち (119) 式は第 1 項だけとれば十分である。

動揺の方程式においても、(12)式の代りに (114) 式

が使用されなければならないが、代入後の式の中で  $n_1 t/n$  を他の微小量と同程度の大きさとして取り扱おうと、新しい項はすべてこれらのものと二次以上の積の形になっているので高次の微小量として省略でき、やはり (30) 式に帰する。したがって  $\alpha$  の表示式も (33) 式のままよく、 $n_1 t_0$  がきわめて小さいことから、初期条件も (34) および (35) 式がそのまま成立し、 $\Delta \gamma_3$  は (52) 式と一致することになる。

結局

$$\begin{aligned} \Delta \gamma = & \frac{\cos \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t + \frac{n_1}{n} (t-t_0) \right. \\ & \left. + \frac{n+\sin \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \\ & + \frac{n+\sin \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left\{ 1 \right. \\ & \left. - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \end{aligned} \quad (120)$$

となり、加速度倍数  $n$  の変化は重力による変化の項だけに影響し、風による変化の項には影響しないことになる。もっとも上空での風速変化を考える場合には、速度が  $ngt_i$  の代わりに  $(n+n_1 t_i)gt_i$  になった分だけ違ってくるが、 $\Delta \gamma_n$  そのものは小さいことから、その差は無視してよい。

ここで (120) 式で新たに加えられた項の大きさについて調べてみる。(113)式に示されるように  $n_1(t-t_0)/n$  は時刻  $t_0$  から  $t$  までの加速度の変化率の  $1/2$  で定義されているから、いまかりに発射時の加速度が  $10G$  であったものが、 $t$  秒後に  $8G$  になったとしても、この値は  $-0.1$  にしかならない。これを  $\Delta \gamma$  に直すと、 $\gamma_0$  にもよるが、 $\gamma_0=70^\circ$  で  $\Delta \gamma=-0.24^\circ$ 、 $\gamma_0=80^\circ$  とすると  $\Delta \gamma=-0.12^\circ$  となる。実際の加速度の変化は通常これよりもずっと少ないことを考えると、実用上この項を省略しても大過はないものといえる。

なお、 $\Delta \sigma$  には重力の影響は含まれないので、当然  $n$  の変化の影響はないものとみなせる。

### (2) 係数 $a$ , $b$ および $c$ の変化

つぎに問題になるのは、動揺の方程式における係数  $a$ ,  $b$  および  $c$  についてである。これらが仮定とくい違ったとき、関数  $G(\tau_0, b/\sqrt{a})$  および  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  の値にどのような差異を生ずるかを調べてみる。

まず、 $c$  についてであるが、(31) 式においては  $\sin \gamma/n$  は  $1$  に比して省略できるものとして  $c=1$  とおかれているが、これはさかのぼって、(30)式を導く際に、 $1/n$  を他の  $\alpha$ ,  $da/dt$  などと同程度の微小量とみなし、それらについて二次以上の項を省略したのと同じ取り扱いであって当然のことである。逆にいえば、

$n$  が十分大きくなくて、 $c$  を  $1$  とみなすことが無理な場合には (30) 式そのものが成立しないことになる。しかし、その場合にも方程式の骨子はそれほど変らないから、その解は (33) 式の周期と減衰率に多少の修正を加えた程度のものに止まるものと考えられる。したがってこれを (22) 式に入れて積分した結果も似たような結果になり、あまり大きな差を生じることにはならないといえる。

つぎに、 $a$  および  $b$  については、いくつかの因子が含まれているので、当然時間の経過とともに変化するが、発射後数秒間だけに注目すると、分母と分子と同じ傾向で変化していて、全体として意外に変化が小さいことが見出される。また、たとえ  $a$  および  $b$  の値が時間とともに大きく変化したとしても、もともと  $\alpha$  の減衰率がきわめて大きいことから、これを (22) 式に代入して積分した結果ではほとんど影響はあらわれないものといえる。

つぎに、 $a$  および  $b$  の値そのものによる誤差について調べてみる。

$a$  は付図 1 および 2 の横軸の値  $\tau_0$  に直接関係している。しかし

$$\tau_0 = \sqrt[4]{a} t_0$$

であるから、かりに  $a$  に  $10\%$  の誤差が含まれていても  $\tau_0$  の誤差は  $2.5\%$  に過ぎないことになる。これの  $G(\tau_0, b/\sqrt{a})$  および  $F(\tau_0, b/\sqrt{a})$  の値への影響は  $\tau_0$  の値にもよるが、 $\tau_0=0.6$  付近では

$$\Delta G=0.03 \quad \Delta F=0.01$$

あって、これを (53) 式に入れると、 $\Delta \gamma$  に対する影響はどちらも  $0.05^\circ$  前後で、両者合せて  $0.1^\circ$ 、誤差にして  $1\%$  ぐらいに収まる。これも  $\tau_0$  が大きくなるほど誤差は小さくなる。

$b$  は同じく付図 1 および 2 のパラメータに関係するが、これはずっと影響が少く、前章の計算例でかりに  $b$  の値に  $10\%$  の誤差があったとしても

$$\Delta G=0.003, \quad \Delta F=0.001$$

に過ぎず、 $\Delta \gamma$  に及ぼす誤差は  $0.01\%$  で、 $a$  による誤差の  $1/10$  程度である。

$a$  にせよ、 $b$  にせよ、動揺の初期の値が結果に最も大きく影響するので、 $t=t_0$  付近での値を適切につかむことが大切である。

### (3) $\omega$ の近似

これまでは簡単のために、 $\omega$  を (19) 式で近似したが、厳密に言えば

$$\omega = \tan^{-1} \frac{W_x \sin \gamma}{V - W_x \cos \gamma} \quad (121)$$

である。

いま,  $V=ngt$  とし,  $\sin \gamma$  の代わりに  $\sin \gamma_0$ ,  $\cos \gamma$  の代わりに  $\cos \bar{\gamma}$  でおきかえると, 上式は

$$\omega = \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt - W_x \cos \bar{\gamma}} \quad (122)$$

と近似される。これを (16) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_2 &= \int_{t_0}^t \frac{(n + \sin \gamma_0) W_x \sin \gamma_0}{n(ngt - W_x \cos \bar{\gamma})} dt \\ &= \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\sin \gamma_0}{\cos \bar{\gamma}} \log_e \left( \frac{ngt - W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0 - W_x \cos \bar{\gamma}} \cdot \frac{t_0}{t} \right) \\ &= \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\sin \gamma_0}{\cos \bar{\gamma}} \left\{ \log_e \left( 1 - \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log_e \left( 1 - \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0} \right) \right\} \quad (123) \end{aligned}$$

となり, さらに級数に展開すると

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_2 &= \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\sin \gamma_0}{\cos \bar{\gamma}} \left\{ - \left( \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x^2 \cos^2 \bar{\gamma}}{2(ngt)^2} + \dots \right\} + \left( \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x^2 \cos^2 \bar{\gamma}}{2(ngt_0)^2} + \dots \right\} \quad (124) \end{aligned}$$

となる。この展開式のそれぞれ第 1 項だけをとると (21) 式と一致する。すなわちこれまではこの展開式の第 2 項以下を切り捨てていたことに相当する。

$\omega$  を (121) 式であらわすことにより,  $t=t_0$  における  $\alpha$  の初期条件のうち (34) 式は

$$(\alpha)_{t_0} = - \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0 - W_x \cos \gamma_0}$$

となる。これを展開して第 2 項までとると

$$(\alpha)_{t_0} = - \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left( 1 + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right)$$

となり, したがって (35) 式に相当する式は

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t_0} = \frac{\cos \gamma_0}{nt_0} + \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0^2} \left( 1 + \frac{2W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right)$$

となる。これを重力による分と風による分とに分けると

$$\left. \begin{aligned} (\alpha)_{t_0} &= 0 \\ \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t_0} &= \frac{\cos \gamma_0}{nt_0} \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

および

$$\left. \begin{aligned} (\alpha)_{t_0} &= - \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left( 1 + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right) \\ \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t_0} &= \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0^2} \left( 1 + \frac{2W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

となる。これより積分定数を決定し,  $P$  を計算すると,

$$\Delta \gamma_3 = \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{\cos \gamma_0}{n} G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left[ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \left\{ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right\} \right] \quad (127) \end{aligned}$$

