

UDC 534.12

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-138

変厚片持板の静撓みについて

塙 武 敏・越 出 慎 一

1967年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-116	50 cm 極超音速風胴の計画と構造 Design and Construction of the 50 cm Hypersonic Wind Tunnel at National Aerospace Laboratory	1966年9月 極超音速風胴建設グループ
TR-117	弾性振動方程式の差分解に関するエネルギー不等式 Energy Inequalities for the Difference Solutions of Equations of Elastic Vibration	1966年10月 三好 甫
TR-118	高負荷燃焼器の箱形模型による実験 Some Experiments on High Intensity Combustor with Partial Models	1966年10月 大塚貞吉, 福田 広相波哲朗
TR-119	多次元1階準線型双曲型方程式の解の存在について On the Existence of Discontinuous Solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equations	1966年10月 小島清史
TR-120	航技研フライイングテストベッドの姿勢制御方程式の検討 Analytical and Simulation Studies on the Attitude Control System of the Flying Test Bed	1966年11月 武田 峻, 堀川勇壮 小川敏雄, 森幹彦
TR-121	パルスレシオ変調回路およびその修正回路について Some Circuits for Pulse Ratio Modulation and their Modified Circuits	1966年11月 村上 力
TR-122	失速が起こるような高い迎角で、調和振動する二次元翼に働く空気力に対する半実験的理論 Semi-Empirical Theory to Estimate the Airforces Acting on the Harmonically Oscillating Two-Dimensional Wing at High Angle of Attack Where Separation Can Occur	1966年12月 磯貝絢二
TR-123	姿勢制御用空気ジェットノズルの研究 Design and Experimental Study of Air Jet Nozzles for the Attitude Control of VTOL Aircraft	1966年12月 滝沢直人, 西村博史 藤枝郭俊, 田辺義一 渋谷昭義
TR-124	FM 多重テレメータの動特性 Dynamic Characteristics of FM Multi-channel Telemetering System	1966年12月 新田慶治, 桜井善雄 松崎良継
TR-125T	Experimental and Calculated Results of Supersonic Flutter Characteristics of a Low Aspect-Ratio Flat-Plate Surfaces	Jan. 1967 Eiichi NAKAI, Toshiro TAKAGI, Koji ISOGAI, Toshiyuki MORITA
TR-126	高負荷燃焼器の箱形模型による実験(Ⅱ) Some Experiments on High Intensity Combustor with Partial Models (Ⅱ)	1967年2月 大塚貞吉, 福田 広相波哲朗
TR-127	周波数変換による微小回転角の計測 Measurement of Small Rotating Angle by the Frequency Modulation Technique	1967年3月 大月正男, 鈴木孝雄 円居繁治
TR-128	輐射加熱による固体の熱的物性値の測定法 Infra-red Radiation Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity of Solid Materials	1967年3月 小川鉱一
TR-129	金属箔による円管流の熱絶縁 Thermal Insulation of Metal Foil for the Case of Circular Pipe Flow	1967年3月 井上建二

変厚片持板の静撓みについて*

塙 武敏**・越出慎一**

Deflection Analysis of Variable Thickness Cantilever Plate

By Taketoshi HANAWA and Shinichi KOSHIDE

Summary

In this report, the use of the well-known Rayleigh-Ritz procedure is proposed for the analysis of the deflection of variable-thickness cantilever plate. The analysis is carried out on the assumption that the deflection of a plate is expressed by a general power series of x and y , which satisfies the geometrical boundary conditions; and the conception of "natural boundary condition" is advantageously utilized. In this analysis, the plate thickness is also given by a power series of x and y .

As a numerical example, the problem of a plate with linearly tapered thickness, subjected to a single concentrated load, was dealt with. The actual calculation was carried out with a test function which takes the form of a series with 10 terms.

Experimental verification of the calculated results then followed, and revealed that:

- (1) For the deflection of the plate with linearly tapered thickness, a satisfactory result is obtained by taking 10 terms for the test function.
- (2) For the surface strain, the result is not sufficiently satisfactory, but it clearly shows the general tendency of the strain distribution.
- (3) For cantilever plates, such as that investigated in this report, the variation of the plate thickness has generally a large influence on the deflection and the surface strain.

1. 緒 言

先に翼構造の強度問題に対する数値計算的な解析法開発のために、具体的な解析例として翼構造を弾性平板とみなし、その振動問題をとりあげ、数値計算と実験を対比した結果を示した^{1)~6)}。この解析方法はまた静的問題に対する適用も容易で、本報告では静的問題の解析法および実際の数値計算について示したい。

ここで用いている解法は板が撓みを受けた場合のエネルギー最小の原理およびそれを変分の直接解法によって解くという古典的なものである。実際の解析例としては平行四辺形、三角形などを含む任意形状の台形変厚片持板の静撓みおよびその際に生ずる表面歪をとりあつかった。さらに具体的な数値計算としては直線的な板厚変化をする上述形状の片持板が集中荷重を受けた場合を考え、荷重点の位置にしたがって変化する

撓みならびに表面歪分布を求め、実験結果と対比し、また片持板の静撓みおよび表面歪に与える直線的な板厚変化の影響についても検討を加えた。

特殊な形状あるいは板厚変化を有する片持板については古くから多数の文献^{7)~10)} がみられるが、試験関数をごく一般的な x, y の幕級数でおいたエネルギー法によるこの種の板の静撓み解析に関する資料は少ない。ただ電子計算機の大型化につれて各種の便利な解析法が開発されている現在、この種の問題の計算は急速に進められ、より複雑な構造物の数値解析も行なわれるものと思う。ここで行なった解析法によって得られた資料も、より複雑な構造物に対する解析の基礎的な資料になると思われる所以まとめたものである。

2. 記号

当解析に用いる記号を次に示す。

x, y, z : 直角座標軸

ξ, η : 無次元直角座標 ($\xi=x/a, \mu=y/b$)

a : 板の固定部分の長さ

* 昭和42年4月4日受付

** 機体第二部

- b : 板の y 方向の幅
 p : 単位分布荷重
 P_0 : 集中荷重
 w : z 軸方向の撓み
 ν : ポアソン比
 h : 任意点の板厚
 h_r : 最高板厚
 D : 板の任意点の曲げ剛性
 D_r : 最高板厚部分の曲げ剛性
 a_{jl} : 板厚に関する級数の常数
 G_{jl}, E_{jl} : 同上無次元の常数およびその三乗常数
 b_{mn} : 撓みの試験関数の任意常数
 c_{mn} : 同上無次元任意常数
 Π : ポテンシャルエネルギー
 ϵ_x, ϵ_y : x, y 方向表面歪成分
 γ_{xy} : 表面の剪断歪成分

3. 変厚片持板の静撓み解析

さきに行なった変厚平板翼の振動解析^{2), 3)} と同様に薄板の微小曲げであると仮定する。また等方性の片持板とし、その解析座標系として図1のようになる。このような片持板が単位面積当たり $p(x, y)$ なる分布荷重により z 方向に $w(x, y)$ なる撓みを生じた場合、当系の有するエネルギーは次式で示される。

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_G D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \iint_M p(x, y) w(x, y) dx dy \quad (1)$$

ここで板厚の項を無次元化するため基準板厚として最高板厚 h_r をとり、任意点の板厚はこれとの比の形をとった変数とする。さらにこの点における板の曲げ剛性を D_r とすれば (1) 式積分内に含まれる任意点

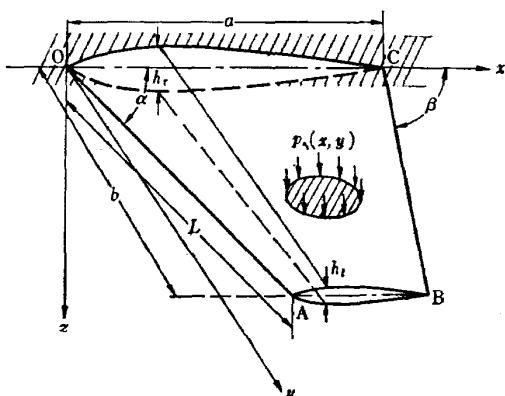


図 1 変厚片持板撓み解析座標系

の曲げ剛性 D が板厚比の三乗に比例するため、これを $D_r(h/h_r)^3$ とかきかえる。荷重 $p(x, y)$ を板内の一点 (X_0, Y_0) にかかる集中荷重 P_0 のみの場合に限定すると (1) 式は

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D_r}{2} \iint_G \left(\frac{h}{h_r} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & - P_0 w(X_0, Y_0) \end{aligned} \quad (2)$$

とかきかえられる。

一方 x, y の関数である板厚 h はこれを x, y に関する幕級数展開した次式で表わす。

$$h = \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^L a_{jl} x^j y^l \quad (3)$$

h_r との比をとり無次元化を施し

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{h_r} \right)^3 = & \sum_{j_1 l_1} \sum_{j_2 l_2} \sum_{j_3 l_3} G_{j_1 l_1} G_{j_2 l_2} G_{j_3 l_3} \xi^{j_1+j_2+j_3} \eta^{l_1+l_2+l_3} \\ = & \sum_{jl} E_{jl} \xi^j \eta^l \end{aligned} \quad (4)$$

また (2) 式に含まれる撓み w も板厚と同様な x, y に関する幕級数展開した

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n b_{mn} x^m y^n \quad (5)$$

なる式で示す。

ここで板の自由辺での境界条件は変分法における自然境界条件に相当する力学的条件となることから¹¹⁾、もし(5)式を無限項とった場合には、その汎関数が極値をとれば、この条件を満足している。しかし実際の数值計算では有限項の試験関数をとることになるので、この条件はその項数に応じて近似的に満たすような形となる。そこで試験関数としては幾何学的条件のみを満たす形にとった。したがってここでとりあつかっている片持板の場合には $m=0, 1, 2, \dots, n=2, 3, 4, \dots$ とすればよい。(4), (5)式を (2) 式に代入すると最終的な汎関数として、 b_{mn} の二次形式の次のような式が得られる。

$$\begin{aligned} J_0 = 2\Pi/D_r = & \sum_{mn} \sum_{rs} b_{mn} b_{rs} \{ m(m-1)r(r \\ & -1) \sum_{jl} E_{jl} I_{m+r+j-4} \\ & + n(n-1)s(s-1) \sum_{jl} E_{jl} I_{m+r+j} \\ & + 2\nu m(m-1)s(s-1) \sum_{jl} E_{jl} I_{m+r+j-2} \\ & + 2(1-\nu) mnrs \sum_{jl} E_{jl} I_{m+n+j-2} \} \\ & - \frac{2P_0}{D_r} \sum_{mn} b_{mn} X_0^m Y_0^n \end{aligned} \quad (6)$$

ここに I_{pq} は x, y の積分を行なうことにより得ら

れるもので

$$I_{pq} = \left\{ \sum_{i=0}^{r+1} \frac{p!}{(p+1-i)! i! (p+q+2-i)} \left(\frac{\cot \beta}{k} \right)^{p+1-i} - \frac{1}{(p+1)(p+q+2)} \left(\frac{\cot \alpha}{k} \right)^{p+1} \right\} a^{p+1} b^{q+1} \quad (7)$$

ただし $k=a/b$

なる式で与えられる。そこで (6) 式が極値をとればよいわけであるが、この式を極値とする条件 $\partial J_0 / \partial b_{mn} = 0$ より無限一次の連立方程式が求まる。理論的にはこの連立方程式を解いて得られる根より撓みの形を決定するのであるが、実際には試験関数を有限項で打ち切りその際に得られる有限一次の連立方程式を解いて近似の撓み形を得るわけである。

ここで実際の解析例としてすでに述べたように変厚片持板の板内的一点に集中荷重がかかった場合について考えてみる。この場合には (6) 式で示された汎関数の停留条件から求まる方程式は

$$\frac{2a}{b^3} \{ \sum B_{mnr} C_{rs} - \xi_0^m \eta_0^n \} = 0 \quad (8)$$

$$C_{rs} = \frac{a^{r+1} b^{s-3}}{P_0} D_r b_{rs}$$

$$B_{mnr} = \{ m(m-1)r(r-1)k^{-4} \sum_{jl} E_{jl} M_{m+r+j-4, n+s+l} \\ + \nu m(m-1)s(s-1)k^{-2} \sum_{jl} E_{jl} M_{m+r+j-2, n+s+l-2} \\ + n(n-1)s(s-1) \sum_{jl} E_{jl} M_{m+r+j, n+s+l-4} \\ + \nu n(n-1)r(r-1)k^{-2} \sum_{jl} E_{jl} M_{m+r+j-2, n+s+l-2} \\ + 2(1-\nu)mnr s k^{-2} \sum_{jl} E_{jl} M_{m+r+j-2, n+s+l-2} \}$$

$$M_{pq} = \frac{I_{pq}}{a^{p+1} b^{q+1}}$$

$$\xi_0 = \frac{X_0}{a}, \quad \eta_0 = \frac{Y_0}{b}$$

となる。この式において集中荷重 P_0 、荷重負荷点 (X_0, Y_0) が決まれば、未知数 C_{rs} に関する連立方程式となって、この C_{rs} について解くことにより撓みの形が決定できる。

4. 静撓みを受けている板の表面歪

ここでとりあつかっているような薄い変厚板が微小曲げを受けた場合、図 2 に示したように座標系をとると、 z 方向に撓み w を受けたことによって生ずる板表面の歪の各成分は次式で示される⁽¹²⁾。

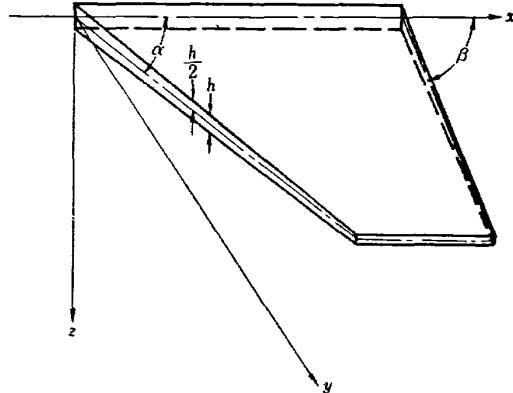


図 2 変厚片持板表面歪解析座標系

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

したがって w なる撓みの形が決定されれば (8) 式より容易に表面歪の成分が求められる。すなわち (5) 式で示された撓みの試験関数の各係数 b_{mn} が決まり、撓み形が求まったとすれば (8) 式より

