

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-165

有限要素法による箱型梁の解析

三本木茂夫

1968年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-140 流線法によるダクト流れ
Streamline-Curvature Approach to Duct Flow Problems 1967年9月 藤井昭一, 宇野威信
- TR-141 マトリクス内力法による半張殻構造の応力解析について
Semi-Monocoque Structures Solved Numerically by the Matrix Force Method 1967年10月 川島矩郎
- TR-142 動的模擬模型による姿勢のオンオフ制御実験
Experimental Studies on Some On-Off Attitude Control Systems Using a Dynamic Model 1967年10月 樋口一雄, 堀川勇壮
村上力, 小川敏雄
真柳光美
- TR-143 高負荷燃焼器の一次燃焼領域の研究
Experimental Studies on the Primary Zone of High Intensity Combustors 1967年10月 大塚貞吉, 鈴木邦男
相波哲朗, 石井浅五郎
広瀬健樹
- TR-144 円管流の非定常熱伝達
—第2報 薄い壁の場合—
Transient Heat Transfer through a Thin Circular Pipe Due to Unsteady Flow in the Pipe 1967年11月 林 二 識, 井上建二
- TR-145 ロケット用耐熱材料の研究
Study on the Heat Insulation Materials for Rocket 1967年11月 古田敏康
- TR-146 半導体歪ゲージを用いる小型高感度加速度計の研究
Study on the Miniature Type High Sensitivity Accelerometer Using Semiconductor Strain Gages 1967年11月 田畑浄治, 大坪孔治
滝沢 実
- TR-147 固体ロケットモータのノズルにおける熱伝達の実験的研究
—プロペラント内へ添加されたアルミニウムの影響—
An Experimental Investigation of Heat Transfer in the Nozzle of High-Aluminized Solid Rocket 1968年2月 五代富文, 湯沢克宜
伊藤克弥, 西村久男
- TR-148 失速角以上で振動する翼のまわりの流れの観察
—失速フラッタの研究(I)—
Optical Observation of the Separated Elow around an Oscillating Aerofoil at High Mean Angles of Attack with Special Reference to Stall Flutter 1968年2月 中村泰治, 磯貝紘二
江尻 宏
- TR-149 よどみ点におけるグラファイトのアブレーションの実験的研究
An Experimental Study of the Ablation of Graphite in the Stagnation Region 1968年2月 相原康彦, 野村茂昭
渡辺泰夫
- TR-150 強化プラスチックの熱的物性値について
(輻射加熱による測定)
The Measurement of Thermal Properties of Reinforced Plastics at Temperatures up to 150°C (Infra-red Radiation Method) 1968年2月 小川 敏一, 野口義男
- TR-151 空気力学的加熱の少ない極超音速飛しょう体
Minimum Heat Transfer Body at Hypersonic Speeds 1968年3月 相原康彦
- TR-152 二次元二重円弧翼列の遷音速実験
High Speed Tests of Compressor Cascades with Double Circular Arc Blade Sections 1968年3月 近藤 博, 藪田光弘
山崎紀雄, 古川 昇
- TR-153 アーク加熱衝撃波管による物体のまわりの高温気流の研究
Study of High Temperature Flow around Body Using an Arc-Driven Shock Tube 1968年4月 松崎利一, 上瀬千春

有限要素法による箱型梁の解析*

三本木茂夫**

Applications of the Finite Element Method to Box Beams

by Shigeo SANBONGI

This paper describes the application of finite element method to the wing type structures subjected to bending and torsional loading. In plane forces and axial forces are assumed for each of cover skin and stringer elements. For spar, stiffness matrix of tapered spar element with angle cross section flanges is derived by extending the Melosh's method.

This stiffness matrix presents excellent convergence characteristics. For numerical examples displacement distribution of swept-back box beam and stress distribution of box beam with trapezoidal cross section are computed.

Good agreement is found between the computed values and experimental results which have been obtained by other investigators.

記号

e_1, e_2	桁要素の図心位置
h_1, h_2	桁要素の高さ
q	変形パラメータ
t	桁ウェブの板厚
x, y, z	全体座標系
x', y', z'	局部座標系
A	三角板要素の面積, 縦通材の断面積
E	ヤング率
F_H, F_B, F_T	L型フランジの寸法
GJ	桁要素の振り剛性
$[K_w]$	ウェブだけの桁の剛性マトリックス
$[K_L]$	L型フランジ付の桁の剛性マトリックス
$[K_T]$	桁の振り剛性マトリックス
$[K'_T]$	桁の振り剛性マトリックス (フランジの曲げを考慮)
$[K_P]$	三角形板要素の剛性マトリックス (6自由度)
$[K'_P]$	三角形板要素の剛性マトリックス (9自由度)
$[K_B]$	縦通材要素の剛性マトリックス (2自由度)
$[K'_B]$	縦通材要素の剛性マトリックス (6自由度)

$[K]$	全体座標系での剛性マトリックス
$[L]$	部分変換マトリックス
L	桁要素の長さ, 縦通材要素の長さ
$[S]$	応力-歪マトリックス
$[T]$	座標変換マトリックス
T	トルク
$[T_S]$	桁要素の座標変換マトリックス
$[T_P]$	三角形板要素の座標変換マトリックス
V	歪エネルギー
$[W]$	歪-変形マトリックス
$[\delta]$	桁要素の節点変位
$[\epsilon]$	桁要素内の歪
ν	ポアソン比
σ_f	桁フランジの軸応力
τ_w	桁ウェブの平均剪断応力
$[\phi]$	節点変位-変形マトリックス

1. はしがり

大型電子計算機の発達にともない, マトリックスによる構造解析法が盛んに研究されているが, 中でも有限要素法 (変位法) は広範囲の弾性問題に関して要素の物理的な近似および計算法がよく整理されており, 一般性のあるプログラムが作りやすい利点を持っている。したがって骨組構造, 2次元弾性問題等については, 熱応力問題も含めて一応どんな幾何学形状および

* 昭和 年 月 日受付

** 機体第二部

荷重条件のものでも希望する精度で計算が行なえるようなプログラムがすでに各方面で開発されている。しかしながら、梁、棒、板などの要素から構成されている一般の複合構造物については、種々の物理的近似法¹⁾が用いられており、それぞれ一長一短があって線形問題の範囲でもまだ現在の段階では決定的なものではできていないようである。

今回の研究は、複合構造物の応力解析の第一歩として、翼構造のように断面形が上下対称な箱型梁を取扱った。直線桁要素を用いた解析例はすでに文献類^{1,2,8)}に報告されているので、今回は直線桁も含めてテーパ桁要素の剛性マトリックスを導びき、断面が上下対称であれば断面がスパン方向に任意に形状変化している場合の箱型梁のたわみおよび応力を解析する計算プログラムを作り、計算精度のチェックとして他の研究者が行なった実験値との比較を行ない良く一致することを確認した。