となる。これは (52) 式と比較すると, ちょうど補正項として最後の項がつけ加えられた形になっている。

(18), (123) および (127) 式を加え合せて整理をすると, 結局

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \frac{\cos \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t \right. \\ &\quad \left. + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{\sin \gamma_0}{\cos \bar{\gamma}} \log_e \left( \frac{ngt - W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0 - W_x \cos \bar{\gamma}} \cdot \frac{t_0}{t} \right) \\ &\quad - \frac{n + \sin \gamma_0}{n - 2 \sin \gamma_0} \frac{W_x \sin \gamma_0}{ngt_0} \left[ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \left\{ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right\} \right] \\ &\quad + \Delta \gamma_3 \quad (128) \end{aligned}$$

を得る。

(4)  $\varepsilon$  の近似

つぎに問題になるのは  $\varepsilon$  の近似であるが, その前に  $\Delta \sigma$  の計算式そのものについても検討を加える必要がある。すなわち (61) 式を導くに当って (3) 式において

$$\cos \theta = \cos \gamma$$

とみなしたが, ロケットが十分加速された後はともかく, 発射直後の速度の遅い間では  $\theta$  と  $\gamma$  との間にかかなりの開きがあり, 等しいとみなすのは無理な場合が多い。その場合

$$\theta = \alpha + \omega + \gamma$$

のうち

$$\omega + \gamma = \gamma_A$$

とかくと

$$\theta = \gamma_A + \alpha$$

となり, これと

$$\sigma - \phi = \varepsilon + \frac{\beta}{\cos \gamma_A}$$

という関係を (3) 式に適用すると

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{n + \sin \gamma}{nt} \frac{\cos (\gamma_A + \alpha)}{\cos \gamma} \left( \varepsilon + \frac{\beta}{\cos \gamma_A} \right)$$

となる。 $\alpha$  は小さいことから

$$\cos (\gamma_A + \alpha) = \cos \gamma_A - \alpha \sin \gamma_A$$

とみなすと

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{n + \sin \gamma}{nt} \frac{\varepsilon \cos \gamma_A + \beta}{\cos \gamma} (1 - \alpha \tan \gamma_A)$$

を得る。ところで、 $\alpha$  は減衰する sine 関数であらわされるから、 $t$  の大きいところでは平均値は 0 となる一方、最初の  $\alpha$  が比較的大きい値のところでは、 $\beta$  は  $-\varepsilon \cos \gamma_A$  にきわめて近いことから、 $\alpha$  を含む項は省略でき

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{n + \sin \gamma}{nt} \frac{\varepsilon \cos \gamma_A + \beta}{\cos \gamma}$$

となり、これより(62)式の代わりに

$$\Delta\sigma_1 = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \int_{t_0}^t \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\varepsilon \cos \gamma_A}{t} dt \quad (129)$$

を得る。この場合も、 $\Delta\sigma_2$  については (68) 式がそのまま成立する。

ところで、 $\varepsilon \cos \gamma_A$  はロケットの速度ベクトル  $V$  と対気速度ベクトル  $V_A$  とがなす角の  $V_A$  と  $W_y$  とを含む面への投影であるから

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos \gamma_A &= \text{Tan}^{-1} \frac{W_y}{V_A} \\ &= \text{Tan}^{-1} \frac{W_y}{V - W_x \cos \gamma} \end{aligned} \quad (130)$$

で与えられる。

一般に  $W_y$  は  $V_A$  に比して小さいので、 $\text{Tan}^{-1}$  の展開式の第 1 項だけを取り (129) 式に代入すると

$$\Delta\sigma_1 = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{1}{\cos \bar{\gamma}} \int_{t_0}^t \frac{W_y}{t (ngt - W_x \cos \bar{\gamma})} dt$$

となる。被積分関数の中の  $\cos \gamma$  を  $\cos \bar{\gamma}$  とおいて定数として取り扱おうと容易に積分されて

$$\Delta\sigma_1 = -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{W_x \cos^2 \bar{\gamma}} \log_e \left( \frac{ngt - W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0 - W_x \cos \bar{\gamma}} \frac{t_0}{t} \right) \quad (131)$$

となる。

これは書きかえると

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{W_x \cos^2 \bar{\gamma}} \left\{ \log_e \left( 1 - \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log_e \left( 1 - \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0} \right) \right\} \end{aligned}$$

となり、さらに級数に展開すると

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{W_x \cos^2 \bar{\gamma}} \left\{ -\left( \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x^2 \cos^2 \bar{\gamma}}{2(ngt)^2} + \dots \right\} + \left( \frac{W_x \cos \bar{\gamma}}{ngt_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x^2 \cos^2 \bar{\gamma}}{2(ngt_0)^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (132)$$

となる。それぞれの展開式の第 1 項だけをとるとこの式は (66) 式と全く同じになる。すなわち (64) 式はこれの第 1 近似であるといえる。

つぎに、 $\beta$  の初期条件は

$t=t_0$  において

$$\begin{aligned} \beta &= -\varepsilon \cos \gamma_A \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d}{dt} (\varepsilon \cos \gamma_A) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} (\beta)_{t_0} &= -\frac{W_y}{ngt_0 - W_x \cos \gamma_0} \\ &= -\frac{W_y}{ngt_0} \left( 1 + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right) \end{aligned} \quad (132)$$

$$\left( \frac{d\beta}{dt} \right)_{t_0} = \frac{W_y}{ngt_0^2} \left( 1 + \frac{2W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \right) \quad (134)$$

を得る。これらを (71) 式に入れて積分定数を決定しさらに (67) 式に代入すると  $Q$  が求められる。それより

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_2 &= -\frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_y}{ngt_0 \cos \bar{\gamma}} \left[ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_x \cos \gamma_0}{ngt_0} \left\{ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (135)$$

を得る。すなわち  $\Delta\sigma_2$  に対しても  $\Delta\gamma_3$  に対すると全く同じ形の項が付加される。

これらの結果から、結局

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 - \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_{y0}}{W_{x0} \cos^2 \bar{\gamma}} \log_e \left( \frac{ngt - W_{x0} \cos \bar{\gamma}}{ngt_0 - W_{x0} \cos \bar{\gamma}} \frac{t_0}{t} \right) \\ &\quad + \frac{n + \sin \gamma_0}{n} \frac{W_{y0}}{ngt_0 \cos \bar{\gamma}} \left[ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_{x0} \cos \gamma_0}{ngt_0} \left\{ F \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - G \left( \tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right\} \right] \\ &\quad + \Delta\sigma_2 \end{aligned} \quad (136)$$

となる。

これを要するに、前章までの結果は、 $W_{x0}/ngt_0$ 、 $W_{x0}/ngt$  および  $W_{y0}/ngt_0$  について二次以上の項を省略したものにはほかならない。 $\Delta\gamma_3$  および  $\Delta\sigma_3$  はそれ自身が補正項であって二次的なものであるから、これに対する補正は省略でき、(92) および (93) 式がそのまま用いられる。

ここで参考のために、いくつかの場合について(80) および (81) 式にそれぞれ  $\Delta\gamma_3$  および  $\Delta\sigma_3$  を加えたものならびに (128) および (136) 式によって計算したものを電子計算機による解と比較すると表 5 のようになる。これによれば、(128) および (136) 式を用いることによって改善される量はほんのわずかである場合によっては簡単な方程式でも十分であるといえる。むしろ問題になるのは、どちらの計算式をとっても、ランチャ角  $\gamma_0$  がある限界を越すと  $\sigma$  の誤差が急激に増すことである。しかしこれは  $\cos \bar{\gamma}$  の選び方に基因するものであるから、つぎの項で改めて検討する。