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{h}{2} \{ \sum_{mn} m(m-1) b_{mn} x^{m-2} y^n \} \\ \epsilon_y &= -\frac{h}{2} \{ \sum_{mn} n(n-1) b_{mn} x^m y^{n-2} \} \\ \gamma_{xy} &= -h \{ \sum_{mn} mn b_{mn} x^{m-1} y^{n-1} \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

なる式から表面歪の各成分を計算することができる。

5. 数値計算例

数値計算としては板厚が一様な場合、板厚変化がスパン方向に直線的な場合、およびコード方向に直線的な場合について行なった。これらの板の形状については図 3 に示す。また実際の数値計算に用いた試験関数は振動解析の際に、定められた項数で最も近似がよいと思われたものと同形⁽¹³⁾ の次に示す無次元の形で与えられた10項よりなる式を使用した。

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & C_{02}\eta^2 + C_{03}\eta^3 + C_{04}\eta^4 + C_{05}\eta^5 \\ & + C_{12}\xi\eta^2 + C_{13}\xi\eta^3 + C_{14}\xi\eta^4 \\ & + C_{22}\xi^2\eta^2 + C_{23}\xi^2\eta^3 \\ & + C_{32}\xi^3\eta^2 \end{aligned} \quad (11)$$

このことから、この式に対応した、無次元の係数 C_{rs} に関して10元一次の連立方程式が得られる。またこの連立方程式に含まれる係数 B_{mnr} はすでに行なった振動解析の場合の振動数方程式内の歪エネルギーに関する項⁽³⁾ と同形となることから、計算にはそれを流用

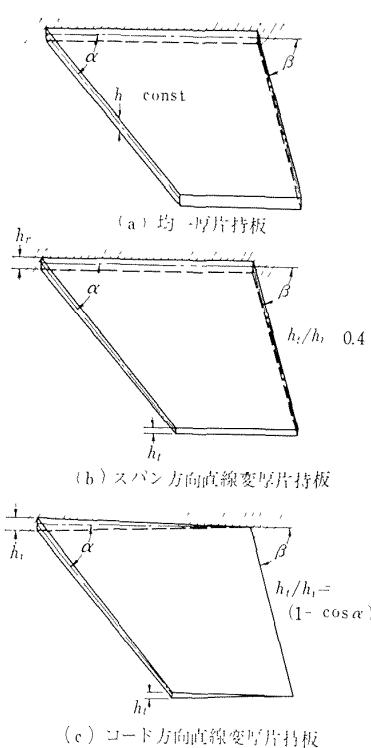


図 3 直線変厚片持板数値計算例

した。

一方表面歪の数値計算例としては、\$\eta\$ 方向の歪 \$\epsilon_\eta\$ についてのみ行なった。(10) 式なる試験関数を用いると、この \$\eta\$ 方向表面歪成分は

$$\begin{aligned} \epsilon_\eta = & \frac{1}{2} h R \left(\frac{1}{b} \right)^2 \{ 2C_{02} + 6C_{03}\eta + 12C_{04}\eta^2 + 20C_{05}\eta^3 \\ & + 2C_{12}\xi + 6C_{13}\xi\eta + 12C_{14}\xi\eta^2 \\ & + 2C_{22}\xi^2 + 6C_{23}\xi^2\eta \\ & + 2C_{32}\xi^3 \} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{ここで } R = \frac{P_0 b^3}{a D_r}$$

なる形で与えられる。

なお撓みおよび表面歪の数値計算は Datatron 205 電子計算機によって行なった。

6. 変厚片持板の静撓み実験

実験には数値計算に対応した形状の、(i) 板厚一定、(ii) スパン方向直線変厚、(iii) コード方向直線変厚の三様の板厚変化を持った試験片を用い、これに集中荷重を加えて、この時の撓みおよび表面歪を測定した。この実験は結果を計算値と比較して当解析法の実用性を確かめるとともに、板厚変化が片持板の静撓みならびにこの際に生ずる表面歪におよぼす影響を吟味することを目的とした。

試験片はすべて一般構造用軟鋼板で、変厚試験片の場合にはこの鋼板を機械加工により所要の板厚、形状に切削したものである。当試験片の形状、寸法および諸性質については図 4 に示す。

実験装置および実験法、上述形状の試験片を 500ton 構造物試験機の圧縮装置を利用して、この圧盤間に鋼製の溝形材とともに挟み、圧縮荷重を加えて固定端とした。一方撓みを生ぜしむるための荷重は、できるだけ集中荷重の状態を作り出せるようにし、かつ板面上の任意の一点に垂直にかかるように考慮した。撓みの測定は 1/100 mm および 1/1000 mm 付盛のダイアルゲージを用い、また表面歪測定は電気抵抗線歪計によった。この歪計接着位置について図 5 に示したが、このうち、特に板中央部に当る数点に対しては \$x, y\$ 二方向のゲージをはりつけ、両方向に対する歪を測定した。

ここでとりあつかっている静撓みは、微小撓みの仮定で解析を行なっている関係上、実験の際にも最大撓みを板厚前後の値、ここでは 2~3 mm 程度になるよう制限してある。なおダイアルゲージの測定圧は約 2 g、一方上記撓みを生ぜしむるために使用した荷重は 2.155 kg および 3.093 kg であるため測定圧の

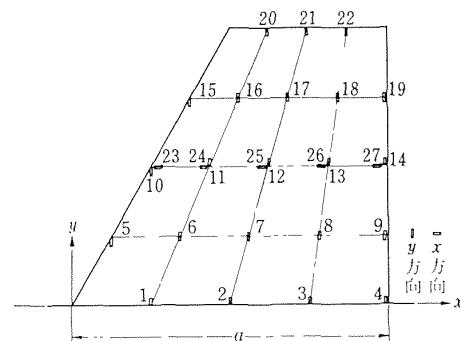


図 5 表面歪測定点

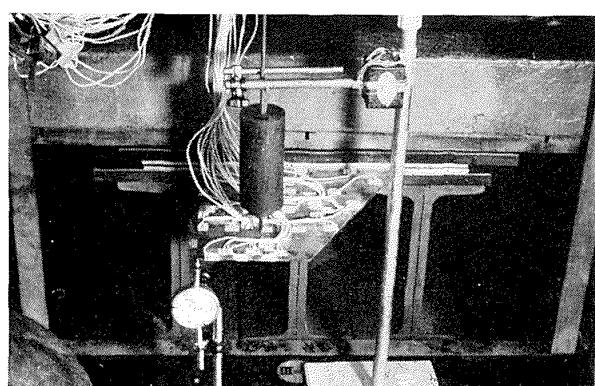


図 6 実験装置概観

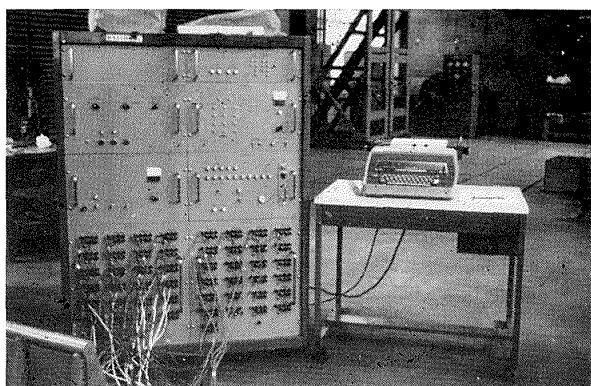


図 7 低速ロガーア装置

影響は無視してある。

実験装置概観について図 6 に、また表面歪の計測に用いた最高 50 点、自動平衡および自動測定可能な低速ロガーア装装置を図 7 に示す。

7. 数値計算および実験結果とその検討

計算、実験両結果の比較を図 8～図 10 に示す。これらの各図からも明らかのように撓み、表面 γ 方向歪ともおおむね計算、実験両者の傾向は一致している。また各板とも集中荷重負荷点の移動による静撓み、表面歪の変化の様子がよく示されている。次に図 11, 12 は三様の板厚を有する板の後縁および固定辺に平行な自由縁における静撓みを比較したものである。この図より計算結果、実験結果とも板厚変化が静撓みの変化におよぼす影響は一致しているのがわかる。

しかしコード方向変厚板の後縁付近での静撓みならびに表面歪の値は計算結果と実験結果との間に相当の差がみられる。これは次の理由によるものと推定される。すなわち上で述べた辺は、計算上では板厚零に相当するようになっていたが、試験片をかような状態に加工することはきわめて困難で、実際に実験を行なった試験片ではこの辺がかなりの厚さを有していたと考えられ、したがってこの辺での撓みは計算で得た値の方が試験によって得られたものよりも著しく大きくなり、また厚さ零の条件から計算上では零となるべき表面歪も試験片のこの辺で厚さが存在するために試験結果では相当に大きな値が示されている。そこで実験に用いた試験片の後縁の厚さを測定した所 0.8～0.9mm 程度の厚さを有していることがわかった。図 10 にはこの縁における厚さが 0.5 mm および 1.0 mm の場合の撓みの計算を行ない、いくつかの代表的な点に荷重がかかった場合の撓についてもつけ加えた。この結果から明らかなように、実験値は 0.5 mm と 1.0 mm

の計算値の間になっており、実験と計算値はほぼ一致している。またこの種の変厚板に対しては後縁の厚さがかなり影響していることもわかった。

一方各板厚形状の試験片とも固定辺に平行な自由辺での歪分布をみると、理論的にはこの辺に垂直方向表面歪(この場合は γ 方向歪)は零となるべきであるが、計算、実験両結果とも、他の部分の値に比較して絶対値は小さいが零とはならずにある値が残っている。これは計算の場合にはここで用いた 10 項程度の試験関数では、この辺での自然境界条件を十分満足していないためであって、項数の増加により近似の精度向上をはかれば逐次満足されていくのではないかと思われる。図 13 にはこの自由辺における境界条件の数値的な吟味の一例として、スパン方向に直線的な変厚をする板のこれらの辺における法線方向の曲げモーメント分布と固定辺のモーメント分布の比較、および両者の合剪断力分布の比較を示した。この図からわかるように自由辺で零となるべき値が、10 項近似程度では多少残っている。したがって固定辺での値と比較し、これらの辺での境界条件は一応ここで示した程度に近似的に満たされていると考えられる。また実験結果に関しては、厳密な意味での自由辺での歪測定は不可能で、今回の例では多少板内部の点の歪を測定しその値をこれら自由辺のものとみなしておる。さらにこれらの辺近傍では歪の値が小さいので測定誤差、ゲージの精度などの影響も大きいと考えられる。

固定端の後縁に近い部分あるいは集中荷重負荷点などにおける表面歪は多少計算と実測とに数値的な差が現われているが、一応傾向は同じようにでている。しかし今回の例では後縁の後退角 $\beta=90^\circ$ であるため、ここで示された程度におさまっているが、これが鋭角になると特異点としてさらに著しい傾向が示されるであろう。

8. 結 言

ここでとりあげた実際の計算および実験例は板厚変化が直線的なものに限られているが、一応板厚変化が板の静撓みあるいは表面歪におよぼす影響はよく示されている。また計算、実験両者の比較例からも明らかのように撓みに関する限りは今回の計算で用いた 10 項程度の試験関数でも実用的には十分な精度の結果が得られている。

本報告では荷重状態が集中荷重のみの場合の解析および実験例であるが、一般式で示したように荷重分布あるいは荷重の負荷された部分の面積などがわかつて

いれば分布荷重としてとりあつかった解析も容易である。しかし荷重の分布をいくつかの集中荷重におきかえ、各集中荷重から得られた解析値を重ね合せによって近似的に分布荷重の場合の解析を行なうことも可能であって、このようなときにはここで得られた解析結果を直接利用することができ、複雑な荷重状態の場合などは非常に有効な方法であると考えられる。

また今後当解析の応用により、より実際的な翼構造を有する板の静撓み、たとえば補強材と外板の結合によって構成されている構造を持った系などに対しても解析が可能であり、これらに関する研究も進めたい。

最後に本実験に協力された構造研究室の各研究员ならびに東海大学実習生木村勝一君に感謝の意を表す次第である。

文 献

- 1) 川井忠彦, 塙 武敏, 高橋利之, 越出慎一; 平板翼の固有振動に関する一解析法, 第5回宇宙科学技術シンポジウム講演集(昭和37)
- 2) 塙 武敏, 越出慎一, 戸川隼人, 川井忠彦; 変厚板の振動について, 第6回宇宙科学技術シンポジウム講演集(昭和38)
- 3) 塙 武敏, 越出慎一, 泉 日出夫; 変厚片持板の振動解析について, 第8回宇宙技術講演会講演集(昭和40)
- 4) 塙 武敏, 越出慎一, 泉 日出夫; 戸川隼人; 点支持のある板の振動解析, 第6回構造強度に関する講演集(昭和39)
- 5) 塙 武敏, 築地恒夫, 越出慎一, 林 洋一, 弾性支持板の振動, 第9回宇宙技術講演会講演集(昭和41)
- 6) 塙 武敏; 板の振動に関する二三の解析と実験例について, 日本航空学会誌第14巻第148号(昭和41)
- 7) L.S.D. Morley "Bending of a Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Normal Loading" Quart. Journ. Mech. and Applied Mech. Vol. XV Pt 4 (1962)
- 8) R.O. Milne. "An Approximation to the Influence Function for plate-like Wings" Aircraft Engineering Vol. 31, No. 364(1959)
- 9) R.J. Melosh, R.G. Morritt "Prediction of Flexibility and Natural Mode of Low Aspect Ratio Wings using Stiffness Matrices" Aero Space Engineering July (1960)
- 10) R.J. Melosh "A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending" Journal of the Aerospace Sciences Janualy(1961)
- 11) 林 肇, 村 外志夫; 変分法, コロナ社
- 12) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger Theory of Plates and Shells. McGRAW-HILL Book.
- 13) 塙 武敏, 越出慎一, 泉 日出夫; 変分直接解法において解におよぼす束縛の数値的影響(続) 第43期機械学会講演前刷集(昭和40)