2. 計 算 法

次のような仮定を設ける

- (i) 梁の断面形は上下対称で、外板、縦通材、桁リブの構造要素から構成されている。
- (ii) 外板は面内力、縦通材は軸力のみを負担する
- (iii) 桁およびリブは、面内の曲げモーメント、剪断力、振りモーメントを負担する。
- (iv) 外荷重は梁の中立面に垂直な場合だけを考える。

上の仮定で、(i)、(ii) および (iv) は航空機翼構造の計算モデルとして従来から採用されているものであるが、(iii)における振り剛性は無視しているのが普通であり、また応力法⁷⁾では桁ウェブを一定剪断流パネ

ルとして扱う場合が多い。

2.1 各要素の剛性マトリックス

(i) 桁およびリブ

箱型梁の解析では、この剛性マトリックスが最も影響を与えるので、これに関する研究も多行なわれているが^{1,2,8)}まだ完全なものでは得られていない。ラーメン構造のように梁要素だけから構成されている場合には、たわみ量 w と回転変位 θ によって一義的に梁要素の剛性マトリックスを計算できるが、箱型梁の場合には仮定により回転変位 θ を導入しないので、 u, v, w の変位によって関係式を処理しなければならない。初期の研究では梁理論 (beam theory) の式を直接に置き換えて計算を行なった例もあるが、要素分割が粗いと非常に誤差が大きく、また分割を細かにしても厳密値に対する収束が遅いことが報告されている^{2,5)}。

桁の剛性マトリックスを求める手法はいくつかあるが、Melosh 等²⁾が一様断面桁に関して導びいたものは要素分割が比較的粗い場合でもかなり近似が良く、厳密値に対する収束も早いことを数値計算によって著者は確認したので、今回はその手法を拡張して断面が直線変化する場合も含めて剛性マトリックスを計算した。

計算は、面内の曲げおよび剪断変形が振り変形とは連成しないとして各々別に行なって組み合せた。

まず面内の変形に関しては、図2に示すような4つの変形形態に分けて考える。

- (i) 剛体としての図心の上下移動
- (ii) 剛体としての図心まわりの回転
- (iii) 剪断変形
- (iv) 純曲げによる変形

変位を図2に示すように回転変位もすべて x, z 方向

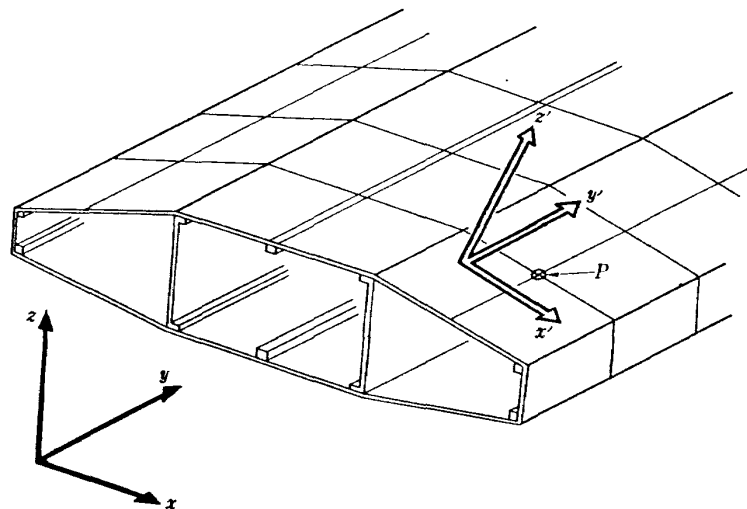


図1 構造のモデル化

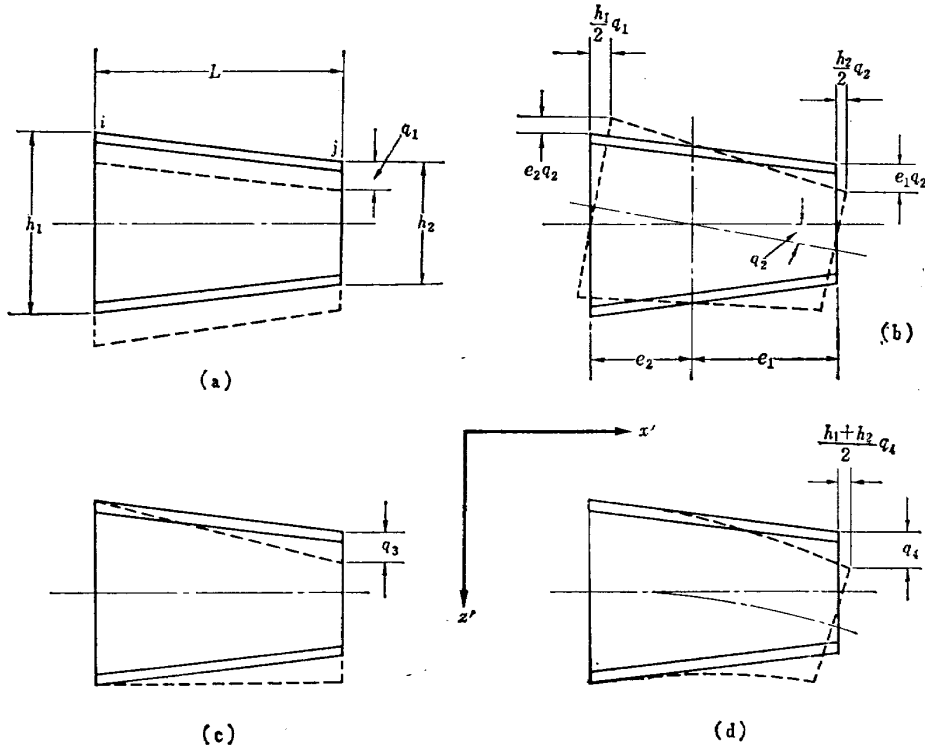


図 2 桁 要 素

の変位に換算して、パラメータ $q_1 \sim q_4$ によって表わす。すると要素内のずみ分布は次のように求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2Lh_1^2h_2Z/(Lh_1(Lh_1-\Delta x))^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu Lh_1^2h_2Z/(Lh_1(Lh_1-\Delta x))^3 \\ 0 & 0 & (2Lh_2+2\Delta x)/L_2H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

あるいは $[\epsilon] = [W][q] \dots\dots\dots (1')$

上式で $\Delta = h_1 - h_2$, $H = h_1 + h_2$

同様にして節点の変位は

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ w_i \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2/2 & 0 & H/2L \\ 1 & -e_2 & 0 & 0 \\ 1 & e_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

あるいは $[\delta] = [\varphi][q] \dots\dots\dots (2')$

要素内のひずみエネルギーは

$$V = \iiint \{Et/2(1-\nu^2)\} [\epsilon]^T \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} [\epsilon] d_x d_z \dots\dots\dots (3)$$

