

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-168

角度測定・ドップラ周波数測定併用のトラッキング方式
の計算処理に関する研究

鳥海良三・松本一夫・樋口一雄
戸川隼人・木村武雄

1968年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-145 ロケット用耐熱材料の研究
Study on the Heat Insulation Materials for Rocket 1967年11月 古田敏康
- TR-146 半導体歪ゲージを用いる小型高感度加速度計の研究
Study on the Miniature Type High Sensitivity Accelerometer Using Semiconductor Strain Gages 1967年11月 田畑浄治, 大坪孔治
滝沢 実
- TR-147 固体ロケットモータのノズルにおける熱伝達の実験的研究
—プロペラント内へ添加されたアルミニウムの影響—
An Experimental Investigation of Heat Transfer in the Nozzle of High-Aluminized Solid Rocket 1967年11月 五代富文, 湯沢克宜
伊藤克弥, 西村久男
- TR-148 失速角以上で振動する翼のまわりの流れの観察
—失速フラッタの研究(I)—
Optical Observation of the Separated Flow around an Oscillating Aerofoil at High Mean Angles of Attack with Special Reference to Stall Flutter 1968年2月 中村泰治, 磯貝紘二
江尻 宏
- TR-149 よどみ点におけるグラファイトのアブレーションの実験的研究
An Experimental Study of the Ablation of Graphite in the Stagnation Region 1968年2月 相原康彦, 野村茂昭
渡辺泰夫
- TR-150 強化プラスチックの熱的物性値について
(輻射加熱による測定)
The Measurement of Thermal Properties of Reinforced Plastics at Temperatures up to 150°C (Infra-red Radiation Method) 1968年2月 小川鉦一, 野口義男
- TR-151 空気力学的加熱の少ない極超音速飛しょう体
Minimum Heat Transfer Body at Hypersonic Speeds 1968年3月 相原康彦
- TR-152 二次元二重円弧翼列の遷音速実験
High Speed Tests of Compressor Cascades with Double Circular Arc Blade Sections 1968年3月 近藤 博, 藪田光弘
山崎紀雄, 古川 昇
- TR-153 アーク加熱衝撃波管による物体のまわりの高温気流の研究
Study of High Temperature Flow around Body Using an Arc-Driven Shock Tube 1968年4月 松崎利一, 上瀬千春
- TR-154 フライングテストベッドの計画
—本体のシステムデザイン—
System Design of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory 1968年5月 新型航空機部
- TR-155 遷音速における Control-Surface Buzz に関する研究
An Investigation on Control-Surface Buzz at Transonic Speeds 1968年5月 中村泰治
- TR-156 二次元湾曲ジェットの相似構造と乱流混合におよぼす曲率の研究
Effects of Curvature on the Similar Structure and Turbulent Mixing of Two-dimensional Curved Jets 1968年5月 遠藤 浩
- TR-157 電子線密度測定法による低密度極超音速流の実験的研究
Experimental Study of Low Density Hypersonic Flow Using Electron-Beam Densitometry 1968年6月 和田 勇, 曾我国男

目 次

1. 軌道理論の概略	3
1.1 二体問題の運動	3
1.2 軌道の6要素	4
1.3 座 標 系	4
1.4 6要素から角度およびドップラ周波数の計算	6
1.5 位置および速度ベクトルから6要素の算出	7
1.6 二つの位置ベクトルからの軌道決定	7
1.7 角度からの軌道決定	8
1.8 地球の扁平による摂動	9
2. 計算処理方式	11
2.1 データの前処理	11
2.2 角度からの軌道決定の計算	12
2.3 ドップラ周波数による軌道改良のための計算	12
3. 観測データと計算処理結果	14
3.1 データの前処理の結果	14
3.2 角度による軌道決定の計算処理結果	17
3.3 ドップラ周波数による軌道改良の検討	17
3.4 計算処理上の問題点	23
4. 計算処理方式の改善	23
4.1 データの前処理	23
4.2 角度による軌道決定	25
4.3 角度による軌道改良	29
4.4 ドップラ周波数による軌道改良	30
5. 結 言	34
A. 付 録	36
A.1 特調費による実験の概要	36
A.2 実 験 の 体 制	36
A.3 測定システム誤差	36

角度測定・ドップラ周波数測定併用のトラッキング方式の計算処理に関する研究*

鳥海良三***・松本一夫****・樋口一雄**
戸川隼人**・木村武雄****

On the Orbit Determination Procedures for the Doppler Frequency Measurement with the Angular Measurement Tracking System

By Ryozo TORIUMI, Kazuo MATSUMOTO, Kazuo HIGUCHI,
Hayato TOGAWA and Takeo KIMURA

The Space Exploration Council of Japan recommended the use of the Doppler frequency measurement with the angular measurement method as the tracking system for the scientific satellite planned to be launched by Tokyo University. In order to develop this system, the tracking of the actual satellites was done by experimental devices. The authors were engaged in the investigation of the orbit determination procedures in this experiment, and have improved these in order to solve the problems which were pointed out in the experiment. The results we have so far obtained are reported in this paper.

緒 言

昭和43年度に東京大学宇宙航空研究所で打上げを予定している人工衛星のトラッキングには、角度測定とドップラ周波数測定を併用する方式を採用することとなった。この方式は衛星の位置の方位角と仰角から軌道の概略値を求め、これを初期値として、計算されたドップラ周波数が測定されたドップラ周波数に一致するように、初期値を逐次改良して真の軌道を得ようとするものである。

本方式は東京大学、郵政省電波研究所等において開発されてきたものであるが、本方式の採用を決定するための判断の基礎資料は、測定誤差のうちランダム誤差のみを考慮して行なったモデル計算にもとづくデータである。このため測定装置、測定法および計算処理

方式になお技術的改善を図る余地があり、業務としてのトラッキングを行なう前に実験を重ねて、改良改善のための技術的資料を得る必要があった。

この要請を満足せしめるために、科学技術庁の昭和41年度特別研究促進調整費（以下特調費と呼ぶ）により、実際の衛星を観測して、本トラッキング方式の総合的研究を行ない、この方式の確認および技術的改良改善のための資料を得た。

筆者らは実験グループの一員として計算処理方式の検討、研究に従事した。さらにこの実験によって指摘された計算処理上の問題点を解決するために、種々の方法のプログラムを開発し、実験データを使用して計算処理方式の改良を続けてきた。本報告はその実験における計算処理方式とその結果、さらにその後の計算処理上の改善について報告するものである。

なお本報告の内容を明確にするために、軌道理論の概略をつけ加えてある。しかしこれは理論を明瞭にするためのもので、必ずしも計算に用いられたそのままのものではない。特調費による実験の組織および概要を付録に記しておいた。

* 昭和43年9月25日受付

** 航空宇宙技術研究所

*** 宇宙開発推進本部、航空宇宙技術研究所併任

**** 宇宙開発推進本部

記号

(1)英字記号

A	方位角
a	軌道長半径
a_e	地球の赤道半径
c	光速
E	真東方向の単位ベクトル
E	離心近点離角
e	離心率
f	地球の扁平率
f_o	衛星の発信周波数
f_{oo}	受信機と同調周波数
G	万有引力定数
G_1, G_2	観測地点座標を表現するための係数
H	観測地点の高度
h	仰角, 一定な角運動量
h	角運動量ベクトル
I	慣性座標系の x 軸に沿った単位ベクトル
i	軌道傾斜角
J	地球のポテンシャル関数の調和係数
J	慣性座標系の y 軸に沿った単位ベクトル
$J.D.$	Julian Date
K	慣性座標系の z 軸に沿った単位ベクトル
k	重力定数
L	観測地点から衛星へ向う単位ベクトル
M	平均近点離角 ($=n(t-T)$)
n	平均運動 ($=k\sqrt{\mu/a^3}$)
P	衛星の周期
P	地球の中心から近地点へ向う単位ベクトル
p	楕円のパラメータ
Q	P を軌道面の中で直角だけ真近点離角の進む方向へ回転したベクトル
R	観測地点から地球中心までのベクトル
r	衛星の動径ベクトル

r	r の絶対値
S	真南方向の単位ベクトル
T	近地点通過時刻
t	時刻
U	地球中心から衛星へ向う単位ベクトル
u	緯度引数 ($=v+\omega$)
V	速度ベクトルの大きさ
V	軌道面上で U を真近点離角の進む方向へ直角だけ進めたベクトル
v	真近点離角
W	軌道面に垂直な単位ベクトル
X, Y, Z	観測地点の直角座標
x, y, z	慣性座標系における r の成分
x_o, y_o, z_o	軌道面座標系における r の成分
x_h, y_h, z_h	地表面座標系における衛星の位置ベクトルの成分
Z	天頂方向の単位ベクトル
(2)ギリシャ文字記号	
α	赤経
α_t	赤経 (topocentric)
δ	赤緯
δ_t	赤緯 (topocentric)
θ	恒星時
θ_g	グリニッチ恒星時
θ_{go}	午前0時 (U. T.) におけるグリニッチ恒星時
θ	地球の自転角速度
λ	観測地点の経度
μ	地球と衛星の質量の和
ρ	slant range
ρ	slant range ベクトル
σ	標準偏差
τ	修正時間変数 ($=k(t-t_o)$)
φ	観測地点の緯度
Ω	昇交点経度
ω	近地点引数

1. 軌道理論の概略

以下に天文学における軌道論の概略を述べる¹⁾。

1.1 二体問題の運動

二体問題にしたがって運動している物体の運動方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k^2\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

で表わされる。 \mathbf{r} は中心物体に関する運動物体の位置ベクトル, k は引力定数, μ は中心物体と運動物体の質量をそれぞれ m_1, m_2 としたとき,

$$\mu = m_1 + m_2 \quad (1.2)$$

である。 $\tau \equiv k(t - t_0)$ として, τ を修正時間(modified time)という。この τ に関する微分をドットで示すと, (1.1) 式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

となる。 \mathbf{r} によって外積をとると,

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{r} = 0 \quad (1.4)$$

である。よって積分すると,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{h} = \text{一定}$$

となる。 \mathbf{r} が一定なベクトル \mathbf{h} に直交することから, 軌道はある一平面上にあることがわかる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} &= -\frac{\mu}{r^3} [(r \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (r \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}] \\ &= \mu\frac{(r\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}r)}{r^2} \\ &= \mu\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \end{aligned}$$

よって, 積分すると

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}\right)$$

となる。

$$(r \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = \mu(r + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) = h^2$$

したがって

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (1.5)$$

となる。ここで $e = |\mathbf{e}|$, $v = \cos(\angle \mathbf{e}, \mathbf{r})$, $p = h^2/\mu$ である。これは中心物体 F を一つの焦点とする円錐曲線の方程式である。 e は離心率 (eccentricity) で $0 \leq e < 1$

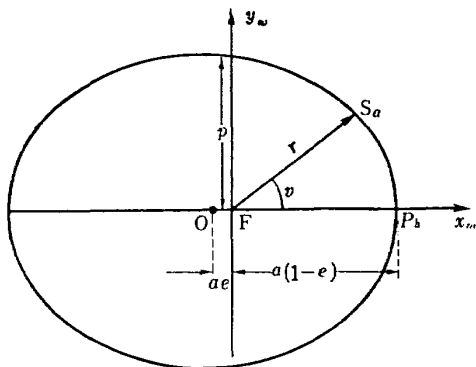


図 1.1

のとき円錐曲線は楕円である。以後この場合に限定する。 e を近点 (perifocus) の方向にとったとき v を真近点離角 (true anomaly) という。また長半径 (semimajor axis) を a とするとき, $p = a(1 - e^2)$ で, p は円錐曲線の semiparameter といわれる。

今時間 τ の間に半径ベクトル \mathbf{r} によって生成される面積を A とする。また $W = h/h$ とすると,

$$AW = \frac{1}{2} \int_0^\tau \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\tau h d\tau = \frac{1}{2} h\tau$$

である。よって

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} \quad (1.6)$$

となる。これは面積速度一定という, ケプラーの第二法則である。 \mathbf{r} に平行な速度成分を $\dot{\mathbf{r}}_P$, \mathbf{r} に垂直な速度成分を $\dot{\mathbf{r}}_R$ とすると,

$$\begin{aligned} hW &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}}_P + \dot{\mathbf{r}}_R) = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_R \\ &= r^2 \dot{W} \end{aligned}$$

であり, したがって

$$h = r^2 \dot{W} \quad (1.7)$$

である。

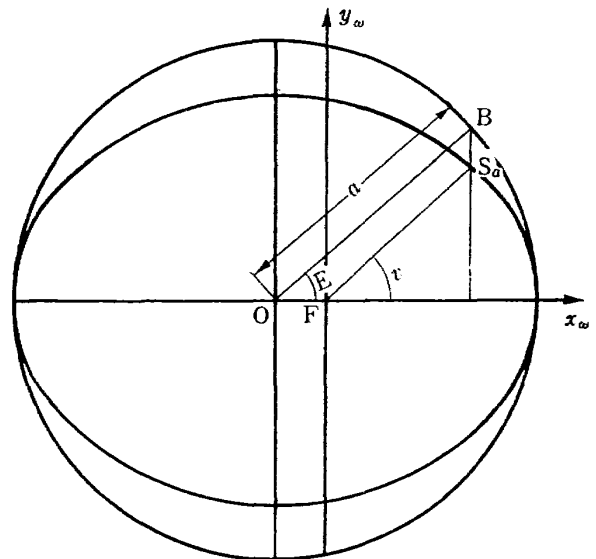


図 1.2

今, 楕円に外接する半径 a の円を描き, 衛星 S_a から長軸に下した垂線がこの外接円と交わる点を B としたとき, 線分 OB が長軸となす角を離心近点離角 (eccentric anomaly) といい, E で表わす。円錐曲線の方程式と幾何学的関係から

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (1.8)$$

であることがわかる。

楕円運動の周期 (period) P と長半径 a の間には, ケプラーの第三法則としてしられる次の関係がある。

$$P = \frac{2\pi}{k\sqrt{\mu/a^3}} \quad (1.9)$$

$k\sqrt{\mu/a^3}$ は運動物体の平均運動 (mean motion) であって, n で示される。つまり

$$n = k\sqrt{\mu/a^3} \quad (1.10)$$

である。 $v=0$ の時刻を近点通過時刻(time of perifocal passage)といい、 T で示す。時刻 t のときの離心近点離角を E とすると、ケプラーの方程式

$$n(t - T) = E - e \sin E \quad (1.11)$$

が成立する。 $n(t - T)$ は平均近点離角(mean anomaly)といわれ、 M で示される。したがって (1.11) 式は

$$M = E - e \sin E \quad (1.12)$$

と表わすことができる。これは衛星の位置と時間と関係する方程式である。

図 1.1のごとく長軸の近点の方向を x_o 、焦点 F を通り x_o 軸を正の方向に 90° 回転した軸を y_o 軸とすると、幾何学的関係から

$$x_o = r \cos v = a(\cos E - e) \quad (1.13)$$

$$y_o = r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (1.14)$$

である。 τ で微分すると、

$$\dot{x}_o = -a \dot{E} \sin E \quad (1.15)$$

$$\dot{y}_o = a\sqrt{1-e^2} \dot{E} \cos E \quad (1.16)$$

であり、 E は (1.8), (1.10), (1.11) より

$$E = \frac{an}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (1.17)$$

となる。

二体問題において非常に重要な関係式は vis-viva 方程式といわれるエネルギー方程式である。速度ベクトルの絶対値を V で示すと、この vis-viva 方程式は

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1.18)$$

と書くことができる。

1.2 軌道の6要素

今後運動は全て地球のまわりの運動を考える。二体問題の運動はある時刻の位置および速度ベクトルによって一意的に決定される。しかしながらこの軌道をより視覚的に表現するものとして、古典的なパラメータで普通6要素と呼ばれるものがある。これらのうちの二つは楕円の形を定義するもので長半径 a と離心率 e である。次の二つは軌道面を定義するもので軌道傾斜角(orbital inclination) i と昇交点経度(longitude of the

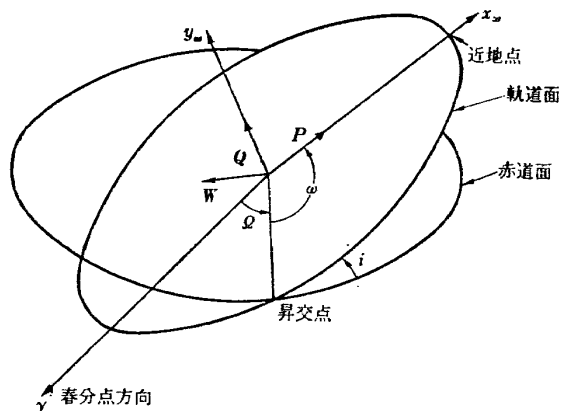


図 1.3

ascending node) Ω である。 i は赤道面と軌道面のなす角で両者の交線に垂直な面の中で測られる。 Ω は春分点方向 γ と、衛星が南から北へ赤道面を通過するときの赤道面と軌道面の交線とのなす角である。次に楕円の長軸の方向を定義するものとして近地点引数(argument of perigee) ω がある。 ω は Ω が定義された直線から、地球の中心と近地点を結ぶ直線まで、軌道面の中で測られた角である。最後の要素は平均近点離角 M である。これらの古典的パラメータ $[a, e, i, \Omega, \omega, M]_{t=t_0}$ を通常軌道の6要素という。 M に対応する時刻 t_0 は6要素を与えた時刻で、しばしば基準時刻(epoch time)といわれる。 M の代りに近地点通過時刻 T を使う場合、また a の代りに周期 P を使う場合がある。地心から近地点の方向の単位ベクトルを P 、 P から直角だけ真近点離角 v が進んだ方向の単位ベクトルを Q とし、 W は軌道面に垂直な単位ベクトルとする。このとき古典的パラメータは同等な集合

$$[a, e, M, P, Q, W]_{t=t_0}$$

で置きかえることができる。

1.3 座標系

(1)慣性座標系 (inertial coordinate system)

原点を地球の中心とし、 x 軸は春分点(vernal equinox)の方向にとり、 y 軸は赤道面の中で直角だけ東の方に x 軸を進ませた方向にとる。 z 軸は右手系を完成する。 x, y, z 軸上の単位ベクトルは I, J, K で示される。この座標系における衛星の位置ベクトルを $r \equiv (x, y, z)$ で示し、観測地点 S から地球中心までのベクトルを $R \equiv (X, Y, Z)$ で示す。また観測地点 S から衛星 S_a に向う単位ベクトルを L で示し、 $\overline{SS}_a = \rho$ を slant range という。このとき

$$r = \rho L - R \quad (1.19)$$

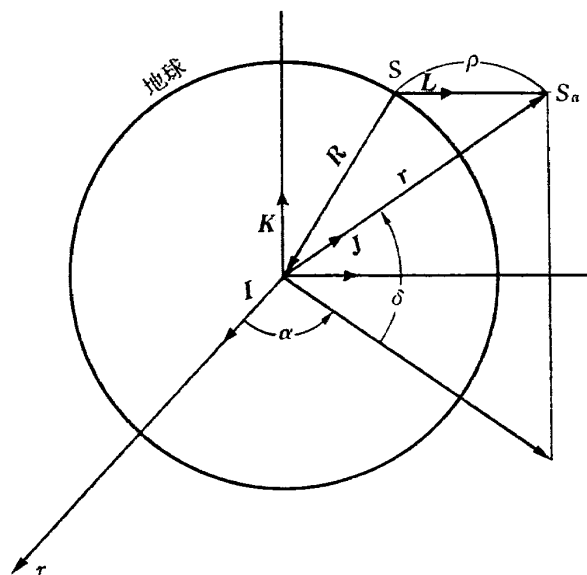


図 1.4

である。 r を赤道面に射影したベクトルと I とのなす角は赤経 (right ascension) といわれ、 α で示される。またその射影されたベクトルと r とのなす角は赤緯 (declination) といわれ、 δ で示される。この座標系はこのために赤経—赤緯座標系 (right ascension-declination coordinate system) ともいわれ、また地球中心座標系 (geocentric coordinate system) ともいわれる。またベクトル L の赤経—赤緯を topocentric right ascension-declination といひ、 α_t, δ_t で示す。 $\rho L = \rho$ と書くこともある。

(2)軌道面座標系 (orbital plane coordinate system)

原点を地球の中心にとり、 x_o-y_o 平面を軌道面にとる。 x_o 軸は地球の中心から近地点 P_h の方向にとり、 y_o 軸は真近点離角 v が x_o 軸より直角だけ進んだ方向にとる。そして z_o 軸は右手系を完成する。 x_o, y_o, z_o 軸に沿う単位ベクトルは P, Q, W で示される。 P, Q を軌道面の中で v だけ回転させた単位ベクトルは U, V で示される。当然 $r=rU$ である。

(3)地表面座標系 (topocentric coordinate system)

