

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-141

マトリクス内力法による半張殻構造の  
応力解析について

川 島 矩 郎

1967 年 10 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |         |  |           |   |
|---------|--|-----------|---|
| TR-120  | 航技研フライングテストベッドの姿勢制御方式の検討<br>Analytical and Simulation Studies on the Attitude Control System of the Flying Test Bed  | 1966年11月  | 武田 峻, 堀川 勇 壯<br>小川 敏 雄, 森 幹 彦                               |
| TR-121  | パルスレシオ変調回路およびその修正回路について<br>Some Circuits for Pulse Ratio Modulation and their Modified Circuits  | 1966年11月  | 村 上 力   |
| TR-122  | 失速が起こるような高い迎角で, 調和振動する二次元翼に働く空気力に対する半実験的理論<br>Semi-Empirical Theory to Estimate the Airforces Acting on the Harmonically Oscillating Two-Dimensional Wing at High Angle of Attack Where Separation Can Occur | 1966年12月  | 磯 貝 紘 二   |
| TR-123  | 姿勢制御用空気ジェットノズルの研究<br>Design and Experimental Study of Air Jet Nozzles for the Attitude Control of VTOL Aircraft  | 1966年12月  | 滝 沢 直 人, 西 村 博 史<br>藤 枝 郭 俊, 田 辺 義 一<br>渋谷 昭 義              |
| TR-124  | FM 多重テレメータの動特性<br>Dynamic Characteristics of FM Multi-channel Telemetering System  | 1966年12月  | 新 田 慶 治, 桜 井 善 雄<br>松 崎 良 継                                 |
| TR-125T | Experimental and Calculated Results of Supersonic Flutter Characteristics of a Low Aspect-Ratio Flat-Plate Surfaces  | Jan. 1967 | Eiichi NAKAI, Toshiro TAKAGI, Koji ISOGAI, Toshiyuki MORITA |
| TR-126  | 高負荷燃焼器の箱形模型による実験 (II)<br>Some Experiments on High Intensity Combustor with Partial Models (II)   | 1967年 2 月 | 大 塚 貞 吉, 福 田 広<br>相 波 哲 朗                                   |
| TR-127  | 周波数変換による微小回転角の計測<br>Measurement of Small Rotating Angle by the Frequency Modulation Technique  | 1967年 3 月 | 大 月 正 男, 鈴 木 孝 雄<br>円 居 繁 治                                 |
| TR-128  | 輻射加熱による固体の熱的物性値の測定法<br>Infra-red Radiation Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity of Solid Materials   | 1967年 3 月 | 小 川 敏 一   |
| TR-129  | 金属箔による円管流の熱絶縁<br>Thermal Insulation of Metal Foil for the Case of Circular Pipe Flow   | 1967年 3 月 | 井 上 建 二   |
| TR-130T | An Experimental Study of Melting Phenomena in the Axisymmetric Stagnation Region of Thermally Highly-Conducting Materials  | Mar. 1967 | Yasuhiko AIHARA   |
| TR-131  | 風があるときのロケットの運動の近似解析およびランチャ角修正法<br>An Approximate Analytical Solution for Dispersion of Unguided Rockets Due to Wind with its Application to the Calculation of Wind Compensation for Launching               | 1967年 4 月 | 毛 利 浩   |
| TR-132  | 軸方向に補強されたパネルの最大軸圧縮力 (近似解)<br>Ultimate Axial Forces of Longitudinally Stiffened Plate Panels  | 1967年 4 月 | 築 地 恒 夫   |

# マトリクス内力法による半張殻構造の 応力解析について\*

川 島 矩 郎\*\*

## Semi-Monocoque Structures Solved Numerically by the Matrix Force Method

By Tsuneo KAWASHIMA

A method of stress analysis of those semi-monocoque structures with several cut-outs which are subjected to load distributions of a fairly general type has been developed systematically by J.H. Argyris. This method, the so-called matrix force method, is expected to furnish good facilities of analysis in conjunction with the potentialities of the electronic digital computer.

This paper presents some considerations as to its applicability to the actual structure, the automatic forming of fundamental matrices and the cut-outs and/or modification procedures. A number of uniform cylindrical shells with a large cut-out, supported with flexible rings and stringers, are solved as numerical examples for the purpose of comparing the computed results with theoretical ones. The computation of non-uniform and non-cylindrical structures is also possible by this method.

### 1. ま え が き

航空機の主翼および胴体のような半張殻構造の応力解析法としてはいくつかのすぐれた方法<sup>1),2),4)</sup>をあげることができるが,その中でも J.H. Argyris ら<sup>5),6)</sup>によって系統的に研究されたマトリクス内力法 (Matrix force method) は,電子計算機を前提として開発され,任意の荷重および構造について適用できる点で非常に有用なものと思われる。そこで,当所に新設された HITAC 5020 を用いて,この方法による応力解析を試み,二三の基本マトリクスの自動的な作成法および計算精度の向上など,実用上の問題について考察することにした。

この方法の特徴および計算上のおもな仮定を列挙するとつぎのようになる。

- (1) ダミー荷重法 (Dummy load method) が理論展開のための基礎的手法として用いられている。
- (2) マトリクス演算の形ですべての式が展開されていることと,それらの数値的要素の配列が構造部

材の配列に対応していることによって,理論式が簡潔な形で表わされ,またこれによる計算結果も実際の役割との対比が容易である。

- (3) 高次の不静定構造物の計算においては,まず計算機の容量に応じたいくつかの部分構造を独立に計算して,つぎにそれぞれの接合境界における変位を適合させる方法<sup>7)</sup>が利用できる。
- (4) 部材力としては,せん断力,軸力および曲げモーメントの3種を考え,それぞれの部材の第一義的な強度的役割を計算上のおもな剛性と考える。
- (5) すでに解析された構造物が,その部材剛性を部分的に変更される場合がある。このような場合の応力修正計算は,部材が変更される以前の基本マトリクスを用いておこなわれるので,構造物のフェールセーフ性の検討などにも有用である。