(1'), (2') 式を代入して変位 $[\delta]$ によって表わすと

$$V = \iiint \{Et/2(1-\nu^2)\} [\delta]^T [\varphi^{-1}]^T [W]^T \times \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} [W][\varphi^{-1}][\delta] d_x d_z \quad (4)$$

ここで

$$[\varphi^{-1}] = \begin{pmatrix} 2e_2/h_1 & 0 & 1 & 0 \\ 2h_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2L/H & -2L/H & -1 & 1 \\ -2Lh_2/h_1H & 2L/H & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

(4) 式に (1), (2), (5) 式を代入して整理すると

$$V = \iiint \{Et/2(1-\nu^2)\} [\delta]^T [C]_{4 \times 4} [\delta] d_y d_z \dots\dots\dots (6)$$

ここで $[C]$ の各成分は

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= 8(1-\nu) (Lh_2 + \Delta x)^2 / L^2 H^4 + 16(1-\nu^2) \\ &\quad \times L^4 h_1^2 h_2^2 Z^2 / H^2 (Lh_1 - \Delta x)^6 \\ C_{21} = C_{12} &= 8(1-\nu) (Lh_2 + \Delta x)^2 / L^2 H^4 - 16 \\ &\quad \times (1-\nu^2) L^4 h_1^3 h_2^3 Z^2 / H^2 (Lh_1 - \Delta x)^6 \\ C_{22} &= 8(1-\nu) (Lh_2 + \Delta x)^2 / L^2 H^4 + 16(1-\nu^2) \\ &\quad \times L^4 h_1^4 h_2^2 Z^2 / H^2 (Lh_1 - \Delta x)^6 \\ C_{31} = C_{13} &= 4(1-\nu) (Lh_2 + \Delta x)^2 / H^2 L^3 \\ C_{32} = C_{23} &= -C_{41} = -C_{14} = -C_{42} = -C_{24} = C_{31} \\ C_{33} &= -C_{43} = -C_{34} = C_{44} = 2(1-\nu) (Lh_2 + \Delta x)^2 \\ &\quad / L^4 H^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

桁にフランジが付いていない場合には、板厚 t が一定なので (6) 式の積分は簡単になり次のように求められる。

る。

$$V = [\delta]^T [K_w] [\delta] \dots\dots\dots (8)$$

$$[K_w] = \frac{Et}{2(1+\nu)} \times$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{K_S}{H^4} + \frac{2(1+\nu)h_2^2}{3HL}, & & & \text{(対称)} \\ \frac{K_S}{H^4} - \frac{2(1+\nu)h_1h_2}{3HL}, & \frac{K_S}{H^4} + \frac{2(1+\nu)h_1^2}{3HL}, & & \\ \frac{K_S}{2LH^3}, & \frac{K_S}{2LH^3}, & \frac{K_S}{4L^2H^2}, & \\ \frac{-K_S}{2LH^3}, & \frac{-K_S}{2LH^3}, & \frac{-K_S}{4L^2H^2}, & \frac{K_S}{4L^2H^2} \end{array} \right) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $K_S = L(H^3 - HA^2/3 - 16A^3/3)$

しかしながら、実際の桁には種々の断面形のフランジが付いている場合がほとんどであるから、形状に応じて(6)式の積分を行なわねばならない。簡便な方法としてフランジを集中面積に置きかえて計算することも用いられているが、今回は断面をL型フランジに限定して計算した。但し、桁の剪断変形はウェブだけに関係するものとして、フランジ部の積分では Z^2 に関する項のみを計算した。ウェブに関してはフランジの付いていない場合と同様に全域にわたってすべての項を積分した。

したがってL型フランジの付いた桁の面内変形の剛性マトリックスは

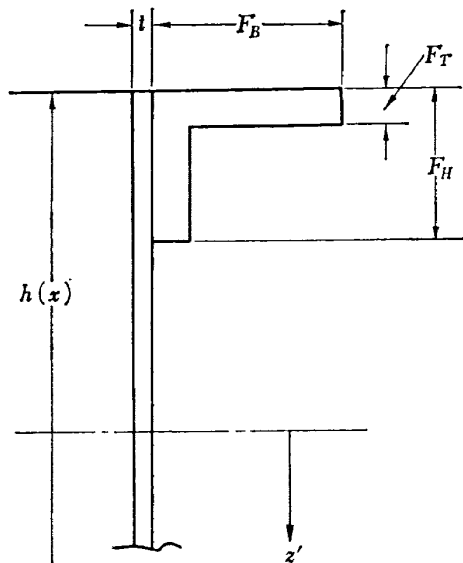


図3 桁の断面形

$$[K_L] = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & w_1 & w_2 \\ \frac{K_S \cdot t}{H^4} + Bh_1^2h_2^2, & & & \text{(対称)} \\ \frac{K_S \cdot t}{H^4} - Bh_1^3h_2^3, & \frac{K_S \cdot t}{H^4} + Bh_1^4h_2^2, & & \\ \frac{K_S \cdot t}{2LH^3}, & \frac{K_S \cdot t}{2LH^3}, & \frac{K_S \cdot t}{4L^2H^2} & \\ -\frac{K_S \cdot t}{2LH^3}, & -\frac{K_S \cdot t}{2LH^3}, & -\frac{K_S \cdot t}{4L^2H^2}, & \frac{K_S \cdot t}{4L^2H^2} \end{array} \right)$$

ここで

$$B = \frac{4(1+\nu)}{3H^2L} \left[\frac{8\{F_H^3F_T + F_T^3(F_B - F_T)\}}{5h_1^5h_2^5} (h_1^4 + h_2h_1^3 + h_1^2h_2^2 + h_2^3h_1 + h_2^4) - \frac{3}{h_1^4h_2^4} \{F_H^2F_T + F_T^2(F_B - F_T)\} (h_1^3 + h_2h_1^2 + h_2^2h_1 + h_2^3) + \frac{2}{h_1^3h_2^2} \cdot F_T(F_H + F_B - F_T) (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + \frac{H \cdot t}{2h_1^2h_2^2} \right]$$

$$K_S = L(H^3 - HA^2/3 - 16A^3/3) \dots\dots\dots (10)$$

次に桁のx軸まわりの振り変形に対する剛性マトリックスを計算すると、図4に示すようなテーパ梁がトルクTを受ける場合には

$$d\theta = \frac{T}{GJ} \dots\dots\dots (11)$$

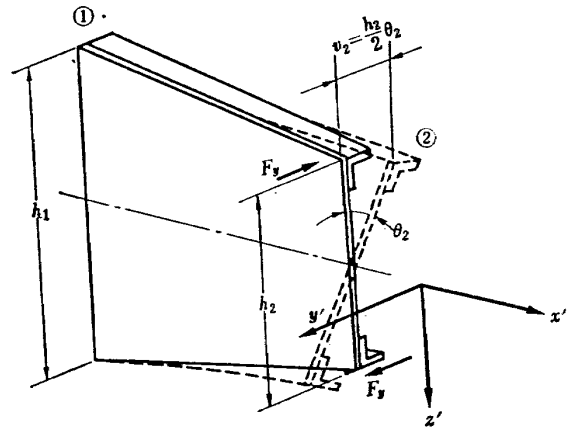


図4 桁の振り変形

GJ は断面の振り剛性で、この場合には断面がx軸方向に沿って変化しているから

$$J = \frac{t^3(LS_1 - \Delta Sx)}{3L} + \frac{2(t+F_T)^3F_H}{3} + \frac{2F_T^3F_B}{3} \dots\dots\dots (12)$$