付録 変厚片持板の撓みの自然境界条件

ここでは自然境界条件の数値的な吟味をするに必要な変厚片持板の撓みのオイラー方程式および自由辺における境界条件式を示す。(1)式の第一変分をとると次のようになる。

オイラーの方程式として

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y^2} \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - p(x, y) = 0 \quad (13)$$

境界における法線方向のモーメントとして

$$M_n = D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta \right\} \quad (14)$$

また境界上の合剪断力として

$$V_n = \frac{\partial}{\partial s} \left[-D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \cos \theta - \left\{ \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \sin \theta \right] \quad (15)$$

ここに n , s , θ は図 14 のようにとる。

今実際の数値例としてスパン方向に直線的な板厚変化をするものをとりあげてみる。この場合に(5)式を無次元化して示した試験関数

$$w = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} C_{mn} \xi^m \eta^n \quad (16)$$

を用いたときには、(13), (14), (15) 式より最終的に

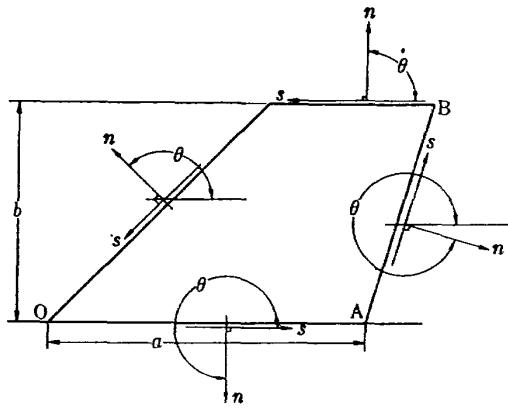


図 14 境界条件の数値計算に用いる記号

オイラー式の値、境界における法線方向モーメント、および境界上の合剪断力の値を求める式は

$$\begin{aligned}
 & E_a \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} \{ m(m-1)(m-2)(m-3) \xi^{m-4} \eta^n k^{-4} \\
 & + n(n-1)((n-2)(n-3) \xi^{m-4} \\
 & + 2m(m-1)n(n-1) \xi^{m-3} \eta^{n-2} k^{-2} \} \\
 & + 2bE_b \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} \{ n(n-1)(n-2) \xi^{m-3} \\
 & + m(m-1)n \xi^{-2} \eta^{n-1} k^{-2} \} \\
 & + b^2 E_c \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} \{ m(m-1) \xi^{-2} \eta^n k^{-2} \\
 & + \nu n(n-1) \xi^{m-2} \} - p(x, y) = 0 \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$M_n = -\frac{D_r}{a^2} E_a \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} [\{ m(m-1) \xi^{m-2} \eta^n \\
 + \nu n(n-1) \xi^{m-2} k^{-2} \} \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + 2(1-\nu) mn \xi^{m-1} \eta^{-1} k \sin \theta \cos \theta \\
 & + \{ n(n-1) \xi^{m-2} \eta^n \} \sin^2 \theta] \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_n = -\frac{D_r}{a^3} \left[E_a \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} [-\{ m(m-1)(m-2) \xi^{-3} \eta^n \right. \\
 & + \nu mn(n-1) \xi^{m-1} \eta^{-2} k^2 \} \sin \theta \cos \theta \\
 & + (1-\nu)m(m-1)n \xi^{m-2} \eta^{n-2} k (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 & + \{ mn(n-1) \xi^{m-1} \eta^{-2} k^2 \} \\
 & + \nu m(m-1)(m-2) \xi^{m-3} \eta^n \} \sin \theta \cos \theta] \sin \theta \\
 & - bE_b \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} [\{ (1+\nu) mn \xi^{-1} \eta^{n-1} k^2 \} \cos \theta \\
 & + \{ n(n-1) \xi^{m-2} \eta^n \} k^3 \\
 & + \nu m(m-1) \xi^{m-2} \eta^n k \} \sin \theta] \\
 & - E_a \sum_{mn}^{\infty} C_{mn} [\{ m(m-1)(m-2) \xi^{m-3} \eta^n \} \\
 & + mn(n-1) \xi^{m-1} \eta^{n-2} k^2 \} \cos \theta \\
 & + \{ m(m-1)n \xi^{m-2} \eta^{n-1} k \} \\
 & + n(n-1)(n-2) \xi^{m-2} \eta^{n-3} k^3 \} \sin \theta] \quad (19)
 \end{aligned}$$