数値計算例として縦通材と円框で補強された円筒殻を扱い,これが開口部を有する場合についても検討した。このような構造物の応力分布は,外板と円框の剛性比,  $(Gtr^4)/(EIL)$ , に影響されることがわかっている<sup>3)</sup>ので,三つのケースについて計算し,理論値との比較から,この計算法による結果が信頼しうること

\* 昭和42年7月20日受付

\*\* 機体第一部

を確認した。

なお、これらの数値計算例がとり上げられた理由は、他の理論値との比較が容易であることと、この結果はつぎの研究課題に対する基礎的な資料として有用であることが主たるものである。他に比較しうる資料が求め難い、非円形断面、非一様補強の、より実際的な半張殻構造についてもこの方法による解析は容易であるが、これは次の機会にゆずることにした。

## 2. 記号および添字

### 2.1 記号

- $A$ : 部材の断面積  $\text{mm}^2$   
 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_{NC}$ : フーリエ係数  
 $b$ : 数個の単位荷重に対応する不静定系の部材力マトリクス  
 $b_0$ : 数個の単位荷重に対応する静定系の部材力マトリクス (二次不静定力を想定して  $\bar{b}_0$  と表わす場合がある)  
 $b_1$ : 数個の単位一次不静定力に対応する静定系の部材力マトリクス (二次不静定力を想定して  $\bar{b}_1$  と表わす場合がある)  
 $b_2$ : 数個の単位二次不静定力に対応する静定系の部材力マトリクス  
 $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, b_{NS}$ : フーリエ係数  
 $C$ : 縦通材における静定部材力系および自平衡部材力系を求めるための変換マトリクス  
 $c_2, c_3, \dots, c_r, \dots, c_{NC}$ : 余弦関数の列マトリクス  
 $D_{11} = b_1^t f b_1, D_{22} = b_2^t f b_2, D_{21} = b_2^t f \bar{b}_1, D_{20} = b_2^t f \bar{b}_0$   
 $E$ : ヤング率  $\text{kg/mm}^2$   
 $e$ : すべての要素が 1 である列マトリクス  
 $f$ : 各部材の撓性マトリクスを要素とするマトリクス (Flexibility matrix corresponding to an assembly of all the elements)  
 $G$ : 有効せん断弾性係数  $\text{kg/mm}^2$   
 $H$ : 初期ひずみの列マトリクス  
 $I$ : 対角要素が 1 で他はすべて 0 である正方マトリクス (Unit matrix)  
 $I$ : 断面二次モーメント  
 $L$ : 円筒殻の等価長さ  $\text{mm}$  (図 9 および文献<sup>3)</sup> を参照のこと)  
 $l$ : 部材寸法  $\text{mm}$   
 $M$ : 曲げモーメント  $\text{kg-mm}$   
 $N$ : 縦通材の配置本数,  $N_c = N/2, N_s = N_c - 1$   
 $O$ : すべての要素がゼロであるマトリクス (Zero

matrix)

- $P$ : 軸力  $\text{kg}$   
 $p$ : 軸力の列マトリクス  
 $Q$ : せん断力  $\text{kg}$   
 $R$ : 荷重の列マトリクス  
 $r$ : 変位の列マトリクス  
 $r$ : 半径  $\text{mm}$   
 $S$ : 部材力の列マトリクス  
 $s_2, s_3, \dots, s_r, \dots, s_{NS}$ : 正弦関数の列マトリクス  
 $t$ : 板厚  $\text{mm}$   
 $U$ : ひずみエネルギー  $\text{kg-mm}$   
 $v$ :  $S$  に対応する部材変位の列マトリクス  
 $X$ : 二次不静定力の列マトリクス  
 $x$ : 座標の列マトリクス  
 $x_1, x_2, \dots, x_N$ :  $1 \sim N$  までの各点の  $x$  座標  
 $Y$ : 一次不静定力の列マトリクス  
 $y$ : 座標の列マトリクス  
 $y_1, y_2, \dots, y_N$ :  $1 \sim N$  までの各点の  $y$  座標  
 $\theta$ : 縦通材の配置角度  $\text{radian}$   
 $\Phi$ : 部材の撓性マトリクス (Flexibility matrix of element)  
 $\phi$ : 撓性係数 (Flexibility coefficient)  
 $\Psi$ : フーリエ係数の列マトリクス  
 $\{\dots\}$ : 列マトリクスであることを示す  
 $[\dots]$ : 対角線マトリクスであることを示す
- ### 2.2 添字
- $a, b$ : 特定の位置または辺に関連することを示す  
 $i, j, k, n, r$ : 級数の一般的な項であることを示す  
 $c$ : 部材除去 (cut-out) を考慮したことを示す  
 $g$ : もとのままの部分に関連することを示す  
 $H$ : 初期ひずみに関連することを示す  
 $h$ : 部材修正がなされる部分に関連することを示す  
 $l$ : 縦通材に関連することを示す  
 $M$ : 曲げモーメントに関連することを示す  
 $m$ : 部材修正を考慮したことを示す  
 $P$ : 軸力に関連することを示す  
 $Q$ : せん断力に関連することを示す  
 $R$ : 荷重負荷点に関連することを示す  
 $Y$ : 不静定力を考慮した部分に関連することを示す  
 $d$ : 補正項であることを示す  
 $t$ : 転置マトリクスであることを示す

### 3. 撓性マトリクス

基礎方程式および解法を述べるまえに、代表的な二三の部材についての撓性マトリクスの概念を明確にしたい。

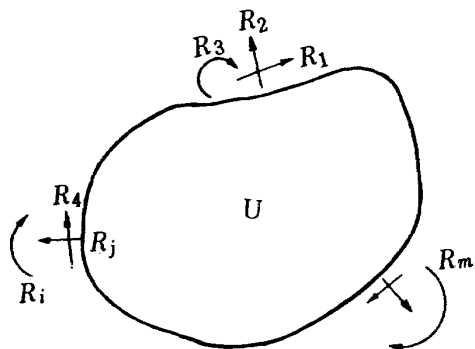


図 1

図1のように、 $m$  個の荷重  $R$  が作用する弾性体を考えると、この弾性ひずみエネルギー  $U$  とすれば、荷重  $R_i$  の負荷点における  $R_i$  方向の変位は、Castigliano の定理から、 $\partial U / \partial R_i$  と与えられる。そこで、荷重  $R_j$  の大きさに対する  $\partial U / \partial R_i$  の変化の割合を撓性係数  $\phi_{ij}$  で表わすと、

$$\phi_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial R_i \partial R_j} \quad (i)$$