表 5  $t=10$  s における近似解と電子計算機による精密解との比較

ランチャ角 $\gamma_0^\circ$		87.0	85.0	80.0	75.0	70.0	80.0	80.0	75.0	75.0	70.0
" $\sigma_0^\circ$		90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
風 向 $\delta^\circ$		70.0	70.0	50.0	50.0	30.0	250.0	220.0	240.0	220.0	240.0
風 速 $V_w$ m/s		8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	6.0	6.0	8.0	8.0	8.0
電子計算機による $\gamma^\circ$	(1)	76.6	74.0	68.5	62.3	57.9	82.7	79.4	76.8	73.9	70.2
$\gamma^\circ((80)+(92))$	(2)	76.3	73.8	68.4	62.2	58.0	83.1	80.0	77.5	74.6	70.9
$\gamma^\circ((128)$ 式)	(3)	76.5	74.1	68.8	62.7	58.3	83.4	80.2	78.0	74.9	71.6
(2) の誤差 ((2)-(1))		-0.3	-0.2	-0.1	-0.1	0.1	0.4	0.6	0.7	0.7	0.7
(3) の誤差 ((3)-(1))		-0.1	0.1	0.3	0.4	0.4	0.7	0.8	1.2	1.0	1.4
電子計算機による $\sigma^\circ$	(4)	75.9	78.2	73.4	77.2	75.1	109.7	121.6	111.6	117.4	104.3
$\sigma^\circ((81)+(93))$	(5)	78.8	78.6	72.3	76.2	74.0	106.0	119.4	109.1	115.9	103.5
$\sigma^\circ((136)$ 式)	(6)	79.6	79.3	73.3	77.3	75.0	106.6	120.1	110.4	117.3	104.7
計算に用いられた $\bar{\gamma}^\circ$		84.4	82.3	77.2	71.9	67.1	80.8	80.1	75.8	75.0	70.4
(5) の誤差 ((5)-(4))		2.9	0.4	-1.1	-1.0	-1.1	-3.7	-2.2	-2.5	-1.5	-0.8
(6) の誤差 ((6)-(4))		3.7	1.1	-0.1	0.1	0.1	-3.1	-1.5	-1.2	-0.1	0.4
備 考		向 い 風					追 い 風				

(5)  $\bar{\gamma}$  の推定

本論文では発射の上下角  $\gamma_0$  が鉛直に近いものとして  $\sin \gamma$  を  $\sin \gamma_0$  でおきかえて取り扱ったが、これはほとんどが、たとえば  $(n+\sin \gamma)$  というように  $n$  と組み合わせられた形であられるので、 $\gamma_0$  が鉛直に近くなくても、これによる誤差はきわめて小さいとしてよい。一方  $\cos \gamma$  は  $\cos \bar{\gamma}$  でおきかえられたが、上述のように  $\bar{\gamma}$  の選び方が誤差の大きな原因となりかねないので、これについて検討してみる。

これまで  $\bar{\gamma}$  はすべての項に共通にして取り扱ってきたが、 $\Delta\sigma_1 \cdot \Delta\sigma_2 \cdot \Delta\sigma_3$  の各項ごとでそれぞれ  $\cos \gamma$  に対する比重のかかり方が異なることから、 $\bar{\gamma}$  の値にも当然差異があるはずである。しかし  $\Delta\sigma_1$  と  $\Delta\sigma_2$  とは組合せて一体として取り扱う方が都合がよい。すなわち  $\Delta\sigma_1$  と  $\Delta\sigma_2$  とは符号が反対で、しかも積分の初期では図7のところ述べてのように、絶対値がほとんど等しく、たがいに打ち消しあう形になっている。その後、 $\Delta\sigma_1$  の絶対値は徐々に増加するが、 $\Delta\sigma_2$  の方はほとんど変化しない。したがって  $\Delta\sigma_1$  と  $\Delta\sigma_2$  との和は図7の右上の2本の線ではさまれた部分のような形で変化することになる。 $\bar{\gamma}$  としてはこの部分での平均を考えればよく、これによって最初の  $\gamma$  の変化の急な部分が除外されるので、それだけ精度がよくなる。 $t$  としてはせいぜい 10 秒前後まで考えればよいので、 $\gamma$  の変化の範囲はあまり大きくないことを考慮に入れると

$$\bar{\gamma} = (\gamma_0 + (\gamma_0 + \gamma_t)/2)/2$$

という式で十分近似が成立する。

ところで、 $\Delta\sigma_3$  はこの  $\Delta\sigma$  による風速成分の変化に対する応答であるから、さらにあとへずれ、 $\bar{\gamma}$  の値は上の式で与えられるよりもずっと小さくなるはずである。この項そのものが小さいため、 $\bar{\gamma}$  を上の値で代用しても、たいていの場合、あまり大きな誤差とはならないが、 $\bar{\gamma}$  が  $80^\circ$  を越える場合には  $1/\cos \bar{\gamma}$  が大きくなるために、表5のように誤差が目立つ結果になる。このような場合にも高い近似度を保証するために、数値計算結果からの逆算により、 $\Delta\sigma_3$  の項に対する  $\bar{\gamma}$  の与え方を別に規定することも可能であるが、その規定があらゆる機種にも適用できるかどうか疑わしいばかりでなく、そのような高い上下角で発射することはきわめてまれなので、ここでは省略する。

(6) その他の問題

最後に、この計算法の適用範囲としては、ロケットの加速が大きく、運動に対する応答が速いことが望ましいことはすでに述べたとおりである。これについては、ロケットが大型になると、原則的に  $n$  が小さくなる結果、動揺の方程式が (31) 式であらわせなくなるため、結果がやや不正確になると、 $a$  はロケットの寸法の二乗に、 $b$  は一乗にそれぞれ反比例して小さくなるので、大きいロケットでは動揺の周期が長くなり、かつ減衰が遅くなって、関数  $P$  および  $Q$  がなかなか収れんしなくなり、小型の場合と同じように取り扱うことに疑問が生ずるからである。しかし、第一近似としてはこれでも十分役立つであろう。

## 8. 風に対するランチャ角の修正法

### 8.1 飛しよう径路と風との関係

飛しよう径路は速度と径路角とで決定されるが、速度は風によってほとんど影響されないのに対し、径路角はとくに発射直後において風の影響を大幅に受けることが知られた。

誘導も制御も行なわれないロケットでは、風があるときに風のないときと全く同じコースをとらせることは不可能であるが、あらかじめ風によって曲げられる分を見越して、発射の際に角度を修正することによってほぼ目標に近いところへ到達させることができるはずである。そこで必要になるのは風の影響の及ぶ範囲を知ることである。いいかえれば、 $dr/dt$  および  $d\sigma/dt$  が風の影響を受けなくなったところで、 $r$  と  $\sigma$  とがあらかじめ予定された値になるように発射角を設定すればよいのである。

まず、さかのぼって (2) 式についてみるに、 $F_y$  および  $F_x$  は機軸の方向が気流の方向と一致しないために生ずる空気力の成分であるが、発射直後以外はほとんど 0 と考えられるので、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{T-D}{mV} \left\{ \sin \gamma \cos \theta \cos (\sigma - \phi) - \cos \gamma \sin \theta \right\} - \frac{g \cos \gamma}{V} \quad (137)$$

と書ける。さらに右辺の第 1 項は機軸の方向と速度ベクトルとの方向が一致しないための項であるから、 $\omega$  の定義から

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{T-D}{mV} \sin \omega - \frac{g \cos \gamma}{V} \\ &= \frac{T-D}{mV} \frac{W_x \sin \gamma}{V} - \frac{g \cos \gamma}{V} \end{aligned} \quad (138)$$

となる。もしまだ推力が十分働いていて、(9) および (12) 式が成立している場合には、(138) 式は

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{g \cos \gamma}{V} \left( 1 - \frac{n + \sin \gamma}{n} \frac{W_x}{gt} \tan \gamma \right) \quad (139)$$

と近似できる。

一方、風がない場合には

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{g \cos \gamma}{V}$$

であるから、 $W_x/(gt)$  が 1 に比べて十分小さければ、風の影響は無視してよいことになる。

さらに

$$T \gg D$$

であることを考慮すると、燃焼終了後では (138) 式の第 1 項は第 2 項に比してずっと小さくなり、問題にな

らなくなるといえる。

同様に (3) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{(T-D) \cos \theta}{mV \cos \gamma} \sin \epsilon \\ &= -\frac{T-D}{mV} \frac{W_y}{V \cos \gamma} \end{aligned} \quad (140)$$

となる。

これは (138) 式の第 1 項と同程度の大きさであるから、あれが無視できるときはこれも無視でき、風がないときは

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

であることからみて、同じく風の影響はなくなるものとみなせる。

### 8.2 ランチャ角計算法における問題点

風の分布が与えられたとき、定められたランチャ角からの径路を計算することは電子計算機ではきわめてやさしい問題である。しかし反対に、定められた目標に対してこれに合致するランチャ角を求めることは必ずしも容易ではない。