ここで

$$E_a = E_{00} + E_{10}\eta + E_{20}\eta^2 + E_{30}\eta^3$$

$$E_b = \frac{1}{b} (E_{10} + 2E_{20}\eta + 3E_{30}\eta^2)$$

$$E_c = \frac{1}{b^3} (2E_{20} + 6E_{30}\eta)$$

なる各式で与えられる。

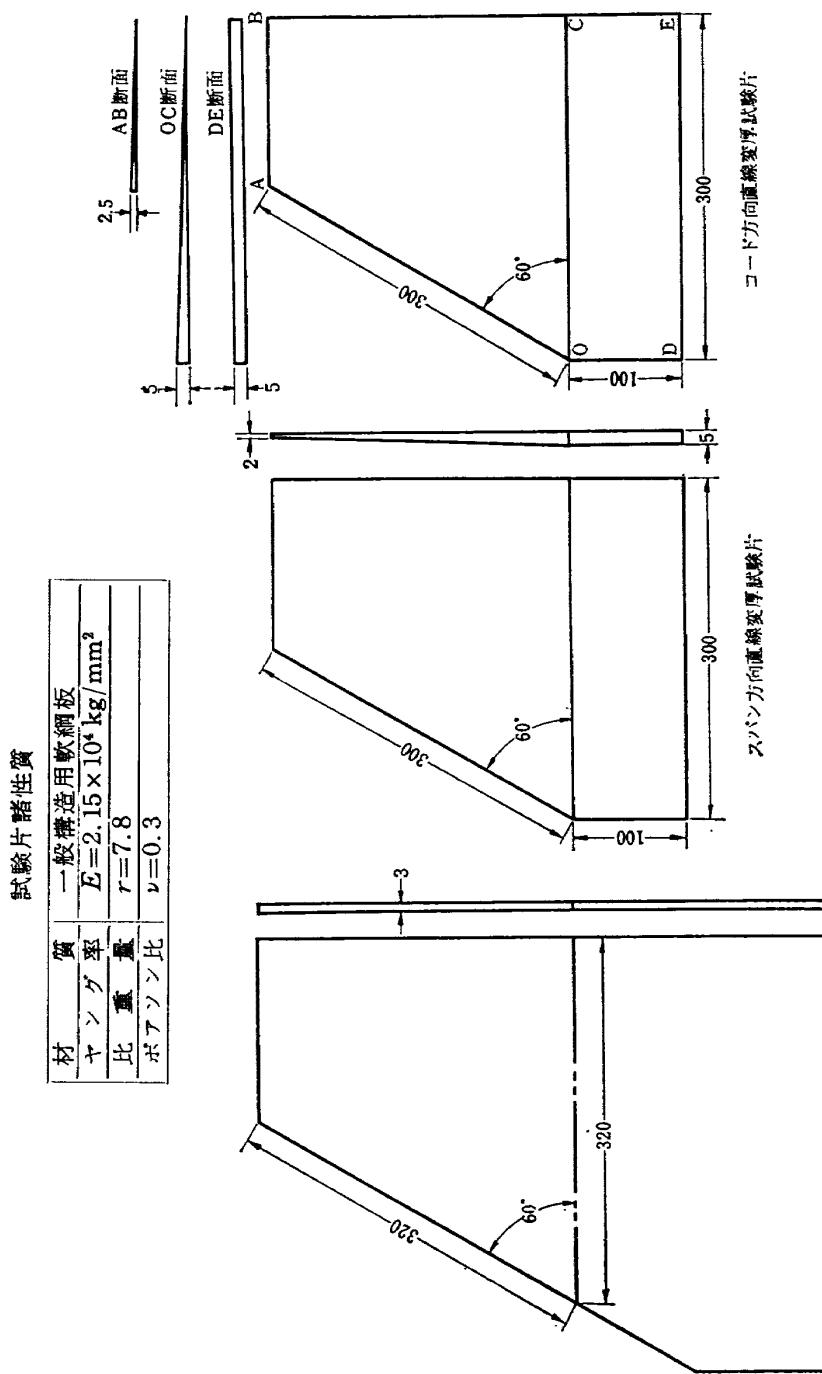


図 4 試験片形状および寸法

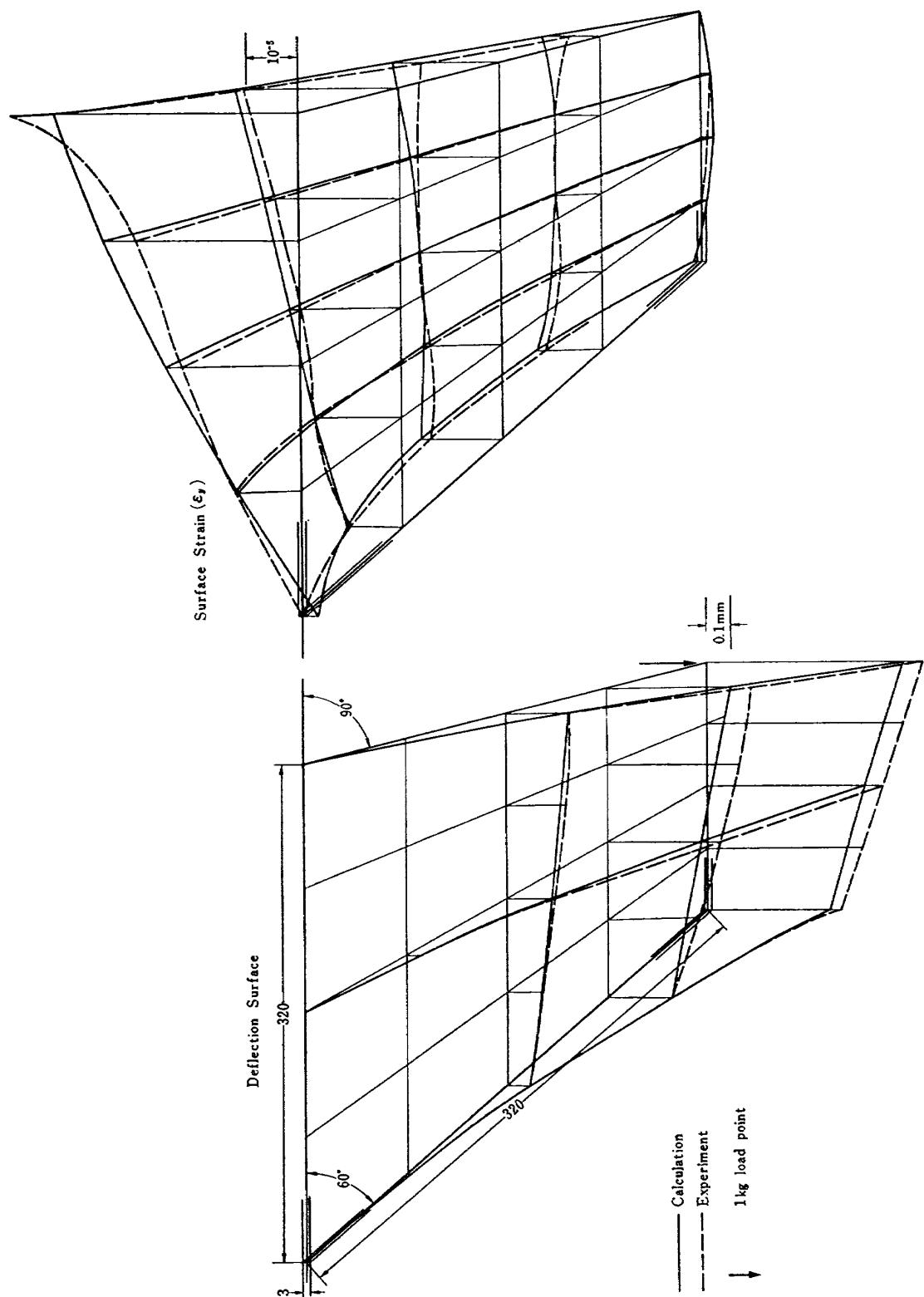


図 8-1 敷値計算と試験結果の比較例（一様板厚鋼板）

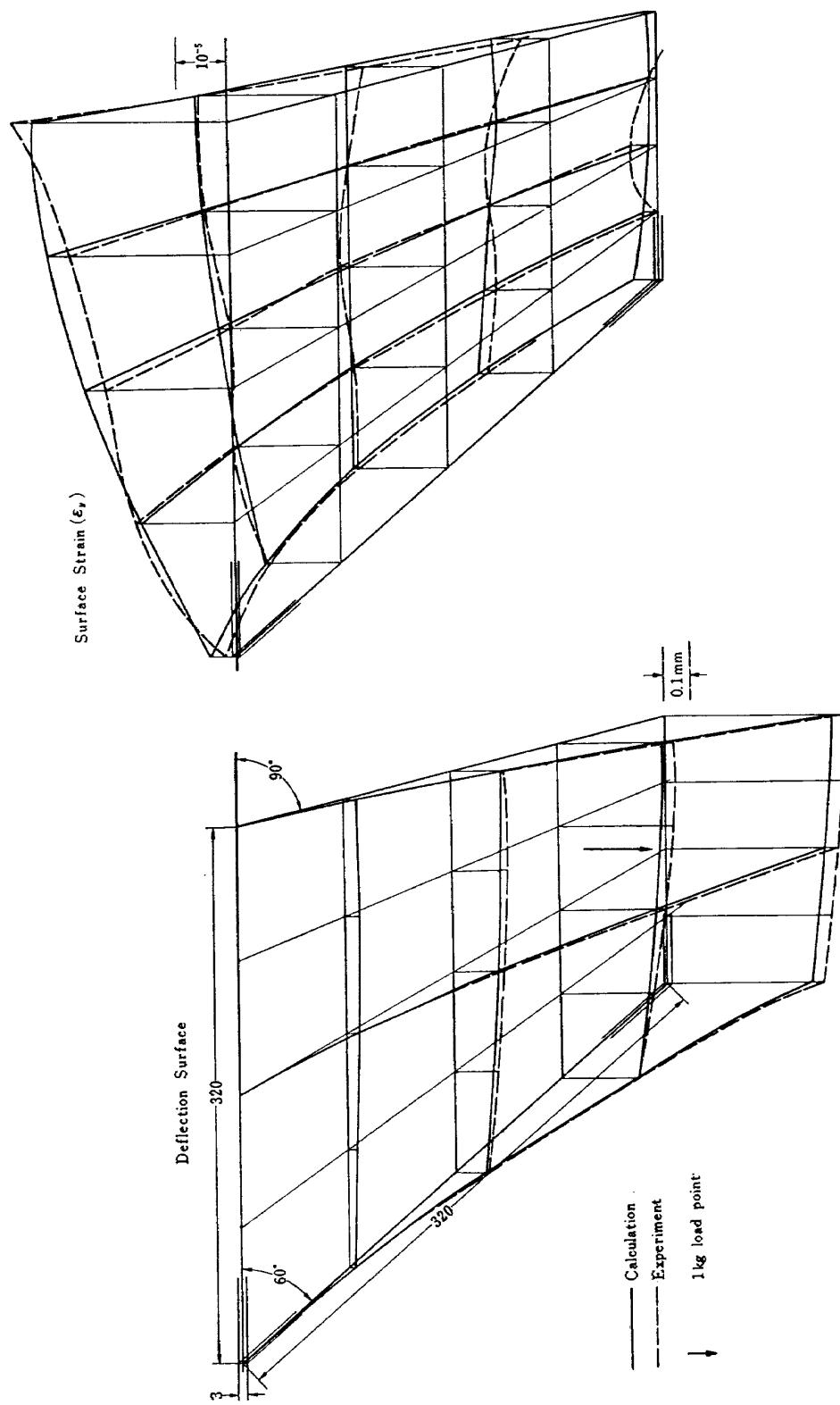


図 8-2 数値計算と試験結果の比較例（一様板厚鋼板）

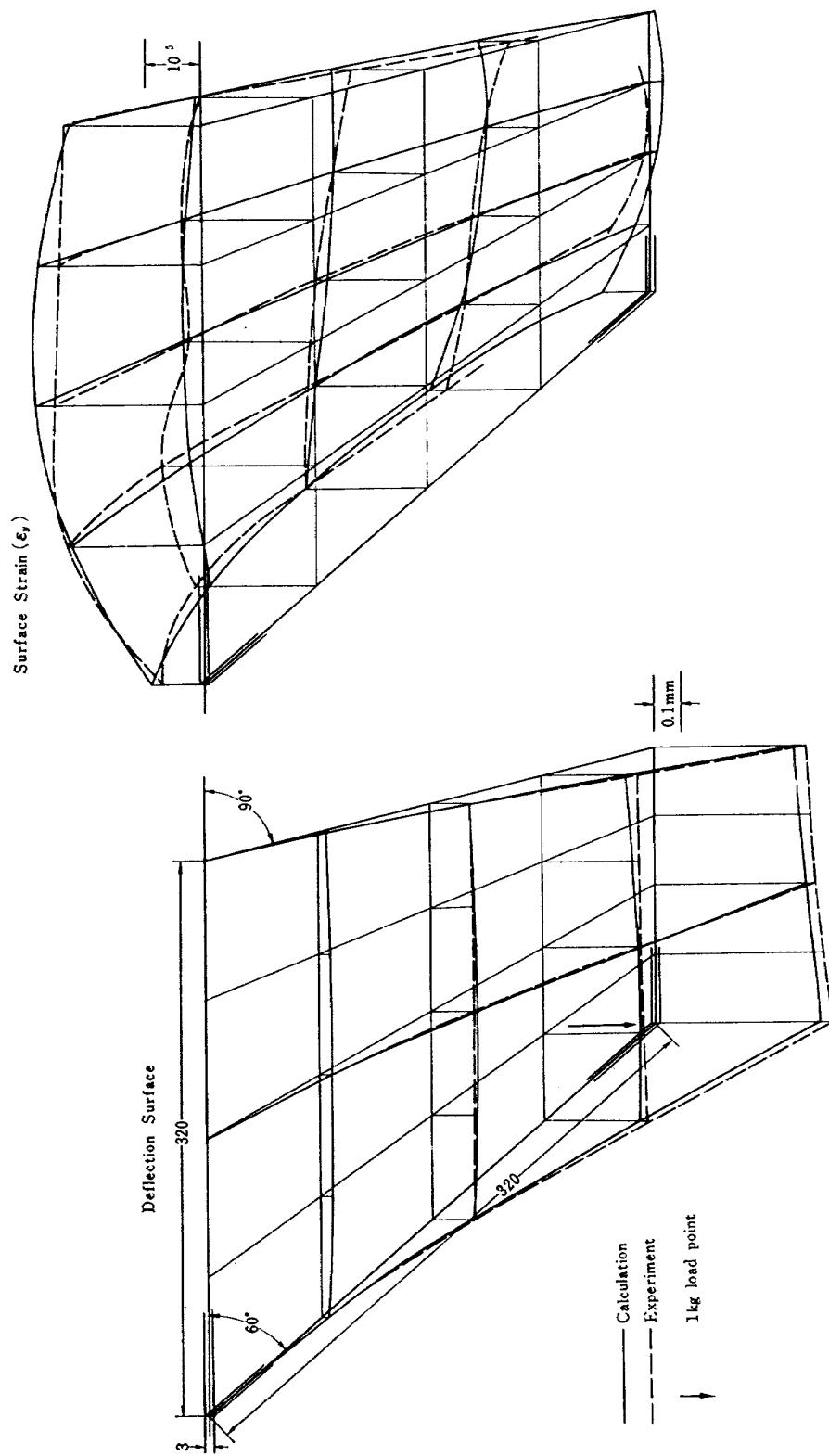


図 8-3 数値計算と試験結果の比較例（一様板厚軟鋼板）

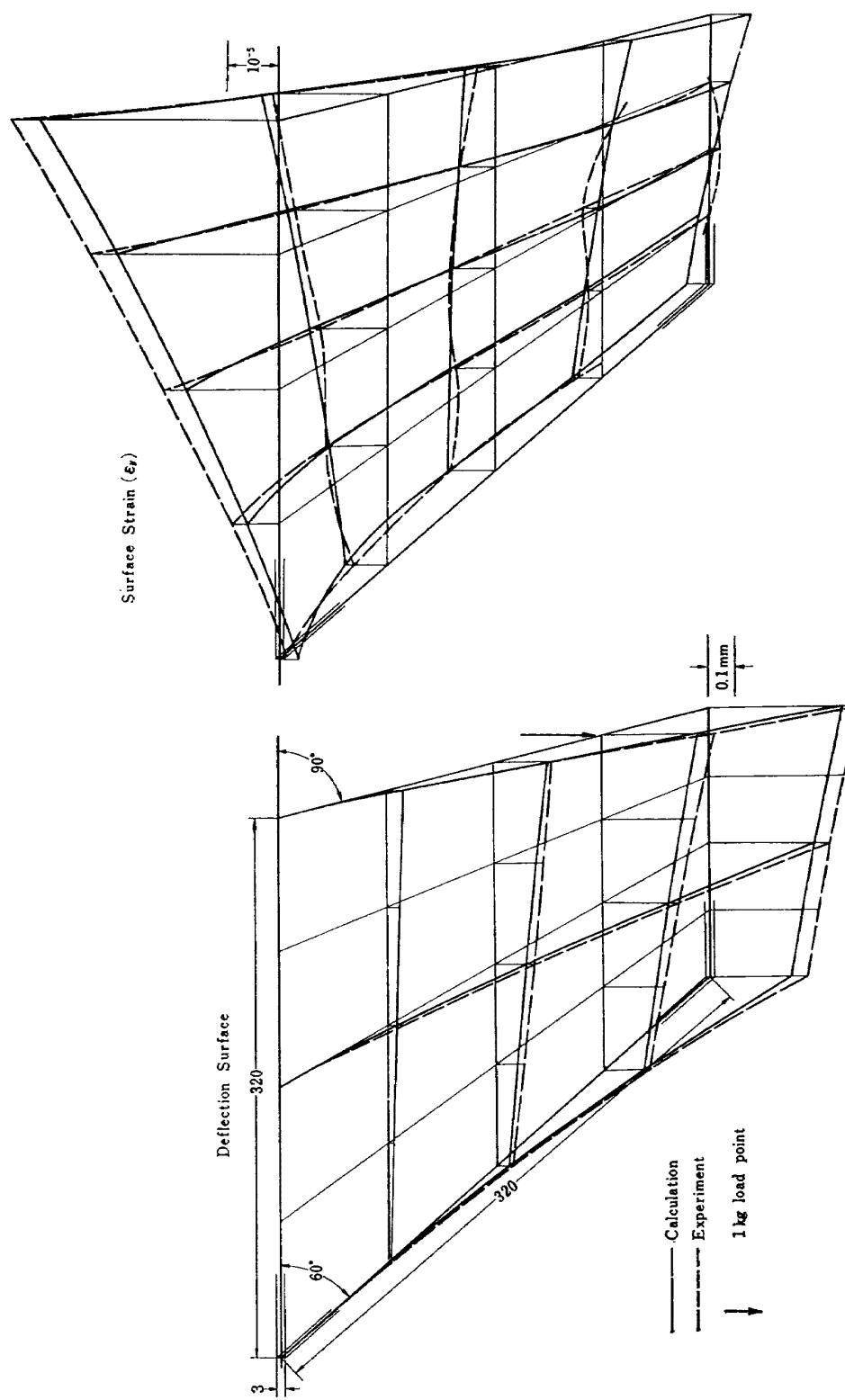


図 8-4 数値計算と試験結果の比較例（一様板厚鋼板）

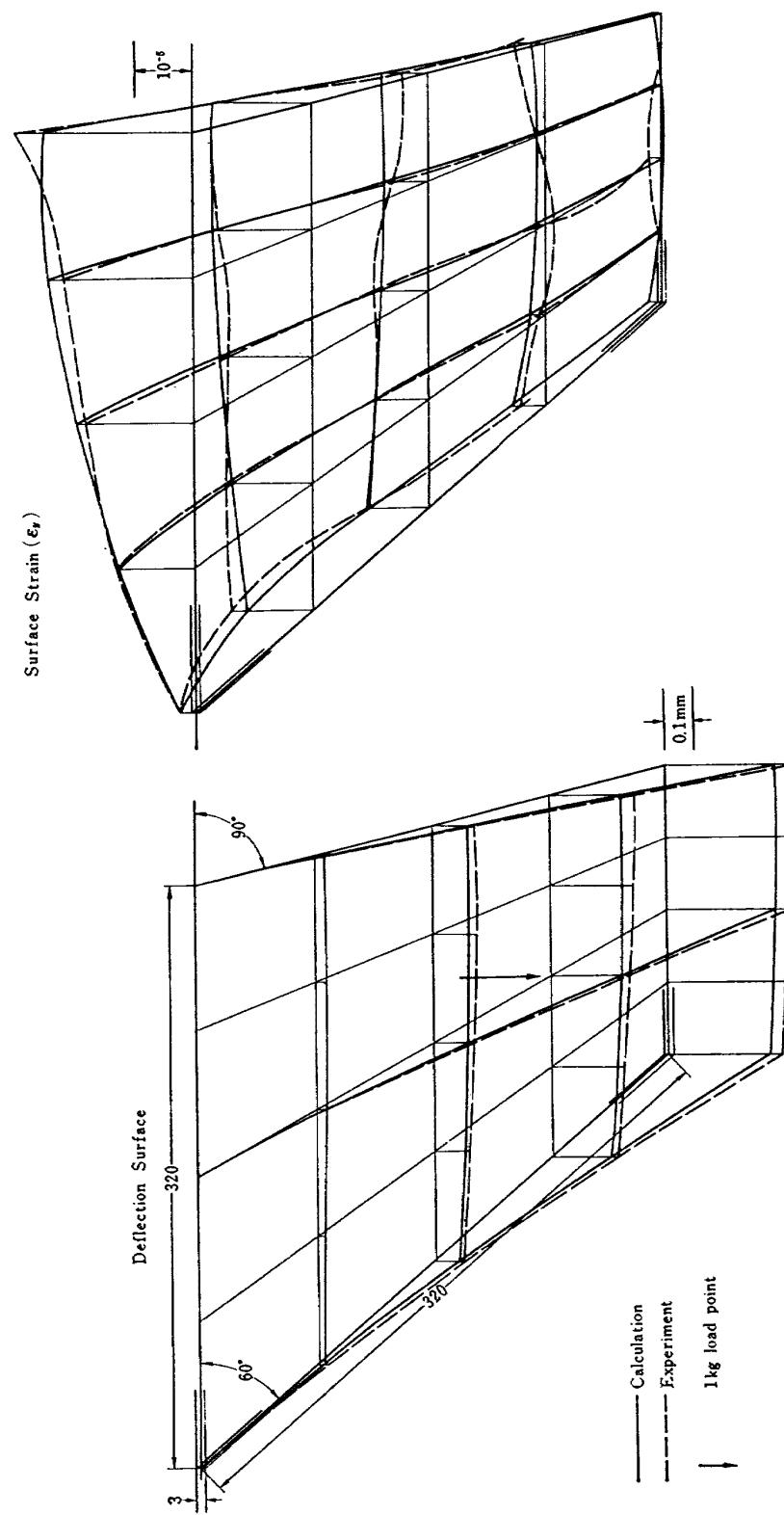


図 8-5 数値計算と試験結果の比較例（一様板厚鋼板）

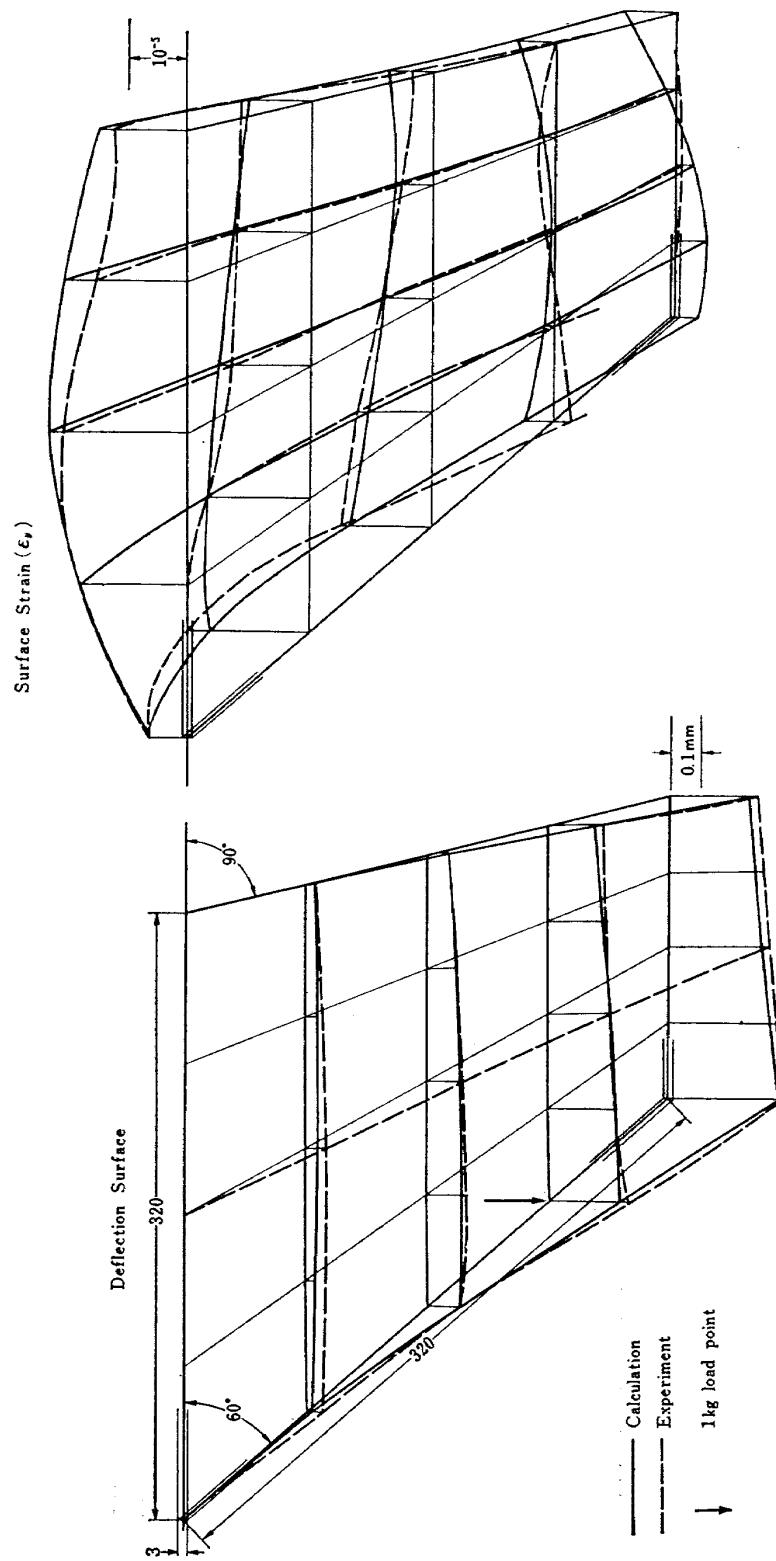