とかける。ここで、Maxwell の相反定理から明らかに  $\phi_{ij} = \phi_{ji}$  である。これを要素としてつぎのように配列したマトリクス  $\Phi$  を、図1における弾性体の撓性マトリクスと称する。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{mm} \end{pmatrix} \quad (ii)$$

半張殻構造の構成部材は、板、縦通材、円框部材に分けられるから、つぎのような代表的な部材撓性マトリクスが必要である。

(1) 一定のせん断力を受ける板材

図2のように一定のせん断力  $Q$  を受ける板材の撓性マトリクス  $\Phi_Q$  はつぎのようになる。

$$\Phi_Q = (l_a + l_b) / (2Gtl) \quad (iii)$$

なお、この場合の撓性マトリクスの元数は1である。

(2) 両端に軸力を受ける部材

図3のように、一端で  $P_a$ 、途中では線形に変化して他端で  $P_b$  になるような軸力を受ける一定断面部材の撓性マトリクス  $\Phi_P$  はつぎのようになる。

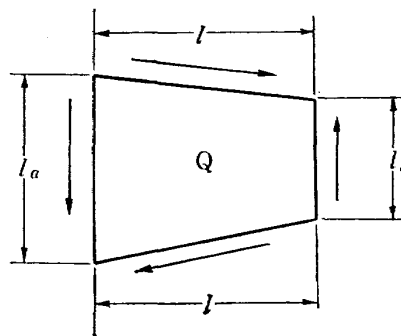


図 2

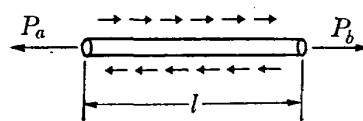


図 3

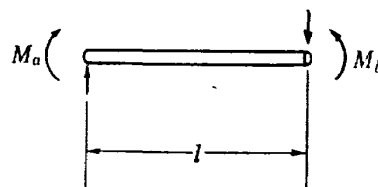


図 4

(3) 両端に曲げモーメントを受ける部材

図4のように、一端で  $M_a$ 、途中では線形に変化して、他端で  $M_b$  になるような曲げモーメントを受ける部材の撓性マトリクス  $\Phi_M$  はつぎのようになる。

$$\Phi_P = \frac{l}{6AE} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (iv)$$

$$\Phi_M = \frac{l}{6AE} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (v)$$

これらの部材撓性マトリクスを要素とするマトリクス  $f$  は、部材マトリクス  $S$  (その要素としてせん断力  $Q$ 、軸力  $P_a, P_b$ 、曲げモーメント  $M_a, M_b$  を有する) の配列に対応して、

$$f = [ \Phi_Q \Phi_P \Phi_M ] \quad (vi)$$

のように配列される。

### 4. 基礎方程式

$n$  次不静定の線形弾性構造物が  $m$  個の荷重  $R$  を受けるとき、この構造物の境界および部材結合点に生ずる  $s$  個の全部材力  $S_R$  はつぎのように表わされる。

$$S_R = b_0 R + b_1 Y \quad (1)$$

ただし

$$S_R = \{ S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_s \}_R \quad (2)$$

$$R = \{ R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_m \} \quad (3)$$

$$Y = \{ Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_n \} \quad (4)$$

で、 $S_k$ ,  $R_i$ ,  $Y_j$  はそれぞれ、 $k$  番目の部材力、 $i$  番目の荷重、 $j$  番目の不静定力である。また (1) 式におけるマトリクス  $b_0$  の第  $i$  列の要素およびマトリクス  $b_1$  の第  $j$  列の要素はそれぞれ、 $R_i=1$  または  $Y_j=1$  とおいたとき、静定系に生ずる部材力である。

部材力  $S_R$  に対する個々の部材変位  $v_R$  は、撓性マトリクスの性質から、つぎの式で表わされる。

$$v_R = f R_R \quad (5)$$

また、不静定力の作用点ではその構造物の連続性が満足される必要があるから、これらの位置における変位  $r_Y$  はすべてゼロであり、ダミー荷重法によって、

$$r_Y = b_1^t v_R = b_1^t f b_0 R + b_1^t f b_1 Y = 0 \quad (6)$$

と表わすことができる。したがって不静定力  $Y$  をつぎのように求めることができる。

$$Y = -D_{11}^{-1} D_{10} R \quad (7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= b_1^t f b_1 \\ D_{10} &= b_1^t f b_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

したがって、(1) 式に (7) 式を代入して

$$S_R = b R \quad (9)$$

ただし

$$b = b_0 - b_1 D_{11}^{-1} D_{10} \quad (10)$$

がえられる。すなわち、静定な三つの基本マトリクス  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $f$  の演算によって、不静定構造物の部材力を求めることができる。

さらにまた、荷重  $R$  の作用点における  $R$  方向への構造物の変位  $r_R$  は、ダミー荷重法と (5), (10) の両式を用いて

$$r_R = D R \quad (11)$$

ただし

$$D = D_{00} - D_{10}^t D_{11}^{-1} D_{10} \quad (12)$$

$$D_{00} = b_0^t f b_0 \quad (13)$$

によって求められる。

つぎに、この構造物が、荷重  $R$  のかわりに  $h$  個の初期ひずみ  $H$  を受ける場合を考える。

$$H = \{H_1 H_2 \cdots H_j \cdots H_h\} \quad (14)$$

この構造物は不静定であるから、初期ひずみから誘起される不静定力  $Y_H$  を考えて、つぎのように部材力  $S_H$  および部材変位  $v_H$  が求められる。

$$S_H = b_1 Y_H \quad (15)$$

$$v_H = f S_H + H \quad (16)$$

ただし

$$Y_H = \{Y_1 Y_2 \cdots Y_j \cdots Y_n\}_H \quad (17)$$

である。

(6) 式を導いたのと同じように、変位  $r_H$  の適合条件を考えると、

$$r_H = b_1^t v_H = b_1^t H + b_1^t f b_1 Y_H = 0 \quad (18)$$

したがって

$$Y_H = -D_{11}^{-1} b_1^t H \quad (19)$$

と求めることができる。(19) 式を (15) および (16) 式に代入すれば

$$S_H = -b_1 D_{11}^{-1} b_1^t H \quad (20)$$

$$v_H = H - f b_1 D_{11}^{-1} b_1^t H \quad (21)$$

となり、初期ひずみによる部材力および部材変位を求めることができる。

以上の計算式は線形弾性域のものであるから、荷重  $R$  および初期ひずみ  $H$  の両方を受ける場合は、これらの解に重ね合わせの原理を適用して解くことができる。