一つの風の条件に対してランチャ角をいくとおりか選んで飛しよう径路の計算を行ない、その結果に内挿法を適用して、燃焼終了時の径路角が無風時に予想された径路角と等しくなるようにランチャ角を決定することも考えられる。この場合変数が上下角と方位角との 2 種類あるから、おのおの 2 点ずつとったとしても、最小限 4 組の計算が必要になり、精度を上げるにはもう 2 組ぐらいの計算が要求される。これは現地で風のデータがわかってから実施するとしてもかなり時間がかかる。まして事前にすべての風の条件を想定して準備しておこうと思うと計算量が膨大になり、容易な仕事でなくなる。そこでいろいろな計算法が考えられているが、最も簡単なものとして、空気層を高度によっていくつかの層に分け、各層での平均風速成分に、あらかじめ計算機で求めておいた各層ごとの風速 1 m/s 当りの径路角の変化量\* をかけて加え合せたものを修正値とする方法がある。しかし正しくは上下角も方位角もその変化はともに単に風速成分  $W_x$  または  $W_y$  に関係するだけでなく、上下角にも関係がある。すなわち 15 ページの表 2 および表 3 にみられるように、ランチャの上下角が  $70^\circ$  と  $80^\circ$  とでは同じ 5 m/s の向い風でも  $d\gamma$  の値に大きな開きが生ずる。いま  $70^\circ$

\* 通常この値は電子計算機を使って計算されるが、(102)~(105)式を利用すれば容易に求めることができる。

で発射した場合、 $t=10$  秒における径路の上下角は 5 m/s の向い風のため無風時より  $5.3^\circ$  低くなる。だからといってランチャ角を  $5.3^\circ$  上げて  $75.3^\circ$  にするのは明らかに間違いであって、正しい値は  $74.2^\circ$  である。さらに方位角の場合には、(74) 式を始め  $\Delta\sigma$  の式にはすべて分母に  $\cos \bar{\gamma}$  が含まれているので、上下角の誤差が拡大された形であられる。また、方位角の変化により風速成分も当然変化することを考えるとこのようなやり方は風速の大きい場合には不適当と思われる。

この二つの方法の間をとったともいふべきものに James and Harris<sup>4)</sup> の方法がある。これはランチャの上下角、風速および風向の値をそれぞれ数個ずつ選んで、それらの最小限必要な組合せに対して計算機による飛しょう径路の計算を行ない、そのデータから風の影響のなくなった時点での径路角をとり出してグラフにし、これから図式解法で各風向風速に対する修正ランチャ角を求めるものである。計算機による計算回数は節約される代わりに、あとの作業はかなりわずらわしい。

これらの修正法に共通していえることは、すべて電子計算機による径路計算の結果を基礎にしていることである。したがって各機種ごとにデータの準備が必要でとっさの場合新しい機種に対して応用できない難がある。

そこでもっと簡単に、できればロケットの特性から直接解くことができ、しかも比較的精度の高い信頼性のある解法が望まれる。幸い、この径路角の解析解は精度が高いことがわかったので、これを新しいランチャ角の修正法に利用することを試みる。

### 8.3 解析解によるランチャ角の計算法

風がないときの予定ランチャ角を  $\gamma_P$  および  $\sigma_P$ 、風があるときのランチャ角を  $\gamma_0$  および  $\sigma_0$  とし、時刻  $t$  における両者の径路角を等しいとおくと

$$\begin{aligned} \gamma_P + \frac{\cos \gamma_P}{n-2 \sin \gamma_P} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t \right. \\ \left. + \frac{n+\sin \gamma_P}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \\ = \gamma_0 + \frac{\cos \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \left\{ \log_e t_0 - \log_e t \right. \\ \left. + \frac{n+\sin \gamma_0}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \\ + \frac{n+\sin \gamma_0}{n-2 \sin \gamma_0} \frac{W_{x0} \sin \gamma_0}{ngt_0} \left\{ 1 \right. \\ \left. - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{(n+\sin \gamma_0)^2}{n(n-2 \sin \gamma_0)} \frac{\bar{W}_y W_{y0} \sin \gamma_0}{(ngt_0)^2 \cos \bar{\gamma}} \\ \times \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}^2 \right. \\ \left. - \tau_0^2 E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right] + \Delta \gamma_h \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \sigma_P = \sigma_0 - \frac{n+\sin \gamma_0}{n} \frac{W_{y0}}{ngt_0 \cos \bar{\gamma}} \left\{ 1 \right. \\ \left. - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \\ - \frac{(n+\sin \gamma_0)^2}{n^2} \frac{\bar{W}_x W_{y0}}{(ngt_0)^2 \cos^2 \bar{\gamma}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 \right. \right. \\ \left. \left. - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}^2 - \tau_0^2 E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right] + \Delta \sigma_h \end{aligned} \quad (142)$$

を得る。これらの式において、 $n$  に比べて  $\sin \gamma_P$  と  $\sin \gamma_0$  との差は無視できることから、 $n+\sin \gamma_0$  および  $n-2 \sin \gamma_0$  の項の  $\sin \gamma_0$  の代りに  $\sin \gamma_P$  で置きかえ、さらに

$$\begin{aligned} \cos \gamma_P - \cos \gamma_0 &= \frac{d \cos \gamma}{dt} (\gamma_P - \gamma_0) \\ &= -(\gamma_P - \gamma_0) \sin \gamma_P \end{aligned}$$

という関係を利用すると

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma_P - \frac{\sin \gamma_0}{K_0} \left\{ W_{x0} K_1 - \frac{K_2 \bar{W}_y W_{y0}}{\cos \bar{\gamma}} \right\} \\ - \frac{n-2 \sin \gamma_P}{K_0} \Delta \gamma_h \end{aligned} \quad (143)$$

$$\sigma_0 = \sigma_P + \frac{W_{y0}}{n \cos \bar{\gamma}} \left\{ K_1 + \frac{K_2 \bar{W}_x}{\cos \bar{\gamma}} \right\} - \Delta \sigma_h \quad (144)$$

となる。ここに、 $K_0, K_1$  および  $K_2$  はロケットの特性および  $\gamma_P$  で決まる定数で

$$\begin{aligned} K_0 &= n - \sin \gamma_P \left\{ 2 + \log_e t_0 - \log_e t \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+\sin \gamma_P}{n} G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \\ K_1 &= \frac{n+\sin \gamma_P}{ngt_0} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\} \\ K_2 &= \frac{(n+\sin \gamma_P)^2}{n(ngt_0)^2} \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_0}{t} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. - \tau_0^2 E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right] \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= (\gamma_0 + (\gamma_0 + \gamma_t)/2)/2 \\ \bar{W}_x &= (W_{x0} + W_{xP})/2 \\ \bar{W}_y &= (W_{y0} + W_{yP})/2 \end{aligned}$$

である。なお、 $\gamma_t$  は時刻  $t$  における径路の上下角であるが、 $t$  はあらかじめ定められた燃焼終了直前のある特定の時刻で、このときには風がない場合の径路角



と等しいことから、無風時の式から容易に計算できる。また  $W_{x0}$  は地上風の  $\sigma_0$  方向の成分、 $W_{xP}$  は  $\sigma_P$  方向の成分をあらわす。

さて、(143) および (144) 式で  $K_0, K_1$  および  $K_2$  の係数と  $\gamma_i$  および  $W_{xP}, W_{yP}$  は既知であるが、 $\gamma_0$  および  $\sigma_0$  とこれに付随する  $W_{x0}$  および  $W_{y0}$  は未知であるから、このまま直接解くことは困難であるが、くり返し近似法を用いることにより容易に解が得られる。すなわち、第一次近似値として

$$\gamma_0 = \gamma_P - \frac{K_1}{K_0} W_{xP} \sin \gamma_P \quad (145)$$

$$\sigma_0 = \sigma_P + \frac{K_1}{n \cos \gamma_0} W_{yP} \quad (146)$$

をとり、これを (143) および (144) 式に代入して得られた結果を第二次近似値とし、第二次近似値を再び (143) および (144) 式に代入して得られた結果を第三次近似値とする。以下これを何回かくり返せばよい。

なお、 $K_0, K_1$  および  $K_2$  の値は  $n$  および  $t_0$  などと同じくあらかじめ求めておくことができるので、現地で風のデータが与えられてから筆算で計算しても十分間に合うが、現地での仕事としては上層風の変化に対する補正だけを残し、地上風に対する計算は電子計算機で、風速を 0.5 m/s おき、風向を 5° おき程度にと