ここで $S_1 = h_1 - 2F_H$, $S_2 = h_2 - 2F_H$, $\Delta S = S_1 - S_2$
(12) 式を(11)式に代入して積分すると

$$[k'_B] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (21)$$

2.2 座標変換マトリックス

構造全体の剛性マトリックスを組立てるために、局部座標系 (x', y', z') で作った各要素の剛性マトリックスを全体座標系 (x, y, z) へ変換する。

$$[K] = [T]^T [K'] [T] \dots (22)$$

上式で、[K] は全体座標系での剛性マトリックス、[K'] は局部座標系での剛性マトリックス、[T] は変換マトリックスである。

(i) 桁およびリブ

仮定により、桁およびリブは全体座標系の xy 面に垂直な面にあるので、座標変換マトリックスは簡単に次のように求められる。

$$[T_s] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (23)$$

ここで θ は x' 軸と x 軸とのなす角度を表わす。

(ii) 外板

図 1 に示すように要素の面内に x', y' 軸をとり、面の法線を z' 軸にとる。この場合、z' 軸は一義的に定まるが、x', y' 軸は面内で自由にとれるのが何らかの制限を加えないと定めることができない。

今回の計算では Zienkiewicz⁶⁾ にならって、x' 軸が xy 平面に対して平行であるという条件を用い、さらに y' の方向を定めるために $\cos(y'z) > 0$ の制限をつけた。したがって

$$[T_p] = \begin{pmatrix} [L] & & \\ & [L] & \\ & & [L] \end{pmatrix} \dots (24)$$

$$[L] = \begin{pmatrix} \lambda x'x & \lambda x'y & \lambda x'z \\ \lambda y'x & \lambda y'y & \lambda y'z \\ \lambda z'x & \lambda z'y & \lambda z'z \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \lambda x'x &= \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \lambda x'y = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \lambda x'z = 0 \\ \lambda y'z &= \frac{-AC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda y'y &= \frac{-BC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \\ \lambda y'z &= \frac{A^2+B^2}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \\ \lambda z'x &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \lambda z'y = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \lambda z'z &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

ここで $A = y_{ji} z_{mi} - y_{mi} z_{ji}$

$B = -x_{ji} z_{mi} + x_{mi} z_{ji}$

$C = x_{ji} y_{mi} - x_{mi} y_{ji}$

$x_{ji} = x_j - x_i$ などで、 i, j, m は 3 角形要素の頂点の番号を示す。

なお、この一般式では x'y' 面が xy 平面に平行になった場合には $A=B=0$ となり、計算不能になるので、その場合は [L] が単位マトリックスとなるようにプログラム内で処理した。

(iii) 縦通材

局部座標では剛性マトリックスが軸 (x') 方向の成分だけしか持たないので、変換マトリックスは全ての係数を求める必要がなく簡単になる

$$[L] = \begin{pmatrix} \lambda x'x & \lambda x'y & \lambda x'z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (26)$$

$$\lambda x'x = \frac{x_j - x_i}{L}, \lambda x'y = \frac{y_j - y_i}{L}, \lambda x'z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

2.3 未知変位の計算

(26) 式までの結果を用いて局部座標系で作った各要素の剛性マトリックスを全体座標系に変換して、構造全体について組立て、変位について解けばよいわけであるが、この際次のことに注意する必要がある。

外板および縦通材要素に関しては面内の剛性だけを考慮しているので、面に垂直な方向 (z' 方向) の剛性は 0 であるが、形式的に 3 自由度のマトリックスを作った。したがって、そのまま全体座標系に変換したものは特異マトリックスとなってしまうが、桁要素または相対的に傾いている板要素と結合している節点では、それらのマトリックスから z 方向の剛性の寄与があるので特異にならない。そこで、図 1 の P 点のように空間で傾いた平面内にある板要素が桁要素と結合していない場合には、その節点に関しては局部座標系のみで処理する必要がある。すなわち、この場合にはその節点に関する変換マトリックス [L] を単位マトリックスに置きかえる。

このようにして構造全体について組立てた剛性マトリックスの中で対角要素が0に対応した行と列を消去すれば逆行列の計算が可能になる。

実際の問題について構造全体にわたって組立てた剛性マトリックスは少なくとも数百元、場合によっては数千円となるので直接に逆行列を求めることはできない。すでに種々の計算法が研究されているが、IBMのFRANで用いられている構造分割法が比較的良い精度の解が得られるので、今回はこの方式によってプログラムを作った。但し、箱型梁の場合は一般に細長い形状なので各ユニットが直列に接続されるように構造を分割した。この分割法では一つの境界で二つのユニットだけが結合しているの、各ユニットで作った部分マトリックスが構造全体のマトリックス内で対角部分にのみ配列された帯マトリックスになる。したがってプログラムも簡単になり演算速度も比較的早い。例えば、節点数479、未知変位の数が1050の場合にHITAC 5020-Fで約12.5分であった

2.4 応力の計算

各節点の変位が求まれば、要素内のひずみを計算することによって、要素の応力は容易に求められる。

外板(平面応力)、縦通材(軸応力)に関しては剛性マトリックスと同様に既に種々の文献^{1,5,6)}で求められているので、ここでは省略する。

桁要素について計算すると

(1), (2), (5)の各式を用いて、要素の中央($x = \frac{L}{2}$, $z = (h_1 + h_2)/4$)のひずみは

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = [W][q] = [W][\varphi^{-1}][\delta]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-8h_1h_2^3}{H^3L} & \frac{8h_1^2h_2}{H^3L} & 0 & 0 \\ \frac{8\nu h_1h_2^3}{H^3L} & \frac{-8\nu h_1^2h_2}{H^3L} & 0 & 0 \\ \frac{2}{H} & \frac{2}{H} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ w_i \\ w_j \end{pmatrix} \dots\dots (27)$$

従ってフランジ表面の軸応力は

$$\sigma_f = E \cdot [S][\epsilon]$$

$$[S] = \begin{pmatrix} m^2 & n^2 & 0 \\ n^2 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m = L / \sqrt{(\frac{D}{2})^2 + L^2} \\ n = D/2 / \sqrt{(\frac{D}{2})^2 + L^2} \end{matrix} \dots\dots (28)$$