## 5. 部材修正および部材除去に対する計算

前節で考慮した構造物の部材剛性が局部的に修正された場合に対応する応力修正法を考える。まず、前節に用いられた基本マトリクス  $b$ ,  $b_1$ ,  $f$ ,  $S_R$  をつぎのように分割した形で表示する。(添字  $g$  および  $h$  はそれぞれ、もとのままの部分または修正される部分に関連することを示す)

$$\left. \begin{aligned} b &= \begin{bmatrix} b_g \\ b_h \end{bmatrix} \\ b_1 &= \begin{bmatrix} b_{1g} \\ b_{1h} \end{bmatrix} \\ f &= \begin{bmatrix} f_g & 0 \\ 0 & f_h \end{bmatrix} \\ S_R &= \begin{bmatrix} S_g \\ S_h \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

なお、部材撓性の変化を  $f_d$  とすれば、修正された構造物の部材撓性  $f_m$  は

$$f_m = \begin{bmatrix} f_g & 0 \\ 0 & f_h + f_d \end{bmatrix} \quad (23)$$

と表わされる。

ここで、もとの構造物 (基本マトリクスは (22) 式) に初期ひずみ  $H$  が作用して、これによる部材変位が修正された構造物の部材変位と等価になるような、特殊な場合を想定する。初期ひずみは

$$H = \begin{bmatrix} O_g \\ H_h \end{bmatrix} \quad (24)$$

と表わせるから、これを (20) 式に代入して (9) 式と重ね合わせると、この場合の構造物の部材力マトリクス  $S_m$  は

$$S_m = \begin{bmatrix} S_{gm} \\ S_{hm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_g \\ b_h \end{bmatrix} R - \begin{bmatrix} b_{1g} \\ b_{1h} \end{bmatrix} D_{11}^{-1} b_{1h}^t H_h \quad (25)$$

となる。したがって、 $H_h$  が作用する部材における部材変位は、(16) 式から

$$f_h S_{hm} + H_h = f_h [b_h R - b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t H_h] + H_h \quad (26)$$

と求められる。

他方、(23) で表わされる 撓性を有する構造では、(26) に対応する部材ひずみは つぎのように与えられる。

$$[f_h + f_d] S_{hm} = [f_h + f_d] [b_h R - b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t H_h] \quad (27)$$

(26) 式と (27) 式が等価となるような初期ひずみは、

$$H_h = [f_d^{-1} + b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t]^{-1} b_h R \quad (28)$$

であることがわかるから、これを (25) に代入して

$$S_m = b_m R \quad (29)$$

ただし

$$b_m = b - b_1 D_{11}^{-1} b_{1h}^t [b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t + f_d^{-1}]^{-1} b_h \quad (30)$$

がえられる。これは、部材撓性の変化  $f_d$  が与えられれば、もとの構造物の基本マトリクスを用いて、修正された構造物の部材力を計算しうることを示している。

さらにまた、 $f_d \rightarrow \infty$  となる特殊な場合、すなわち、部材除去 (添字  $c$  によって表示する) の場合には、(29)、(30) 式はつぎの形となる。

$$S_c = b_c R \quad (31)$$

ただし

$$b_c = b - b_1 D_{11}^{-1} b_{1h}^t b_{1h}^t [b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t]^{-1} b_h \quad (32)$$

しかしながら、部材除去の計算においては、 $b_{1h}$  および  $b_h$  の形成にさいして、つぎのような考慮が必要である。まず (30) 式から、部材修正に対応させるための部材力の拘束条件として

$$[f_d^{-1} + b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t] H_h = b_h R \quad (33)$$

をうるが、この左辺は  $f_d^{-1} \neq 0$  なる場合は (28) 式のようにとける。しかし  $f_d^{-1} = 0$  なる場合には

$$[b_{1h} \cdot D_{11}^{-1} b_{1h}^t]$$

なるマトリクスが特異マトリクスでないことが必要である。

$b_{1h}$  の各例は、それぞれ、特定の不静定力に対する静定系の部材力で、あらかじめいくつかの応力の平衡条件を満しているため、すべてが独立な系であること

はない。いくつかの行が、他の行に対して従属な関係にあるから、(33) の拘束条件はこれらの従属関係を考慮して、適当に行数を減じた  $b_{1h}$  によって形成されることが必要である。

このような拘束条件の削減は、それぞれの場合に応じて考慮すべきで、一律に論じえない問題である。

## 6. 多重不静定構造物の計算

これまで述べてきたところでは、構造物の不静定力として  $Y$  を代表させているが、実際には、一次、二次、三次不静定力のように、いくつかの不静定力群に分けて取り扱うのが便利なが多い。この報告における解析例でも、図7のような縦通材に生ずる不静定力と、図8にみられる closed ring に生ずる不静定力とは、かなり性質の差異がある。また、いくつかの部分構造について、それらの接合境界に作用する不静定力を決定する場合についても、この節の手法が用いられる必要がある。この考え方は、同時に、計算プログラムの作成上も、それを容易にするために重要である。