この座標系の原点は観測地点で x_h-y_h 平面は水平面 (horizontal plane) である。 x_h 軸は観測地点の南の方向であり、 y_h 軸は東の方向にとる。そして z_h 軸は天頂の方向にとられる。観測地点 S から衛星へ向う単位ベクトルはこの座標系で表現されるとき L_h で示され、また $\rho L_h = (x_h, y_h, z_h)$ と書かれる。 ρL_h を x_h, y_h 平面に射影したベクトルと北の方向とのなす角を方位角 (azimuth) A といひ、そのベクトルと ρL_h のなす角を仰角 (elevation) h という。この

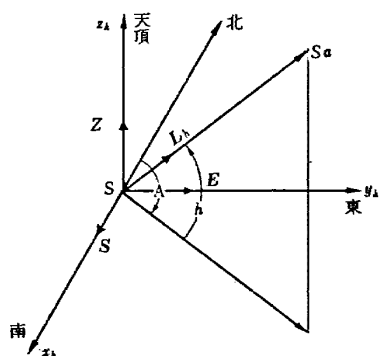


図 1.5

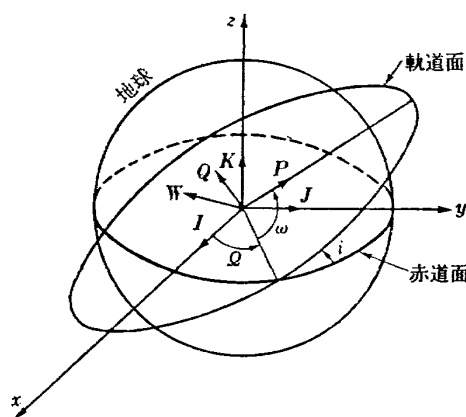


図 1.6

ことのために、この座標系を方位角—仰角座標系 (azimuth-elevation coordinate system) ともいう。また $\rho L_h = \rho_h$ と書くこともある。この座標系に沿う単位ベクトルは S, E, Z で示される。

(4)座標系の変換

図 1.6 からわかるように慣性座標系から軌道面座標系を得るには、(1.20式) のような変換を行なえばよい。同様にして U, V, W は (1.20) 式で ω の代りに $u = \omega + v$ を代入することによって得られる。この u は argument of latitude といわれる。

次に慣性座標系から地表面座標系への変換を考える。 θ を恒星時 (sidereal time), つまり春分点方向から観測地点 S の子午線までの中心角とし、 φ を測地的緯度 (geodetic latitude), つまり S における法線が赤道面となす角とする。このとき図 1.7 からすぐわかるように、この変換は次の行列で示される。

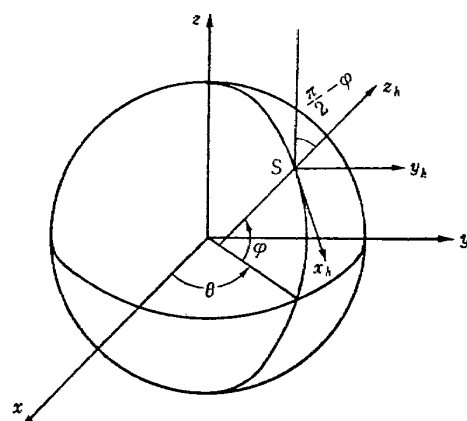


図 1.7

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega) & (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega) & \sin \omega \sin i \\ (-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega) & (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) & \cos \omega \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} S \\ E \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

1.4 6要素から角度およびドップラ周波数の計算

ある時刻の6要素がわかれば、任意の時刻の観測地点からの衛星の角度すなわち方位角と仰角、さらにドップラ周波数を計算することができる。

(1)衛星の位置および速度ベクトル r, \dot{r} の計算

今時刻 t_0 の6要素 ($a, e, i, \Omega, \omega, M_0$) が与えられたとする。時刻 t の平均近点離角 M は

$$M = M_0 + n(t - t_0)$$

である。ここで $n = k\sqrt{\mu/a^3}$ である。離心近点離角 E はケプラーの方程式

$$M = E - e \sin E$$

を Newton の方法で解くことによって求められる。

(1.8), (1.13), (1.14) 式より

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (1.22)$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (1.23)$$

により v が求められる。(1.20) 式の ω に $u = v + \omega$ を代入することにより、

$$U = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \cos i \sin \Omega \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos i \cos \Omega \\ \sin u \sin i \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

が得られる。さらに

(1.8) 式の $r = a(1 - e \cos E)$ を使って、

$$r = rU$$

より r を得る。また \dot{r} は

$$\dot{r} = \dot{x}_0 P + \dot{y}_0 Q \quad (1.25)$$

と表わすこともできる。これを微分して、

$$\dot{r} = \dot{x}_0 P + \dot{y}_0 Q \quad (1.26)$$

となる。 \dot{x}_0, \dot{y}_0 は(1.15), (1.16), (1.17)式より求めることができる。

(2)観測地点の位置ベクトル R の計算

観測地点 S の子午線の赤道面への射影と x 軸とのなす角は恒星時 (sidereal time) θ といわれるが、グリニッチの恒星時は θ_g で示される。さらに U.T. (世界時) の 0 時の θ_g は θ_{g0} で示す。今地球が一樣に自転しているとし、その角速度を $\frac{d\theta}{dt}$ で示せば、 S の東経を λ とするとき、時刻 t の S の恒星時 θ は

$$\theta = \theta_{g0} + \frac{d\theta}{dt}(t - t_0) + \lambda \quad (1.27)$$

である。ここに t_0 は θ_{g0} を与えた時刻である。この θ と観測地点 S の測地的緯度 φ を使うと、 $R = (X, Y, Z)$ は

$$\begin{aligned} X &= -G_1 \cos \varphi \cos \theta \\ Y &= -G_1 \cos \varphi \sin \theta \\ Z &= -G_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.28)$$

として得られる。ただし

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \varphi}} + H \\ G_2 &= \frac{(1 - f)^2 a_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \varphi}} + H \end{aligned} \quad (1.29)$$

である。 H は観測地点 S の高さ、 a_e は地球の赤道面の半径、 f は地球の扁平率で、 b_e を極方向の半径とするとき、 $f = (a_e - b_e)/a_e$ である。 θ_{g0} は次の式によって計算することができる¹⁾。

$$\begin{aligned} \theta_{g0} &= 99.^\circ 6909833 + 36000.^\circ 7689 Tu \\ &+ 0.^\circ 00038708 Tu^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

ここで、Julian Date(*)を $J.D.$ で表わすと、

$$Tu = \frac{J.D. - 2415020.0}{36525} \quad (1.31)$$

である。この θ_{g0} の単位は度である。 $\dot{R} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ は(1.28)式から直ちに、

$$\dot{R} = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} \quad (1.32)$$

となる。

(3)角度の計算

(1.19) 式から、

$$\rho = r + R$$

である。 ρ の x, y, z 成分を ρ_x, ρ_y, ρ_z で示すと、(1.21) 式から、

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

であり、一方 A, h を用いれば、 $\rho_h = (x_h, y_h, z_h)$ は

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cos h \cos A \\ \rho \cos h \sin A \\ \rho \sin h \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

と書けるから、(1.33) と (1.34) から A, h を求めることができる。

(4)ドップラ周波数の計算

(*) Julian Date は B.C. 4713 年 1 月 1 日から勘定された日で、おのおの Julian Date は正午から正午までに測られる。

$$\rho = r + R$$

を微分して、

$$\dot{\rho} = \dot{r} + \dot{R}$$

となる。

\dot{r} , \dot{R} は (1.26), (1.32) 式より求められる。したがって $\dot{\rho}$ は

$$\dot{\rho} = \frac{\rho \cdot \dot{\rho}}{\rho} \quad (1.35)$$

より求められる。 $\dot{\rho}$ は Range Rate といわれる。よく知られているように、ドップラ周波数 f_R は

$$f_R = f_0 \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c} \right) \quad (1.36)$$

である。ここに f_0 は衛星の発信周波数、 c は光速である。実際には、内之浦、下里の場合、発信周波数は 1500 Mc に換算されて、次のように出力された。

$$f_R = 7 \times 10^5 + \left(1.5 \frac{df_0}{f_{00}} - 1.4993 \frac{df_{Mc}}{1_{Mc}} \right) \times 10^9 - \frac{\dot{\rho}}{c} \left(1 + \frac{df_0}{f_{00}} \right) \times 1.5 \times 10^9 \quad (1.37)$$

鹿島の X-Y アンテナの場合は

$$\frac{((f_R + 9)/10 + 9)/10 + 9}{10} = \frac{f_0 \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c} \right)}{f_{00} - 30} \quad (1.38)$$

鹿島の 30 m パラボラアンテナの場合は、

$$f_R = 12 f_0 \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c} \right) - f_{00} \quad (1.39)$$

である。ここで

f_0 : 衛星の発信周波数

f_{00} : 受信機の同調周波数

df_0 : $= f_0 - f_{00}$

df_{Mc} : 受信機の基準周波数 1 Mc のドリフト

である。

1.5 位置および速度ベクトルから 6 要素の算出

ある時刻の衛星の位置および速度ベクトル r, \dot{r} が与えられたとき、6 要素を算出する方法を示す。

r, \dot{r} がわかると

$$r^2 = r \cdot r$$

$$r\dot{r} = r \cdot \dot{r}$$

$$V^2 = \dot{r} \cdot \dot{r}$$

より r, \dot{r}, V が得られる。次に

vis-viva 方程式 (1.18) より

$$a = 1 / \left(\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)$$

を得る。(1.8) 式より

$$e \cos E = 1 - \frac{r}{a} \quad (1.40)$$

であり、この式を微分して、(1.17) 式を用いると

$$e \sin E = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a\mu}} \quad (1.41)$$

となる。(1.40), (1.41) 式より離心率 e と離心近点離角 E とを求めることができる。さらにケプラーの方程式 (1.12) 式によって $M = E - e \sin E$ であるから、平均近点離角 M が得られる。(1.13)~(1.16) 式の $x_\omega, y_\omega, \dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega$ を使うと、

$$r = x_\omega P + y_\omega Q$$

$$\dot{r} = \dot{x}_\omega P + \dot{y}_\omega Q$$

となる。これらより単位ベクトル P, Q が得られるから、したがって $W = P \times Q$ として W がわかり、(1.20) 式より、軌道傾斜角 i , 昇交点経度 Ω , 近地点引数 ω を計算することができる。

1.6 二つの位置ベクトルからの軌道決定

二つの位置ベクトル r_1, r_2 とそれに対応する時刻 t_1, t_2 が与えられたときに、軌道を決定する方法としては Gauss の方法¹⁾, Lambert-Euler の方法¹⁾, p -iteration の方法¹⁾, v -iteration の方法¹⁾, f, g 級数を使う方法¹⁾, および e -iteration¹⁾ の方法がある。二つのベクトル r_1, r_2 の中心角が 70° より小さいときは Gauss の方法が良く、 70° 以上のときは v -iteration の方法が良いといわれている。ここでは実験で使われた Gauss の方法の概略を示す。

二体問題の運動方程式 (1.3) より、ある時刻 t_0 の位置および速度ベクトル r_0, \dot{r}_0 がわかれば、任意の時刻 t の位置ベクトル r は

$$r = f r_0 + g \dot{r}_0 \quad (1.42)$$

と書くことができる。つまり、 $\tau = k(t - t_0)$ の関数 r を $\tau = 0$ のまわりで Taylor 展開して二階微分以上のものを低次のもので置きかえてゆけば f, g を τ の関数としての級数で表現できる。

これを f, g 級数という。

(1.42) 式を x_ω, x_ω 軸に対して書くと、

$$r_\omega = f r_{\omega 0} + g \dot{r}_{\omega 0}$$

となる。 $\dot{r}_{\omega 0}$ でベクトル積をとると、

$$r_\omega \times \dot{r}_{\omega 0} = f r_{\omega 0} \times \dot{r}_{\omega 0} = f \sqrt{\mu p} W,$$

すなわち

$$(x_\omega \dot{y}_{\omega 0} - y_\omega \dot{x}_{\omega 0}) W = f \sqrt{\mu p} W$$

となる。したがって

$$f = \frac{x_\omega \dot{y}_{\omega 0} - y_\omega \dot{x}_{\omega 0}}{\sqrt{\mu p}}$$

である。同様にして、

$$g = \frac{y_0 x_{\omega_0} - x_0 y_{\omega_0}}{\sqrt{\mu p}}$$

を得る。これに(1.13)~(1.17)式を代入して変形すると、

$$f = 1 - \frac{a}{r_0} [1 - \cos(E - E_0)]$$

$$g = \tau - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [(E - E_0) - \sin(E - E_0)] \quad (1.43)$$

となる。これを f, g 級数の閉じた形式という。この f, g を使うと、

$$\dot{r}_0 = \frac{r - fr_0}{g} \quad (1.44)$$

である。 r_0, r を r_1, r_2 で置きかえれば、 \dot{r}_1 が得られる。 f, g 級数を得るためには、長半径 a と $E_2 - E_1$ を知る必要がある。今 r_1, r_2 によってつくられる扇形と三角形の面積の比を y とすると、(1.6) 式によって

$$y = \frac{\sqrt{\mu p} \tau}{r_2 r_1 \sin(v_2 - v_1)} \quad (1.45)$$

で与えられる。この y はケプラーの方程式との関連のもとに、ある繰り返し計算によって求めることができる。またその途中で $E_2 - E_1$ も求められる。 a は次式によって得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{\mu} \tau}{2y \sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}$$

したがって f, g が得られ、よって r_1, \dot{r}_1 が求められる。さらに 1.5 によって軌道の 6 要素を知ることができる。

1.7 角度からの軌道決定

角度データから軌道を決定する方法としては、Gauss の方法¹⁾、Laplace の方法¹⁾、Double r -iteration の方法¹⁾、Herget の方法²⁾⁷⁾、改良 Herget 法などがある。Gauss の方法、Laplace の方法は古典的であって、角度データが短い弧の上にあるときは Gauss の方法が優れている。Laplace の方法は計算的観点からはより簡単であるという利点がある。角度データが大きな弧の上に広がっている場合、ないしは数回回転した軌道の角度データの場合には Double r -iteration が良い。Herget の方法は観測角度データの誤差を考慮することができるという理論的合理性がある。改良 Herget 法はこの Herget の方法をさらに改良したものである。ここでは実験に使用された Gauss の方法の概略を示す。

一つの観測地点からの時刻 t_1, t_2, t_3 の角度 (A_i, h_i) ($i=1, 2, 3$) が与えられたとする。したがって観測地点

から衛星へ向う単位ベクトル L_i ($i=1, 2, 3$) が与えられたと考えることができる。時刻 t_1, t_2, t_3 の slant range を ρ_1, ρ_2, ρ_3 とすれば、

$$r_i = \rho_i L_i - R_i \quad (i=1, 2, 3)$$

であり、 r_i は軌道面上にあるから r_1, r_2, r_3 は一次従属である。ゆえに

$$C_1 r_1 - r_2 + C_3 r_3 = 0 \quad (1.46)$$

となるような C_1, C_3 が存在する。(1.46) 式は Gaussian equation といわれる。 r_3 とのベクトル積をとると、

$$C_1 r_1 \times r_3 = r_2 \times r_3$$

である。したがって r_i, r_j によって作られる三角形の面積を A_{ij} とすると

$$C_1 = \frac{A_{23}}{A_{13}}$$

となる。一方 (1.42) 式より

$$r_1 = f_1 r_2 + g_1 \dot{r}_2$$

$$r_3 = f_3 r_2 + g_3 \dot{r}_2$$

と書くことができる。

$$A_{23} = \frac{1}{2} W \cdot (r_2 \times r_3) = \frac{1}{2} W \cdot (g_3 r_2 \times \dot{r}_2) = \frac{1}{2} g_3 h$$

$$A_{13} = \frac{1}{2} W \cdot (r_1 \times r_3) = \frac{1}{2} W \cdot (f_1 g_3 r_2 \times \dot{r}_2 + g_1 f_3 \dot{r}_2 \times r_2)$$

$$= \frac{1}{2} h (f_1 g_3 - f_3 g_1)$$

よって

$$C_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \quad (1.47)$$

を得る。同様にして、

$$C_3 = \frac{-g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1}$$

である。これらの f_i, g_i は $\tau_i = k(t_i - t_2)$ の級数で表現すると、

$$f_i = 1 - \frac{1}{2} u_2 \tau_i^2 + 0(\tau_i^3)$$

$$g_i = \tau_i - \frac{1}{6} u_2 \tau_i^3 + 0(\tau_i^4)$$

となる。ここで $u_2 = \mu/\tau_2^3$ である。これらを (1.47) 式に代入して、 $\tau_{13} = \tau_3 - \tau_1$ とすれば

$$C_1 \cong \frac{\tau_3}{\tau_{13}} \left[1 + \frac{u_2}{6} (\tau_{13}^2 - \tau_3^2) \right]$$

$$C_3 \cong -\frac{\tau_1}{\tau_{13}} \left[1 + \frac{u_2}{6} (\tau_{13}^2 - \tau_1^2) \right] \quad (1.48)$$

となる。(1.46) 式より

$$C_1 \rho_1 L_1 - \rho_2 L_2 + C_3 \rho_3 L_3 = C_1 R_1 - R_2 + C_3 R_3 \quad (1.49)$$

である。この連立方程式を解いて、 u_2 に関して整理すると、

$$\rho_1 = \frac{A_1^* + B_1^* u_2}{A_1 + B_1 u_2} \quad (1.50)$$

$$\rho_2 = \frac{A_2^* + B_2^* u_2}{A_2 + B_2 u_2} \quad (1.51)$$

$$\rho_3 = \frac{A_3^* + B_3^* u_2}{A_3 + B_3 u_2} \quad (1.52)$$

となる。ここにおいて、 A_i, B_i, A_i^*, B_i^* などはすべて既知量である。一方幾何学的条件より、

$$r_2^2 = \rho_2^2 - 2\rho_2 L_2 \cdot R_2 + R_2^2$$

である。ここに (1.51) 式を代入すると、 r_2 についての 8 次の代数方程式が得られ、それを解くことによって r_2 を求める。(1.50), (1.51), (1.52) 式より ρ_1, ρ_2, ρ_3 がわかると、ベクトル方程式

$$r_i = \rho_i L_i - R_i \quad (i=1, 2, 3)$$

によって各時刻 t_i の位置ベクトル r_i が得られる。 \dot{r}_2 を得るためには、Lagrange の補間式

$$r(\tau) = r_1 \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} + r_2 \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_3)}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} + r_3 \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_1)}{(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)}$$

を微分して、 $\tau = \tau_2 = 0$ とおけば、

$$\dot{r}_2 = -\frac{\tau_3}{\tau_1(\tau_1 - \tau_3)} r_1 - \frac{(\tau_3 + \tau_1)}{\tau_1 \tau_3} r_2 - \frac{\tau_1}{\tau_3(\tau_3 - \tau_1)} r_3$$

となる。この r_2, \dot{r}_2 によって、3 次の近似で軌道決定できる。さらに 5 次の近似まで精度を改善するには Herrick-Gibbs の方程式を用いなくてはならないが、ここでは省略する。

1.8 地球の扁平による摂動

基礎的な二体問題の運動にずれをもたらす摂動の原因は数多く存在する。たとえば、考えている運動の中心物体の力場が厳密に逆平方の法則にしたがっていないこと、大気の抵抗が運動方程式の中に入ってくること、太陽の輻射圧が加速度を生むこと、近い天体が運動物体に影響すること等々である。しかしここでは地球の扁平に負う摂動だけを考える³⁾。

地球の重力場が軸対称であると仮定すると、中心からの距離と地球中心緯度がそれぞれ r, δ のところの地球の重力ポテンシャル Φ は

$$\Phi = \frac{k^2 m}{r} \left[1 + \frac{3J_2}{2r^2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \delta \right) - \frac{J_3}{r^3} \left(\frac{5}{2} \sin^2 \delta - \frac{3}{2} \right) \cdot \sin \delta - \frac{5}{8} \frac{J_4}{r^4} \left(\frac{3}{35} + \frac{1}{7} \sin^2 \delta - \frac{1}{4} \sin^2 2\delta \right) + \dots \right] \quad (1.53)$$

となる。ここに k^2 は重力定数、 m は地球の質量、そして J_i は地球の重力ポテンシャルの調和係数である。 Φ の第 2, 第 4 項は地球の扁平に負うものであり、第 3 項は赤道面に関する非対称性に負うものである。 r と