ウェブの平均の剪断応力は

$$\tau_{wp} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xz} \dots\dots (29)$$

3. 数値計算例

箱型梁の計算に先立ち、まず桁の剛性マトリックスについて解の収束状態を調べた。図7に示すようなA, B, C 3種類の片持の梁の自由端に共に1kgの集中荷重を作用させた場合の自由端のたわみを計算した。

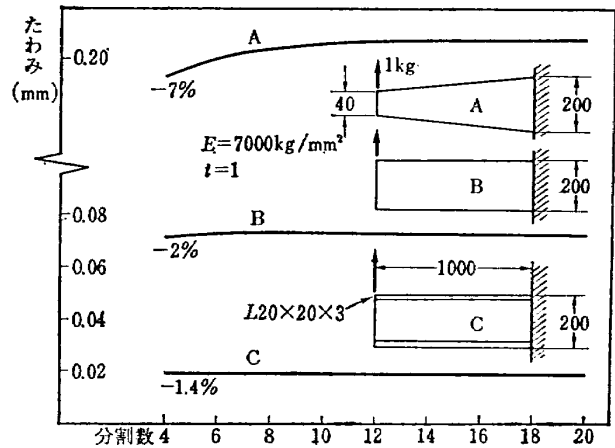


図7 分割数による解の収束状況

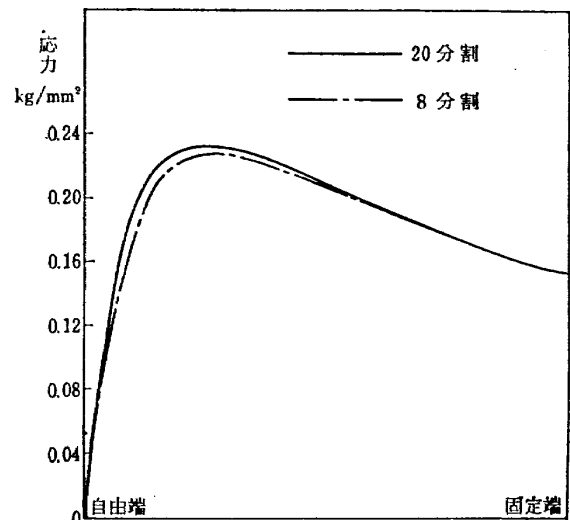


図8 テーパー桁の応力分布

B, C に関してはスパンを4分割した計算ですでに誤差が2%以下であり非常に良好であるが、Aのテーパー桁では-7%となり若干誤差が大きいようである。しかしながら、図からわかるように分割数を増すと急速に誤差が減少しているの、実際の計算ではかなり良い結果をもたらすと考えられる。

図8はAのテーパー桁の応力分布を計算したものであるが、実線は20分割の場合であって、梁理論で求めたものと一致している。図中の一点鎖線は8分割の場合

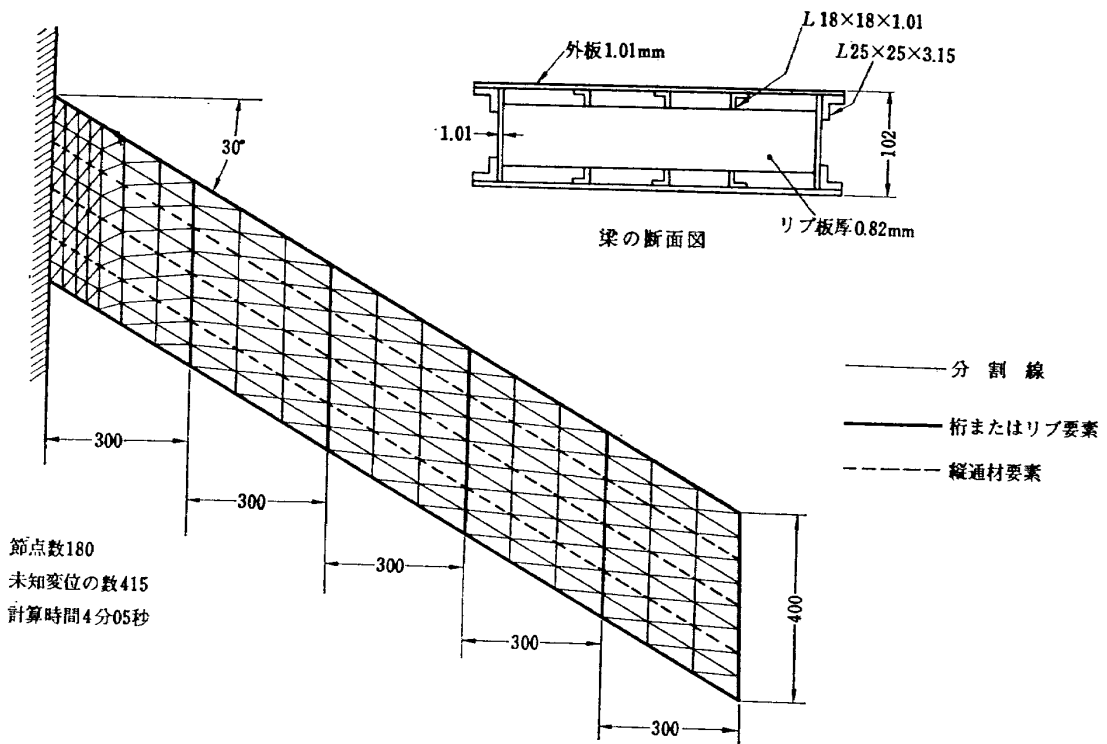


図 9 後退翼のモデル (寸法および要素分割を示す)