まず、不静定力  $Y$  のほかに、不静定力  $X$  も考慮する必要のある構造物を想定する。この場合には、 $Y$  のみを不静定力とした部材力マトリクス  $b_0$ 、 $b_1$  は、もはや静定ではないから、二次不静定力  $X$  についてつぎのように解かれなければならない。

$$\bar{b}_0 = b_0 - b_2 D_{22}^{-1} D_{20} \quad (34)$$

$$\bar{b}_1 = b_1 - b_2 D_{22}^{-1} D_{21} \quad (35)$$

ただし

$$D_{22} = b_2^t f b_2, \quad D_{21} = b_2^t f \bar{b}_1, \quad D_{20} = b_2^t f \bar{b}_0 \quad (36)$$

なお、 $\bar{b}_0$  の第  $i$  列要素、 $\bar{b}_1$  の第  $j$  列要素および  $b_2$  の第  $k$  列要素はそれぞれ、不静定力  $X$ 、 $Y$  の両方について静定にとられた基本系が、 $R_i=1$ 、 $R_j=1$  または  $X_k=1$  をうける場合の部材力を表わす。かくして、(34) および (35) から  $b_0$ 、 $b_1$  が求まれば、(9) および (11) 式から部材力および変位が求められることになる。また、部材修正および部材除去に対する計算式も、(29) および (31) 式に対応して、つぎのように求められる。

$$S_m = b_m R \quad (37)$$

ただし

$$b_m = b - [b_1 D_{11}^{-1} b_{1h}^t + b_2 D_{22}^{-1} b_{2h}^t] \times [b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t + b_{2h} D_{22}^{-1} b_{2h}^t + f_d^{-1}]^{-1} b_h \quad (38)$$

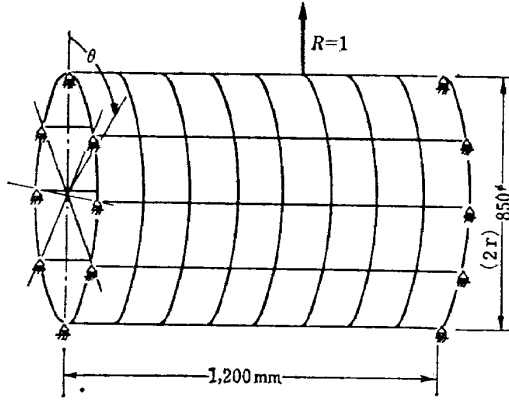


図 5

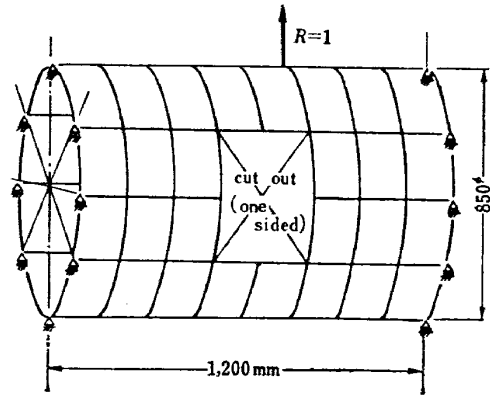


図 6

$$S_c = b_c R \quad (39)$$

ただし

$$b_c = b - [b_1 D_{11}^{-1} b_{1h}^t + b_2 D_{22}^{-1} b_{2h}^t] \\ \times [b_{1h} D_{11}^{-1} b_{1h}^t + b_{2h} D_{22}^{-1} b_{2h}^t]^{-1} b_h \quad (40)$$

部材除去の場合には勿論，その拘束条件について，前節と同じく考慮する必要がある。第三次不静定力についても，これと同じ手順を繰り返すことができる。

## 7. 数値計算例

まえがきに述べた理由から，数値計算例としては図5のような補強円筒殻と，これに開口部をつけた図6のような構造をとり上げた。縦通材の剛性，外板の厚さ，円框部材の剛性，円框および縦通材の配置間隔などはそれぞれ一定であるとみなしている。構成部材の強度的役割はつぎのように仮定した。

- (1) 外板は，せん断力のみを受けもつ。(各板場内で一定のせん断流を仮定する)
  - (2) 縦通材は軸力のみを受けもつ。
  - (3) 円框部材は，面内せん断力，軸力，曲げモーメントを受けもつ。
  - (4) 応力とひずみの関係は線形弾性域内で考える。
- また，計算の順序はつぎの段階に分けた。

- (1) 縦通材の軸力系に第一次不静定力  $Y$  を考える。
- (2) 円框部材の連続条件として第二次不静定力  $X$  を考える。
- (3) 図5の構造を解き，この計算に用いた基本マトリクスに，の開口部まわりの拘束条件を適用して，図6の構造を解く。

不静定力系を一次，二次に分ける場合，一般には，(34)，(35) 式による計算をおこなって， $b_0$ ， $b_1$  マトリクスがえられるのであるが，これらのマトリクスは，外板，縦通材，円框などの部材群に対する要素から構成されていて，その強度的役割に応じた計算の省略が

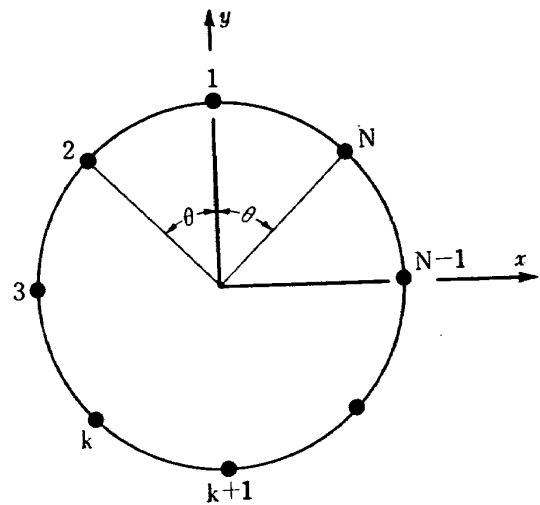


図 7

可能である。この計算例では，円框部材についてのみ，(34)，(35) の演算が必要であった。また外板の部材力マトリクスは振り荷重に対するもののほかは，縦通材の部材力マトリクスから従属的に計算することができた。そこで，つぎのように各部材群に分けた記述をおこなうことにした。