δ を衛星の楕円要素で表現すると、

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}$$

$$\sin \delta = \sin i \sin(v + \omega)$$

である。摂動関数 R は、 J_4 まで考えると、

$$R = \Phi - k^2 m / r = k^2 m \left[\frac{3}{2} \frac{J_2}{a^2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i \cdot \cos 2(v + \omega) \right\} - \frac{J_3}{a^4} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \left\{ \left(\frac{15}{8} \sin^2 i - \frac{3}{2} \right) \sin(v + \omega) - \frac{5}{8} \sin^2 i \sin 3(v + \omega) \right\} \sin i - \frac{35}{8} \frac{J_4}{a^5} \left(\frac{a}{r} \right)^5 \left\{ \frac{3}{35} - \frac{3}{7} \sin^2 i + \frac{3}{8} \sin^4 i + \sin^2 i \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \cdot \cos 2(v + \omega) + \frac{1}{8} \sin^4 i \cos 4(v + \omega) \right\} \right] \quad (1.54)$$

となる。ある基準の値からの振動しない定常的な変動は secular な摂動といわれ、周期的変動をもつものは周期的摂動 (periodic perturbation) といわれる。周期的摂動は短周期摂動 (short periodic perturbation) と長周期摂動 (long periodic perturbation) に分けられる。短周期摂動は v と ω の線型結合の三角関数をもつ項で、長周期摂動は ω と ω の整数倍の三角関数をもつ項である。

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right)^3 dM = (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2v} = \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2v} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^4 \cos v} = e(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^4 \sin v} = \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^4 \cos 3v} = \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^4 \sin 3v} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^6} = (1-e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^6 \cos 2v} = \frac{3}{4} e^2 (1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r} \right)^6 \sin 2v} = \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^6 \cos 4v} = \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^6 \sin 4v} = 0$$

上の関係式を使い、必要事項だけを引きだすと、

$$R_1 = k^2 m \frac{3}{2} \frac{J_2}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) (1-e^2)^{-3/2}$$

$$R_2 = -k^2 m \frac{35}{8} \frac{J_4}{a^5} \left(\frac{3}{35} - \frac{3}{7} \sin^2 i + \frac{3}{8} \sin^4 i \right) \cdot (1-e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right)$$

$$R_3 = -k^2 m \left\{ \frac{3}{2} \frac{J_3}{a^4} \sin^2 i \left(\frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) e (1-e^2)^{-5/2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin \omega + \frac{35}{8} \frac{J_4}{a^5} \sin^2 i \left(\frac{9}{28} - \frac{3}{8} \sin^2 i \right) e^2 (1-e^2)^{-7/2} \\
& \cdot \cos 2\omega \} \\
R_4 = & k^2 m \frac{3}{2} \frac{J_2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot (1-e^2)^{-3/2} \right\} + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(v+\omega) \right] \quad (1.55)
\end{aligned}$$

となる。\$R_1, R_2, R_3, R_4\$ はそれぞれ一次の secular, 2 次
の secular, 長周期, 短周期の摂動関数である。

軌道要素の変動を表現する微分方程式は,

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
& \quad (1.56)
\end{aligned}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

である。

(1) secular

一次の secular の摂動は (1.56) 式で \$R=R_1\$ とお
いて, 導くことができる。それによって

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_0 + \frac{3J_2}{2p^2} \bar{n} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) t \\
\Omega &= \Omega_0 - \frac{3J_2}{2p^2} \bar{n} t \cos i \quad (1.57) \\
M &= M_0 + \bar{n} t \\
\bar{n} &= n_0 + \frac{3J_2}{2p^2} n_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1-e^2}
\end{aligned}$$

となる。ここに \$\omega_0, M_0\$ は基準時刻 \$t=0\$ での平均値
であり, 周期的摂動は差引かれている。\$n_0\$ は摂動を受
けない平均運動で \$n_0^2 a^3_0 = k^2 m\$ によって \$a_0\$ と関係づ
けられる。

長半径の平均値としては \$a_0\$ ではなく,

$$\bar{a} = a_0 \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1-e^2} \right\} \quad (1.58)$$

を採用する方がよい。そのときは次の関係式が成立す
る。

$$\bar{n}^2 \bar{a}^3 = k^2 m \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1-e^2} \right\} \quad (1.59)$$

(2) 短周期摂動

一次の短周期摂動を導びくためには (1.56) 式で
\$R=R_4\$ とおくことによって得ることができる。独立変
数を \$t\$ から \$v\$ に変換するには

$$dt = \frac{dt}{dM} dM = \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} dv$$

を使えばよいから, たとえば軌道傾斜角 \$i\$ の短周期摂
動は

$$di = \frac{\cos i}{n^2 a^2 (1-e^2) \sin i} \int \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial R_4}{\partial \omega} dv$$

によって得られる。6 要素に対する結果は次のよう
である。

$$\begin{aligned}
da_s &= \frac{3}{2} \frac{J_2}{a} \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 i \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 - (1-e^2)^{-3/2} \right\} \right. \\
& \left. + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v+\omega) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
de_s &= \frac{3}{2} \frac{1-e^2}{e} \frac{J_2}{a^2} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right. \right. \\
& \left. \left. - (1-e^2)^{-3/2} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v+\omega) \right) \\
& \left. - \frac{\sin^2 i}{2e} \frac{3J_2}{2ap} \left\{ \cos 2(v+\omega) + e \cos(v+2\omega) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} e \cos(3v+2\omega) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_s &= \frac{3}{2} \frac{J_2}{p^2} \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (v-M+e \sin v) \right. \\
& \left. + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin v + \frac{1}{2} \sin 2v \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e}{12} \sin 3v \right\} - \frac{1}{e} \left\{ \frac{1}{4} \sin^2 i + \left(\frac{1}{12} - \frac{15}{16} \sin^2 i \right) e^2 \right\} \sin \right. \\
& \left. (v+2\omega) + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(v-2\omega) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{2} \sin i \right) \right. \\
& \left. \cdot \sin 2(v+\omega) + \frac{1}{e} \left\{ \frac{7}{12} \sin^2 i - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{19}{8} \sin^2 i \right) e^2 \right\} \right. \\
& \left. \cdot \sin(3v+2\omega) + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin(4v+2\omega) + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin \right. \\
& \left. (5v+2\omega) \right] \quad (1.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
di_s &= \frac{3J_2}{8p^2} \sin 2i \left\{ \cos 2(v+\omega) + e \cos(v+2\omega) + \frac{e}{3} \right. \\
& \left. \cdot (3v+2\omega) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\Omega_s &= -\frac{3}{2} \frac{J_2}{p^2} \cos i \left\{ v-M+e \sin v - \frac{1}{2} \sin 2(v+\omega) \right. \\
& \left. - \frac{e}{2} \sin(v+2\omega) - \frac{e}{6} \sin(3v+2\omega) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
edM_s &= \frac{3}{2} \frac{J_2}{p^2} \sqrt{1-e^2} \left[-\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) \sin v \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e}{2} \sin 2v + \frac{e^2}{12} \sin 3v \right\} + \sin^2 i \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{5}{4} e^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \sin(v+2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin(v-2\omega) - \frac{7}{12} \left(1 - \frac{e^2}{28} \right) \sin \right. \right.
\end{aligned}$$

$$(3v+2\omega) - \frac{3}{8}e \sin(4v+2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin(5v+2\omega) \Bigg\}$$

近地点引数 ω ，平近点離角 M の表現はかなり複雑であるので， a, e, ω, M を半径 r と緯度引数 $u(=v+\omega)$ の中に結合する方が良い。 r, u に対する変動は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dr}{da} &= \frac{1}{2} \frac{J_2}{ap} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ -1 - \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \cos v \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{a \sqrt{1-e^2}} \right\} + \frac{1}{4} \frac{J_2}{ap} \sin^2 i \cos 2(v+\omega) \\ du &= \frac{3J_2}{2p^2} \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (v - M + e \sin v) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \frac{2}{3e} \left(1 - \frac{e^2}{2} - \sqrt{1-e^2} \right) \sin v + \frac{1}{6} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (1 - \sqrt{1-e^2}) \sin 2v \right\} - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \sin^2 i \right) e \sin \right. \\ &\quad \left. (v+2\omega) - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{12} \sin^2 i \right) \sin 2(v+\omega) - \frac{e}{6} \cos^2 i \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin(3v+2\omega) \right] \end{aligned} \tag{1.61}$$

2. 計算処理方式

計算処理は大別して三つの部分に分かれる。まず観

測データには種々の原因により不良データが混入するので，それを棄却して真値を推定する必要がある。これがデータの前処理である。次は角度からの軌道決定で，古典的な Gauss の方法と Herrick-Gibbs による精度改善を結合した方法が使用された。最後はドップラ周波数による軌道改良で方法は最小二乗法である。

2.1 データの前処理

不良観測データを棄却するためにはデータの誤差の標準偏差を推定する必要がある。この標準偏差 σ を推定するのに等間隔データに基づく方法を採用した。そのために観測データにおいて生じた欠測データは推定して，うめておく必要がある。

(1) 欠測値の推定

一連の観測値 $y_i (i=1, \dots, n)$ があるとき，それらの中の欠測値を最小二乗法で一次式によって推定する。したがって推定式は表 2.1 のようになる。

(2) 観測データの誤差の推定

等間隔の観測データ $y(t_i) (i=1, \dots, n)$ が t_i の $(k-1)$ 次の多項式と平均値 0 のランダム誤差 ε_i の和で表現されると仮定する。つまり

$$y(t_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \dots + \alpha_{k-1} t_i^{k-1} + \varepsilon_i$$

である。このとき $y_i = y(t_i)$ の第 k 次の階差 $\Delta^k y_i (i=1, \dots, n-k)$ はランダム誤差のみにより構成される。

ただし $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ である。すぐわかるように，

表 2.1 欠測値の推定式

欠測データの数	利用する観測データの数	× 観測データ ○ 欠測データ	推定式
1	前後 1 個ずつ		$y_m = \frac{1}{2} (y_{m-1} + y_{m+1})$
	前後 2 個ずつ		$y_m = \frac{1}{4} (y_{m-2} + y_{m-1} + y_{m+1} + y_{m+2})$
2	前後 2 個ずつ		$y_m = \frac{1}{68} (22y_{m-2} + 20y_{m-1} + 14y_{m+2} + 12y_{m+3})$ $y_{m+1} = \frac{1}{68} (12y_{m-2} + 14y_{m-1} + 20y_{m+2} + 22y_{m+3})$
	前後 2 個ずつ		$y_m = \frac{1}{52} (19y_{m-2} + 17y_{m-1} + 9y_{m+3} + 7y_{m+4})$ $y_{m+1} = \frac{1}{4} (y_{m-2} + y_{m-1} + y_{m+3} + y_{m+4})$ $y_{m+2} = \frac{1}{52} (7y_{m-2} + 9y_{m-1} + 17y_{m+3} + 19y_{m+4})$
3	前後 3 個ずつ		$y_m = \frac{1}{174} (41y_{m-3} + 38y_{m-2} + 35y_{m-1} + 23y_{m+3} + 20y_{m+4} + 17y_{m+5})$ $y_{m+1} = \frac{1}{6} (y_{m-3} + y_{m-2} + y_{m-1} + y_{m+4} + y_{m+5})$ $y_{m+2} = \frac{1}{174} (17y_{m-3} + 20y_{m-2} + 23y_{m-1} + 35y_{m+3} + 38y_{m+4} + 41y_{m+5})$
	前後 2 個ずつ		$y_m = \frac{1}{148} (58y_{m-2} + 52y_{m-1} + 22y_{m+4} + 16y_{m+5})$ $y_{m+1} = \frac{1}{148} (44y_{m-2} + 42y_{m-1} + 32y_{m+4} + 30y_{m+5})$ $y_{m+2} = \frac{1}{148} (30y_{m-2} + 32y_{m-1} + 42y_{m+4} + 44y_{m+5})$ $y_{m+3} = \frac{1}{148} (16y_{m-2} + 22y_{m-1} + 52y_{m+4} + 58y_{m+5})$
4	前後 3 個ずつ		$y_m = \frac{1}{930} (317y_{m-3} + 281y_{m-2} + 245y_{m-1} + 65y_{m+4} + 29y_{m+5} - 7y_{m+6})$ $y_{m+1} = \frac{1}{930} (209y_{m-3} + 197y_{m-2} + 185y_{m-1} + 125y_{m+4} + 113y_{m+5} + 101y_{m+6})$ $y_{m+2} = \frac{1}{930} (101y_{m-3} + 113y_{m-2} + 125y_{m-1} + 185y_{m+4} + 197y_{m+5} + 209y_{m+6})$ $y_{m+3} = \frac{1}{930} (-7y_{m-3} + 29y_{m-2} + 65y_{m-1} + 245y_{m+4} + 281y_{m+5} + 317y_{m+6})$

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \varepsilon_{i+j}$$

である。この分散 σ^2 をとると、

$$\sigma^2(\Delta^k y_i) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \sigma^2(\varepsilon)$$

$$\sigma^2(\varepsilon) = \frac{\sigma^2(\Delta^k y_i)}{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2}$$

となる。したがって、 $\sigma(\varepsilon)$ は次のように推定される。

$$\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-k} (\Delta^k y_i)^2}{(n-k) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2}} \quad (2.1)$$

実際には、多項式の次数はあらかじめ判明しない。しかし上のような仮定のもとでは k 次階差の σ と $(k+1)$ 次階差の σ が一致する。そこで階差の次数を上げて行って、前後の σ に差異がみとめられないところで止めればよい。計算の結果 $k=4$ と $k=5$ とのときの σ がほぼ同じなので $k=4$ と定めた。

(3) 不良データの棄却と真値の推定

観測データ $y(t_i)$ ($i=1, \dots, n$) を 61 点ごとに 7 次の多項式 $p(t_i)$ で最小二乗法によって近似する。(2) 項で推定された標準偏差を σ として、61 点の中間の 21 点に対して、

$$|y(t_i) - p(t_i)| > 3\sigma$$

のとき $y(t_i)$ を不良データとして棄却し、真値を $p(t_i)$ によって推定する。7 次の多項式を選んだ理由は実験以前のモデル計算において、61 点ごときの近似では 7 次式が最良と判断されたためである。

2.2 角度からの軌道決定の計算

Gauss の方法は三時点の角度 (A_k, h_k) ($k=1, 2, 3$) から軌道の第一近似を求めることを原理としている。しかしながら観測データ (A_i, h_i) ($i=1, \dots, n$) は誤差を含んでいるので、三点のみを抽出して軌道を決定したのでは、良い決定はできない。そのために次のような手順を用いる。

時刻 t_1, \dots, t_n の方位角と仰角 (A_i, h_i) ($i=1, \dots, n$) を観測点から衛星へ向う単位ベクトル L_i ($i=1, \dots, n$) へ変換する。次に L_i を平滑化する。平滑化の方法は最小二乗法である。つまり L_k ($k=i-30, \dots, i, \dots, i+30$) の 61 点を 7 次の多項式で最小二乗法によって近似し、 L_i を近似値 \bar{L}_i で置きかえる。これを $i=31, \dots, n-30$ について行なう。次に $(\bar{L}_{31}, \bar{L}_i, \bar{L}_{n-30})$ から Gauss の方法で t_{31}, t_{n-30} のときの位置ベクトルを求め、さらに Herrick-Gibbs の方程式を用いて精度を改善する。その結果を $(r_{31, i}, r_{n-30, i})$ とする。添字 i は中間のベクトル \bar{L}_i に依存することを示す。こ

れを $i=41, \dots, n-40$ ($n>80$) について行ない、それらを平均化する。すなわち

$$\bar{r}_{31} = \frac{1}{n-80} \sum_{i=41}^{n-40} r_{31, i} \quad (2.2)$$

$$\bar{r}_{n-30} = \frac{1}{n-80} \sum_{i=41}^{n-40} r_{n-30, i} \quad (2.3)$$

とする。次に二つの位置ベクトルからの軌道決定の方法を用いて時刻 t_{31} の 6 要素を算出する。

Gauss の方法—Herrick Gibbs の方程式による精度改善において、中心時刻の位置と速度ベクトル (r_c, \dot{r}_c) が得られるから、中心時刻を固定して (r_c, \dot{r}_c) を平滑化し、これより 6 要素を求めた方が合理的と考えられるかもしれないが、実際に計算を行なってみると、この方法では良い結果を得ることができなかったために上のような方法を用いた。

2.3 ドップラ周波数による軌道改良のための計算⁴⁾

角度からの軌道決定は角度データの誤差が大きいことと、摂動が考慮されていないために、精度が十分でない。そこでこれらのことを考慮して、ドップラ周波数を用いて軌道を改良してゆく必要がある。改良すべき軌道要素をパラメータとして観測時刻のドップラ周波数を計算し、この計算値が観測ドップラ周波数に一致するようにパラメータを改良してゆく。しかしながら、衛星の発信周波数が未知であるため、これをそのまま適用せず、ある時刻間のドップラ周波数の差について、観測値と計算値が一致するようにパラメータを改良する。計算においては軌道要素から算出した、ある基準時刻 t_0 の観測点から衛星までの位置および速度ベクトル r_h, \dot{r}_h をパラメータとして採用している。 $(r_h, \dot{r}_h) = (x_h, y_h, z_h, \dot{x}_h, \dot{y}_h, \dot{z}_h) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ として、観測ドップラ曲線 l の時刻 t_i の周波数を $F_l(t_i)$ 、対応する計算値を $f_l(x_1, x_2, \dots, x_6; t_i) \equiv f_l(x_j; t_i)$ とする。

$f_l(x_j; t_i)$ を計算するにはまず t_0 の位置および速度ベクトル $(x_h, y_h, z_h, \dot{x}_h, \dot{y}_h, \dot{z}_h)$ から慣性座標系における位置および速度ベクトル (r, \dot{r}) を求める。これより §1.5 によって 6 要素 $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ を計算する。次に地球の扁平による摂動を考慮して、次のように時刻 t の 6 要素を計算する。

i) secular の摂動を考慮した時刻 t の平均的要素の計算 ((1.57), (1.58) 式)

$$\bar{n} = n_0 + \frac{3J_2}{2p^2} n_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \sqrt{1 - e^2}$$

$$\bar{a} = a_0 \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \sqrt{1 - e^2} \right\}$$

$$e = e_0$$

$$i = i_0$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3J_2}{2p^2} \bar{n} \cos i(t-t_0)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3J_2}{2p^2} \bar{n} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) t$$

$$M = M_0 + \bar{n} t$$

ii) 短周期摂動を加える ((1.60)式)

$$a_t = \bar{a} + da_s$$

$$e_t = \bar{e} + de_s$$

$$i_t = \bar{i} + di_s$$

$$\Omega_t = \bar{\Omega} + d\Omega_s$$

$$\omega_t = \bar{\omega} + d\omega_s$$

$$M_t = \bar{M} + dM_s$$

この6要素より §1.4 によって $f_l(x_j; t_i)$ を計算する。

(1) 軌道改良の原理

(x_1, x_2, \dots, x_6) に対する修正量を $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_6)$ としたとき、

$$\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} \left\{ (F_l(t_i) - F_l(t_k)) - (f_l(x_j + \Delta x_j; t_i) - f_l(x_j + \Delta x_j; t_k)) \right\}^2 \longrightarrow \min \quad (2.4)$$

となるように $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_6)$ を決定する。ここに l はドップラ曲線に関する添字で m は曲線の数、 ml はその曲線のデータの個数を示している。 t_k は発信周波数が未知があるため、周波数の差をとるための時刻である。 $f_l(x_j; t_i)$ は非線形なので、Taylor 展開の一次の項までとって、

$$f_l(x_j + \Delta x_j; t_i) \approx f_l(x_j; t_i) + \sum_{r=1}^6 \frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_r} \Delta x_r$$

で置きかえる。したがって (2.4) 式は

$$E = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} \left\{ (F_l(t_i) - F_l(t_k) - f_l(x_j; t_i) + f_l(x_j; t_k)) - \sum_{r=1}^6 \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_r} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_r} \right) \Delta x_r \right\}^2 \longrightarrow \min \quad (2.5)$$

となる。

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x_s} = 0 \quad (s=1, \dots, 6)$$

より、

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^6 \left\{ \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_s} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_s} \right) \cdot \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_r} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_r} \right) \right\} \Delta x_r \\ & = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} (F_l(t_i) - F_l(t_k) - f_l(x_j; t_i) + f_l(x_j; t_k)) \cdot \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_s} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_s} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。行列記法で

$$P = \left(\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_s} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_s} \right) \cdot \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_r} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_r} \right) \right)$$

$$Q = \left(\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{ml} (F_l(t_i) - F_l(t_k) - f_l(x_j; t_i) + f_l(x_j; t_k)) \cdot \left(\frac{\partial f_l(x_j; t_i)}{\partial x_s} - \frac{\partial f_l(x_j; t_k)}{\partial x_s} \right) \right)$$

$$\Delta X = (\Delta x_r)$$

とおく、ここに P は 6×6 行列、 Q および ΔX は 6×1 行列である。この行列を用いれば、

$$P \Delta X = Q \quad (2.7)$$

よって、

$$\Delta X = P^{-1} Q \quad (2.8)$$

となる。非線形の問題を線形化しているの、良い近似をうるためには繰り返し計算が必要である。角度から得られた軌道はこの繰り返し計算の第一近似の役割を果し、普通初期軌道または初期値といわれる。今第 k 回目の繰り返し計算中において、