図 8-6 数値計算と試験結果の比較例（一様板厚軟鋼板）

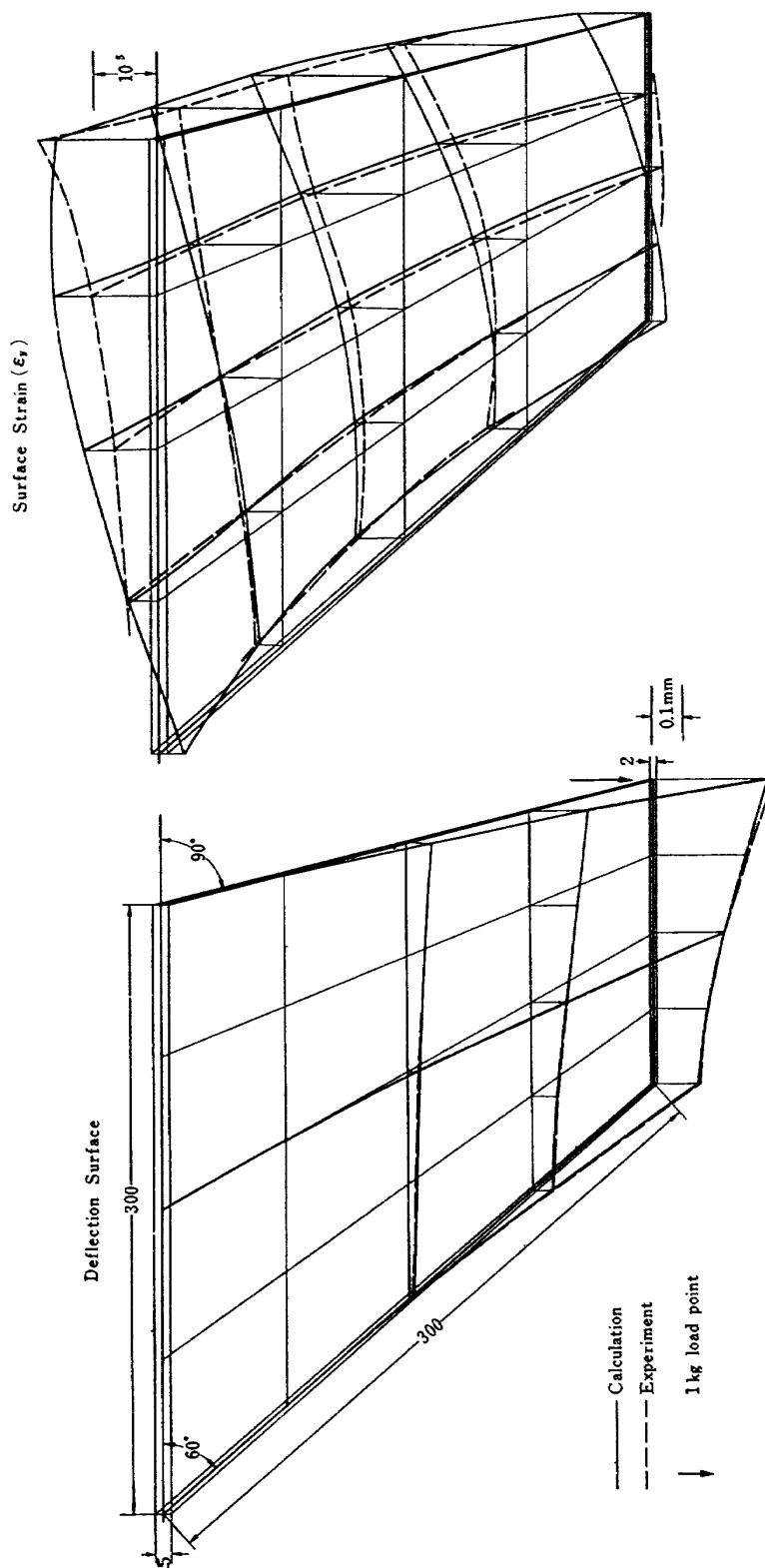


図 9-1 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚軟鋼板）

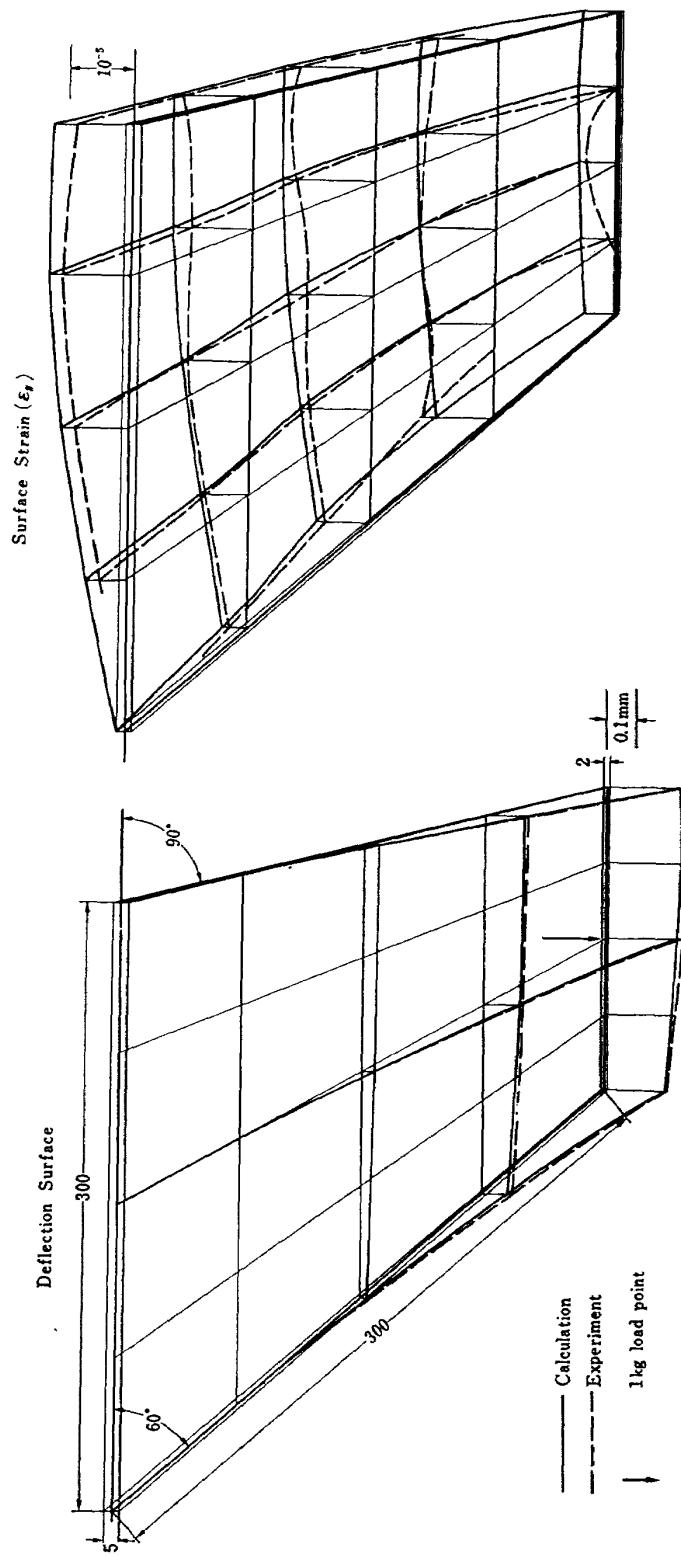


図 9-2 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚鋼板）

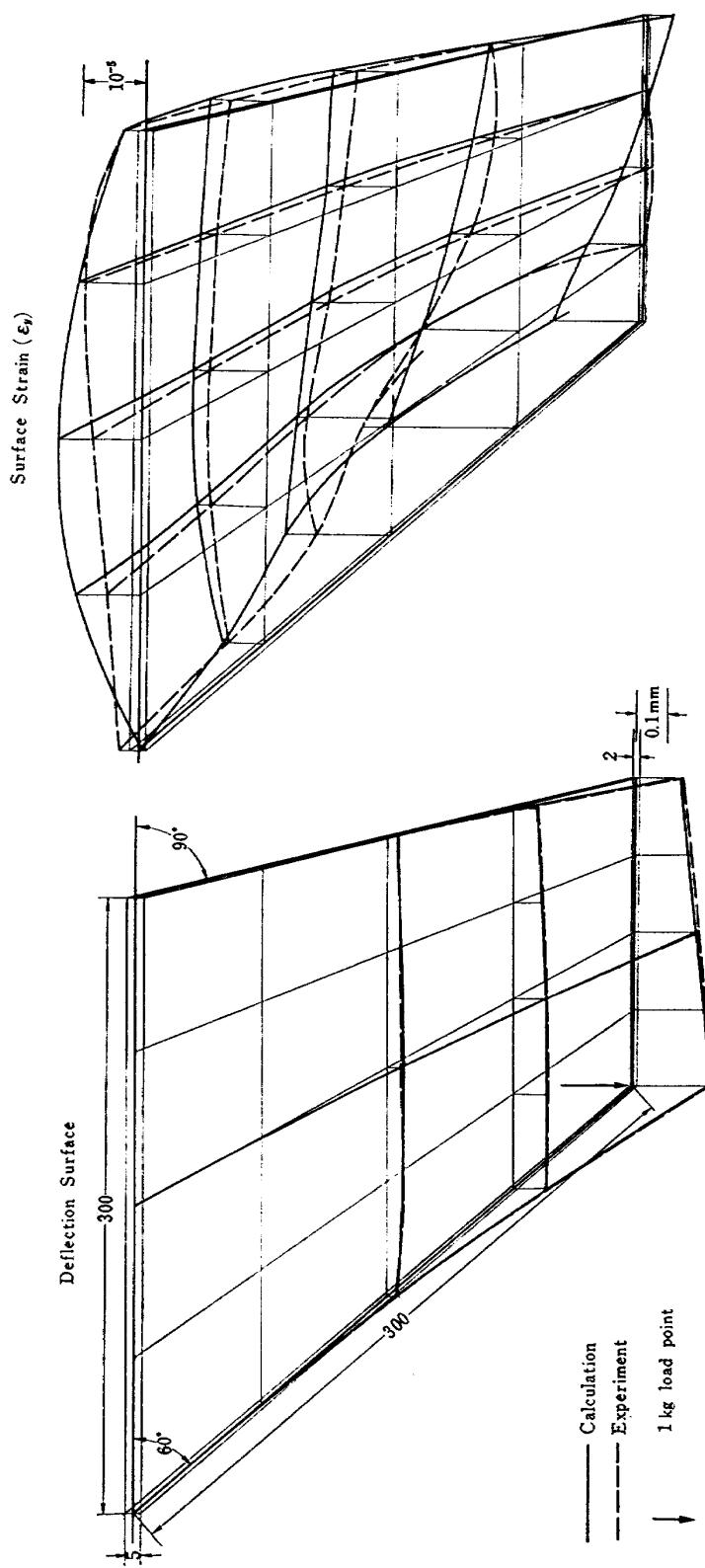


図 9-3 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚軟鋼板）

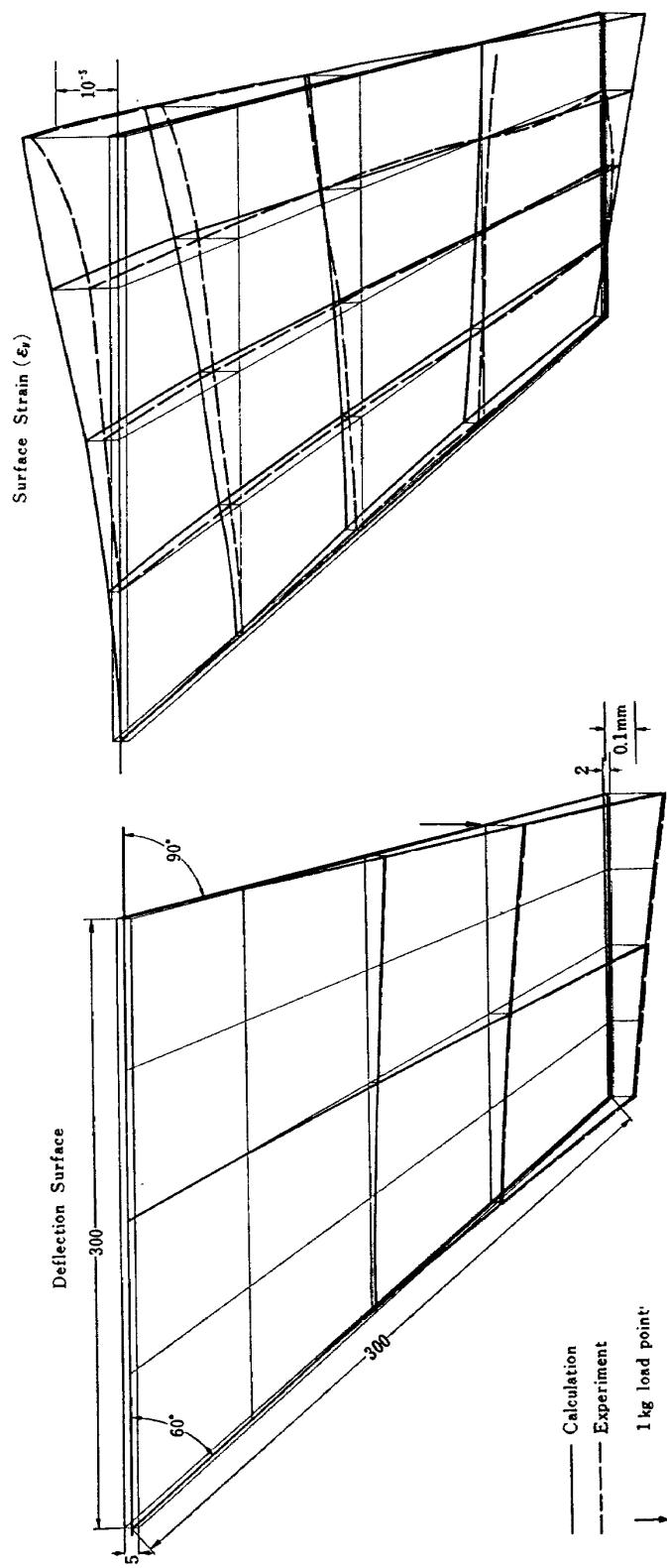


図 9-4 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚鋼板）

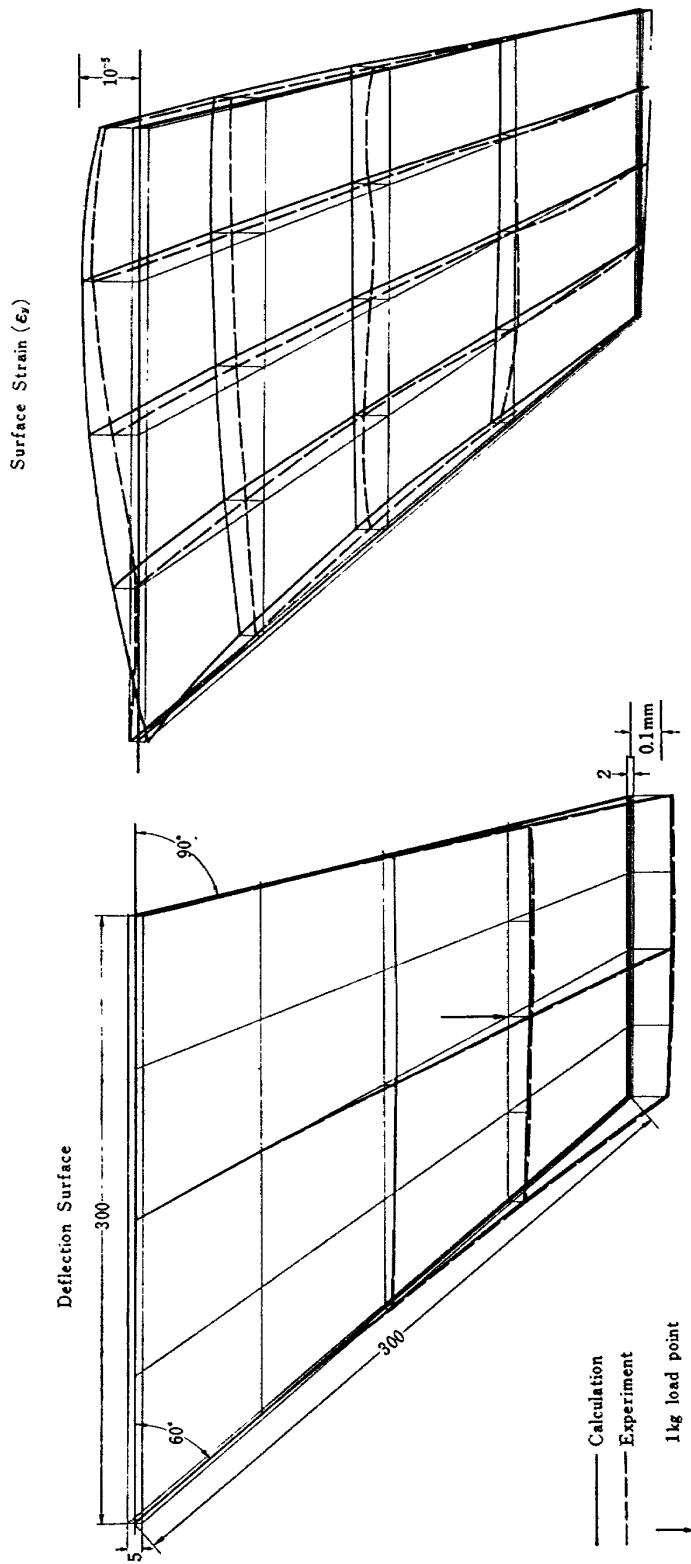


図 9-5 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚鋼板）

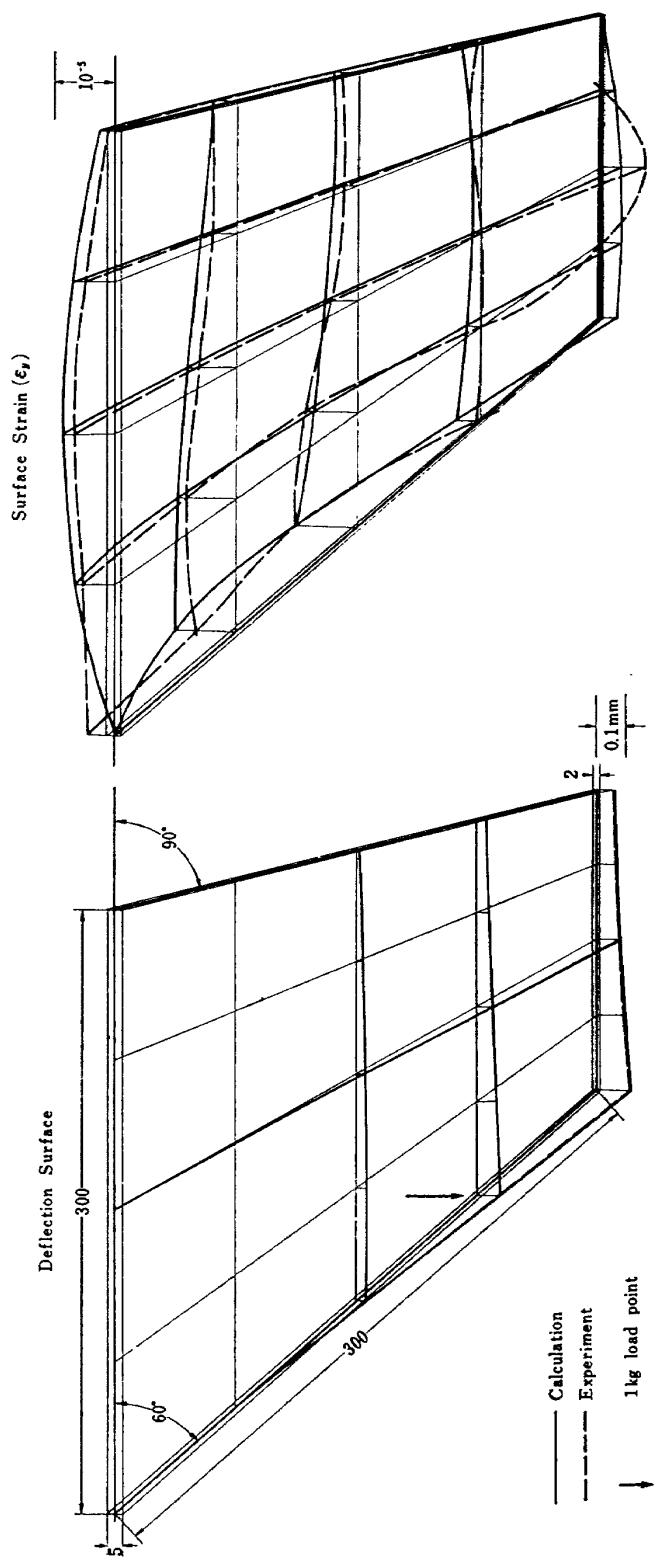


図 9-6 数値計算と試験結果の比較例（スパン方向直線変厚鋼板）