まず，図7のように縦通材が円周上に等間隔に配置されている場合を考える。この  $N$  本の縦通材の軸力をつぎのようなフーリエ級数で表示することができる。

$$p_k = \sum_{n=0}^{N_c} a_n \cos n(k-1)\theta + \sum_{n=1}^{N_s} b_n \sin n(k-1)\theta \\ (k=1, 2, \dots, N) \quad (41)$$

または

$$p_k = a_0 + a_1 x_k / r + b_1 y_k / r \\ + \sum_{n=2}^{N_c} a_n \cos n(k-1)\theta + \sum_{n=2}^{N_s} b_n \sin n(k-1)\theta \\ (k=1, 2, \dots, N) \quad (41')$$

ただし  $N$  は縦通材の配置本数  
 $N_c = N/2$



$$N_s = N/2 - 1$$

$$\theta = 2\pi/N$$

$a_n, b_n$  はフーリエ係数

$x_k, y_k$  は第  $k$  番目の縦通材の位置の座標

を表わしている。(41) 式をマトリクス表示すれば

$$p = C^t \Psi \quad (42)$$

ただし

$$p = \{p_1 p_2 \dots p_k \dots p_N\} \quad (43)$$

$$\Psi = \{a_0 a_1 b_1 \dots a_n a_n \dots a_{Nc} \dots b_n b_n \dots b_{Ns}\} \quad (44)$$

$$C^t = [e \ x/r \ y/r \ ; \ C_2 C_3 \dots C_r \dots C_{Nc} \ ; \ S_2 S_3 \dots S_r \dots S_{Ns}] \quad (45)$$

$$e = \{1 \ 1 \dots 1 \dots 1\} \quad (46)$$

$$x = \{x_1 x_2 \dots x_k \dots x_N\} \quad (47)$$

$$y = \{y_1 y_2 \dots y_k \dots y_N\} \quad (48)$$

$$c_r = \{1 \cos r\theta \dots \cos r(k-1)\theta \dots \cos r(N-1)\theta\} \quad (49)$$

$$s_r = \{0 \sin r\theta \dots \sin r(k-1)\theta \dots \sin r(N-1)\theta\} \quad (50)$$

となる。縦通材に関連する部材力マトリクスに添字  $l$  をつけて  $b_{0l}, b_{1l}$  とかくと、これらはそれぞれ、単位荷重に対して静定な軸力系または自平衡軸力系であると同時に、各列が相互に線形独立な系であるようにきめられればよい。そこで、Unit matrix  $I$  を用いて、

$$C[b_{0l} \ ; \ b_{1l}] = I \quad (51)$$

$$\text{または} \quad [b_{0l} \ ; \ b_{1l}] = C^{-1} \quad (52)$$

なる部材力系を仮に想定してみると、 $[b_{0l} \ ; \ b_{1l}]$  の各列は次のような性質をもつことがわかる。

- (1) 第1列は単位の軸方向合成荷重に対して静定な軸力系を与える。
- (2) 第2列は  $y$  軸まわりに  $r \times 1$  なる曲げモーメント

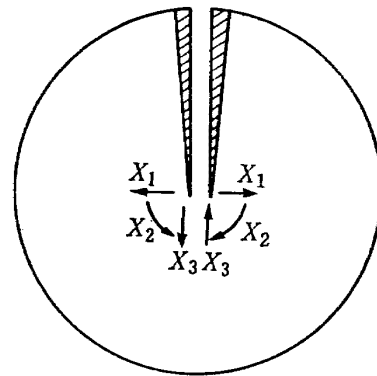


図 8

がかかる状態に対して静定な軸力系と考える。

- (3) 第3列は  $x$  軸まわりに  $r \times 1$  なる曲げモーメントがかかる状態に対して静定な軸力系であると考える。

- (4) 各列とも、相互に直交で線形独立な系である。

- (5)  $b_{1l}$  の各列は、自平衡な軸力系である。

- (6)  $x, y$  の要素が、円周上の座標でなくても、また等間隔に配置されていなくても (1)~(5) のこれらの性質を失なわない。

したがって、 $b_{0l}$  の第2列と第3列の要素に  $1/r$  を乗じたものを、改めて  $b_{0l}$  とおきかえると、きわめて精度のよい、しかも、計算機に自動作成させやすい軸力系がえられる。

外板に関する部材力マトリクス  $[b_{0q} \ ; \ b_{1q}]$  は、振り荷重に対する静定部材力系を  $[b_{0l} \ ; \ b_{1l}]$  の第1列に入れかえ、そのほかの列の要素は、せん断力と軸力との釣合条件から求められる。

円筒部材に関する部材力マトリクス  $[b_{0r} \ ; \ b_{1r}]$  は、以上の条件と、図8の二次不静定力  $X$  を考慮した部

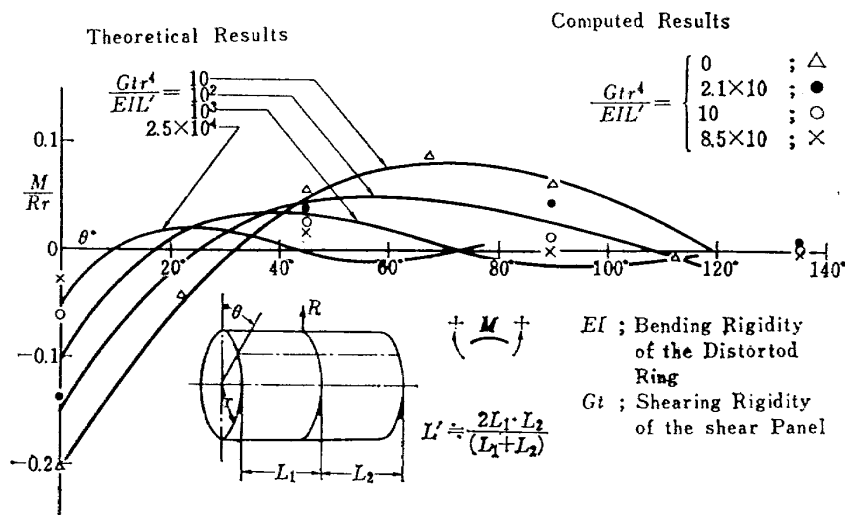


図 9 荷重をうける円筒の曲げモーメント分布 ( $L_1, L_2$  は支持円筒と負荷円筒の間隔)