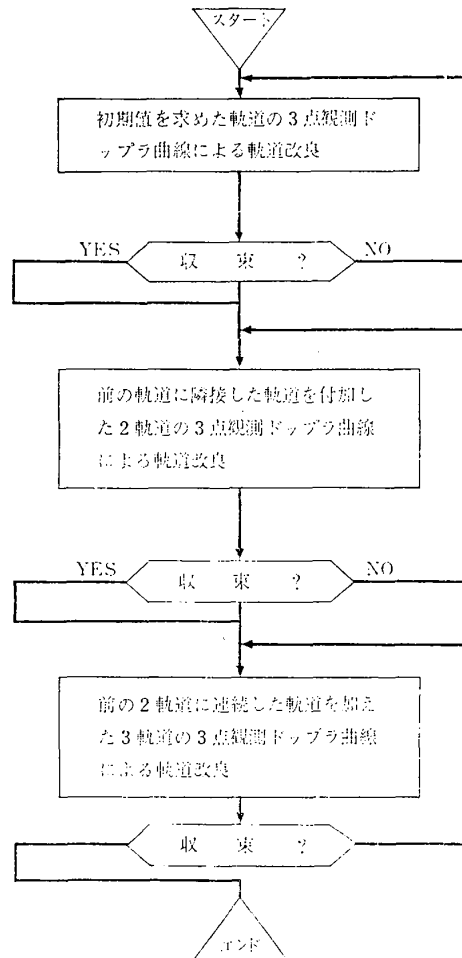


図 2.1

$$\eta_k = \left(\frac{1}{n-6} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} (F_i(t_i) - F_i(t_k) - f_i(x_j; t_i) + f_i(x_j; t_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

としたとき、 $|\eta_k - \eta_{k-1}| / \eta_k < 0.01$ となるまでの繰返し計算を行なう。

(2) 軌道改良の手順

角度から軌道決定された軌道要素はドップラ周波数によって改良されるわけであるが、その手順は次のようになる。まず一つの軌道* のドップラ周波数を使って軌道改良し、収束したら隣接した軌道を合せた2軌道でさらに軌道改良を行なう、それが収束したら、さらに隣接した軌道を合せた3軌道により軌道改良を行なう。これを図示すると図 2.1 のようになる。

3. 観測データと計算処理結果

付録に示す特調費による実験において得られた観測データとそれらを用いた計算処理結果について以下に記述する。

3.1 データの前処理の結果

(1) 欠測

観測時間は衛星や軌道により異なるが、約10分~15分でデータ個数にして300~450になる。しかし実際のデータは種々の原因により欠測を生ずる。各々の観測局における欠測の分布状況を表 3.1 と図 3.1 に示す。この結果は当初の予想をはるかにこえるものであった。データ処理方式の項で述べたように、欠測値の推定は連続4個までしか行なうことはできないので、以後の計算処理に使用できないデータが相当数生じた。これは今後の計算処理において考慮しなければならない点である。

(2) 観測データの誤差

実際の観測データにどの程度の誤差があるかは観測データより推定する必要がある。(2.1) 式によって、観測ドップラ周波数の誤差の標準偏差を推定した結果を表 3.2 に示す。角度の場合の誤差の標準偏差はほとんど0.1°以下でこれから見るかぎりドップラ周波数、角度ともに誤差は非常に小さいが X-Y プロットで作図してみると図 3.2(4) のようなものが相当あって、欠測の多いこととともに、データの質は予想以上に悪い。にもかかわらず図 3.2(4) の仰角の誤差は表 3.9 ⑤ に示されているように0.01度である。このように標準偏差

* 地上を通過する衛星の一つの径路を軌道または pass と呼ぶ。

** この値は 1500 Mc に対するものである。

が小さめにでてしまうのは、§2.1(2)の誤差の推定式では局所的な近似を行なってしまうためと思われる。一方 2.1(3)の近似多項式と観測データとの差はかなり大きくなることも考えられ、したがって相当数のデータが多項式の値によっておきかえられる可能性がある。

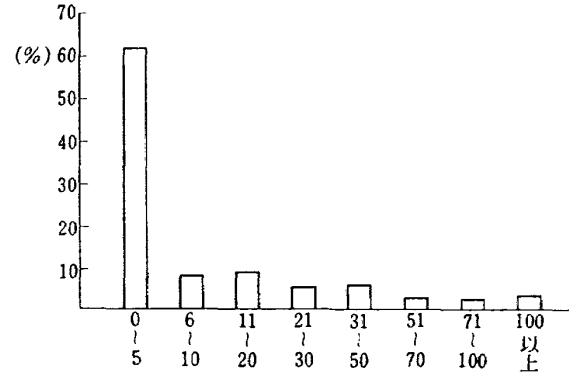


図 3.1 欠測値の分布

表 3.1 欠測の分布状況

事項 局名 欠測数	ドップラ・データ				角度	
	内之浦	下里	鹿島 (X-Y)	鹿島 (30m)	計 (%) 鹿島 (30m)	
0~5	77	63	97	17	254 (62.4)	17
6~10	13	18	4	1	36 (8.8)	1
11~20	12	21	3	2	38 (9.4)	3
21~30	3	14	3	2	22 (5.4)	1
31~50	10	7	3	4	24 (5.9)	6
51~70	2	2	3	4	11 (2.7)	4
71~100	4	1	2	3	10 (2.5)	2
101以上	4	0	3	5	12 (2.9)	3
(all)	(5)	(4)	(12)	(15)	(36)	(16)
計	125	126	118	38	407	37

表 3.2 ドップラ周波数の観測誤差の推定値

誤差の標準偏差 (s/c)	該 当 数		
	内之浦	下 里	鹿 島
0~ 2**	14	45	25
2~ 4	29	19	5
4~ 6	8	7	7
6~ 8	7	3	3
8~10	5	4	11
10~14	6	3	13
14~20	3	1	9
20以上	9	7	8

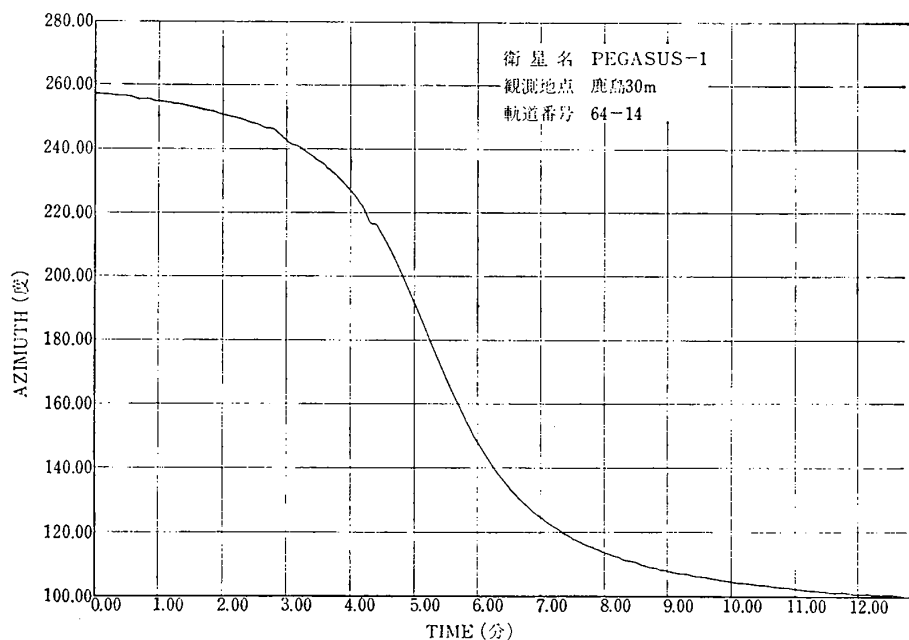


図 3.2(1) 観測データの例 (方位角)

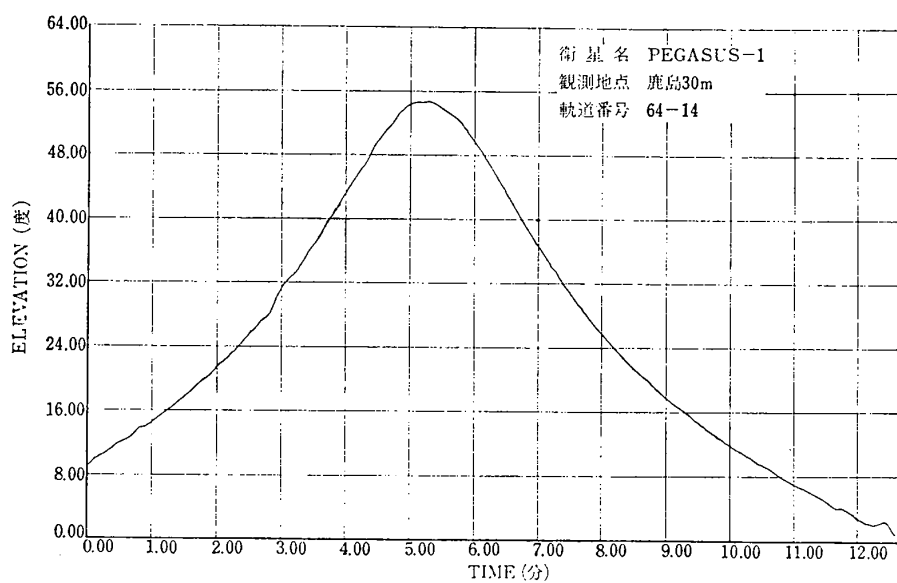


図 3.2 (2) 観測データの例 (仰角)

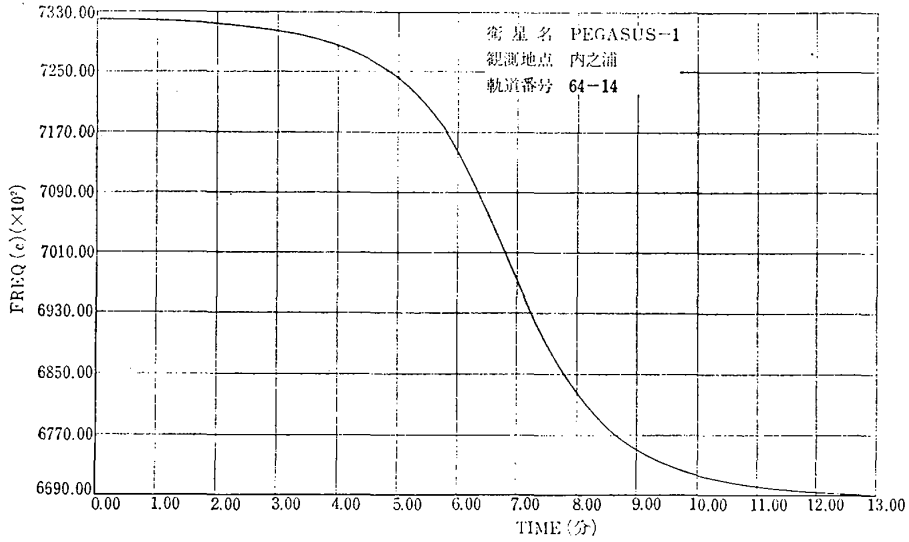


図 3.2(3) 観測データの例 (ドップラ周波数)

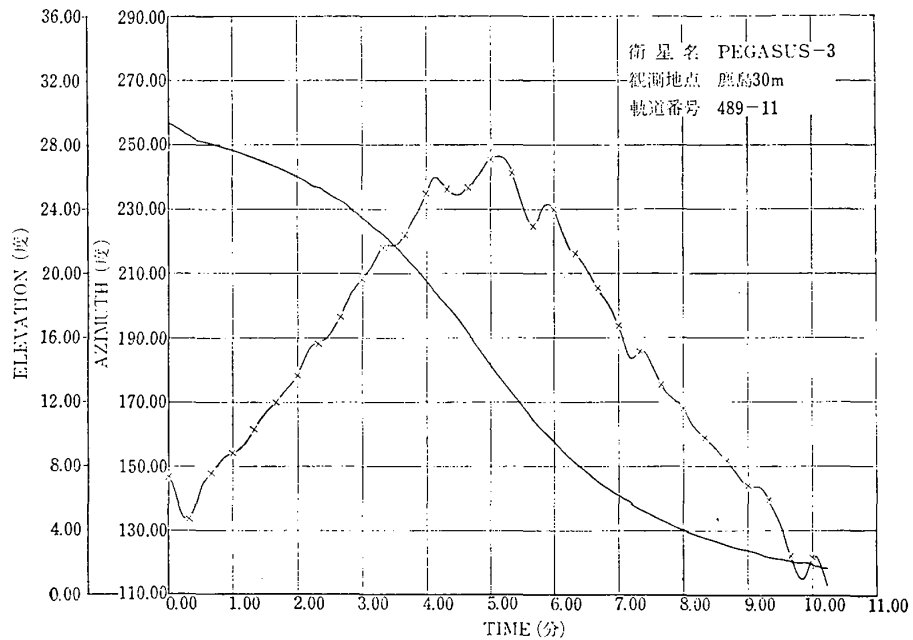


図 3.2(4) 観測データの例 (方位角, 仰角)

3.2 角度からの軌道決定の計算処理結果

鹿島の30mパラボラ・アンテナによって観測された角度つまり方位角、仰角から§2.2における軌道決定のプログラムによって決定された軌道要素をNASAの要素と比較した結果を別表1に示す。PEGASUS-1の場合は長半径 a をNASAの結果と比較した場合、その相違は250 km以下であって、初期値としては概ね満足できるが、TIRÖS-8, TIRÖS-10, 特にPEGASUS-3では非常に差が見られる。PEGASUS-3の軌道は附録の表A.1に示されているように軌道傾斜角 i が約28.9度であり、そのために鹿島では最大仰角が15°~28°であり、観測時間も短かくて約10分である。これがPEGASUS-3の軌道決定の精度の悪い原因である。

3.3 ドップラ周波数による軌道改良の検討

§2.3で記述したように、ドップラ周波数による軌道改良計算は、角度から得られた軌道の概略値を使ってドップラ周波数を計算し、その周波数が観測ドップラ周波数に一致するように軌道を改良してゆく。その際衛星の発信周波数を適切に推定できないために、ある時刻間の周波数の差を用いる。この計算が収束するためには3局の観測値が必要であることが、本実験以前の擬似データによる検討によって実験的に示されている。さらに軌道を精密化するためには、特に周期したがって長半径 a を良くするためには連続した二つ以上の軌道が必要である。このような観測データの例数はごくわずかで数ケースにすぎなかったが、以下これらを使って検討した結果を記述する。

3.3.1 擬似データとの比較による検討

観測データによる軌道改良計算を擬似データによるものと対比させながら実施してゆくことによって、観測データの特徴をある程度明らかにしてゆくことができる。ここにいう擬似データとは、与えられた要素(今の場合NASAの要素)から secular と short period の摂動を考慮して計算したドップラ周波数にランダム誤差を加えたデータのことである。軌道番号64-14の角度データから Gauss の方法によって決定した軌道の初期値を用い、ランダム誤差の標準偏差が $\sigma=0,8,16$ c/s (1500MC に対して) であるような擬似データによって改良計算を実施した結果を表3.3に示す。第1列目は擬似データを計算したNASAの要素で、第2列目は軌道改良に使った初期値、第3列以降はそれぞれの誤差の場合に軌道番号64および64と65の二軌道を使って行った軌道改良結果を示している。計算において摂動は繰り返し回数6回までは secular のみを考

慮し、7回目以降は secular と short period を入れている。これは short period の摂動の計算に時間がかかることと、この摂動は軌道がある程度良くならないと無意味になるからである。上の結果にみられるように擬似データの場合には σ のいかにかかわらず真値に近いところに収束した。近地点引数 ω と平均近点離角 M は真値と相違しているが、これは離心率 e が小さいために ω がきまりにくいからであり、 $\omega+M$ は大体一致している。これに対し観測データについて軌道改良計算を実施した結果を表3.4と表3.5に示す。ケース②, ④の場合には1軌道で発散しているが、これは初期値が悪いためと思われる。ちなみにNASAに比較して長半径 a で1000km以上相違している。ケース①, ③の場合は1軌道が収束しても2軌道では発散している。これは擬似データにはみられなかった現象である。また1軌道が収束しても、その収束値はNASAの要素に比べてかなり相異している。これらの原因として i) 観測データにはランダム誤差以外の電離層や対流圏による系統的な誤差がある, ii) 地球の扁平度以外の摂動による一軌道目と二軌道目の軌道の相違, iii) 二軌道目のデータの特異性が考えられた。

i) 観測データの系統的な誤差の検討

この問題を検討するため、軌道番号64-14の改良計算における一軌道が収束したときのドップラ周波数の観測値と計算値の間の差を図示してみると図3.3のようになる。鹿島、内之浦、下里ともほぼ同様な傾向があり、かなり系統的な誤差があると考えられる。系統的な誤差としては電離層、対流圏での屈折の影響などのほかに発信周波数のドリフトが考えられるが、これは§2.3で述べたごとく、二時刻間のドップラ周波数の差を使うために相当影響が除かれていると考えられる。そこでまずもっとも影響が大きいと思われる電離層による屈折の影響をとり除くため、計算値に電離層の補正を入れて計算したところ、二軌道での発散をくい止めることはできなかった。結果は表3.6に示されている。この一つの原因として、電離層の補正は相当良い軌道に対して入れなければ意味がないということが考えられる。

ii) 摂動の扱い方

§2.3の計算方式では大気抵抗、太陽の輻射圧、月の引力等による摂動を考慮することはできない。しかしながら連続した二つの軌道の間では、これらの摂動による軌道要素の変化は小さく、無視できるものと考えられる。そこで地球の扁平度による摂動の扱いに問題があるかということが考えられた。このことを詳細に

検討した結果、長半径 a の平均値の扱いに問題があると考えられたのでこの点を改善した。

iii) 二軌道目の観測データの特異性

二つの軌道を合せると収束しない原因として、二軌道目のデータがなんらかの原因で異常であることが考えられる。そこで二軌道目だけをとりだして軌道改良計算を実施したところ発散現象はみられなかった。したがって二軌道目のデータが特に異常だとは考えられない。結果は表 3.7 に示されている。

3.3.2 計算手法の改良

前項の検討の結果明らかのように、観測データと擬似データの大きな相違点は系統的な誤差の存在であると考えられる。この影響を除去する方法として、一つは影響の大きいと考えられるところのデータは使用しないようにすることであり、もう一つは周波数の差をとる時刻間隔を有効数字を減らさない程度で短くすることである。

i) データカット

観測の始めと終わりの近辺の仰角が低いところのデータは、電離層、対流圏による電波伝播におよぼす影響または近傍反射による影響等により、誤差が大きいと考えられ、角度測定データの例図 2.3(4)からも誤差の大きい傾向があるので、仰角 10° 以下データをカットして使用しないようにした。このことは非常に効果があり表 3.8 のケース②に示されているように繰り返し回数 17 回で二軌道も収束した。

ii) 基準点のとり方

すでに述べたように、衛星の発信周波数の不正確さの影響を少なくする方法として、ある時刻間のドップラ周波数の差 $F(t_i) - F(t_k)$ を観測値と計算値について一致させる方法を採用している。今までは差をとる基準点 t_k としては、使用する観測データの最初の時刻 t_1 に固定していた。これでは発信周波数の不正確さの影響は小さくできても、観測値 $F(t_1)$ の誤差が反対にバイアスとして入ってくる恐れがある。そこで差をとる基準点 t_k を固定せず、有効数字を減らさない程度に二時刻間を小さくし、 t_k を t_i の 20 秒または 30 秒後れた時刻とした。これによって系統的誤差も相当相殺されると考えられる。実際この方法によって計算を実施した結果は表 3.8 のケース⑥と表 3.10 の⑥に示されているが、ケース②と比較して結果も改良され、2 軌道の収束回数も 17 回から 10 回に減少している。さらに図 3.4 はケース⑥における 1 軌道目が収束したとき

の観測値と計算値の差を図示したものであるが図 3.3 に比較して系統的なものはほとんど除去されている。

iii) 摂動の改良

§ 3.3.1 の ii) で述べたように、長半径 a の平均値の扱いに問題があった。§ 1.8 で記述したように長半径 a の平均値としては二体問題の長半径 a_0 ではなく、

$$a = a_0 \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right\}$$

を使った方がよい。このとき (1.59) 式が成立するので、(1.17) 式より

$$\dot{E} = \frac{\bar{a}\bar{n}}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(1 - \frac{3J_2}{2p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right)^{1/2}$$