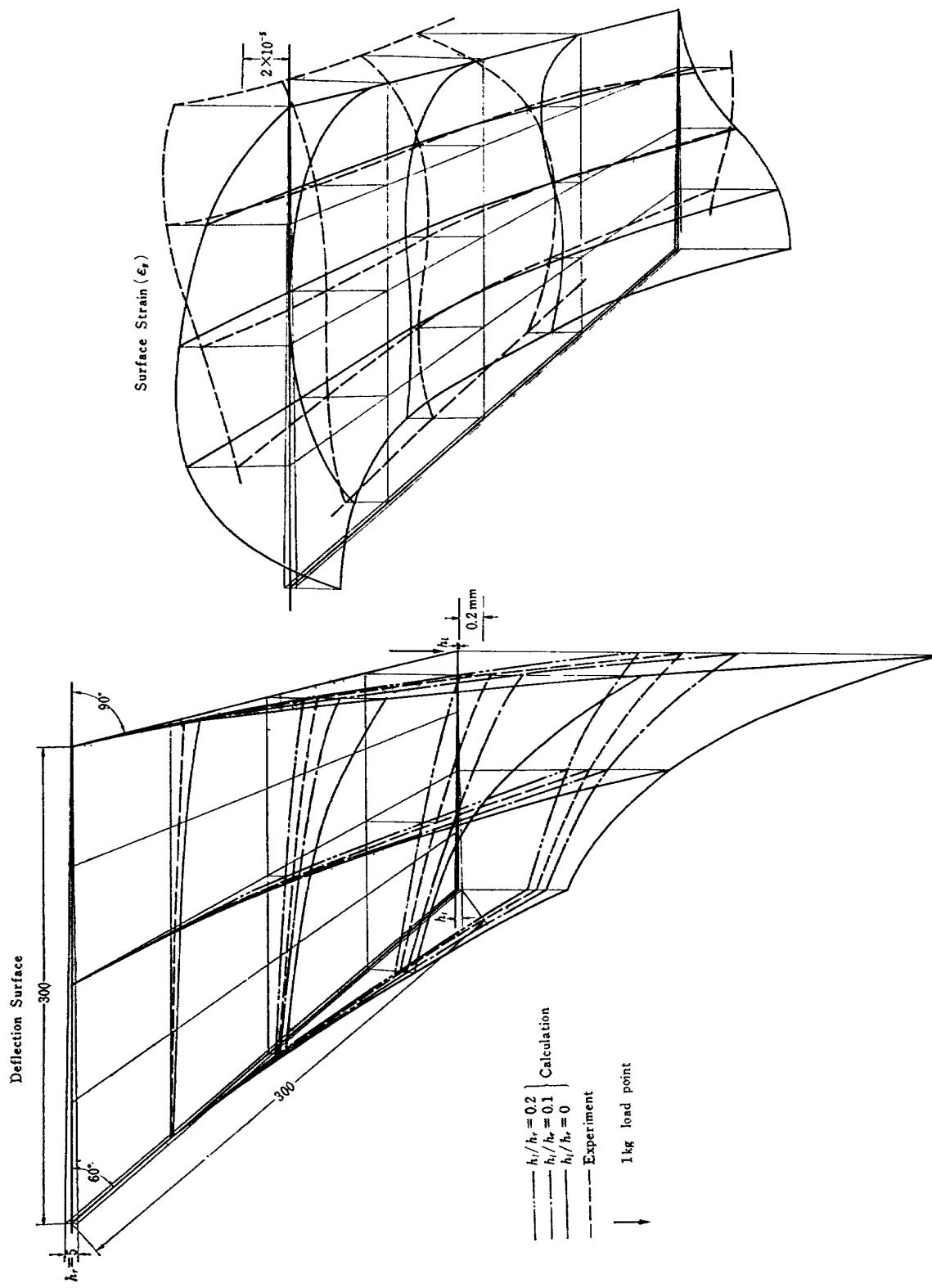


図 10-1 数値計算と試験結果の比較例（コード方向直線変厚軟鋼板）

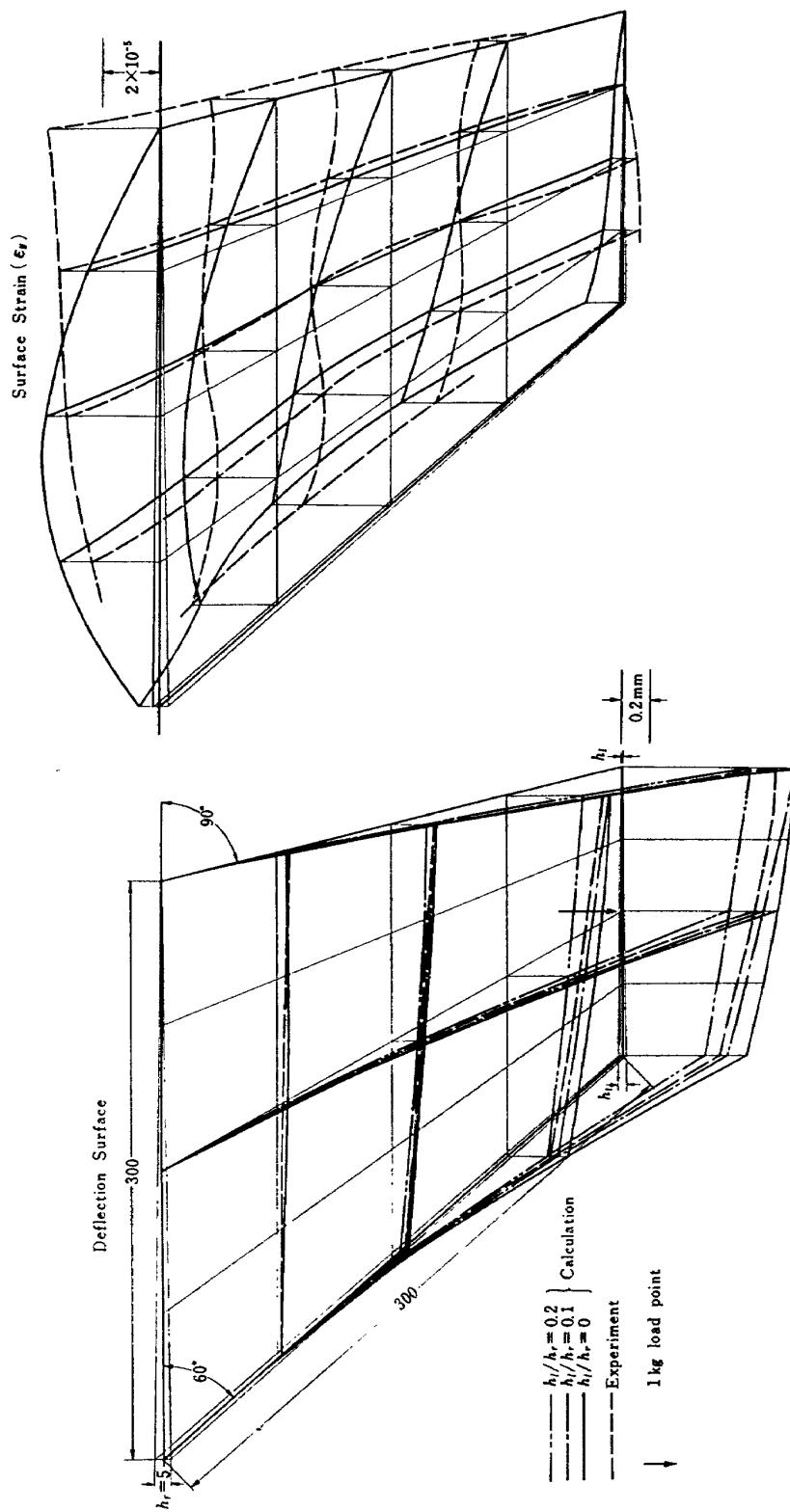


図 10-2 数値計算と試験結果の比較例（ヨード方向直線変厚鋼板）

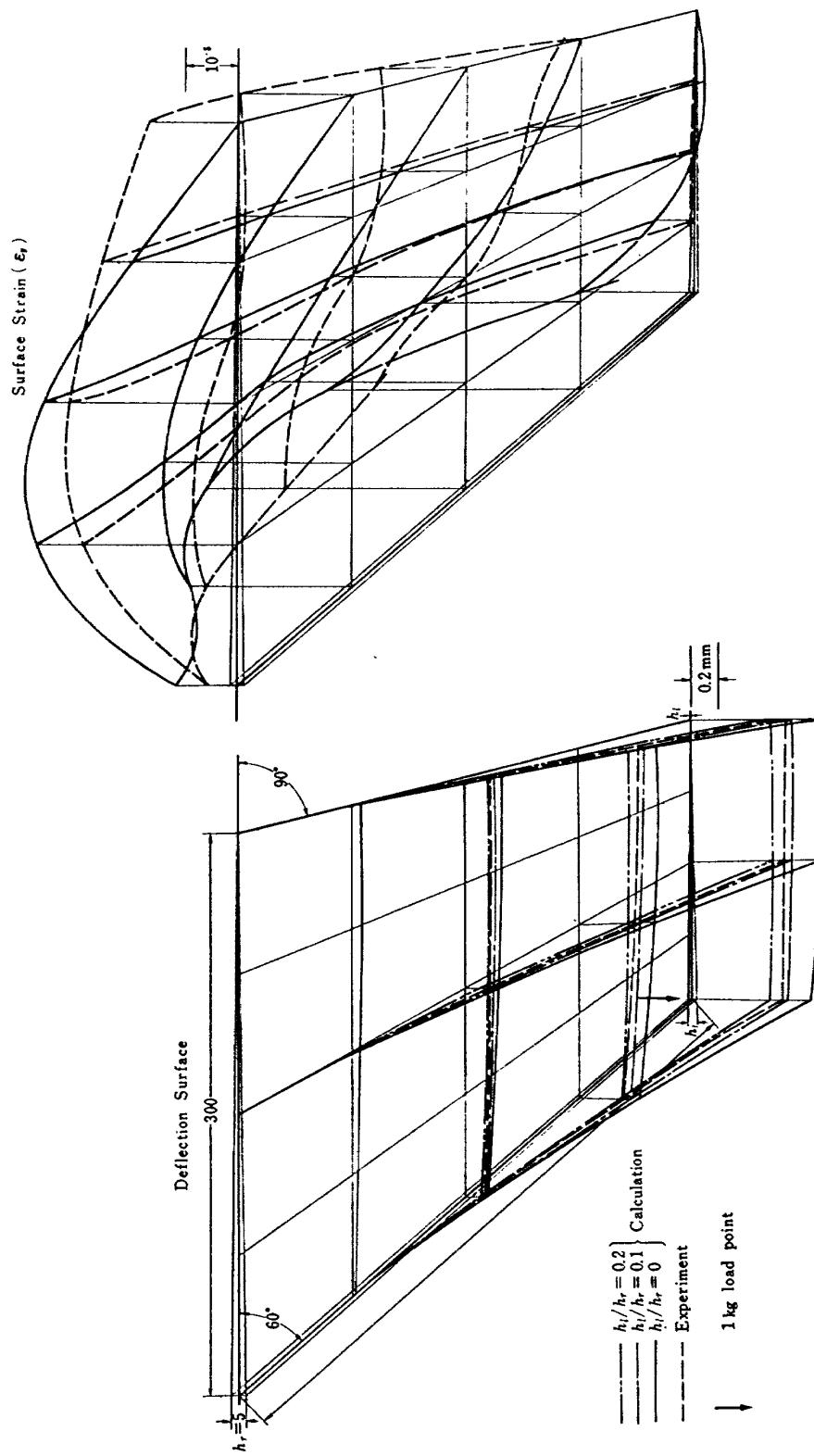


図 10-3 数値計算と試験結果の比較例（ヨード方向直線変厚軟鋼板）

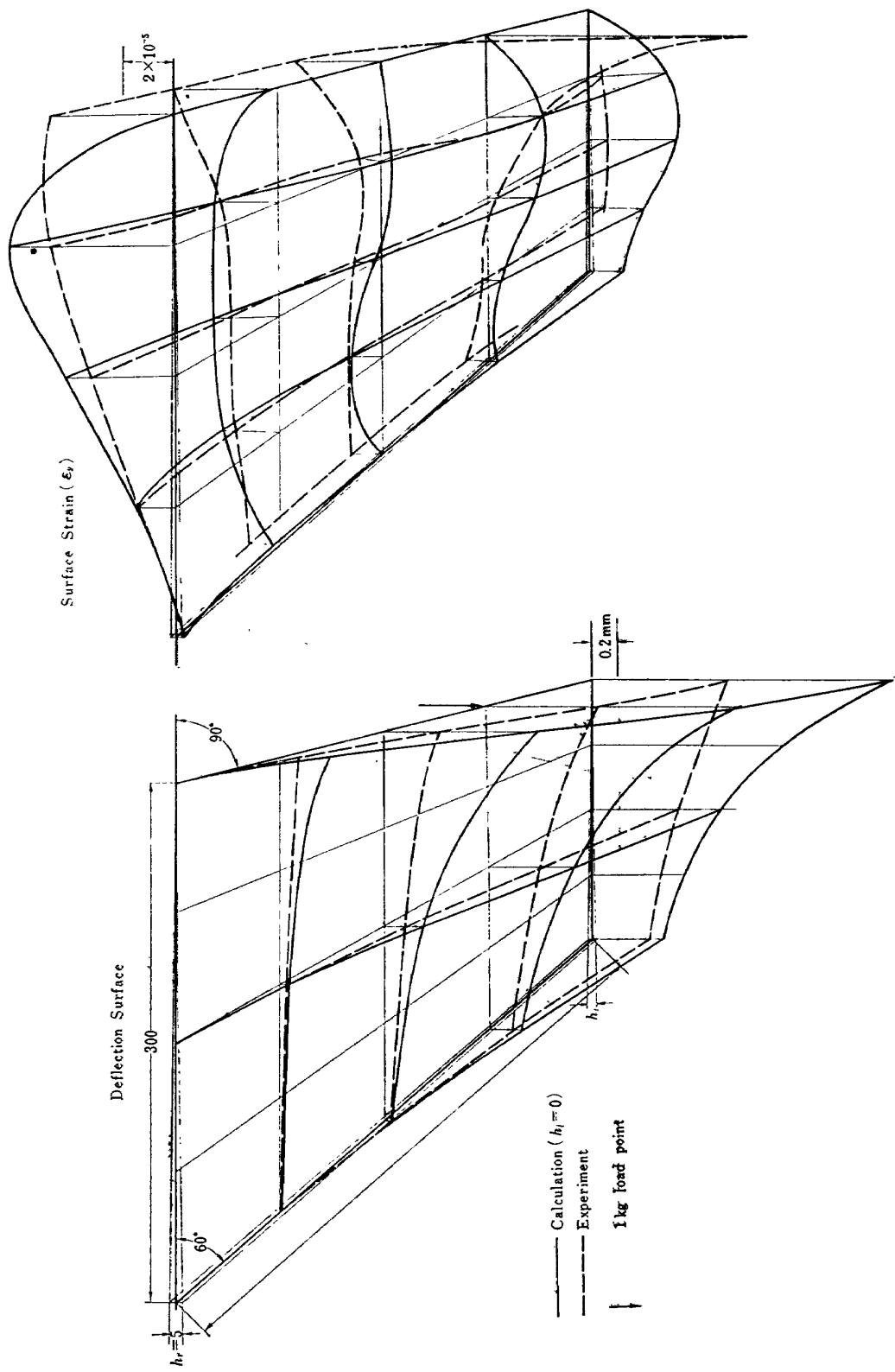


図 10-4 数値計算と試験結果の比較例（コード方向直線交厚板）

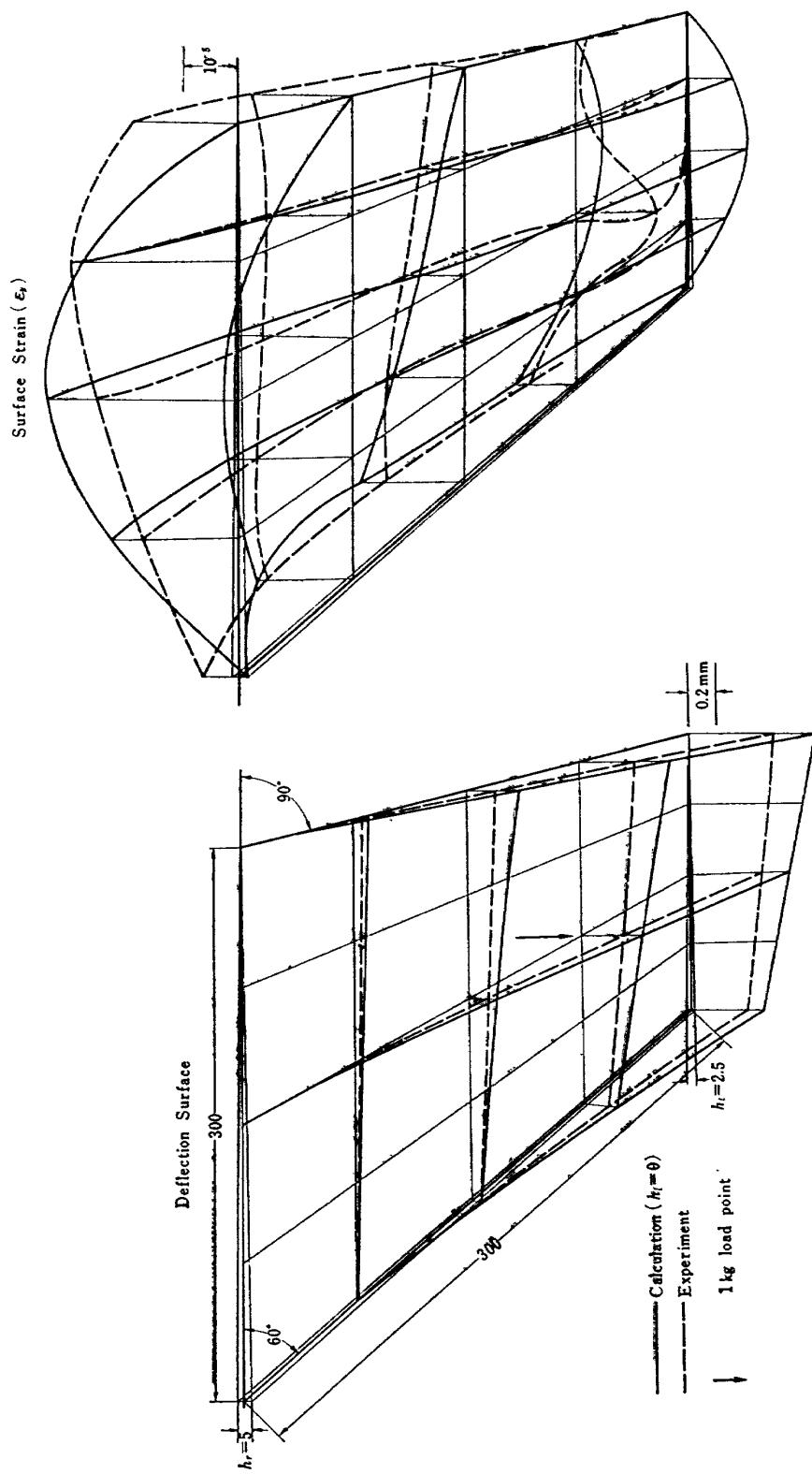


図 10-5 数値計算と試験結果の比較例（コード方向直線変厚軟鋼板）

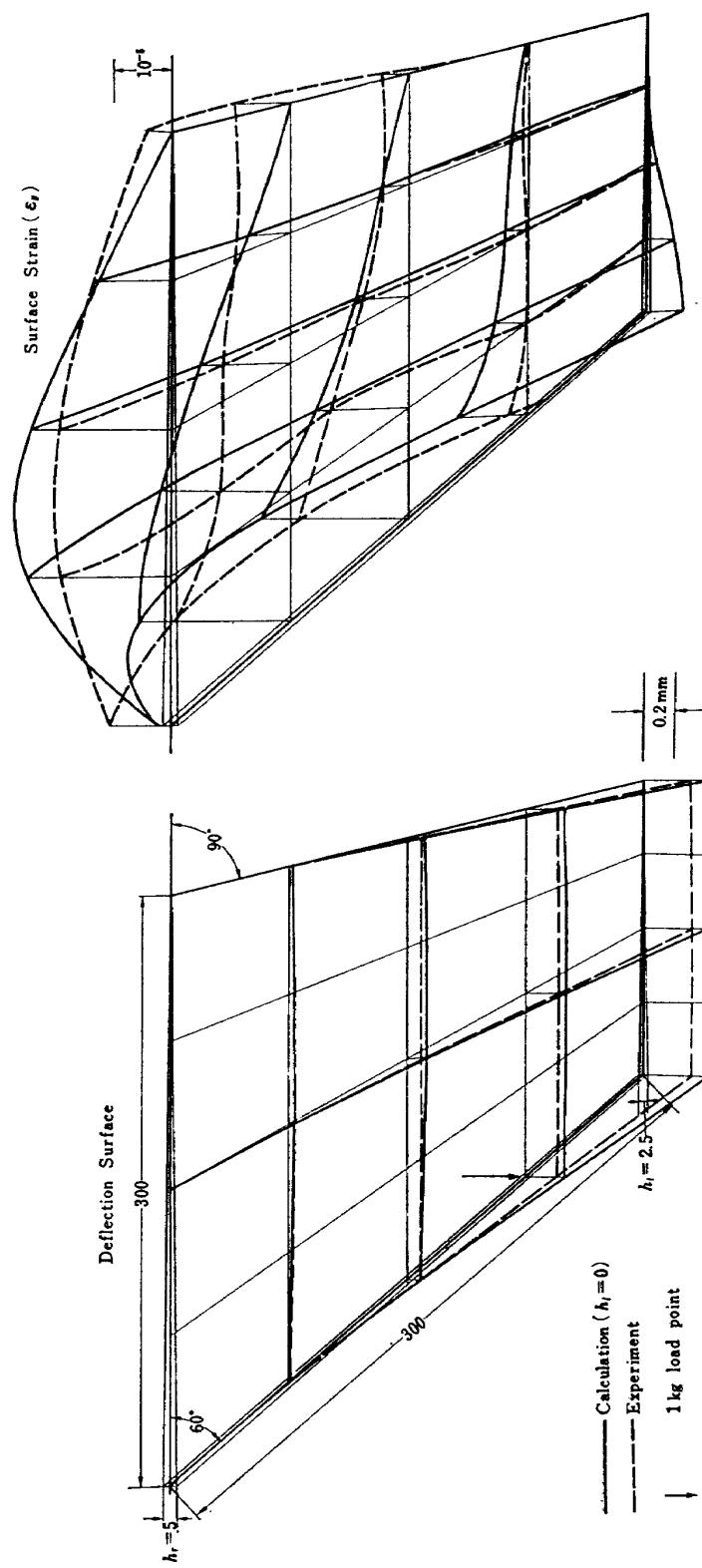
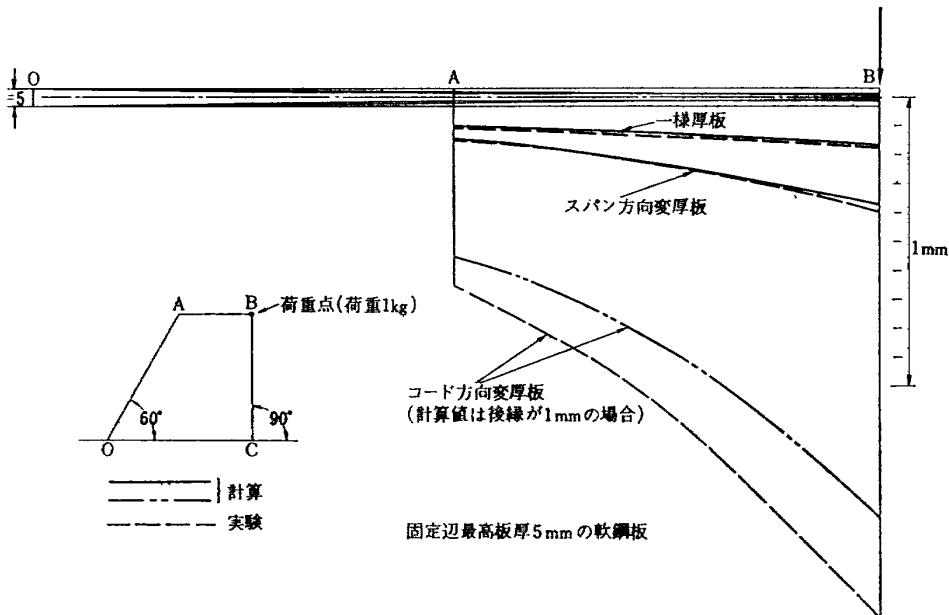
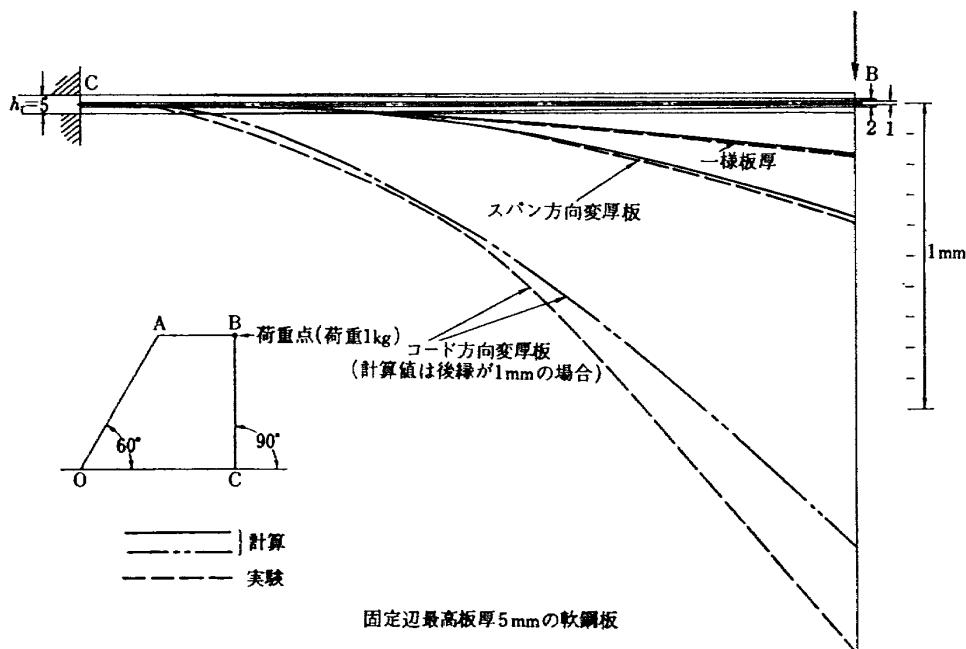
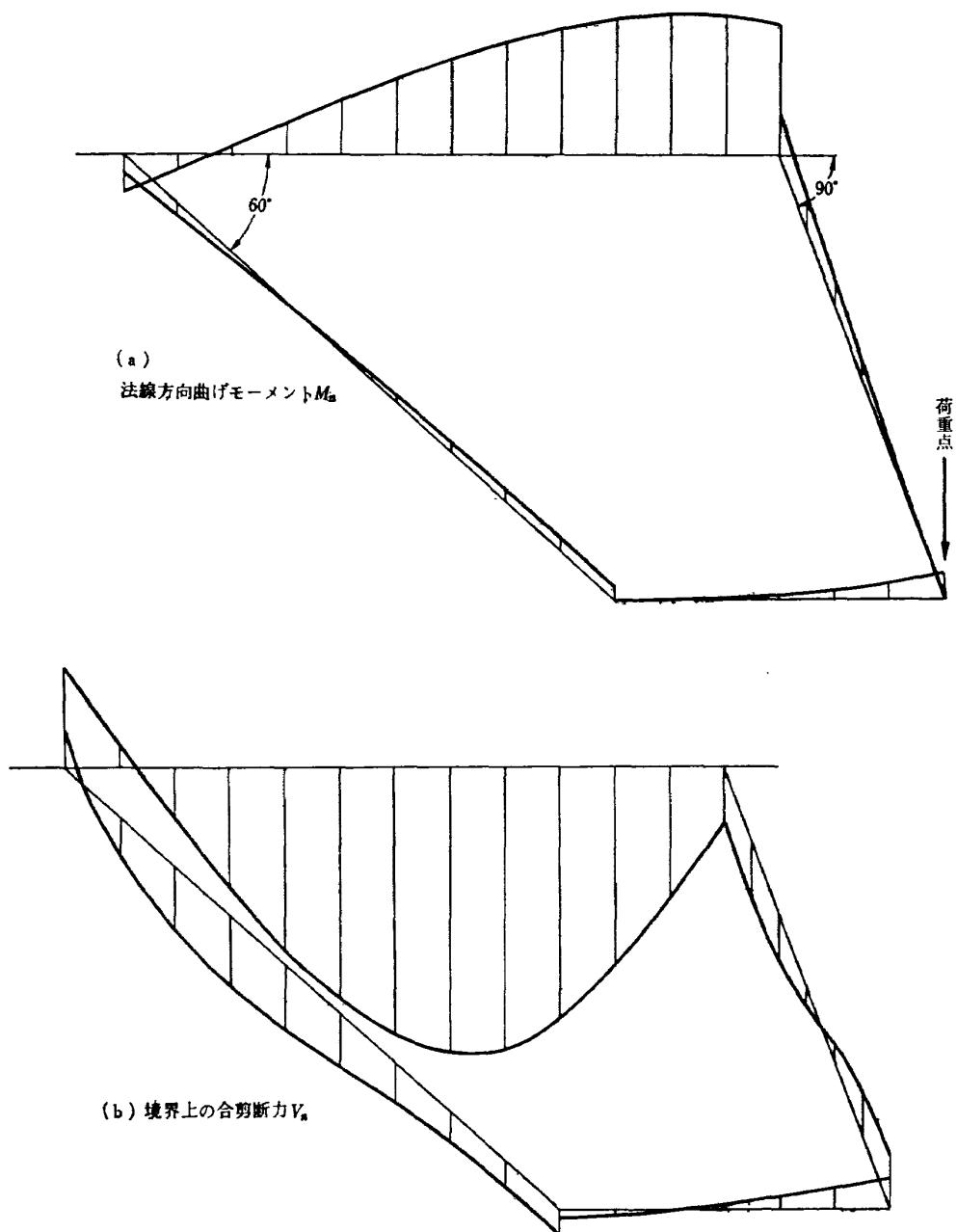


図 10-6 数値計算と試験結果の比較例（コード方向直線交換鋼板）





スパン方向直線変厚片持板
図 13 固定辺と自由辺の M_n, V_n 分布の比較