って計算して表にしておくのが賢明である。このための FORTRAN IV によるプログラムを付録に示す。ただし、このプログラムでは (141) および (142) 式の右辺の代わりにそれぞれ (128) および (136) 式が用いられている。計算はきわめて簡単であるから、HITAC 5020 による演算時間は風速を 10 m/s、風向を 360° までとったとしても 1 ケースで約 100 秒に過ぎない。計算結果の一例として、NAL-16-TR について  $\gamma_P=70^\circ, \sigma_P=90^\circ$  としたときの結果を図 8 のようになる。この結果および同じく NAL-16-TR について  $\gamma_P=80^\circ, \sigma_P=90^\circ$  としたときの結果の中から任意に選んだ数点について、修正ランチャ角で発射されたときの径路角を Runge-Kutta 法で忠実に計算してみた結果は表 6 のようになる。すなわちこれはいずれも無風時の予定の径路角にほぼ近い値を示すことから、補正法としてはきわめて満足すべきものといえる。

実際にはこれに上空での風速変化に対する補正を加える必要がある。

いま、 $h_i$  をあらかじめ、たとえば 100 m おきというように決めておくと、

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{ng \sin \gamma_P}} \quad (145)$$

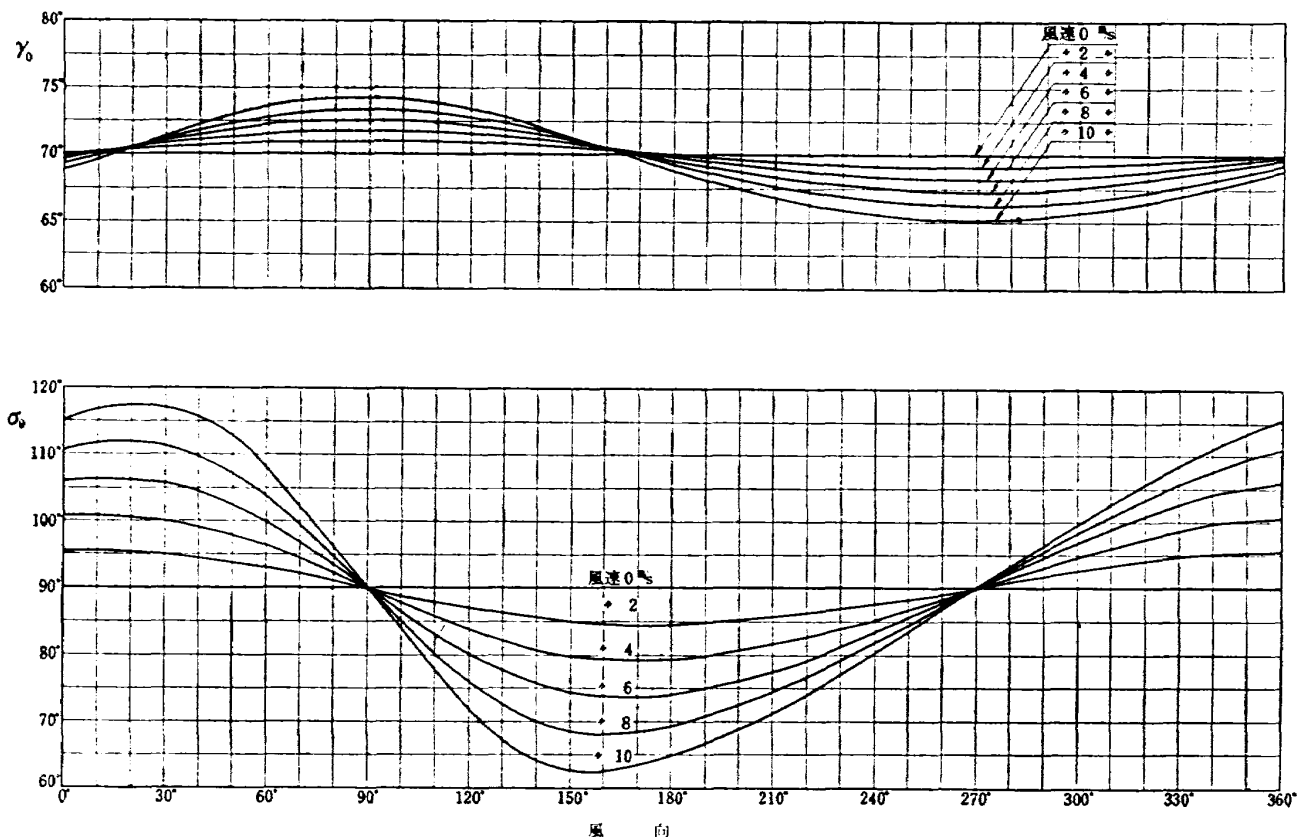


図 8 NAL-16-TR の  $\gamma_P=70^\circ, \sigma_P=90^\circ$  のときの風に対する修正ランチャ角

表 6 ランチャ角修正の適否判定のための径路角の比較

無風時のランチャ角		$\gamma_P=70^\circ, \sigma_P=90^\circ$			$\gamma_P=80^\circ, \sigma_P=90^\circ$		
t=10 秒の径路角		$\gamma_t=63.1^\circ, \sigma_t=90^\circ$			$\gamma_t=76.4^\circ, \sigma_t=90^\circ$		
風 向		50°	160°	240°	0°	160°	220°
風 速		8 m/s	8 m/s	8 m/s	8 m/s	8 m/s	8 m/s
修正ランチャ角	$\gamma_0$	74.7°	71.0°	63.4°	77.4°	79.7°	74.0°
"	$\sigma_0$	107.4°	68.2°	81.8°	123.6°	50.1°	70.4°
径路角計算値	$\gamma_t$	63.4°	63.1°	62.0°	75.7°	76.0°	75.5°
"	$\sigma_t$	89.8°	89.2°	89.4°	89.4°	90.3°	90.2°
	$\Delta\gamma_t$	0.3°	0	- 1.1°	- 0.7°	- 0.4°	- 0.9°
	$\Delta\sigma_t$	- 0.2°	- 0.8°	- 0.6°	- 0.6°	0.3°	0.2°

表 7 上空での風速変化に対するランチャ角の補正計算例  
(機種名) NAL-16-TR

40-11-17 (新島)

$\gamma_P=70^\circ, \sigma_P=90^\circ, \gamma_0'=74.5^\circ, \sigma_P'=103.3^\circ$										
h(m)	$\delta$	$V_w$	$W_x$	$\Delta W_x$	C	$C\Delta W_x$	$W_y$	$\Delta W_y$	D	$D\Delta W_y$
0	55	7	- 5.7	-	-	-	4.0	-	-	-
100	45	8	- 5.7	0	- 0.318	0	5.7	1.7	0.345	0.587
200	44	10	- 6.9	- 1.1	- 0.213	- 0.234	7.2	1.5	0.231	0.347
300	48	11	- 8.2	- 1.3	- 0.166	- 0.216	7.4	0.2	0.180	0.036
400	58	10	- 8.4	- 0.2	- 0.137	- 0.027	5.3	- 2.1	0.149	- 0.313
500	92	5	- 5.0	2.6	- 0.117	- 0.305	- 0.3	- 5.6	0.127	- 0.711
600	152	4	- 1.9	3.1	- 0.102	- 0.316	- 3.5	- 3.2	0.111	- 0.355
700	132	4	0	1.9	- 0.091	- 0.172	- 4.0	- 0.5	0.098	- 0.049
800	180	4	0	0	- 0.081	0	- 4.0	0	0.088	0
900	177	4	0	0	- 0.073	0	- 4.0	0	0.080	0
1000	201	3	1.0	- 1.0	- 0.066	+ 0.066	- 2.8	1.2	0.072	0.086
1100	223	3	2.0	1.0	- 0.061	- 0.061	- 2.2	0.6	0.066	0.040
1200	240	4	3.4	1.4	- 0.056	- 0.078	- 2.0	0.2	0.061	0.012
1300	270	4	4.0	0.6	- 0.052	- 0.031	0	2.0	0.056	0.112
1400				-	-	-		-	-	-

$\Sigma = -0.420$

$\Sigma = -0.208$

$\gamma_0 = \gamma_0' + \sin \gamma_0' \Sigma = 74.5^\circ - 0.4^\circ = 74.1^\circ$

$\sigma_0 = \sigma_0' + \Sigma / \cos \gamma_0' = 103.3^\circ - 0.8^\circ = 102.5^\circ$

であるから、これから

$$K_{4i} = \frac{n + \sin \gamma_P}{ngt_i} \left\{ 1 - F\left(\tau_i, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{t_i}{t} \right\} \quad (146)$$