となる。当初の計算においては a_0 が使われていたのでこの点を改良した。

3.3.3 計算結果

上記の計算手法の改良を行なった後に、観測データについて軌道改良計算を実施した結果を表 3.8 に示す。3 局揃って隣接した 2 軌道が観測されている 5 例についての結果である。これらの 5 例についての観測誤差の推定値は表 3.9 に示されている。また軌道改良結果の NASA との比較は表 3.10 に示されている。①, ②, ③, ④, ⑤ はドップラ周波数の差をとる基準点として、使用するデータの最初の時刻 t_1 にとった場合であり、⑥ は基準点を固定せず使用する時刻の 30 秒後にとった場合である。④ は 1 軌道は収束しているが 2 軌道では発散した。⑤ ではこの軌道番号 489 の角度データから算出した初期値が悪いために、軌道番号 474 の初期値をこの時刻に変換して用いたが、なお発散した。この原因としては PEGASUS-3 の軌道傾斜角が約 28.9° であり、そのため仰角が低く、鹿島においては最大仰角が約 28° にしかならないことが考えられる。

表 3.10 の⑥の結果は得られたものの中でもっとも良いものである。この結果による軌道番号 64-14 についての計算値を実測値および NASA の要素による計算値と比較したものを別図 1 に示す。別図 1-(1), (2) は仰角と方位角の比較であり、別図 1-(3), (4), (5) は内之浦、下里、鹿島のドップラの場合の比較である。別図 2 は同じことを軌道番号 19-1 について比較したものである。この軌道番号 19-1 の観測日は 2 月 20 日であり、軌道番号 64-14, 65-15 の観測日が 2 月 23 日であることから、表 3.10 の⑥の程度の結果が得られれば、相当良い予報ができると考えられる。

表 3.3 擬似データによる軌道改良結果

誤 差				$\sigma=0$		$\sigma=8$		$\sigma=16$	
軌道番号				64-14, 65-15		64-14, 65-15		64-14, 65-15	
要素	項目	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値	1 pass 収束値	2 pass 収束値	1 pass 収束値	2 pass 収束値
	Epoch		2.23.7.7.50	//	//	//	//	//	//
a (km)		6990.832	7047.340	6990.78	6990.55	6991.110	6990.551	6991.39	6990.43
e		0.01595	0.00733	0.01595	0.01639	0.01594	0.01637	0.01593	0.01640
i (deg)		31.769	31.756	31.770	31.797	31.773	31.792	31.777	31.788
Ω (deg)		310.481	311.095	310.47	310.19	310.470	310.223	310.46	310.24
ω (deg)		269.955	274.768	270.10	266.391	270.238	266.651	270.51	267.30
M (deg)		166.883	160.416	166.73	170.8	166.601	170.516	166.33	169.83

表 3.4 観測データによる軌道改良結果

番号	衛星名	観測月日	軌道番号	使用した軌道の数		備考
				1	2	
①	PEGASUS-1	2/23	64-14 65-15	収束	発散	初期値不良
②	TIROS-10	3/14	330-17 331-18	発散		
③	PEGASUS-3	3/22	473-7 474-8	収束	発散	
④	PEGASUS-3	3/23	489-11 490-12	発散		

表 3.5 観測データによる軌道改良結果

衛星名		① PEGASUS-1				② TIROS-10		
軌道番号		64-14, 65-15				330-17		
EPOCH		2. 23. 7. 7. 50 sec				3. 14. 0. 0.50 sec		
要素	項目	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 17回目	NASA	初期値	1 pass 24回目
	a		6990.832	7047.341	7025.913	6961.203	7164.460	8266.62
e		0.01595	0.00732	0.01192	0.05749	0.00650	0.12233	0.48632
i		31.769	31.756	31.775	34.218	98.585	97.923	108.939
Ω		310.481	311.095	310.826	320.080	335.149	335.232	338.616
ω		269.955	274.793	272.819	321.532	229.120	36.754	281.073
M		166.883	160.409	161.719	98.725	160.197	353.868	49.208
衛星名		③ PEGASUS-3				④ PEGASUS-3		
軌道番号		473-7, 474-8				489-11		
EPOCH		3. 22. 5. 30. 10 sec				3. 23. 5. 20. 20 sec		
要素	項目	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 10回目	NASA	初期値	1 pass 17回目
	a	6895.264	7383.414	6940.268	6908.313	6895.179	8168.814	6407.045
e		0.00157	0.06354	0.00513	0.03441	0.00157	0.15135	0.12819
i		28.889	28.593	28.869	28.544	28.889	28.392	28.586
Ω		301.996	302.473	301.342	309.881	295.447	294.613	315.540
ω		242.895	130.311	129.658	358.718	253.490	104.051	313.085
M		205.997	346.778	320.360	79.460	197.901	351.012	107.582

表 3.6 電離層の影響を補正

衛星名	PEGASUS-1			
軌道番号	64-14, 65-15			
項目 要素	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 13回目
<i>a</i>	6990.832	7047.340	7020.809	7151.201
<i>e</i>	0.01595	0.00733	0.01239	0.17200
<i>i</i>	31.969	31.756	31.793	32.635
Ω	310.481	311.095	310.537	300.417
ω	269.955	274.768	274.068	348.071
<i>M</i>	166.883	160.416	160.679	75.533

表 3.7 二軌道目による軌道改良

衛星名	PEGASUS-1		
軌道番号	65-15		
項目 要素	NASA	初期値	1 pass 収束値
<i>a</i>	6990.830	6747.571	7021.556
<i>e</i>	0.01595	0.05133	0.01033
<i>i</i>	31.769	31.964	31.776
Ω	310.043	309.187	310.118
ω	270.629	278.645	287.471
<i>M</i>	188.899	179.590	169.476

表 3.8 計算値

番号	衛星名	軌道番号	使用した軌道数	初期値を求めた軌道番号	結果	繰り返し回数
①	PEGASUS-1	19-1 20-2	2	19-1	収束	12
②	"	64-14 65-15	2	64-14	"	17
③	TIROS-10	359-25 360-26	2	360-26	"	16
④	PEGASUS-3	474-8 473-7	2	474-8	発散	45
⑤	"	489-11	1	474-8	"	24
⑥	PEGASUS-1	64-14 65-15	2	64-14	収束	10

表 3.9 計算例のデータの精度

番号	衛星名	軌道番号	データの標準偏差 σ					備考
			内之浦	下里	鹿島			
					ドップラ	方位角	仰角	
①	PEGASUS-1	19-1	c/s 0.193	c/s 0.666	c/s 0.068	deg 0.03	deg 1.2	鹿島 ドップラ30m
		20-2	0.137	0.088	0.083	0.09	0.05	"
②	PEGASUS-1	64-14	0.118	0.118	0.069	3.8	1.2	"
		65-15	0.107	0.103	0.096	0.04	0.018	"
③	TIROS-10	359-25	0.217	0.124	0.93	0.02	0.01	"
		360-26	0.53	0.119	0.867	0.03	0.01	"
④	PEGASUS-3	474-8	1.7	0.106	0.159	0.02	0.02	鹿島 ドップラX-Y
		475-9	0.107	0.868	0.319	—	—	"
⑤	PDGASUS-3	489-11	0.344	0.137	0.138	0.02	0.01	鹿島 ドップラ30m

注) ドップラ 誤差は 136 MC に対するものである。

表 3.10 計 算 結 果

衛 星 名	① PEGASUS-1				② PEGASUS-1			
軌 道 番 号	19-1, 20-2				64-14, 65-15			
項目 要素	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値
<i>a</i>	6990.894	6804.963	6874.418	6986.576	6990.832	7047.340	7012.801	6988.712
<i>e</i>	0.01595	0.04186	0.02644	0.02127	0.01595	0.00733	0.01357	0.0187
<i>i</i>	31.769	31.783	31.631	32.842	31.769	31.756	31.798	31.947
Ω	329.078	329.782	330.298	330.581	310.481	311.095	310.365	308.837
ω	241.366	245.135	237.995	233.143	269.955	274.768	274.112	257.558
<i>M</i>	177.606	166.354	172.738	177.828	166.883	160.416	160.743	179.135
衛 星 名	③ TIROS-10				④ PEGASUS-3			
軌 道 番 号	359-25, 360-26				473-8, 474-9			
項目 要素	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値	NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値
<i>a</i>	7164.460	7541.180	7387.004	7155.562	6895.264	7383.414	6941.273	6878.302
<i>e</i>	0.00680	0.04008	0.1357	0.09614	0.00157	0.06354	0.00836	0.05538
<i>i</i>	98.585	98.608	94.8142	97.1587	28.889	28.593	29.129	31.018
Ω	337.225	336.950	333.339	336.263	310.996	302.473	300.748	289.076
ω	222.942	32.947	310.888	296.277	242.895	103.311	22.570	350.496
<i>M</i>	161.949	352.490	58.203	76.875	205.997	346.798	66.598	103.336
衛 星 名	⑤ PEGASUS-3				⑥ PEGASUS-1			
軌 道 番 号	489-1				64-14, 65-15			
項目 要素	NASA	初期値	1 pass 24回目		NASA	初期値	1 pass 収束値	2 pass 収束値
<i>a</i>	6895.566	7383.409	13088.710		6990.832	7047.340	7001.566	6990.430
<i>e</i>	0.00153	0.06354	0.47038		0.01595	0.00733	0.01477	0.01614
<i>i</i>	28.889	28.593	43.758		31.769	31.756	31.7618	31.823
Ω	296.314	302.473	346.216		310.431	311.095	310.263	310.279
ω	257.079	103.301	20.567		269.955	274.786	268.132	275.017
<i>M</i>	186.109	335.543	5.481		166.883	160.416	166.950	159.813

衛星 PEGASUS-1

軌道番号 64-14

計算回数 10(収束値)

$$O-C \equiv \{ (F_l(\bar{x}, t_i) - F_l(\bar{x}, t_i)) - (f_l(\bar{x}, t_i) - f_l(\bar{x}, t_i)) \}$$

station (l)	t ₁	t _d
内之浦(1)	6182.83383	6189.664626
下里(2)	6183.93333	6190.915752
鹿島(30m)(4)	6186.841667	6192.074288

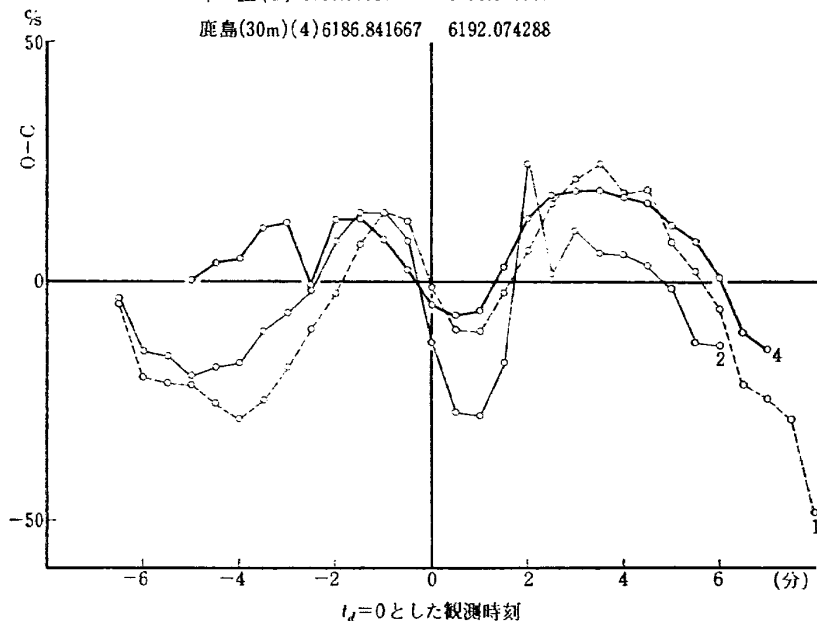


図 3.3 ドップラ周波数の観測値と計算値の比較

(注) t₁ はデータの始めの時刻, t_d は衛星が観測地点に最も接近した時刻の推定値で, 1967年2月19日0時 (U.T.) からの分である。

衛星 PEGASUS-1

rev.-pass 64-14

計算回数 9(収束値)

$$O-C \equiv \{ (F_l(\bar{x}, t_i) - F_l(\bar{x}, t_{i+1})) - (f_l(\bar{x}, t_i) - f_l(\bar{x}, t_{i+1})) \}$$

station (l)	t _d
内浦(1)	6189.664837
下里(2)	6190.917701
鹿島(4)	6192.074059

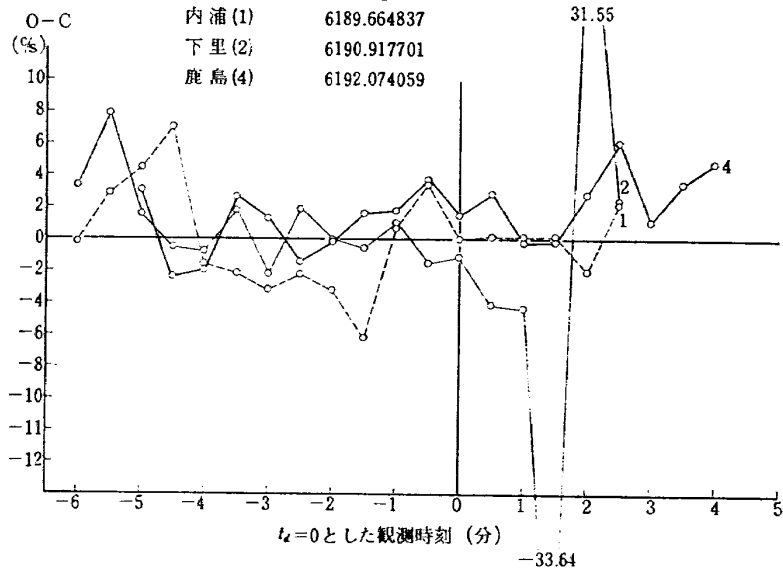


図 3.4 ドップラ周波数の観測値と計算値の比較

(注) t_d は衛星が観測地点に最も接近した時刻の推定値で, 1967年12月19日0時 (U.T.) からの分である。

3.4 計算処理上の問題点

(1) 観測データの前処理

観測値は種々の原因により欠測を生ずる。実際に生じた欠測は当初の予想をはるかに越え、そのため欠測値を推定することができず、使用できなくなったデータが相当数発生した。実際問題としてこれらの欠測値を全て推定して充填することは技術的に困難である。また誤差の推定方式と不良データの棄却方式の差異によって、データに偏りが生ずる可能性がある。実際観測データを7次式で近似してみると60ポイントづつを使用した場合は、表 4.1 ③における仰角で 0.228 度であり、これは表 3.9 ⑤ ケースにおける仰角の 0.02 度の 10 倍以上である。そこで観測データの実態に即した適切なデータ処理方式を開発することが必要である。

(2) 角度からの軌道決定

角度から決定された軌道要素はドップラ周波数による軌道改良計算の初期値として使用される。軌道改良計算において、1 軌道で発散する場合が数ケース存在するが、その一つの原因として初期値が悪いことが考えられる。特に TIRÖS-10 の軌道番号 330, PEGAS US-3 の 489 では長半径 a で 1000km 以上 NASA の要素と相違している。空中線系の改善によってデータの質が良くなれば、軌道決定の精度も改善されると思われるが、計算手法の観点からは現在の Gauss の方法以外の方法によって、精度改善ができるか検討する必要がある。

(3) ドップラ周波数による軌道改良

先に述べたように、この計算においては衛星の発信周波数が不明であるために、二時刻間の発信周波数の差を使用している。これは系統的な誤差の影響を少なくするという利点を持っている反面、ドップラ周波数の平行的相違を考慮できないという不利益をもつ。このことが軌道に多様性を与え、収束性を悪くしているとも考えられる。実験結果からわかるように、この改良計算では発散してしまう場合もあるので、この点をどのように解決してゆくか大きな問題である。

(4) 摂動

計算に考慮された摂動は地球の扁平によるものだけで、大気抵抗、太陽の輻射圧等による摂動は含まれていない。特に軌道の周期の変化はこのような摂動によって起されるので、これらを計算処理中にどのように扱っていくか問題である。

4. 計算処理方式の改善

実験によって指摘された問題点の解決および精度の改善を目的として、実験終了後観測データを使用して、計算処理方式の改善を行ってきたので以下にその概要を記述する。

4.1 データの前処理

§3.4で指摘したように、観測データにおいて生ずる欠測を全て推定して充填することは技術的に困難であり、無理に推定するとデータに偏りを生ぜしめる恐れがある。そこで欠測値は推定せずに不等間隔のデータ

表 4.1-(1) 近似多項式の次数とデータポイントによる誤差の比較 (3- σ 棄却, ドップラは内之浦のもの) 軌道番号 64-14

		3 次			5 次			7 次		
		σ		棄却	σ		棄却	σ		棄却
		第1回	第2回		第1回	第2回		第1回	第2回	
角 度 デ ー タ	30ポイント A	0.001	0.118度	11	0.001	0.099度	12	0.001	0.076度	14
	h	0.121	0.098		0.075	0.065		0.055	0.047	
	45ポイント A	0.002	0.137	18	0.002	0.118	10	0.001	0.108	10
	h	0.132	0.103		0.114	0.102		0.086	0.077	
60ポイント A	0.003	0.178	18	0.002	0.129	13	0.002	0.126	13	
h	0.147	0.118		0.128	0.103		0.105	0.091		
ド デ ツ プ ラ	30ポイント	1.75 c/s	1.93 c/s	8	1.23 c/s	1.07 c/s	5	1.21 c/s	1.04 c/s	5
	45ポイント	5.63	12.95	18	1.31	1.13	5	1.26	1.09	5
	60ポイント	16.29	37.84	19	1.53	1.42	5	1.30	1.13	5

(注) 方位角 A に対する第 1 回目の σ は $\sin A$ に対するものである、またドップラは 1500 Mc に対するものである。

表 4.1-(2) 近似多項式の次数とデータポイントによる誤差の比較
(4- σ 棄却, ドブブラは内之浦のもの) 軌道番号 64-14

		3 次			5 次			7 次		
		σ		棄却	σ		棄却	σ		棄却
		第1回	第2回		第1回	第2回		第1回	第2回	
角度 デ ー タ	30ポイント A	0.0019	0.125度		0.0017	0.099度		0.0015	0.085度	
	h	0.121	0.104	9	0.075	0.068	8	0.055	0.052	6
	45ポイント A	0.002	0.146		0.002	0.125		0.0018	0.108	
	h	0.132	0.114	9	0.114	0.108	7	0.086	0.082	7
	60ポイント A	0.003	0.170		0.002	0.137		0.002	0.126	
	h	0.147	0.138	7	0.128	0.117	7	0.105	0.099	7
ドデ ツ ラ タ	30ポイント	1.75c/s	1.64c/s	3	1.23c/s	1.11c/s	3	1.21c/s	1.08c/s	3
	45ポイント	5.63	6.33	3	1.31	1.17	3	1.26	1.13	3
	60ポイント	16.29	20.46	6	1.53	1.44	4	1.30	1.17	3

表 4.1-(3) 近似多項式の次数とデータポイントによる誤差の比較
(3- σ 棄却, ドブブラは内之浦) 軌道番号 489-11

		3 次			5 次			7 次		
		σ		棄却	σ		棄却	σ		棄却
		第1回	第2回		第1回	第2回		第1回	第2回	
角度 デ ー タ	30ポイント A	0.001	0.127度		0.001	0.089度		0.009	0.069度	
	h	0.267	0.241	8	0.099	0.098	8	0.038	0.043	8
	45ポイント A	0.001	0.15		0.001	0.114		0.001	0.099	
	h	0.436	0.436	4	0.244	0.236		0.133	0.128	5
	60ポイント A	0.002	0.179		0.0017	0.141		0.001	0.105	
	h	0.584	0.584	2	0.385	0.370	7	0.228	0.225	7
ドデ ツ ラ タ	30ポイント	5.22c/s	4.42c/s	10	3.93c/s	2.20c/s	10	3.69c/s	2.06c/s	10
	45ポイント	15.6	29.8	12	4.15	2.47	10	3.92	2.20	10
	60ポイント	42.6	70.4	15	4.95	4.25	10	4.19	2.44	10