材力マトリクス  $b_{2r}$  を用いて、(34) および (35) 式から計算される。

以上によって、外板、縦通材、円框の各部材群に対する部材力マトリクスがきまれば、 $b_0$ ,  $b_1$ ,  $f$  の基本マトリクスの構成はきわめて容易であり、さいごに (9) 式を適用して、全部の部材力が計算されるわけである。

なお、外板および円框部材に関する部材力マトリクスは、基本的には、文献<sup>5)</sup> のマトリクス演算式を用いて形成されるが、最初に求められる  $[b_{0i}; b_{1i}]$  マトリクスの精度が、本報告の方法ではきわめてよいので、 $[b_{0q}; b_{1q}]$ ,  $[b_{0r}; b_{1r}]$ ,  $b_{2r}$  などの、それ以後のマトリクスも、精度があがっている。

図9は、以上の方法によって計算された円框の曲げモーメント分布を示すもので、縦軸に無次元モーメント、 $M/(Rr)$ 、横軸に角度  $\theta$  をとり、外板のせん断剛性と円框の曲げ剛性の比、 $(Gtr^4)/(EIJ)$ 、をパラメータとして表わした。また他の理論値との比較のため、文献<sup>3)</sup> の値を曲線でかきそえた。これをみると、計算値、理論値ともに、その分布形の推移が同じ傾向を示し、縦通材の配列が多い構造ならば、各計算点は、理論曲線上に一致するものと思われる。剛性比  $(Gtr^4)/(EIJ)$  の値は、 $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  の三種について計算したが、その値が大きくなる(円框剛性は相対的に低下する)につれて、円框の曲げは局所的なものとなることわかる。この影響を縦通材の軸力分布についてしらべると、図 10, 12, 14 のとおりであり、円框の相対的な剛性が低くなると、やはり、荷重点周辺の軸力が大で、局所的な効果が大きい。また、これらに対応して、図 11, 13, 15 に、開口部の影響を計算した結果を示した。これによって、円框剛性が低下した状況と、除去された部材の力が、隣接する部材に対して局所的に強い影響をおよぼしていることがわかる。しかし、開口部まわりの部材の応力集中などは、これではまだ求めがたい。この方法は、構造物全体の応力分布を傾向的にはあくする場合に有用である。そして、このような局部のみを、境界条件が知られた状態で、改めてマトリクス法を適用して解析することが必要であると思われる。

## 8. む す び

高次不静定構造物の応力計算法として、マトリクス内力法を考察し、計算精度の向上と、基本マトリクス

の自動的作成を目的とした若干の改良をおこなって、半張殻構造の応力解析に適用した。

数値計算の例では、外板と円框の剛性比を変化させて、その影響を検討した結果、つぎのような傾向があきらかになった。

- (1) 剛性比、 $(Gtr^4)/(EIJ)$  の値が大きくなる(円框の相対的な剛性が低下する)につれて、荷重点周辺の縦通材、円框部材などは局所的に大きな内力を生じる。
- (2) 単純な梁の曲げ理論をこのような補強円筒殻の計算に適用するのは危険であって、とくに、航空機胴体のように Flexible な円框で補強された半張殻構造の場合では、ここに述べたような計算法を適用することが必要である。
- (3) 開口部まわりなどの局所的な応力計算には、さらに、この方法を改良して適用する必要がある。しかし、全体的な応力の分布を知るには、十分に実用的である。

なおこの方法は、従来の解析的手法では解析しがたい。非円形断面の構造や、非一様補強の構造なども解析できるので、実際的な応力計算法として有用である。

さいごに、この報告は、上山忠夫機体第一部長および、同部竹内和之室長のご指導と助言によるものであることを記す。

## 文 献

- 1) W.J. Goodey; Matrix Analysis of the Circular Conical Fuselage  
Aircraft Engng. Jan.~Mar. 1957
- 2) E.F. Bruhn; Analysis and Design of Flight Vehicle Structures  
Tri-State Offset Co. Jan. 1965
- 3) R.A.S. Data Sheets (Structure) Vol. IV
- 4) H.G. Mc Comb; Stress Analysis of Circular Semi-Monocoque Cylinders with Cut-outs  
NACA Rept. 1251, 1955
- 5) J.H. Argyris; Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft  
Butterworths 1963
- 6) F. de Veubeck; Matrix Method of Structural Analysis  
Pergamon Press 1964
- 7) J.S. Przemieniecki; Joining of Complex Substructures by the Matrix Force Method  
J. Aircraft May~June 1966