もあらかじめ計算できる。

一方、現地での風のデータに低いところから順次番号をつけ (地上から高度  $h_1$  までのものを  $i=1$  とする), (94) および (95) 式によって  $\sigma_P$  方向およびこれと直角な方向の成分を計算し、つぎつぎに階差をとることにより  $\Delta W_{xi}$  および  $\Delta W_{yi}$  が得られる。

ところで、地上風に対する修正ランチャ角を  $\gamma_0'$  お

よび  $\sigma_0'$  とし, (143) および (144) 式に (97) および (98) 式を代入すると

$$\gamma_0 = \gamma_0' - \frac{\sin \gamma_0'}{K_0} \sum_{i=1} (K_{4i} \Delta W_{xi})$$

および

$$\sigma_0 = \sigma_0' + \frac{1}{n \cos \bar{\gamma}} \sum_{i=1} (K_{4i} \Delta W_{yi})$$

を得る。あるいは

$$C_i = -\frac{K_{4i}}{K_0} \quad (147)$$

$$D_i = \frac{K_{4i}}{n} \quad (148)$$

とおくと

$$\gamma_0 = \gamma_0' + \sin \gamma_0' \sum_{i=1} C_i \Delta W_{xi} \quad (149)$$

および

$$\sigma_0 = \sigma_0' + \frac{1}{\cos \gamma_0'} \sum_{i=1} D_i \Delta W_{yi} \quad (150)$$

となる。表7はNAL-16-TRに対する計算例である。

なお、これらの計算式では、角度の単位はすべてラジアンで定義されている。

### 9. むすび

ロケットの運動の方程式を解析的に解くことによって、風があるときの径路角を簡単にしかも精度よく計算する方法が得られた。

解析に際して設けられた仮定はつぎのとおりである。

- (a) 発射直後のロケットの運動は等加速度である。
- (b) その加速度は重力の加速度の数倍以上大きい。
- (c) 発射の上下角はほぼ鉛直に近い。

解析の最終の目的は風があるときのランチャの修正角を簡単に計算する方法を見出すにある。ところでロケットは推力がなくなるか、なくならないまでも発射後時間が経過して速度が十分大きくなれば風の影響はほとんどなくなる。ここで必要なのはこのような時点での径路角であるから、それまでの時々刻々の変化は問題にしないこととした。

まず、ランチャ角を  $\gamma_0$  および  $\sigma_0$  とし、地上風の  $\sigma_0$  方向およびこれに直角な方向の成分を  $W_{x0}$  および  $W_{y0}$  とすると、地上風だけを考慮した径路角の第1次の値は (80) および (81) 式のように与えられる。これに横風により飛しよう方向が変ることに対する補正として (92) および (93) 式による  $\Delta \gamma_s$  および  $\Delta \sigma_s$  を、また上空での風速の変化に対する補正として (97) および (98) 式による  $\Delta \gamma_h$  および  $\Delta \sigma_h$  を加えたものが求める径路角となる。

この結果を電子計算機による精密な計算結果と比較したところ、ほとんどあらゆる場合にわたってよく一致している。ただ、平均の上下角が  $80^\circ$  を越え、しかも風速が  $10 \text{ m/s}$  に近いような特別な場合にはやや誤差が大きくなるが、実用上このような場合はきわめてまれである。

これを風があるときのランチャ角の修正法に利用す

ることにより簡単で精度のよい計算法が得られる。この計算に用いられる定数はすべて、ロケットの特性から簡単な式または図表(付図1~3)から求められ、通常行なわれるように、電子計算機であらかじめ飛しよう径路をいくとおりか計算しておくような必要はない。しかも計算は簡単で、場合によっては現地で風のデータが与えられてから手で計算することも可能である。しかし一番都合がよいのは付録のプログラムによってあらゆる風向風速の地上風に即応できるように図表または数表を用意しておき、現地ではこれに表7による上層風の変化に対する補正だけを加えればよいようにしておくことである。

なお、これらの計算に関係する定数はつぎのとおりである。

$$n = \frac{T}{W} - \sin \gamma_0$$

$$a = \frac{\rho}{2I_y} C_{Na} n^2 g^2 S d$$

$$b = -\frac{\rho}{4I_y} C_{mq} n g S l^2$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2I_a}{ng}}$$

$$\tau_0 = \sqrt[4]{a} t_0$$

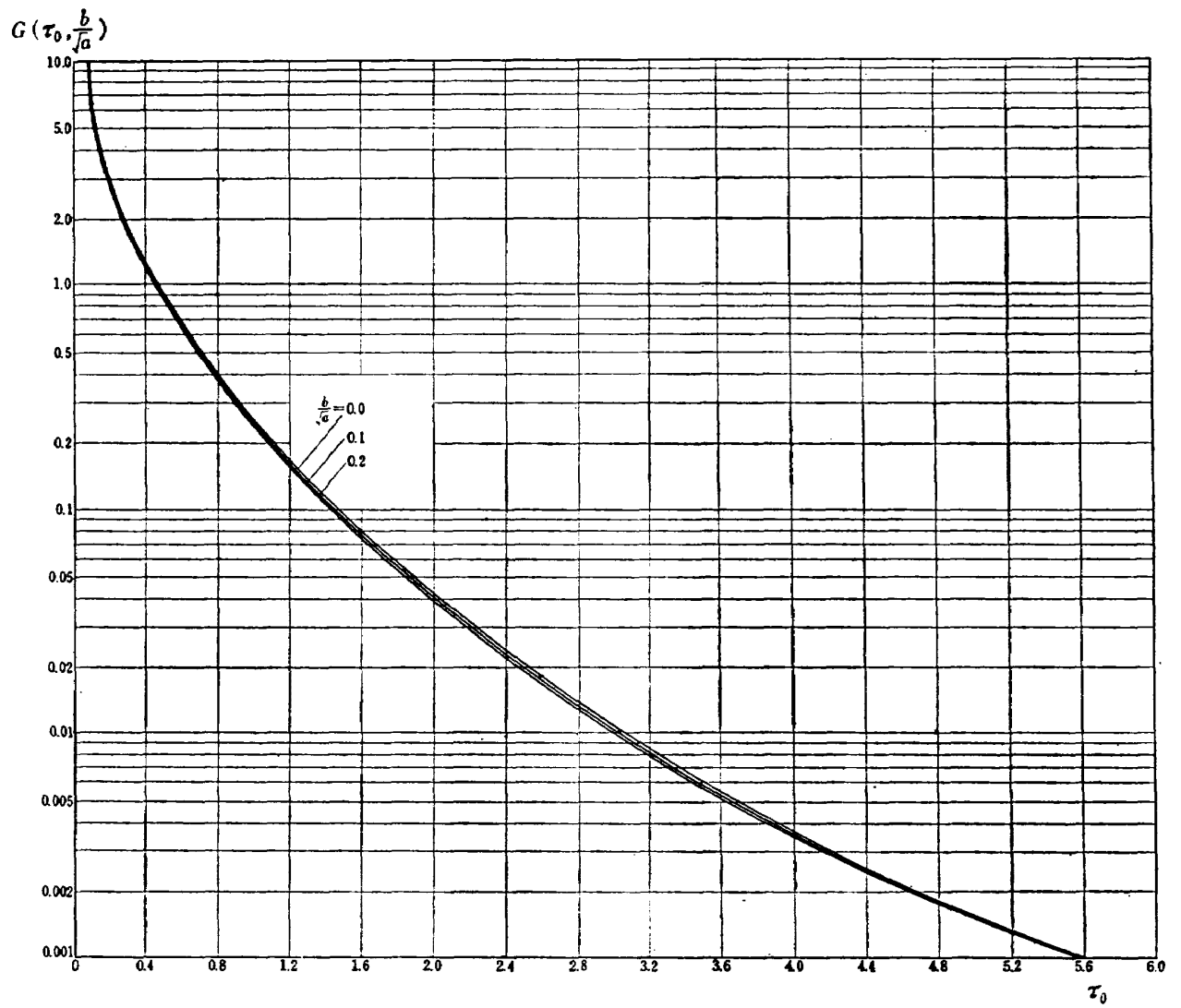
$$G\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \cdots \text{付図 1}$$