表 4.1-(4) 近似多項式の次数とデータポイントによる誤差の比較
(4- σ 棄却, ドブブラは内之浦のもの) 軌道番号 489-11

		3 次			5 次			7 次		
		σ		棄却	σ		棄却	σ		棄却
		第1回	第2回		第1回	第2回		第1回	第2回	
角度 デ ー タ	30ポイント A	0.001	0.128度		0.001	0.094度		0.0009	0.072度	
	h	0.267	0.257	3	0.099	0.099	0	0.038	0.038	2
	45ポイント A	0.001	0.156		0.001	0.120		0.001	0.101	
	h	0.436	0.436	1	0.244	0.244	2	0.133	0.133	2
	60ポイント A	0.002	0.182		0.001	0.143		0.001	0.122	
	h	0.584	0.584	0	0.385	0.385	2	0.228	0.228	2
ドデ ツ ラ タ	30ポイント	5.22c/s	4.93c/s	4	3.93c/s	2.47c/s	9	3.69c/s	2.72c/s	6
	45ポイント	15.6	16.3	1	4.15	2.71	9	3.92	2.44	9
	60ポイント	42.6	47.5	4	5.03	4.36	6	4.19	2.44	10

表 4.2 以前の方法及新しい方法による誤差の比較

衛星名	軌道番号	データの標準偏差 σ							
		ドップラ周波数 (内之浦)			角 度				棄却
		以前の 方法	新しい 方法	棄却	方位角		仰角		
c/s	c/s		deg	deg	deg	deg			
PEGASUS-1	19-1	0.193	0.160	2	0.03	0.151	1.2	0.143	10
	20-2	0.137	0.177	3	0.09	0.623	0.05	0.417	0
	64-14	0.118	0.150	3	3.8	0.125	1.2	0.104	9
	65-15	0.107	0.160	0	0.04	0.201	0.018	0.212	2
TIRŌS-10	359-25	0.217	0.175	4	0.02	0.132	0.01	0.093	1
	360-26	0.53	0.170	4	0.03	0.176	0.01	0.123	2
PEGASUS	474-8	1.7	0.476	2	0.02	0.279	0.02	0.130	4
	475-9	0.107	0.279	1	—	0.406	—	0.228	1
	489-11	0.344	0.450	4	0.02	0.128	0.01	0.257	3

注) ドップラ誤差は 136 Mc に対するものである。

として処理することが望ましい。さらに誤差の推定方式と不良データの棄却方式を一致させなくてはならない。このような理由から次のようなデータの前処理方式を採用することにした。

与えられた観測データ f_1, f_2, \dots, f_n を $3s$ ポイントごとに分割し, $f_{i+1}, \dots, f_{i+2}, \dots, f_{i+3s}$ を m 次多項式で最小二乗近似し, その中間の s ポイントの多項式の値を真値として, $p_{i+s+1}, p_{i+s+2}, \dots, p_{i+2s}$ とする。これを全体にわたって行った後に, 誤差の標準偏差 σ を

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i - p_i)^2} \quad (4.1)$$

によって計算する。そして

$$|f_i - p_i| > c \cdot \sigma \quad (4.2)$$

なるデータを不良データとして棄却する。この場合 s, m, c をどう選ぶかが問題になる。表 4.1 はこれらの s, m, c をいろいろ変えて実施した結果を示している。表 4.1-(1) は軌道番号 64-14 の場合に, $s=10, 15, 20$ に対し $m=3, 5, 7$ とし, $c=3$ とした場合である。ドップラデータは内之浦のものを使っている。A は方位角, h は仰角を示す。 σ の第 1 回は不良データの棄却前の σ の値であり, 第 2 回は棄却後の σ の値である。ただし方位角 A は 360° のところで不連続になる可能性がある。そのため第 1 回目は $\sin(A)$ について行っている。 σ の値が小さくなっている。棄却の項は第 1 回目の σ によって棄却された個数を示している。表 4.1-(2) は同じく $c=4$ とした場合である。さらに表

4.1-(3), 表 4.1-(4) は同じことを軌道番号 489-14 の場合について行ったものである。

この前処理の目的は相当悪いデータを除外するため、 σ が小さくなれば良いというものではない。たとえば、図 3.2(4)を見ると σ が小さいのはかえって不当であると考えられる。また $3 \cdot \sigma$ で棄却すると、棄却個数が多くなりすぎる傾向がある。そこで近似多項式の次数を 3、使用データポイントを 30、 $4 \cdot \sigma$ 棄却を採用していくことに一応決定した。この方法によって観測データの誤差を計算して、以前の方法によるものと比較した結果を表 4.2 に示す。棄却とは新しい方法による棄却個数を示す。

4.2 角度による軌道決定

角度による軌道決定の精度を改善するためには、角度データの質を向上させることは勿論必要であるが、計算処理の観点からは種々の計算手法によって、精度を改善できるかどうか検討する必要がある。そこで Gauss の方法¹⁾の外に Laplace の方法¹⁾, Double r-iteration の方法¹⁾, Herget の方法²⁾⁷⁾ および改良 Herget 法のプログラムを作成し、精度の改善ができるかどうか検討した。以下にこれらの方法の概略とそれらによる計算結果を記す。

4.2.1 Laplace の方法

時刻 t_1, t_2, t_3 の観測データ (A_i, h_i) ($i=1, 2, 3$) より、観測地点から衛星へ向う単位ベクトル L_i を得る。通常のように ρ を slant range, r を地球の中心から衛星までの半径ベクトル, R を観測地点から地球中心まで

のベクトルとすれば

$$\begin{aligned} r &= \rho L - R & (4.3) \\ \dot{r} &= \dot{\rho} L + \rho \dot{L} - \dot{R} \\ \ddot{r} &= 2\dot{\rho} \dot{L} + \rho \ddot{L} + \ddot{R} \end{aligned}$$

が成立する。運動の基礎方程式(1.3)式を上式に代入して整理すると、

$$L\ddot{\rho} + 2\dot{L}\dot{\rho} + \left(\ddot{L} + \frac{\mu}{r^3} L \right) \rho = \ddot{R} + \mu \frac{R}{r^3} \quad (4.4)$$

となる。この式を中心時刻 t_2 で $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$ に関し解くことを考える。Lagrange の補間式によって

$$\begin{aligned} L &= \frac{\tau(\tau-\tau_3)}{\tau_1(\tau_1-\tau_3)} L_1 + \frac{(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_3)}{\tau_1\tau_3} L_2 + \frac{\tau(\tau-\tau_1)}{\tau_3(\tau_3-\tau_1)} L_3 \\ \dot{L} &= \frac{(2\tau-\tau_3)}{\tau_1(\tau_1-\tau_3)} L_1 + \frac{(2\tau-\tau_3-\tau_1)}{\tau_1\tau_3} L_2 + \frac{(2\tau-\tau_1)}{\tau_3(\tau_3-\tau_1)} L_3 \\ \ddot{L} &= \frac{2}{\tau_1(\tau-\tau_3)} L_1 + \frac{2}{\tau_1\tau_3} L_2 + \frac{2}{\tau_3(\tau_3-\tau_1)} L_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

である。ここで、 $\tau = k(t - t_2)$ である。(4.5)式で $\tau=0$ とおけば \dot{L}_2, \ddot{L}_2 を求めることができる。今(4.4)式を成分ごとに書き、

$$\begin{aligned} A &= 2 \begin{vmatrix} L_x & \dot{L}_x & \ddot{L}_x \\ L_y & \dot{L}_y & \ddot{L}_y \\ L_z & \dot{L}_z & \ddot{L}_z \end{vmatrix} \\ D_a &= \begin{vmatrix} L_x & \dot{L}_x & \ddot{L}_x \\ L_y & \dot{L}_y & \ddot{L}_y \\ L_z & \dot{L}_z & \ddot{L}_z \end{vmatrix} & D_b &= \begin{vmatrix} L_x & \dot{L}_x & X \\ L_y & \dot{L}_y & Y \\ L_z & \dot{L}_z & Z \end{vmatrix} \\ D_c &= \begin{vmatrix} L_x & \ddot{L}_x & \dot{L}_x \\ L_y & \ddot{L}_y & \dot{L}_y \\ L_z & \ddot{L}_z & \dot{L}_z \end{vmatrix} & D &= \begin{vmatrix} L_x & X & \dot{L}_x \\ L_y & Y & \dot{L}_y \\ L_z & Z & \dot{L}_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とおくと、 $A \neq 0$ ならば $\rho, \dot{\rho}$ は中心時刻 t_2 について、次のように解ける。

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{2D_a}{A} + \frac{2\mu D_b}{A r_2^3} \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{D_c}{A} + \frac{\mu D_d}{A r_2^3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

そして、

$$r_2^2 = \rho_2^2 - 2\rho_2 L_2 \cdot R_2 + R_2^2$$

に(4.6)式の ρ_2 を代入して得られた r_2 についての8次方程式を解く。この根によって(4.6)から $\rho_2, \dot{\rho}_2$ が得られると、

$$\begin{aligned} r_2 &= \rho_2 L_2 - R_2 \\ \dot{r}_2 &= \dot{\rho}_2 L_2 + \rho_2 \dot{L}_2 - \dot{R}_2 \end{aligned}$$

より r_2, \dot{r}_2 が求まるから軌道が決定されたことになる。

4.2.2 Double r-iteration の方法

Gauss と Laplace の方法は元来小惑星の軌道決定のために開発されたもので、角度データが狭い範囲に

入っている場合は優れているが、広い範囲にわたっている場合には不適當である。Double r-iteration の方法はこのような場合のために、P.R.Escalb によって考えられたものである。この方法は2時点の半径ベクトルの大きさ r_1, r_2 を仮定して、角度データ (A_i, h_i) ($i=1, 2, 3$) から、 (A_1, h_1) と (A_2, h_2) および (A_3, h_3) と (A_2, h_2) の間の時間間隔 F_1, F_2 を計算し、それらが実際の時間間隔に一致するように r_1, r_2 を変えてゆくものである。

時刻 t_1, t_2, t_3 の角度 (A_i, h_i) ($i=1, 2, 3$) を観測地点から衛星へ向う単位ベクトル L_i ($i=1, 2, 3$) に変換する。 r_1, r_2 を仮定して、(4.3)式の r のそれ自身による内積をとり、2次方程式を解くことにより ρ_1, ρ_2 が得られる。よって逆に(4.3)式より r_1, r_2 が求まる。

$$\tilde{W} = \frac{r_1 \times r_2}{r_1 r_2}$$

とすれば、ふたたび(4.3)式より

$$\rho_3 = \frac{R_3 \cdot \tilde{W}}{L_3 \cdot \tilde{W}}$$

であり、したがって r_3 が求められる。

次に時刻 t_i の真離角を v_i とすれば、

$$\begin{aligned} \cos(v_j - v_k) &= \frac{r_j \cdot r_k}{r_j r_k} \\ \sin(v_j - v_k) &= s [1 - \cos^2(v_j - v_k)]^{1/2} \end{aligned}$$

である。ただし、 $s = \pm (x_k y_j - x_j y_k) / |x_k y_j - x_j y_k|$ で軌道傾斜角 i が $i < 90^\circ$ ならば $+$ をとり、 $i > 90^\circ$ ならば $-$ をとる。Gaussian equation(1.46)において、 r_i の軌道面座標での x 成分を x_{oi} とすると、

$$c_1 x_{o1} - x_{o2} + c_3 x_{o3} = 0 \quad (4.7)$$

となる。円錐曲線の方程式(1.5)より

$$x_{oi} = r \cos v_i = \frac{p - r_i}{e} \quad (4.8)$$

であるから、(4.8)式を(4.7)式に代入して、

$$p = \frac{c_1 r_1 + c_3 r_3 - r_2}{c_1 + c_3 - 1}$$

を得る。ここにおける c_1, c_3 は Gaussian equation(1.46)より

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_2 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 \sin(v_3 - v_1)} \\ c_3 &= \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{r_3 \sin(v_3 - v_1)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

であるから、semiparameter p が得られる。(4.8)式から

$$e \cos v_i = \frac{p}{r_i} - 1$$

を求めれば、 $e \sin v_i$ は $e \sin(v_i + v_j - v_j)$ を展開して

求めることができる。したがって

$$e^2 = [e \cos v_2]^2 + [e \sin v_2]^2$$

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$n = k\mu^{1/2}a^{-3/2}$$

が得られる。ところで t_i の離心近点離角を E_i とすると、

$$\sin(E_i - E_j) = \frac{r_3}{(ap)^{1/2}} \sin(v_i - v_j) - \frac{r_3}{p} \cdot [1 - \cos(v_i - v_j)] S_e$$

$$\cos(E_i - E_j) = 1 - \frac{r_i r_j}{ap} [1 - \cos(v_i - v_j)]$$

であり、また kepler の方程式 (1.12) より

$$M_i - M_j = E_i - E_j + 2S_e \sin^2\left(\frac{E_i - E_j}{2}\right) - C_e \sin(E_i - E_j)$$

となる。ここで

$$S_e \equiv e \sin E_2 = \frac{r_2}{p} (1-e^2)^{1/2} [e \sin v_2]$$

$$C_e \equiv e \cos E_2 = \frac{r_2}{p} (e^2 + [e \cos v_2])$$

である。よって r_1, r_2 の関数として時間間隔 $t_i - t_j$ は

$$\bar{t}_i - \bar{t}_j = \frac{M_i - M_j}{n}$$

となる。実際の時刻 $t_i (i=1, 2, 3)$ によって、 $\tau_i = k \cdot (t_i - t_2)$ とすると、

$$F_1(r_1, r_2) \equiv \tau_1 - k \left(\frac{M_1 - M_2}{n} \right)$$

$$F_2(r_1, r_2) \equiv \tau_3 - k \left(\frac{M_3 - M_2}{n} \right)$$

が 0 になる r_1, r_2 が求めるものである。これを Newton の方法によって iterative に求めるのが Double r-iteration の方法である。観測が数回回転した軌道上から得られているものならば、 λ_1, λ_2 をある整数として、

$$F_1 = \tau_1 - k \left(\frac{M_1 - M_2}{n} \right) + k \left(\frac{2\pi}{n} \right) \lambda_1$$

$$F_2 = \tau_3 - k \left(\frac{M_3 - M_2}{n} \right) - k \left(\frac{2\pi}{n} \right) \lambda_2$$

とする必要がある。

4.2.3 Herget の方法

Gauss の方法、Laplace の方法および Double r-iteration の方法は観測角度データに誤差がないという前提のもとに決定論的に軌道を決めるものである。したがって 3 点の角度データから計算することができる。これに反し、Herget の方法は角度データの誤差を考慮し、観測された全体のデータを使って非決定論

的に軌道を決定する。

時刻 t_1, t_2, \dots, t_n の赤経と赤緯 $(\alpha_j, \delta_j) (j=1, \dots, n)$ が与えられたとして、次の三つの直交する単位ベクトルを定義する。

$$L_j = (\cos \delta_j \cos \alpha_j \cos \delta_j, \sin \alpha_j, \sin \delta_j)$$

$$A_j = (-\sin \alpha_j, \cos \alpha_j, 0)$$

$$D_j = (-\sin \delta_j \cos \alpha_j, -\sin \delta_j \sin \alpha_j, \cos \delta_j)$$

時刻 t_j の slant range を $\rho_j (j=1, \dots, n)$ とすると、時刻 t_1, t_j, t_n に関する Gaussian equation (1.46) は

$$c_1 \rho_1 L_1 - \rho_j L_j + c_n \rho_n L_n = c_1 R_1 - R_j + c_n R_n \quad (4.10)$$

と書ける。 A_j によって内積をとると、

$$c_1 \rho_1 (L_1, A_j) + c_n \rho_n (L_n, A_j) = c_1 (R_1, A_j) - (R_j, A_j) + c_n (R_n, A_j) \quad (4.11)$$

となる。実際には ρ_1, ρ_n は未知なので、ある値 ρ_1, ρ_n を仮定すると真値は $\rho_1' = \rho_1 + \Delta \rho_1, \rho_n' = \rho_n + \Delta \rho_n$ と表わされる。 $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_n, \delta_n)$ には誤差はないとすると c_1, c_n は ρ_1', ρ_n' の関数であるので、仮定された ρ_1, ρ_n のまわりで Taylor 展開して、高次項を無視すると、

$$c_1 (\rho_1 + \Delta \rho_1, \rho_n + \Delta \rho_n) \approx c_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} \Delta \rho_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \rho_n} \Delta \rho_n$$

$$c_n (\rho_1 + \Delta \rho_1, \rho_n + \Delta \rho_n) \approx c_n + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_1} \Delta \rho_1 + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_n} \Delta \rho_n \quad (4.12)$$

となる。(4.11) 式に $\rho' = \rho_1 + \Delta \rho_1, \rho_n' = \rho_n + \Delta \rho_n$ と (4.12) 式の c_1, c_n を代入して未知量 $\Delta \rho_1, \Delta \rho_n$ について整理すると、

$$\begin{aligned} & \Delta \rho_1 \left\{ \left(c_1 + \rho_1 \frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} \right) (L_1, A_j) + \rho_n \frac{\partial c_n}{\partial \rho_1} (L_n, A_j) \right. \\ & - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} (R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_1} (R_n, A_j) + \Delta \rho_n \left\{ \left(c_n \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho_n \frac{\partial c_n}{\partial \rho_n} \right) (L_n, A_j) + \rho_1 \frac{\partial c_1}{\partial \rho_n} (L_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_n} \right. \\ & \left. \left. \cdot (R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_n} (R_n, A_j) \right\} = c_1 (R_1, A_j) \right. \\ & \left. - (R_j, A_j) + c_n (R_n, A_j) - c_1 \rho_1 (L_1, A_j) - c_n \rho_n \right. \\ & \left. \cdot (L_n, A_j) \right. \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる。 A_j の代わりに D_j による内積をとることによって同様な方程式が得られる。これらの方程式を $j=2, \dots, n-1$ について計算し、最小二乗法によって $\Delta \rho_1, \Delta \rho_n$ を求め、この修正量が十分小さくなるまでこの iteration を繰り返す。

上の計算において、 c_1, c_n は二つの半径ベクトル r_j, r_k によってできる扇形と三角形の面積比を Y_{jk} とすると、(1.45) 式と (4.9) 式より

$$c_1 = \frac{t_n - t_j}{t_n - t_1} \frac{Y_{1n}}{Y_{jn}} \quad (4.14)$$

$$c_n = \frac{t_j - t_1}{t_n - t_1} \frac{Y_{1n}}{Y_{1j}}$$

と表わされるので、始め $Y_{jk}=1$ と仮定して iteration で求める。詳細は文献(2)を参照されたい。

また $\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1}$ などは

$$\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} = \frac{c_1(\rho_1 + \Delta, \rho_n) - c_1(\rho_1 - \Delta, \rho_n)}{2\Delta} \quad (4.15)$$

によって数値的に計算することができる。

4.2.4 改良 Herget 法

Herget の方法では中間の時刻 t_2, \dots, t_{n-1} の角度 (α_j, δ_j) ($j=2, \dots, n-1$) の誤差は考慮できるが、 (α_1, δ_1) , (α_n, δ_n) の誤差はないと仮定している。今度のものは (α_1, δ_1) , (α_n, δ_n) も誤差を含む場合を考えるもので、東京天文台の竹内氏を中心としてつくったものである。つまり ρ_1, ρ_n の外に $\alpha_1, \delta_1, \alpha_n, \delta_n$ も未知パラメータとして、観測データに適合させる。観測量が方位角、仰角の場合には $\rho_1, \rho_n, \alpha_1, \delta_1, \alpha_n, \delta_n$ を未知パラメータとする代りに slant range vector ρ_1, ρ_n をパラメータとした方が計算上簡単である。

$$\rho = (\rho_x, \rho_y, \rho_z) = \rho(L_x, L_y, L_z)$$

の成分を使うと、 A, D ベクトルは

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}} \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}} \begin{pmatrix} -L_x L_z \\ -L_y L_z \\ L_x^2 + L_y^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

となる。 ρ_1, ρ_n を仮定して、観測値 $(A_1, h_1), (A_n, h_n)$ より slant range vector ρ_1, ρ_n を作ると、これらには $\Delta\rho_1, \Delta\rho_n$ の誤差があり、したがって真値は $\rho_1' = \rho_1 + \Delta\rho_1, \rho_n' = \rho_n + \Delta\rho_n$ と表わされる。 c_1, c_n は ρ_1', ρ_n' の関数であるから、これらを ρ_1, ρ_n のまわりで Taylor 展開して、高次項を無視すると、

$$c_i(\rho_1 + \Delta\rho_1, \rho_n + \Delta\rho_n) \approx c_i + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{x1}} \Delta\rho_{x1} + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{y1}} \Delta\rho_{y1} + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{z1}} \Delta\rho_{z1} + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{xn}} \Delta\rho_{xn} + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{yn}} \Delta\rho_{yn} + \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{zn}} \Delta\rho_{zn} \quad (i=1, n) \quad (4.18)$$