の計算で、当然低めにでてくるが、この程度の誤差は実用的には許容されると思われる。

計算例(1)後退翼モデルのたわみ計算

この箱型梁は、林、小林³⁾により、たわみについて理論解析および実験が行なわれたもので、寸法形状および要素分割を図9に示す。固定端付近では図に示す

ようにある程度細かく分割しないと、たわみ、応力などが低めに計算される。

翼端中央に集中荷重を作用させた場合のたわみを図10に文献の実験値と共に示したが両者は良く一致している。

図11は翼端にトルクを掛けた場合で、実験値とは相

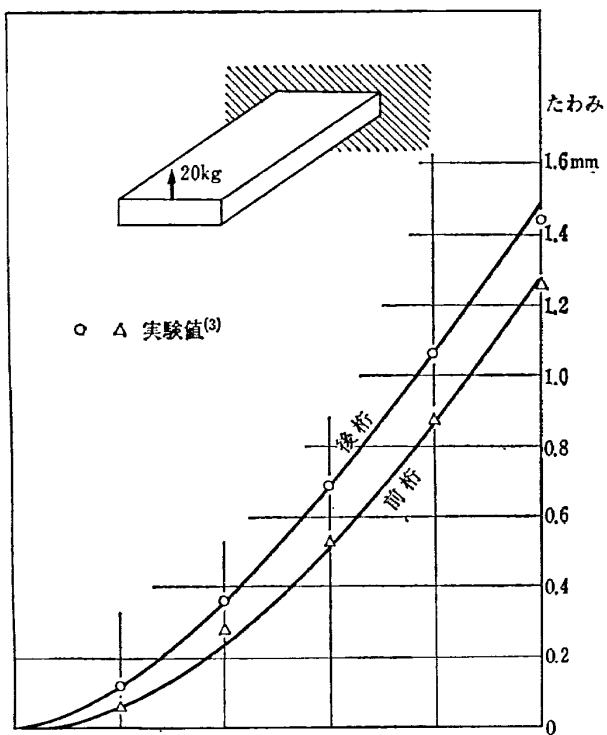


図10 翼端中央に集中荷重をかけた場合のたわみ分布

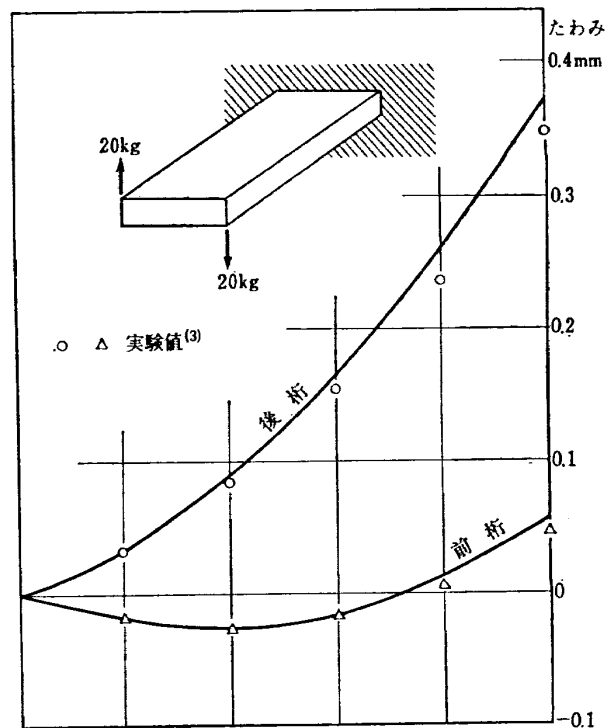


図11 翼端にトルクをかけた場合のたわみ分布

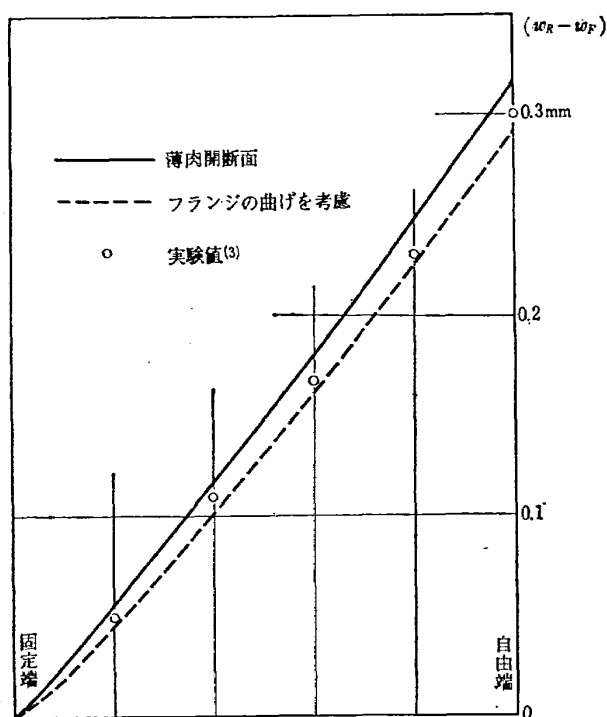


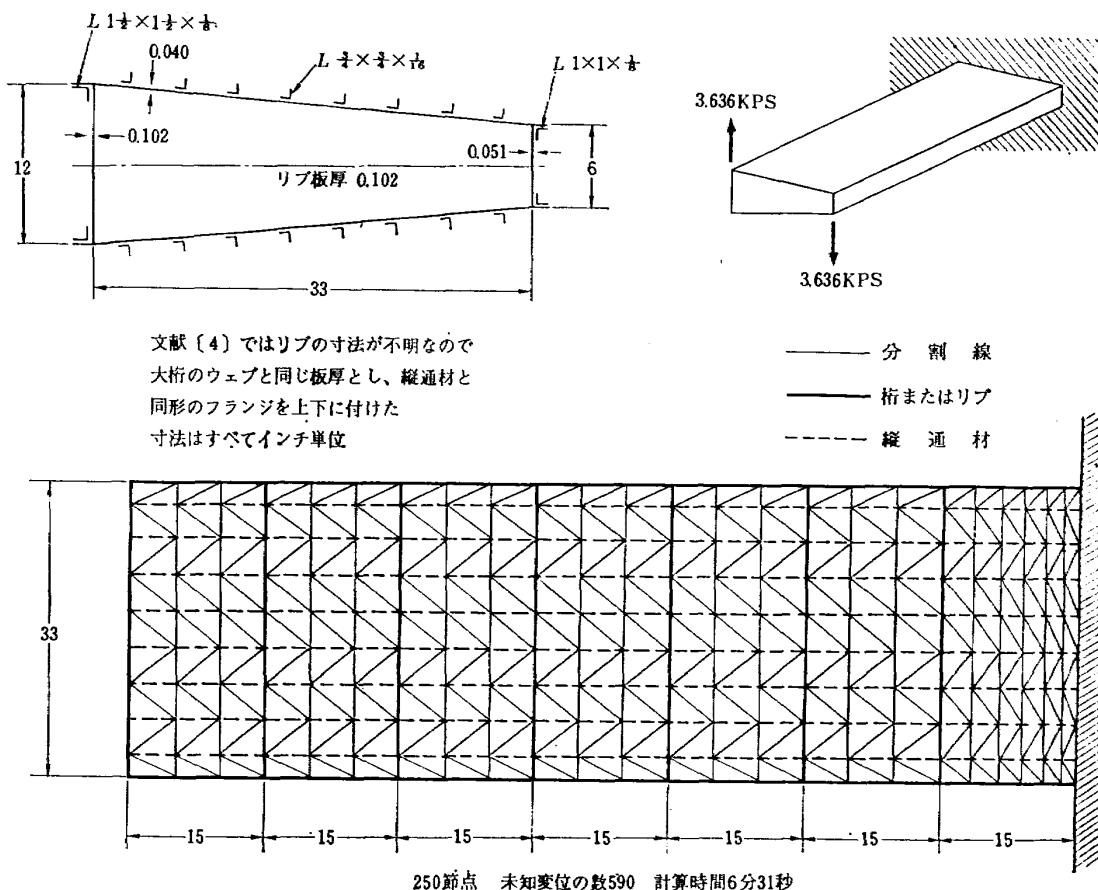
図12 翼端にトルクをかけた場合の回転変位

対的な開きがある。これらの計算はすべて桁を薄肉開断面として扱った(16)式の桁り成分を用いたものであるが、フランジを梁とみなして桁の桁りによる曲げ剛性を考慮した(17)式を用いると、若干剛性が高くなり図12に示すように実験値に近づく。