$$F\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \cdots \text{付図 2}$$

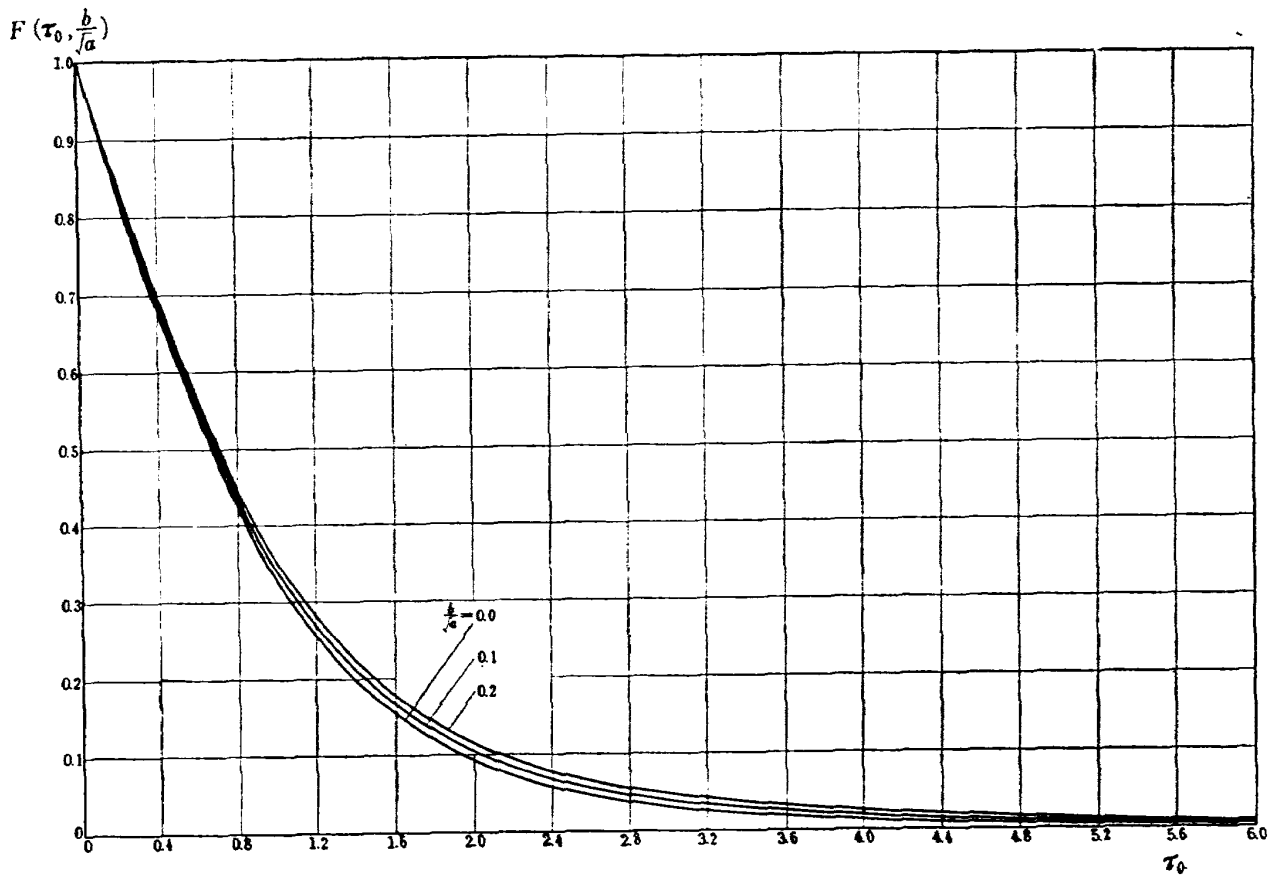
$$E\left(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \cdots \text{付図 3}$$

### 文 献

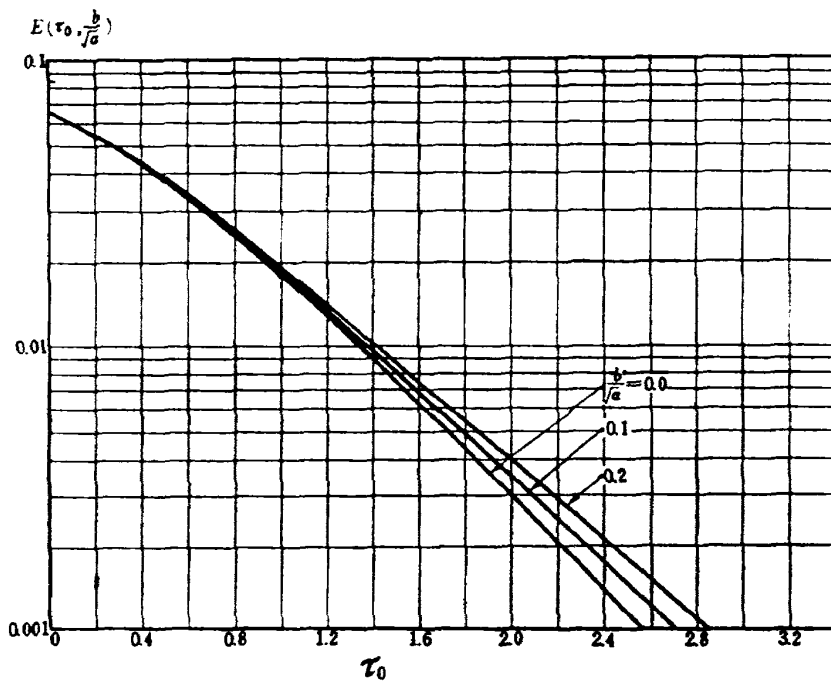
- 1) Robert L. James, Jr.; A Three Dimensional Trajectory Simulation Using Six Degrees of Freedom with Arbitrary Wind, NASA TN D-641, (1961).
- 2) 戸川隼人, 石黒登美子; 地上付近の風の影響による小型ロケットの姿勢変化, 航空宇宙技術研究所資料 TM-72, (1965).
- 3) Leverett Davis, Jr., James W. Follin, Jr. and Leon Blitzer; Exterior Ballistics of Rockets, D. Van Nostrand Company, (1958).
- 4) Robert L. James, Jr. and Ronald J. Harris; Calculation of Wind Compensation for Launching of Unguided Rockets, NASA TN D-645, (1961).
- 5) Allen B. Henning, Reginald R. Lundstrom, and Jean C. Keating; A Wind-Compensation Method and Results of Its Application to Flight Tests of Twelve Trailblazer Rocket Vehicles, NASA TN D-2053, (1964).



付図 1  $G(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}) \sim \tau_0$  曲線



付図 2  $F(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}) \sim \tau_0$  曲線



付図 3  $E(\tau_0, \frac{b}{\sqrt{a}}) \sim \tau_0$  曲線

## 付録 FORTRAN IV によるランチャ角の修正計算のためのプログラム

```

C      WIND COMPENSATION FOR LAUNCHING OF UNGUIDED ROCKETS
      DOUBLE LENGTH INTEGER NAME
      REAL N, K 0, K 1, K 2, K 3, K 4
      RAD=57. 2957795
100  READ(5, 1) NAME, T, T0, TAUO, G, F, E, GAMMAD, SIGMAD
      IF (N. EQ. 0.0) GO TO 500
      GAMMAP=GAMMAD/RAD
      SIGMAP=SIGMAD/RAD
      SNGP=SIN (GAMMAP)
      CSGP=COS (GAMMAP)
      TAU 2 E=E * TAUO * * 2
      A=ALOG(T0)-ALOG(T)+(N+SNGP) * G/N
      V=9.8 * N * T
      VO=9.8 * N * T0
      K 0=N-SNGP * (2.0+A)
      K 1=(N+SNGP)
      K 2=K1 * F/VO
      K 3=K1 * (G-F)/VO * * 2
      K 4=K1 * * 2 * (0.5 * (1.0-F-T0/T) * * 2-TAU 2 E)/(N * VO * * 2)
      GAMMAT=GAMMAP+CSGP * A/(N-2.0 * SNGP)
      VW=0.0
      DO 400 I=1, 20
      WRITE(6, 2) NAME, GAMMAD, SIGMAD, N, T0, TAUO, G, F, E
      WRITE(6, 3) K0, K1, K2, K3, K4
      VW=VW+0.5
      WRITE(6, 4) VW
      FUK=0.0
      DO 300 J=1, 73
      FUKO=FUK/RAD
      WXP=-VW * COS(FUKO-SIGMAP)
      WYP=-VW * SIN(FUKO-SIGMAP)
      SNGO=SNGP
      CSGO=CSGP
      WXO=WXP
      WYO=WYP
      DO 200 K=1, 8
      CSGB=COS(0.5 * (GAMMAO+0.5 * (GAMMAO+GAMMAT)))
      WXB=0.5 * (WXP+WXO)
      WYB=0.5 * (WYP+WYO)
      GAMMAO=GAMMAP-WXO * SNGO * (K1 * ALOG((1.0-WXO * CSGB/V)/(1.0-WXO *
1 CSGB/VO)))/(WXO * CSGB) - K 2+K 3 * WXO * CSGO / K0 + K 4 * WXB * WYO * SNGO /
2 (CSGB * K0)
      SIGMAO=SIGMAP + WYO * (K1 * ALOG((1.0 - WXO * CSGB/V)/(1.0 - WXO * CSGB /
1 VO)))/(WXO * CSGB * * 2) - K 2/CSGB+K 3 * WXO * CSGO/CSGB+ K 4 * WXB/(CSGB * *
2 * 2))/N
      SNGO=SIN(GAMMAO)
      CSGO=COS(GAMMAO)
      WXO=-VW * COS(FUKO-SIGMAO)
200  WYO=-VW * SIN(FUKO-SIGMAO)
      GAMMA=RAD * GAMMAO
      SIGMA=RAD * SIGMAO
      IF (MOD(J, 2). EQ. 1) WRITE(6, 5) FUK, GAMMA, SIGMA
      IF (MOD(J, 2). EQ. 0) WRITE(6, 6) FUK, GAMMA, SIGMA