となる。(4.11)式の $\rho_1 L_1, \rho_n L_n$ のところに $\rho_1 + \Delta\rho_1, \rho_n + \Delta\rho_n$ を入れ、 c_1, c_n に(4.18)式を代入して $\Delta\rho_{x1}, \Delta\rho_{y1}, \Delta\rho_{z1}, \Delta\rho_{xn}, \Delta\rho_{yn}, \Delta\rho_{zn}$ について整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \Delta\rho_{x1} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{x1}}(\rho_1, A_j) + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{x1}}(\rho_n, A_j) - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{x1}}(R_1, A_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{x1}}(R_n, A_j) + c_1 A_{xj} \right] + \Delta\rho_{y1} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{y1}}(\rho_1, A_j) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{y1}}(\rho_n, A_j) - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{y1}}(R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{y1}}(R_n, A_j) \right. \\ & \quad \left. + c_1 A_{yj} \right] + \Delta\rho_{z1} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{z1}}(\rho_1, A_j) + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{z1}}(\rho_n, A_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{z1}}(R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{z1}}(R_n, A_j) + c_1 A_{zj} \right] \\ & \quad + \Delta\rho_{xn} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{xn}}(\rho_1, A_j) + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{xn}}(\rho_n, A_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{xn}}(R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{xn}}(R_n, A_j) + c_n A_{xj} \right] \\ & \quad + \Delta\rho_{yn} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{yn}}(\rho_1, A_j) + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{yn}}(\rho_n, A_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{yn}}(R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{yn}}(R_n, A_j) + c_n A_{yj} \right] \\ & \quad + \Delta\rho_{zn} \left[\frac{\partial c_1}{\partial \rho_{zn}}(\rho_1, A_j) + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{zn}}(\rho_n, A_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c_1}{\partial \rho_{zn}}(R_1, A_j) - \frac{\partial c_n}{\partial \rho_{zn}}(R_n, A_j) + c_n A_{zj} \right] \\ & = -c_1(\rho_1, A_j) - c_n(\rho_n, A_j) + c_1(R_1, A_j) \\ & \quad - (R_j, A_j) + c_n(R_n, A_j) \end{aligned}$$

となる。これと D ベクトルとの内積をとったものについて、 $j=2, \dots, n-1$ にわたって計算し、最小二乗法で $\Delta\rho_1, \Delta\rho_n$ を求める。 $\Delta\rho_1, \Delta\rho_n$ が十分小さくなるまでこれを繰り返す。なお(4.18)式の c の偏微分は(4.15)式のように求める。

4.2.5 角度による軌道決定の計算結果

以上の方法を実行するにあたって問題になるのはデータの使用方法である。Laplace の方法、Double r -iteration の方法では三点の組合せをどのようにとり、各々の三点からでてきた結果をどのように結合するかが問題になる。Herget の方法と改良 Herget 法では中間のデータの使用方法とパラメータの微分間隔が問題になる。この点を検討した結果、次のような方式が最良であることがわかった。Laplace の方法では真中の一点を固定し、他の二点は全ての組合せをとらせる。ただし r に関する 8 次方程式を解いたときに、あらかじめ指定した範囲内に入らないときは、それは除外した。これらの三点の組合せからでてくる r, \dot{r} を算術平均し、それから 6 要素を算出する。Double r -iteration の方法では § 2.2 の Gauss の方法におけるものと同様な平滑化を使用する。Herget の方法および改良 Herget 法では中間のデータを全部使う方が良いように考えられるが、実際にやってみるとかえって悪くな

る。Herget の方法では3点おき、改良 Herget 法では5点おきに使うのが最良になった。また ρ, ρ の微分間隔については極端に小さい場合または大きすぎる場合を除いてはほとんど変わらない。たとえば 20 km~600 km とすればよい。

これらの各々の方法で観測データを使用して計算した要素を、NASA の要素および実験の際 Gauss の方法で得たものと比較した結果を別表 2 に示す。Double r -iteration の項の空欄は発散して軌道が求められなかった場合である。これらの結果を比較して、それぞれの優劣を判断することは非常に困難であるが、一応長半径 a で比較してみると、Gauss の方法、Herget の方法、改良 Herget 法が同じ程度の精度を得ていると考えられる。理論的観点からは改良 Herget 法がもっとも望ましいが計算時間は Herget の方法の約 3 倍を要するので、実際の追跡においては Herget の方法を使用していくことに一応決定した。

4.3 角度による軌道改良

§ 3.3 の計算結果からわかるように、ドップラ周波数による軌道改良では発散してしまい軌道を決定できない場合が数ケース存在した。このような場合になんらかの方法によってある程度良い軌道が得られないなら、衛星の追跡に困難をきたしてしまう。このような場合のバックアップとして天文学における古典的な方法である、角度すなわち方位角と仰角を使用した軌道改良が考えられる。すなわち与えられた 6 要素から計算された角度 (A_c, h_c) が観測値 (A_o, h_o) に一致するように軌道を改良してゆく。未知パラメータとしては 6 要素が与えられた時刻 t_0 の観測地点からの衛星の位置および速度ベクトル r_h, \dot{r}_h を使った。なお (A_c, h_c) を計算する際の摂動は § 2.3 のドップラ周

波数による場合と同じである。軌道改良方式はやはり最小二乗法であって、したがって

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \{ [A_{oi} - A_{ci}(r_h + \Delta r_h, \dot{r}_h + \Delta \dot{r}_h)]^2 + [h_{oi} - h_{ci}(r_h + \Delta r_h, \dot{r}_h + \Delta \dot{r}_h)]^2 \}$$

とおいて、 $\Phi \rightarrow \min$ になるように $\Delta r_h, \Delta \dot{r}_h$ を求める。ただし大気による屈折の影響を補正するため次のようなモデルを使用した⁶⁾。

$$h_o = h_o' + K \cot h_o' \quad (4.19)$$

ここで h_o' は実際の観測値で、 K は電波の場合 $K = -0.0015$ である。線型化と iteration は § 2.3 の場合と同様である。

これによって観測データを使用して計算を行なってみると、1 pass を使用したのでは発散はしないがそれほど良い結果は得られない。しかし 2 pass を使うと非常に良い結果が得られた。これらを表 4.3 に示す。初期値としては § 4.2.5 で記述したように、Herget の方法を実際の追跡で使用してゆくことにしたため、この方法より求めたものを使った。表 4.3 は 2 pass がそろっているデータについての結果である。ケース①は軌道番号 20-2 のデータが半分しかなく、個数にして約 100 ポイントしかないため、あまり良い結果は得られていない。またケース②は Herget の方法によって観測データから求めたものを初期値として使っては収束しなかったため、NASA の要素をそのまま用いている。 σ は収束値に対する残留誤差の標準偏差である。これらからわかるように角度による軌道改良では、初期値がある程度良ければ、ほとんどの場合収束し、2 pass を使えば相当な精度が得られるので、ドップラ周波数による軌道改良のバックアップとして十分その役目を果たすと思われる。

表 4.3 角度による軌道改良の結果

衛星名 軌道番号	① PEGASUS-1 19-1, 20-2			② PEGASUS-1 19-1, 21-3		
	NASA	初期値	収束値	NASA	初期値	収束値
Epoch	1829.933	1828.933	1823.933	1829.933	1828.933	1828.933
a	6990.894	7146.371	6981.972	6990.894	7146.371	6992.029
e	0.01595	0.00588	0.0394	0.01595	0.00588	0.01786
i	31.769	31.662	30.311	31.769	31.662	30.982
Ω	329.078	330.081	323.638	329.078	330.081	325.839
ω	241.366	82.563	318.354	241.366	82.563	286.580
M	172.606	326.206	91.171	172.606	326.206	124.136
σ (deg)			2.982			2.985
回数			8			14

表 4.3 つづき

衛星名 軌道番号	③ PEGASUS-1 48-9, 50-11			④ PEGASUS-1 64-14, 65-15		
	NASA	初期値	収束値	NASA	初期値	収束値
Epoch	4633.4	4632.633	4632.633	6187.833	6187.133	6187.133
a	6990.854	6912.469	6990.108	6990.832	7310.133	6990.102
e	0.01595	0.026	0.0167	0.01595	0.0279	0.0164
i	31.769	31.737	31.771	31.769	31.656	31.775
Ω	317.114	319.83	321.295	310.481	311.130	309.892
ω	259.757	254.239	254.073	269.955	86.129	300.873
M	150.469	150.925	150.103	166.883	347.287	130.876
σ (deg)			0.850			0.616
回数			7			18

衛星名 軌道番号	⑤ TIROS-10 359-25, 360-26			⑥ PEGASUS-3 459-5, 460-6		
	NSAS	初期値	収束値	NASA	初期値	収束値
Epoch	36140.733	36139.733	36140.733	43549.4	左に同じ	43549.4
a	7164.500	6833.393	7165.019	6895.72	左に同じ	6880.182
e	0.00651	0.0536	0.0158	0.00153	左に同じ	0.0757
i	98.586	98.123	98.250	28.889	左に同じ	31.696
Ω	337.978	337.262	336.903	309.395	左に同じ	290.147
ω	225.939	216.364	151.623	235.917	左に同じ	21.404
M	158.114	163.795	224.023	204.678	左に同じ	74.161
σ (deg)			0.563			5.148
回数			7			6

(注) Epoch は 6 要素を与えた時刻で 1967 年 2 月 19 日 0 時 (U.T.) からの分である。

4.4 ドップラ周波数による軌道改良

実験において使用した計算方式ではある時刻間の周波数の差を用いている。この方式では系統的な誤差の影響を少なくできる反面、解としての軌道に多様性を与える不利益がある。さらに摂動としては地球の扁平に負う一次の項のみを考慮していた。したがって大気抵抗、太陽の輻射圧、月の引力等による摂動は含まれていない。そのために特に軌道の周期の変化を考慮できなかった。これらのことを考えて未知パラメータとしては、6 要素のほかに $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, \dot{n} と f_0 , \dot{f}_0 をとる。ここに \bar{n} は基準軌道の平均運動が摂動によって変化したもの、 f_0 は衛星の発信周波数で $\dot{}$ は時間微分を意味する。以下の方法は東京天文台の竹内氏を中心としてつくったものである。以下これについて述べる。

今時刻 t_0 の基準軌道の 6 要素を $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ とする。

$$p_0 = a_0(1 - e_0^2)$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} \frac{J_2}{p_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \sqrt{1 - e_0^2} \quad (4.20)$$

$$n_0 = k_0 \sqrt{\mu/a_0^3}$$

として、 $\bar{n}_0, \dot{\Omega}_0, \dot{\omega}_0$ は最初は (1.57) 式のなかに現われているものによって計算されたものを使う。すなわち

$$\bar{n}_0 = n_0(1 + \alpha_0)$$

$$\dot{\Omega}_0 = -\frac{3 J_2}{2 p_0^2} \bar{n}_0 \cos i_0 \quad (4.21)$$

$$\dot{\omega}_0 = \frac{3 J_2}{2 p_0^2} \bar{n}_0 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_0 \right),$$

そして \dot{n}_0 は $\dot{n}_0 = 0$ とする。

時刻 t の平均的軌道要素 $e, i, \Omega, \omega, M, \bar{n}$ は

$$\begin{aligned}
 e &= e_0 \\
 i &= i_0 \\
 \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}_0(t-t_0) \\
 \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}_0(t-t_0) \\
 M &= M_0 + \dot{M}_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{M}_0(t-t_0)^2 \\
 \bar{n} &= \bar{n}_0 + \dot{\bar{n}}_0(t-t_0),
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

そして

$$\bar{a} = (k^2 \mu (1 - \alpha_0) / \bar{n}^2)^{1/3} \tag{4.23}$$

とする。これらの要素によって (1.60) 式から short period の摂動の項を計算し、時刻 t の 6 要素 $a_t, e_t, i_t, \Omega_t, \omega_t, M_t$ を、

$$\begin{aligned}
 a_t &= a + da_s \\
 e_t &= e + de_s \\
 i_t &= i + di_s \\
 \Omega_t &= \Omega + d\Omega_s \\
 \omega_t &= \omega + d\omega_s \\
 M_t &= M + dM_s
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

とする。これらの右辺の第 2 項は short period の摂動の項である。なお時刻 t の発信周波数 f_t は

$$f_t = f_0 + \dot{f}_0(t-t_0)$$

となる。これらから計算された pass l , 時刻 t_i のドップラ周波数を $f_l(e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, \dot{\Omega}_0, \dot{\omega}_0, \bar{n}_0, \dot{\bar{n}}_0, f_0, \dot{f}_0, t_i) \equiv f_l(p_{0j}, t_i)$, 対応する観測値を $F_l(t_i)$ とするとき、

$$\Phi = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{n_l} \{F_l(t_i) - f_l(p_{0j} + \Delta p_{0j}, t_i)\}^2$$

が最小になるように Δp_{0j} を決定する。そして § 2.3 で述べたような線形化と iteration を用いる。

実際に観測データを使って計算を行なってみると、3 pass 程度のデータを使ったのでは $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\bar{n}}$ が正確にでないばかりでなく、軌道全体が良く決定できない。そこでこれらを理論値に固定してみても、離心率が小さいために ω と M の独立性が弱く、収束が非常に遅くなる。そこである程度軌道が良くなるまでは、 ω を初期値の値で固定する方がよい。このようにして行なった観測データに対する計算結果は表 4.4 に示されている。備考欄の 7 変数とは $e, i, \Omega, M, \bar{n}, f_0, \dot{f}_0$ を変数としているという意味で、8 変数はさらに ω も変数

にしていることを示す。また 2 変数とは ω と M だけを変数としているという意味である。したがって 7 変数と 2 変数が書いてあるのは始め 7 変数で改良し、次に 2 変数で改良しているということである。ケース②は欠測が多くて以前は処理できなかったものであるが、はじめに 2 pass を一度に使う行ない、次にその前の日のデータを使って相当良い精度を得ることができた。ケース④は 6 要素と f_0, \dot{f}_0 の外に $\dot{\omega}, \dot{\Omega}, \dot{\bar{n}}$ を加えた 11 変数で 2 日分のデータを一度に使う行った場合である。これらの全ての場合に、発信周波数はデータがとられている全体の時間について時間の一次式で近似したために、 \dot{f}_0 は小さくすぎていることに注意しなければならない。なお初期値はケース①は Gauss の方法で求めたものを、ケース②と③は Herget の方法によって求めたものを使っている。ケース④では以前のドップラ周波数による軌道改良の方法によって軌道番号 19-1, 20-2, 21-3 の 3 pass を使って処理した収束値を使っている。ケース④は二日分のデータを一度に使う改良を行なったもので、この場合には要素の変化率もある程度でているが、NASA によるものおよび初期値の項に示されている (4.21) 式の理論値と比較して正確とはいえない。

また発信周波数の変動を長い時間にわたって一次式で近似してしまうことは非常に無理であり、さらに各観測地点での発信周波数の相異を考えると、ドップラ周波数の各曲線に一つの f_0 を割りあてることが望ましい。このようにして各局の発信周波数を未知数として行なった結果を表 4.5 に示す。 \dot{f}_0 は 0 としてある。この結果からわかるように、収束したときの誤差は表 4.4 のケース①では 100C 以上あったものが約 16C 以下になり、表 A.3 の測定システム誤差の範囲内にほとんど入っている。これは今までの結果の中でもっとも良い結果であり、これによって軌道番号 64-14 の方位角と仰角を計算して観測データと比較してみると、別図 3-(1), (2) に示されているように計算値はほとんど観測データの上ののっている。これを別図 1-(1), (2) と比較してみれば、以前の方法より精度が大幅に改善されたことが確認できる。なお最終的な発信周波数が内之浦、下里の場合と鹿島の場合で異なっているのは、アンテナが相異しているために同調周波数の違いが発信周波数の違いとしてでてきているものと思われる。

表 4.4 ドップラ周波数による軌道改良の結果

衛星名 軌道番号 時刻	① PEGASUS-1 64-14, 65-15, 66-16 1967年2月23日7時7分50秒				
項目	NASA	初期値	1 pass (64) 収束値	2 pass (64.65) 収束値	3 pass (64.65 66) 収束値
<i>a</i>	6990.832	7047.34	7103.181	6990.194	6990.307
<i>e</i>	0.01595	0.00733	0.00198	0.01636	0.01648
<i>i</i>	31.769	31.756	31.774	31.746	31.773
Ω	310.481	311.095	312.038	311.265	310.391
ω	269.955	274.768	274.768	274.768	267.741
<i>M</i>	166.883	160.416	159.095	159.178	167.211
<i>f_o</i> (Mc)	136.889441	136.889441	136.889542	136.889555	136.89560
<i>f_o</i> (c/m)		0	4.7169	-0.4966	-0.5513
誤差 (c)			134.46	105.67	110.82
回数			7	8	16
備考			7 変数	7 変数	9回...7変数 7回...8変数
衛星名 軌道番号 時刻	② TIROS-8 151-13, 152-14, 137-8, 138-9 1967年3月1日9時10分52秒				
項目	NASA	初期値	2 pass (151. 152) 収束値	4 pass (151.152. 137.138) 収束値	
<i>a</i>	7104.884	7368.605	7160.107	7104.836	
<i>e</i>	0.00369	0.0387	0.02475	0.10503	
<i>i</i>	58.504	58.655	70.1852	59.570	
Ω	296.288	295.336	283.108	296.080	
ω	133.801	124.048	118.543	49.769	
<i>M</i>	341.411	351.488	4.591	52.231	
<i>f_o</i> (Mc)	136.230968	136.230968	136.232415	136.232418	
<i>f_o</i> (c/m)			1.520	-0.0821	
誤差			3003.25	3020.22	
回数			35 回	110回	
備考			7 変数 2 変数	45回...7変数 65回...8変数	
衛星名 軌道番号 時刻	③ TIROS-10 359-25, 360-26, 330-17, 331-18 1967年3月16日2時20分44秒				
項目	NASA	初期値	2 pass (359. 360) 収束値	4 pass (359.360. 330.331) 収束値	
<i>a</i>	7164.500	7541.18	7158.129	7164.459	
<i>e</i>	0.00651	0.04008	0.00236	0.00148	
<i>i</i>	98.586	98.608	97.633	98.792	
Ω	337.978	336.95	335.564	336.299	
ω	225.939	32.947	3.701	340.783	
<i>M</i>	158.114	352.49	21.168	44.094	
<i>f_o</i> (Mc)	136.233744	136.233744	136.233088	136.233103	
<i>f_o</i> (c/m)			0.0177	0.0143	
誤差 (c)			421.59	477.47	
回数			32	56	
備考			7 変数 2 変数	8 変数	

表 4.4 つづき

衛星名 軌道番号 時刻	④ PEGASUS-1 19-1, 20-2, 21-3, 34-5, 35-6, 36-7 1967年2月20日6時29分56秒				
項目	NASA	初期値	6 pass 収束値		
a	6990.894	6989.869	6990.371		
e	0.01595	0.01821	0.01633		
i	31.769	31.745	31.824		
Ω	329.078	328.787	328.235		
ω	241.366	230.166	248.829		
M	172.606	182.308	162.706		
$\dot{\Omega}$ (deg/day)	-6.1450	-6.1592	-5.1831		
$\dot{\omega}$ (deg/day)	9.4467	9.4618	7.8628		
\dot{P} (min/day)	-0.00043		-0.00553		
f_0 (Mc)	136.889441		136.889627		
\dot{f}_0 (c/min)			-0.0566		
誤差 (c)			344.7		
回数			56		
備考		$\dot{\omega}, \dot{\Omega}$ は (4.21)式によ る理論値	11 変数		

表 4.5 ドップラ周波数による軌道改良の結果

衛星名 軌道番号 時刻	PEGASUS-1 64-14, 65-15, 66-16 1967年2月23日7時7分50秒					
項目	NASA	初期値	1 pass (64) 収束値	2 pass (64, 65) 収束値	3 pass (64, 65, 66) 収束値	
a	6990.832	7047.34	7001.147	6990.504	6990.551	
e	0.01595	0.00733	0.01504	0.01614	0.01613	
i	31.769	31.756	31.811	31.786	31.790	
Ω	310.481	311.095	310.108	310.280	310.212	
ω	269.955	274.768	274.768	267.418	267.443	
M	166.883	160.416	160.225	167.641	167.674	
誤差 (c)			9.03	13.93	16.20	
回数			10	7	11	
備考			ω を除く e, i, Ω, M, \bar{n} の外 各局の f_0 を未知数として合計 8 変数で計算	6 要素 $e, i, \Omega, \omega, M, \bar{n}$ の外 同 左 12 変数で計算	同 左 // 15 変数で計算	
発信周波数の最終値	内之浦 下里 鹿島	64-14 136.889549 136.889549 136.889569	65-15 136.889499 136.889499 136.889520	66-16 136.889441 136.889442 136.889437	備考 64, 65の鹿島は 30m アンテナ, 66は X-Y アン テナによる	