TR-130T	An Experimental Study of Melting Phenomena in the Axisymmetric Stagnation Region of Thermally Highly-Conducting Materials	Mar. 1967 Yasuhiko AIHARA
TR-131	風があるときのロケットの運動の近似解析およびランチャ角修正法 An Approximate Analytical Solution for Dispersion of Unguided Rockets Due to Wind with its Application to the Calculation of Wind Compensation for Launching	1967年4月 毛利 浩
TR-132	軸方向に補強されたパネルの最大軸圧縮力 (近似解) Ultimate Axial Forces of Longitudinally Stiffened Plate Panels	1967年4月 築地恒夫
TR-133	解離した極超音速流中での Teflon への熱伝達の測定 Measurements of Heat-Transfer to Teflon in Dissociated Hypersonic Flow	1967年4月 野村茂昭
TR-134	高速単段軸流圧縮機の研究 —二重円弧翼の性能— The Aerodynamic Performance of a Single-Stage Axial-Flow Compressor with Double-Circular-Arc Blades	1967年5月 藤井昭一, 西脇英夫 吉田晃, 五味光男 武田克己, 菅原昇
TR-135	同軸型電磁衝撃波管の作動機構 Driving Mechanism of an Electric Shock Tube with a Coaxial Gun	1967年5月 松崎利一
TR-136	Nearly-Free-Molecule-Flow におけるオリフィス型圧力管 Experimental Study of an Orifice-Type Pressure Probe in Nearly-Free-Molecule Flow	1967年5月 恩地瑛, 山本稀義
TR-137	梁板結合構造物の振動 (I) On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (I)	1967年6月 越出慎一, 林洋一 塙武敏

航空宇宙技術研究所報告 138 号

昭和 42 年 7 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武藏野三鷹(0422) 44-9171 (代表)

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2~27~12