```

```
FUK=FUK+5.0
300 CONTINUE
400 CONTINUE
GO TO 100
500 I=I
J=J
K=K
STOP
1 FORMAT(A 10.0, 7 F 10.0/2 F 10.0)
2 FORMAT(1 H 1, 30 X, A 10, 5 X, 7 HGAMMAP=, F 5.2, 2 X, 7 HSIGMAP=, F 5.2//20 X,
1 2 HN=, F 5.2, 2 X, 3 HT0=, F 5.3, 2 X, 5 HTAUO=, F 5.3, 2 X, 2 HG=, F 5.3, 2 X,
2 2 HF=, F 5.3, 2 X, 2 HE=, F 6.4)
3 FORMAT(1 H , 19 X, 3 HK0=, F 8.5, 2 X, 3 HK 1=, F 8.6, 2 X, 3 HK 2=, F 10.8, 2 X
1 3 HK 3=, F 10.8, 2 X, 3 HK 4=, F 10.8/)
4 FORMAT(1 H 0 /10 X, 9HWIND VEL=, F 5.2//22 X, 8 HWIND DIR, 7 X, 5 HGAMMA,
1 7 X, 5 HSIGMA, 12 X, 8 HWIND DIR, 7 X, 5 HGAMMA, 7 X, 5 HSIGMA)
5 FORMAT(1 H , 19 X, F 10.4, 3 X, F 10.4, 2 X, F 10.4)
6 FORMAT(1 H +, 63 X, F 10.4, 3 X, F 10.4, 2 X, F 10.4)
END
```

補遺  $\Delta\gamma_s$  および  $\Delta\sigma_s$  について

20ページの $\tilde{\gamma}$ の推定の項においても説明したように、この計算法の唯一の弱点は $\tilde{\gamma}$ の与え方にはっきりした根拠が欠けていることである。これは $\gamma$ の変化の範囲が狭いことから、たいていの場合には表面化しないですんでいるが、 $\gamma_0$ が $90^\circ$ に近くなるとどうしてもその欠点が暴露される。これを細かく調べてみると、 $\Delta\sigma_s$ は $\cos\tilde{\gamma}$ の逆数の二乗に比例することから、この項の誤差が急激に増大して、全体としても正解から大きくそれる結果になることがわかる。したがって $\Delta\sigma_s$ の項の $\tilde{\gamma}$ の値を他の項の $\tilde{\gamma}$ の値とは、別に与えるべきであろう。しかし、これも前に述べたように、ランチャの上下角が例外的に大きい場合のほかは問題にならないので、取り扱いを簡単にする意味で、本文では $\tilde{\gamma}$ を共通にして取り扱った。

ここで参考のために、 $\Delta\sigma_s$ は実際にどのような値をとるか調べた結果をあげておく。そもそも $\Delta\sigma_s$ は、 $\Delta\gamma_s$ もそうであるが、風向風速を一定としたときに、ロケットの飛しょう方向が変わるために生ずる補正項であるが、運動の方程式をRunge-Kutta法で解くとひとりでに解に含まれ、むしろこの補正項を含まない解を求める方が特殊になる。すなわちそれには風向を一定とせず、常に風はロケットの飛しょう方向と一定の角度を保って吹くものとしなければならない。表5の計算例のうちのいくつかについて、このような仮定を与えて再計算し、前の結果との差から $\Delta\gamma_s$ および $\Delta\sigma_s$ を求めたものが表8である。これからとくに $\Delta\sigma_s$ のための $\tilde{\gamma}$ を逆算してみたが、表5の $\tilde{\gamma}$ の値とはかなりくい違い、むしろ $\gamma_0$ と $\gamma_1$ とのちょうど中間の値に近いことが知られる。

表 8  $\Delta\gamma_s$  および  $\Delta\sigma_s$  の計算値

ランチャ角 $\gamma_0^\circ$	87.0	85.0	80.0	75.0	80.0	80.0	75.0	75.0
" $\sigma_0^\circ$	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
風    向 $\delta^\circ$	70.0	70.0	50.0	50.0	250.0	220.0	240.0	220.0
風    速 m/s	8.0	8.0	8.0	8.0	6.0	6.0	8.0	8.0
電子計算機による $\gamma^\circ$	76.6	74.0	68.5	62.3	82.7	79.4	76.8	73.9
同上 $\Delta\gamma_s$ を含まない $\gamma^\circ$	76.9	74.2	69.1	62.8	83.0	86.7	77.6	75.4
$\Delta\gamma_s^\circ$	- 0.3	- 0.2	- 0.6	- 0.5	- 0.3	- 1.3	- 0.8	- 1.5
電子計算機による $\sigma^\circ$	75.9	78.2	73.4	77.2	109.7	121.6	111.6	117.4
同上 $\Delta\sigma_s$ を含まない $\sigma^\circ$	69.5	74.2	70.1	75.4	104.9	118.8	107.9	115.1
$\Delta\sigma_s^\circ$	6.4	4.0	3.3	1.8	4.8	2.8	3.7	2.3
表 5 における $\tilde{\gamma}^\circ$	84.4	82.3	77.2	71.9	80.8	80.1	75.8	75.0
$\Delta\sigma_s$ から逆算した $\tilde{\gamma}^\circ$	80.9	78.4	73.6	66.3	82.3	80.0	77.2	75.2



TR-124	FM 多重テレメータの動特性 Dynamic Characteristics of FM Multi-channel Telemetry System	1966年12月	新田慶治, 桜井善雄 松崎良継
TR-125T	Experimental and Calculated Results of Supersonic Flutter Characteristics of a Low Aspect-Ratio Flat-Plate Surfaces	Jan. 1967	Eiichi NAKAI, Toshiro TAKAGI, Koji ISOGAI, Toshiyuki MORITA
TR-126	高負荷燃焼器の箱形模型による実験 (II) Some Experiments on High Intensity Combuster with Partial Models (II)	1967年2月	大塚貞吉, 福田 広 相波哲朗
TR-127	周波数変換による微小回転角の計測 Measurement of Small Rotating Angle by the Frequency Modulation Technique	1967年3月	大月正男, 鈴木孝雄 円居繁治
TR-128	輻射加熱による固体の熱的物性値の測定法 Infra-red Radiation Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity of Solid Materials	1967年3月	小川 鉦一
TR-129	金属箔による円管流の熱絶縁 Thermal Insulation of Metal Foil for the Case of Circular Pipe Flow	1967年3月	井上建二
TR-130T	An Experimental Study of the Melting Phenomena in Axisymmetric Stagnation Region of Thermally Highly-Conducting Materials	Mar. 1967	Yasuhiko AIHARA
TR-57	超音速二次元翼の非定常ピッキングモーメント係数の測定 Measurements of the Aerodynamic Derivatives of an Oscillating Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	1967年3月	柳沢三憲, 石井孝雄

---

## 航空宇宙技術研究所報告131号

昭和42年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2~27~12

---