一般に変位法では分割数を細かくして行くと、低めの値から正解に近づくので、そのことから考えると(17)式を用いるのが妥当であるように思われるが、(17)式は物理的近似に若干の問題があるので実験値に近いという理由だけで全面的に採用するには問題がある。また、変形の適合条件が満足されている剛性マトリックスを用いても、有限個の分割では必ず若干の拘束が入り、変形が小さめに計算される傾向があるので(17)式のように更に拘束が加わった剛性マトリックスを用いるよりは、(16)式を用いた方が拘束が緩和され、安全側の計算結果が得られると思われる。

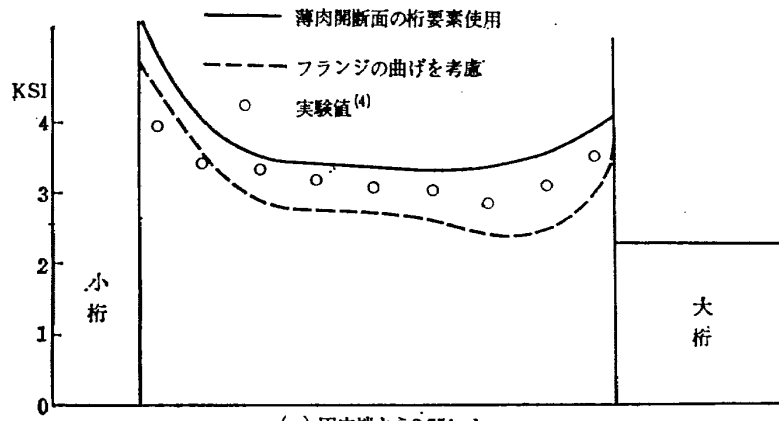
計算例(2) 台形断面の箱型梁の応力計算

これは文献[4]で応力に関して実験およびWarping理論による計算を行なったもので、今回この種の構造物の応力計算のチェックとして取り扱った。

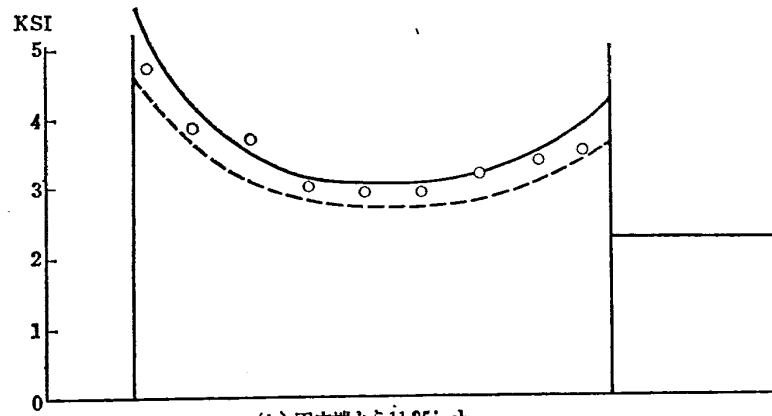


文献〔4〕ではリブの寸法が不明なので大桁のウェブと同じ板厚とし、縦通材と同形のフランジを上下に付けた寸法はすべてインチ単位

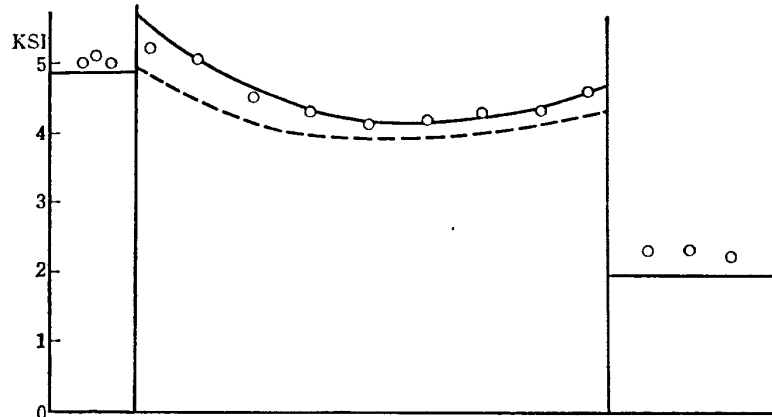
図13 台形断面の箱型梁(寸法および要素分割を示す)