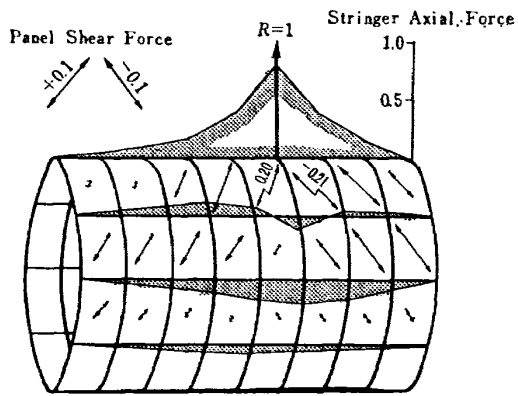


図 10  $(Gtr^4)/(EIL) = 10^3$

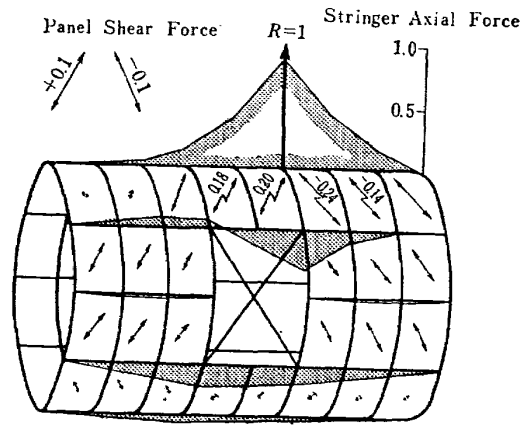


図 11  $(Gsr^4)/(EIL) = 10^3$ , 開口部つき

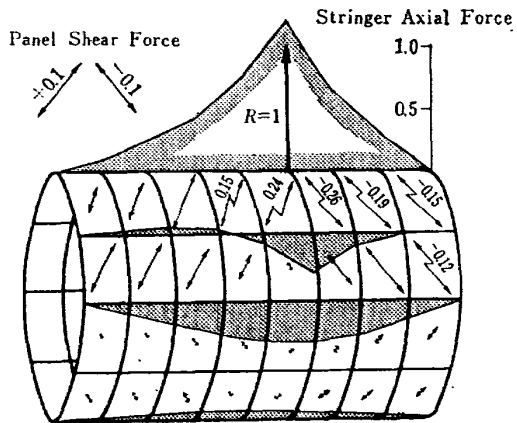


図 12  $(Gtr^4)/(EIL) = 10^4$

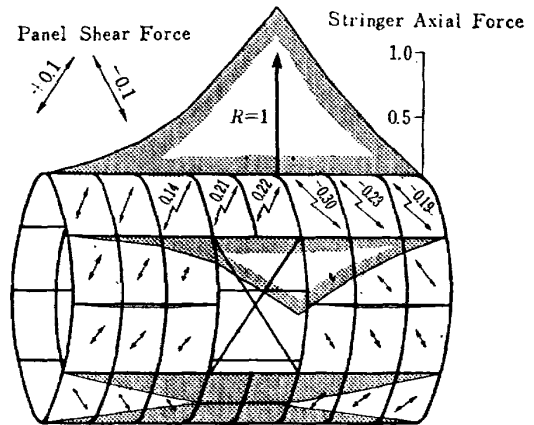


図 13  $(Gtr^4)/(EIL) = 10^4$ , 開口部つき

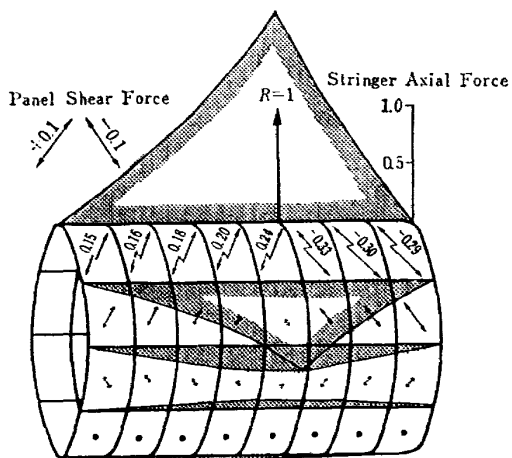


図 14  $(Gtr^4)/(EIL) = 10^5$

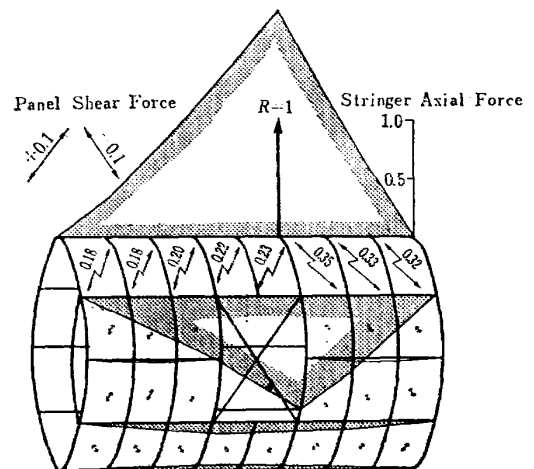


図 15  $(Gtr^4)/(EIL) = 10^5$ , 開口部つき

- |        |   |         |                                      |
|--------|---|---------|--------------------------------------|
| TR-133 | 解離した極超音速流中での Teflon への熱伝達の測定<br>Measurements of Heat-Transfer to Teflon in Dissociated Hypersonic Flow  | 1967年4月 | 野村茂昭                                 |
| TR-134 | 高速単段軸流圧縮機の研究<br>—二重円弧翼の性能—<br>The Aerodynamic Performance of a Single-Stage Axial-Flow Compressor with Double-Circular-Arc Blades                             | 1967年5月 | 藤井昭一, 西脇英夫<br>吉田晃, 五味光男<br>武田克己, 菅原昇 |
| TR-135 | 同軸型電磁衝撃波管の作動機構<br>Driving Mechanism of an Electric Shock Tube with a Coaxial Gun  | 1967年5月 | 松崎利一                                 |
| TR-136 | Nearly-Free-Molecule-Flow におけるオリフィス型圧力管<br>Experimental Study of an Orifice-Type Pressure Probe in Nearly-Free-Molecule Flow                                  | 1967年5月 | 恩地 瑛, 山本稀義                           |
| TR-137 | 梁, 板結合構造物の振動 (I)<br>On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (I)   | 1967年6月 | 越出慎一, 林 洋一<br>埴 武敏                   |
| TR-138 | 変厚片持板の静撓みについて<br>Deflection Analysis of Variable Thickness Cantilever Plate   | 1967年7月 | 埴 武敏, 越出慎一                           |
| TR-139 | 多発動機付ヘリコプタの片発停止時における最適着陸操作—前進速度0の場合—<br>Optimal Vertical Descent Procedure with Partial Power of Multi-Engined Helicopters<br>—The Case of Rejected Take-Off— | 1967年8月 | 古茂田 真幸                               |
| TR-140 | 流線法によるダクト流れ<br>Streamline-Curvature Approach to Duct-Flow Problems  | 1967年9月 | 藤井昭一, 宇野威信                           |

---

## 航空宇宙技術研究所報告141号

昭和42年10月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1880 電話武蔵野三鷹(0422) 44-9171 (代表)
印刷所	株式会社 東京プレス 東京都板橋区桜川 2~27~12

---