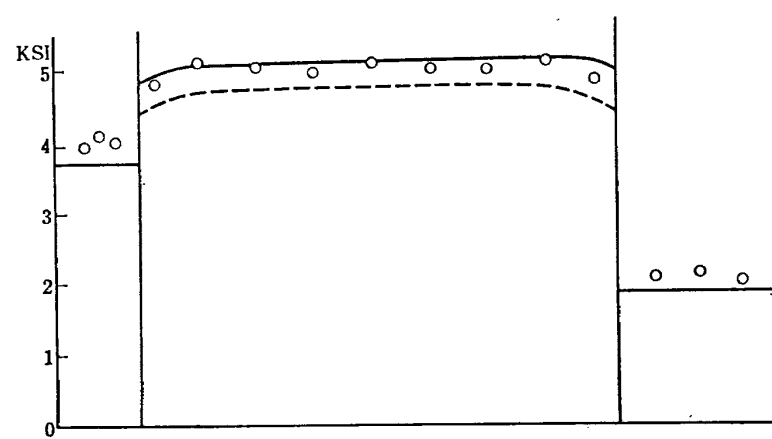
(a) 固定端から2.75inch



(b) 固定端から11.25inch



(c) 固定端から22.5inch



(d) 固定端から82.5inch

図 14 外板およびウェブの剪断応力分布

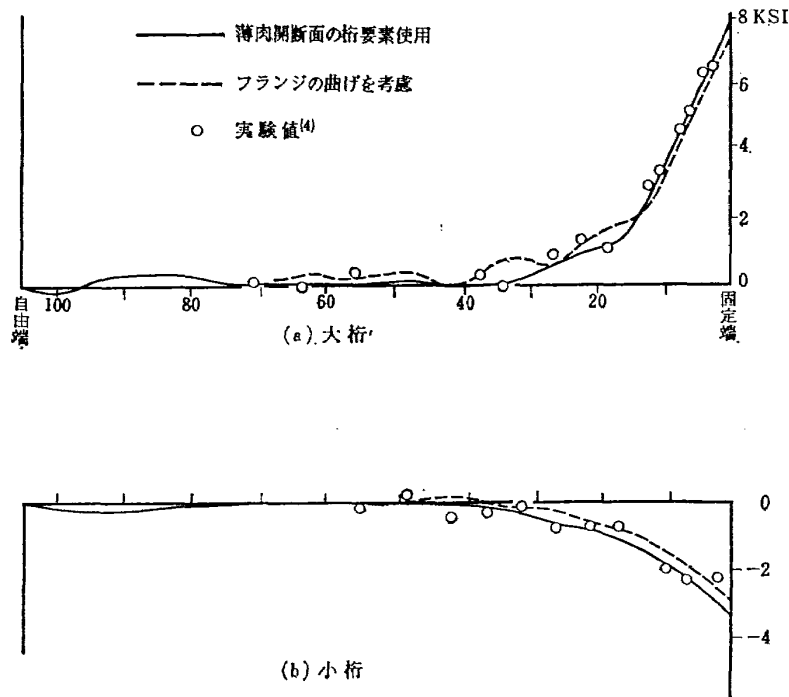


図 15 桁フランジの軸応力分布

図13に寸法形状および要素分割を示す。また、図14にはスパン方向の各位置における外板の剪断応力を、図15には桁フランジの軸応力をそれぞれ示す。図中の実線は桁を薄肉開断面とした(16)式の場合、点線はフランジの曲げ剛性を考えた(17)式の場合である。この例でも前と同様に、(16)式の成分を用いた結果の方が(17)式を用いた場合より高い値になっているが、前とは逆に(16)式に対応する計算結果の方が実験値に近い

4. むすび

板、棒、梁などの構造要素で構成された一般の複合構造物の応力解析の第一歩として、断面が上下対称な箱型梁について計算プログラムを作り、二、三の実験値と比較して実用的には十分な結果が得られることを確認した。ここで取り扱った例題は、有限要素法によらずとも同じ程度の近似の範囲で理論解析が行なえるものであるが、今回開発したプログラムはテーパの付いた桁の要素を用いているので、断面形が上下対称であれば、任意の断面形状でスパン方向に対しても任意に形状が化変している構造について計算が可能で、応用範囲はかなり広いと思われる。

しかしながら大型構造物で部材数が多く、計算機の容量の点から細かい要素分割が行なえないような場合には、要素分割のしかたによって結果が左右される心配があり、また場合によっては数個の部材をまとめて

単純な要素にモデル化することも必要になってくる。したがって、実用的な見地からは実際の複雑な構造物について実験を重ね、種々のモデル化による計算と比較検討して最も能率のよい方法を見つけ出すことも必要である。

また次の段階として、一般の橋梁構造物のように梁の断面形が上下非対称な場合への拡張が考えられるがその場合には今回求めた桁の剛性マトリックスは用いることができない。簡便な方法として桁のウェブを三角形要素などに再分割することもできるが、節点数が相当増加するので好ましくない。できれば対称断面の場合と同様な方法で、この場合には4節点の桁要素として処理したい方針であるが、今回取扱った対称構造の場合と同程度の好結果を得るにはかなりの工夫を要すると思われる。

終に、今回の計算プログラムの作成にあたって当研究所の戸川保子技官の逆行行列計算サブルーチンを使用させていただいたことに感謝いたします。

文 献

- 1) M. J. Turner, H. C. Martin and others; Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. aeron. Sci., Vol. 23, No. 9, pp. 805-823 (1956)
- 2) R. J. Melosh, R. G. Merritt; Evaluation of Spar Matrices for Stiffness Analyses, J. aeron.

- Space Sci., Vol.25, No.9, pp.537-543 (1958)
- 3) T.Hayashi, S.Kobayashi; Deformation of Swept-back Box Beam, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol.8, No.12, pp.23-40 (1965)
 - 4) Paul Kuhn; Stress in Aircraft and Shell Structures, pp.390, McGraw-Hill (1956)
 - 5) B.M. Fraeijs de Veubeke; Matrix Method of structural Analysis, pp. 59, Pergamon (1964)
 - 6) O.C. Zienkiewicz; The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, pp.26, McGraw-Hill (1967)
 - 7) J.H. Argyris, S.Kelsey; Energy Theorems and Structural Analysis, Butterworths (1960)
 - 8) R.H. Gallagher; A Correlation Study of Method of Matrix structural Analysis, Pergamon (1964)

TR-165 訂 正

3 ページ (1) 式

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2Lh_1^2h_2Z/(Lh_1-\Delta x)^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu Lh_1^2h_2Z/(Lh_1-\Delta x)^3 \\ 0 & 0 & (2Lh_2+2\Delta x)/L^2H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

6 ページ (22) 式

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \dots\dots\dots (22)$$

TR-154	フライングテストベッドの計画 —本体のシステムデザイン— System Design of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory	1968年 5月	新型航空機部
TR-155	遷音速における Control-Surface Buzz に関 する研究 An Investigation on Control-Surface Buzz at Transonic Speeds	1968年 5月	中村 泰治
TR-156	二次元湾曲ジェットの相似構造と乱流混合に およぼす曲率の研究 Effects of Curvature on the Similar Struc- ture and Turbulent Mixing of Two- dimensional Curved Jets	1968年 5月	遠藤 浩
TR-157	電子線密度測定法による低密度極超音速流の 実験的研究 Experimental Study of Low Density Hyper- sonic Flow Using Electron-Beam Densi- tometry	1968年 6月	和田 勇, 曾 我国 男
TR-158	局所凸線形位相空間内の非線形初期値問題に 対する近似について On Approximations for Nonlinear Cauchy Problems in Locally Convex Spaces	1968年 6月	小島 清史
TR-159	T型結合板の振動 The Vibration of T-Shape Plates Struc- ture	1968年 7月	塙 武敏, 築地恒夫, 起出慎一
TR-160	梁, 板結合構造物の振動 (II) On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (II)	1968年 8月	塙 武敏, 築地恒夫 多田保夫, 越出慎一 林 洋一, 日下和夫
TR-161	宇宙飛しょう体の直接式最適誘導法 The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle	1968年 8月	新田慶治, 松島弘一 大坪孔治, 志 甫 徹
TR-162	よどみ点領域での非定常空力加熱の測定 Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region	1968年 9月	野村 茂昭
TR-163	双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関す る考察 Investigation on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane	1968年 9月	別府 護 郎
TR-164	熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外 板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路 Investigation of the Streamwise Heat Con- dition Effect on the Transient Aerodyn- amic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method	1968年10月	小川 鉦一

航空宇宙技術研究所報告165号

昭和43年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880 ☎182
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171 (代表)

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2~27~12