結 言

角度測定、ドップラ周波数測定併用のトラッキング方式の技術的改良改善を目的とした、特調費による実験における計算処理方式とその後の計算処理方式の改善について記した。得られた結果を要約すると、(1)不良データの棄却のためには、3次の多項式による近似の方法を用いればよい、(2)角度からの軌道決定の方法としては、Hergetの方法または改良 Herget法が適切である。(3)角度による軌道改良は収束条件がゆるやかであり、またこれによって相当な精度が得られるので、ドップラ周波数による軌道改良のバックアップとして用いることができる。(4)発信周波数の不正確さによる誤差を除く方法として、以前は二時刻間の周波数の差をとっていたが、発信周波数も軌道要素と同様に未知パラメータとして導入し、データに適合させていく方がよい、などである。これらの結果から日本国内三ヶ所の追跡所の観測によって、科学衛星に対するトラッキングの可能なことの見通しを得ることができた。

しかし、なお解明し得ないいくつかの重要な事項がある。それらは(1)電離層の影響、(2)地球の扁平によるもの以外の摂動、(3)科学衛星計画に対する本トラッキング方式の精度などである。(1)の点についてはデータカットによって一部消去できたが、なお残っているバイアスによる誤差がどの程度あるかは不明である。この問題は今後の研究課題として残されるが、実際の科学衛星のトラッキングにおいては 136 Mc, 400 Mc の二周波を使うことになっているので、電離層の影響はほとんど消去できると考えられる。(2)地球の扁平による摂動以外のもの、たとえば大気抵抗、太陽の輻射圧、月や太陽の引力等による摂動は実験における計算処理方式では考慮していなかった。衛星の周期の変化は主に大気抵抗によって起されるが、この周期の変化が考慮できないために、いくつかの軌道を結合して軌道改良を行なう場合に欠陥がでてくると考えられたため、それらを考慮するように計算処理方式を改善したが、この点についてはまだ十分な成果は得られていない。この問題は今後もひきつづき検討したい。(3)最後に科学衛星計画に対する本トラッキング方式の精度であるが、この点については今までの結果から性急に結論を下すことは困難である。その理由は (i) 観測地点の相違、(ii) データの種類相違である。実際のトラッキングにおいては勝浦、内之浦、沖縄の三観測地点が計画されているのに比較して、内之浦、下里、鹿島ではその相互間の距離が近すぎること、さらにデー

タも実際の場合は 136 Mc, 400 Mc の二周波を観測し、角度データも勝浦と内之浦の二局で観測されるなどの相違がある。このような理由により提示された精度に関するものは一応の参考資料とのみ考えるべきである。これらの問題があるとしても、今後科学衛星のトラッキングを実施していくための技術的資料としては十分な成果が得られたと考えられる。

人工衛星のトラッキングに関する特調費の実験は附録で述べた組織によって行なわれ、筆者らはその一員として計算処理を担当し、そこで指摘された問題点を解決するため、計算処理方式の改善を行なってきた。この間、東京天文台竹内端夫助教授、東京大学生産技術研究所齋藤成文教授、郵政省電波研究所尾上通雄企画部長、尾方義春情報処理部長、高橋寛子技官、科学技術庁宇宙開発推進本部村松金也人工衛星追跡部長、日立中央研究所島田正三部長、尾崎正道氏、氏家一彬氏には軌道計算方式全般について御指導ならびに御討議をいただいた。特に竹内助教授には計算処理全体の確立のため御指導いただき、氏家氏には協同して計算処理の検討をしていただいた。また宇宙開発推進本部岩田裕文氏、佐藤忠史氏、日立システムエンジニアリング(株)の村松淳彦氏、清水清一氏、青木敬治氏には計算プログラムのコーディングおよびオペレーションを手伝っていただいた。この報告の成果はこれらの方々の協力によって得られたものであって、ここに厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Escobal, P.R., Methods of Orbit Determination, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- 2) Herget, P., Computation of Preliminary Orbits, The Astronomical Journal, Vol. 70, No. 1, February 1965.
- 3) Kozai, Y., The Motion of a Close Earth Satellite, The Astronomical Journal, Vol. 64, No. 9, November 1959.
- 4) Saito, S., Y. Ogata, H. Takahashi, T. Takenouchi, S. Shimada, and M. Ozaki, Orbit Determination by Differenced Doppler Frequency Method, Proceedings of the 7th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1967.
- 5) Gaposchkin, E.M., Differential Orbit Improvement, SAO Special Report No. 161, 1964.
- 6) Baker, R.M.L., Jr., and M.W. Makemson, An Introduction to Astrodynamics, Academic Press, Inc., New York, 1960.
- 7) Baker, R.M.L., Jr., Astrodynamics, applica-

- tion and advanced topics, Academic Press, Inc., New York, 1967.
- 8) Deutch, R., Orbital Dynamics of Space Vehicles, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
 - 9) Vonbun, F.O., and W.D. Kahn, Tracking Systems, Their Mathematical Models and Their Errors, Part I-Theory, NASA TN D-1471, October, 1962.
 - 10) Kahn, W.D., and F.O. Vonbun, Tracking Systems, Their Mathematical Models and Their Errors, Part II-Least Square Treatment, NASA TN D-3776, December 1966.
 - 11) Fricke, C.L., and W.L. Watkins, Analysis of a Four station Doppler Tracking Method, Using a Simple CW Beacon, NASA TN D-748, April 1961.
 - 12) Walter, H.G., and I.H. Wales, Preliminary Note on a Differential Correction Orbit Program, European Space Data Center, Note No. 3, September 1965.

A 付 録

A. 1 特調費による実験の概要

本実験における人工衛星の観測は昭和 42 年 2 月 20 日から鹿児島宇宙空間観測所（以下内之浦という。）、下里水路観測所（以下下里という。）および電波研究所鹿児島支所（以下鹿児島という。）において開始した。角度測定は鹿児島の 30m 口径パラボラアンテナにより行ない、ドップラ測定は鹿児島 30m 口径パラボラアンテナ、同 X-Y アンテナ、下里および内之浦の無指向性アンテナにて行なった。

観測対象衛星としては米国の衛星のうち、その軌道が日本で打上げる科学衛星と類似のものを選んだもので次のとおりである。

2 月 20 日～2 月 25 日 PEGASUS-1, TIROS-10

2 月 27 日～3 月 4 日 TIROR-8

3 月 13 日～3 月 18 日 TIROS-7, TIROS-10

3 月 20 日～3 月 25 日 PEGASUS-1, PEGASUS-3

（注）下線は角度測定を行なった衛星を示す。

観測結果は逐次宇宙開発推進本部に送付され、カードにパンチして当研究所の大型電子計算機 HITAC-5020 で処理し解析した。

これらの実験を通して、本トラッキング方式を構成する装置の問題点、測定方法、混信干渉の問題、データ処理、計算処理に考慮すべきことについて総合的に検討し、今後のトラッキング業務を円滑に行なうための資料を得た。

なお NASA 提供の衛星の軌道要素は表 A.1 のとおりである。

また鹿児島、内之浦および下里の緯度、経度および高度は表 A.2 に示されている。

A. 2 実験の体制

(1) 実験計異委員会

東京大学生産技術研究所

教授 齋藤 成文

東京大学宇宙航空研究所

教授 野村 民也

東京大学天文台

助教授 竹内 端夫

郵政省電波監理局

技術調査課長 小林 一治

郵政省電波研究所

特別研究官 尾上 通雄

郵政省電波研究所

情報処理研究室長 尾方 義春

郵政省電波研究所

鹿児島支所長 村主 行康

海上保安庁水路部

編歴課長 進土 晃

科学技術庁研究調整局

航空宇宙課長 謝敷 宗登

科学技術庁航空宇宙技術研究所

計測部長 樋口 一雄

科学技術庁宇宙開発推進本部

開発部長 松友 信寿

（官職、氏名は委員会編成当時のものである）

(2) 実験実施の担当編成

実験主任 (電波研)	—	計算班	天文台, 電波研, 航技研
		内之浦観測班	東大宇宙研
		下里観測班	海上保安庁, 電波研, 推進本部
		鹿児島観測班	電波研, 推進本部
		総務連絡班	推進本部

A. 3 測定システム誤差

ドップラ追尾方式における誤差の理論的評価がなされたが、その結果は表 A.3 に示されている。この表からもっとも誤差に影響するのは衛星の発信周波数の安定度である。

表 A.1 対象衛星の軌道要素

衛星名	基準時刻 年 月・日・時	長半径 a km	離心率 e	軌道傾 斜角 i deg	平均近 点離角 M deg	近地点引 数 ω deg	$\dot{\omega}$ deg/day	昇交点経 度 Ω deg	$\dot{\Omega}$ deg/day	周 期 P min	\dot{P} min/day
PEGASUS-1	67 2.20.00	6991.91	0.01595	31.769	163.596	238.808	9.4467	330.742	-6.1450	96.9537	-0.00043
PEGASUS-3	67 3.15.00	6896.08	0.00157	28.889	311.936	165.281	10.736	349.970	-6.6361	94.9838	-0.00176
TIROS-7	67 2.25.01 34.91m	7011.73	0.00206	58.240	0	59.45	1.3779	291.30	-3.7648	97.386	-0.00001
TIROS-8	67 2.18.00	7105.05	0.00369	58.504	345.333	119.622	1.2457	336.992	-3.5672	99.3337	-0.00005
TIROS-10	67 2.14.00	7164.71	0.00651	98.586	295.774	314.614	-2.9459	307.498	0.9901	100.5874	0

表 A.2 観測所の位置

	緯 度(度)	東 経(度)	高 度(km)
鹿 島	35.95277	140.66605	0.037
内 之 浦	31.25	131.07916	0.33
下 里	33.563227	135.94022	0

表 A.3 測定システム誤差

誤差の原因		1500Mc に 換算したカ ウント誤差 (RMS)	備 考
1	位相同期ループ の雑音ジッタ	1.3	バンド幅 10c/s, 雑音温度 3000°K とし、-150dbm の値を算入
2	周波数標準によ るもの	4.5	1秒間安定度 5×10^{-9} , 較正誤 差 1×10^{-8} は除 外
3	時刻装置のゲー ト幅によるもの	0.1	短時間安定度 1×10^{-7}
4	カウンタの 量子誤差	0.3	
	計 測 系 小 計	4.7	136Mc 換算 0.4 c/s, 速度換算 1m/s
5	衛星の周波数安 定度によるもの	15	短時間安定度 1×10^{-8} と仮定 136Mc換算 1.35 c/s, 速度換算 3m/s
	計	16	136Mc 換算 1.44 c/s, 速度換算 3.2m/s
6	偏波変動および その他の原因に よるもの		評価困難のため 算入せず

別表 1 角度による軌道決定の結果

衛星 軌道番号 EPOCH	PEGASUS-1 19-1 1829.93333		PEGASUS-1 48-9 4633.40000		PEGASUS-1 50-11 4837.80000		PEGASUS-1 64-14 6187.83333	
	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値
a (hm)	6990.8941	6804.903	6990.8538	6854.074	6990.8509	6824.68799	6990.832	7047.341
e	0.01595	0.041860	0.01595	0.033823	0.01595	0.03796	0.01595	0.00732
i (deg)	31.769	31.782728	31.7690	31.791823	31.769	31.84901	31.769	31.756
Ω (deg)	329.0780	329.781903	317.1146	319.621454	316.2423	318.78813	310.481	311.095
ω (deg)	241.3660	245.134993	259.7573	256.737606	261.09827	272.55325	269.955	274.753
M (deg)	172.6064	166.35403	150.4699	150.983424	190.03709	176.49546	166.883	160.409
衛星 軌道番号 EPOCH	AEGASUS-1 65-15 6290.633333		TIROS-8 151-13 14951.3666		TIROS-10 330-17 33120.83333		TIROS-10 360-26 36140.73333	
	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値
a (km)	6990.83006	6747.571	7104.813616	6483.743	7164.499636	8266.620	7164.499636	7541.18040
e	0.01595	0.051326	0.00369	0.085629	0.00651	0.122334	0.00651	0.04007
i (deg)	31.769	31.963502	58.504	58.407249	98.586	97.923474	98.586	98.60870
Ω (deg)	310.042596	309.187084	296.386942	295.898202	335.221373	335.232354	337.97764	336.94690
ω (deg)	270.629165	278.645276	133.80167	309.118188	232.117095	36.754139	225.939093	32.94690
M (deg)	188.898648	179.590174	343.226007	166.337724	156.45182	353.868117	158.11412	352.48933

(注) EPOCH として書かれた時刻は軌道要素の時刻で、1967年2月19日0時 (U.T.) から数えた分である。

衛星 軌道番号 EPOCH	PEGASUS-3 495-5 43549.40000		PEGASUS-3 460-6 43650.16667		PEGASUS-3 474-8 44970.16667		PEGASUS-3 489-11 46391.30000	
	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値	NASA	初期値
a (km)	6895.718307	16807.32973	6895.712888	5123.82655	6895.641899	7383.41393	6895.565472	8168.80234
e	0.00153	0.58135	0.00153	0.326283	0.00153	0.06354	0.00153	0.15135
i (deg)	28.889	27.53303	28.889	30.65972	28.889	28.59314	28.889	28.39178
Ω (deg)	309.394789	305.59925	308.930983	309.05222	302.855317	302.47305	296.314155	294.61325
ω (deg)	235.916817	99.32420	236.667178	279.40600	246.496595	103.31093	257.079104	104.04283
M (deg)	204.677685	357.68638	226.953893	168.29743	194.652855	346.77781	186.109373	351.01745
衛星 軌道番号 EPOCH	PEGASUS-3 505-15 47914.03333		PEGASUS-3 520-18 49335.33333					
	NASA	初期値	NASA	初期値				
a (hm)	6895.483580	3176.42646	6895.0053	21552.97492				
e	0.00153	0.99779	0.00157	0.66934				
i (deg)	28.889	119.17995	28.889	26.97749				
Ω (deg)	289.305352	85.94612	281.8793	274.34293				
ω (deg)	268.41818	223.56589	275.4393	129.37465				
M (deg)	203.112469	173.23452	208.1327	0.120353				

別表 2 各種の方法による角度からの軌道決定の結果

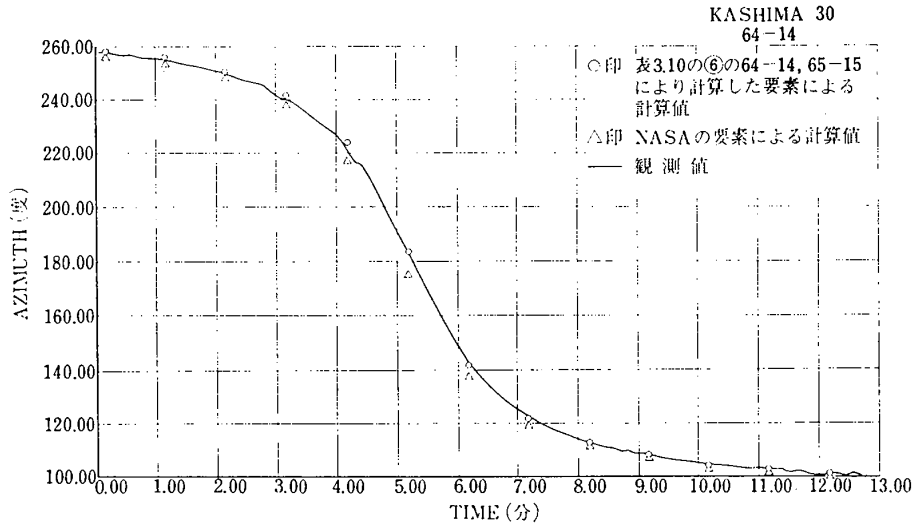
衛星 軌道番号	PEGASUS-1 19-1						PEGASUS-1 48-9					
	1829.93333	1829.9333	1828.933	1833.433	1828.433	4633.40000	4633.4	4632.633	4637.300	4633.3		
	NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget
a (km)	6990.8941	6804.903	7194.16267	7146.371	7090.445	7199.324	6990.8538	6854.074	6851.44467	6912.469	5867.646	6952.802
e	0.01595	0.041860	0.01216	0.00587	0.051	0.01302	0.01595	0.033823	0.0337907	0.02602	0.222	0.02075
i (deg)	31.769	31.782728	31.70069	31.662	28.895	31.7129	31.7690	31.791823	31.81249	31.737	32.023	31.7171
Ω (deg)	329.0780	329.781903	330.218	330.081	328.434	330.261	317.1146	319.621454	319.68496	319.830	323.489	319.6501
ω (deg)	241.3660	245.134993	73.41741	82.563	281.619	71.514	259.7573	256.737606	252.5523	254.239	236.946	265.0216
M (deg)	172.6064	166.35403	338.95904	326.206	140.906	335.419	150.4699	150.983424	155.36843	150.925	184.989	142.6701
衛星 軌道番号	PEGASUS-3 50-11						PEGASUS-1 64-14					
EPOCH	4837.80000	4837.80	4836.800	4842.000	4837.667	6187.83333	6188.0	6187.133	6192.800	6188.8		
	NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget
a (km)	6990.8509	6824.68799	6960.61554	7757.318	6955.707	6672.283	6990.832	7047.341	7537.385	7310.133	6918.133	7241.750
e	0.01595	0.037967	0.01928	0.0812	0.065	0.05926	0.01595	0.00732	0.0564	0.02790	0.0686	0.02029
i (deg)	31.769	31.84901	31.79199	31.512	29.877	31.9367	31.769	31.756	31.6458	31.656	30.727	31.7359
Ω (deg)	316.2423	318.78814	318.958	317.784	318.571	318.767	310.481	311.095	310.8854	311.130	315.017	310.7884
ω (deg)	261.09827	272.55325	262.09262	98.035	280.509	281.022	269.955	274.793	86.9841	86.129	235.922	74.8673
M (deg)	190.03709	176.49546	187.22604	349.624	184.844	166.478	166.883	160.409	350.1271	347.287	219.459	4.1054

(注) EPOCH として書かれた時刻は軌道要素の時刻で、1967年2月19日 0時 (U.T.) から数えた分である。

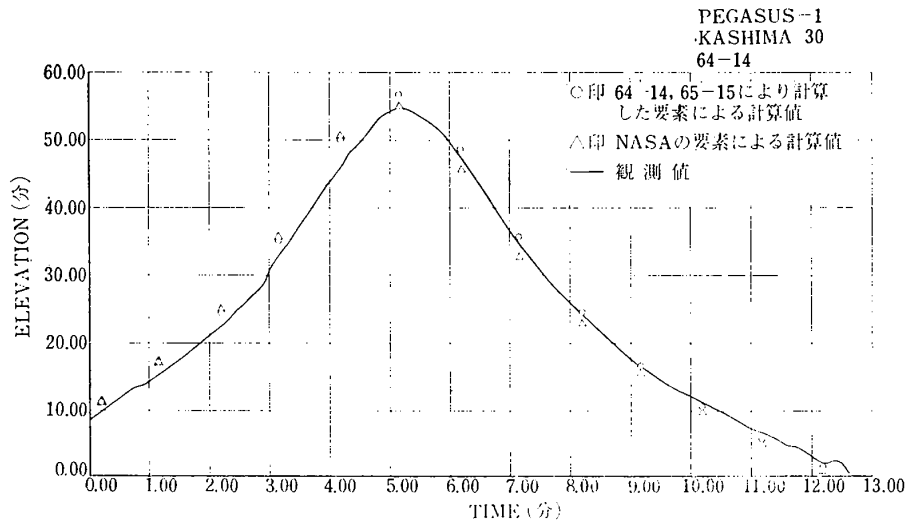
衛星 軌道番号		PEGASUS-1 65-15						TIROS-8 151-13					
		NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	14951.36666	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	
EPOCH	6290.633333		6289.800	6294.100	6289.667	14951.36666		14950.800	14955.566	14951.767			
a (km)	6990.830	6747.571	6925.382	5404.691	7369.508	7104.813	6483.743	7270.183	7067.287	6434.664			
e	0.01595	0.051326	0.02587	0.33171	0.03583	0.00369	0.08562	0.02649	0.05047	0.09414			
i	31.769	31.9635	31.893	32.337	31.736	58.504	58.407	58.646	62.254	58.311			
Ω (deg)	310.0425	309.1870	308.937	303.254	309.340	296.386	295.898	296.299	293.758	296.031			
ω (deg)	270.6291	278.6452	273.954	300.317	116.125	133.801	309.118	119.258	261.753	313.944			
M (deg)	188.8986	179.5901	181.451	169.197	339.415	343.226	166.3377	355.655	236.400	162.038			
衛星 軌道番号		TIROS-10 330-17						TIROS-10 360-26					
		NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	33120.83333 <th>Double r</th> <th>Herget</th> <th>Laplace</th> <th>改良 Herget</th>	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	
EPOCH	33120.8333		33119.800	33123.7667	33119.433	36140.73333		36139.733	36143.833	36140.166			
a (km)	7164.499	8266.620	7620.321	8143.771	7484.479	7164.499	7541.180	6833.393	7539.369	7415.576			
e	0.00651	0.12234	0.05089	0.095	0.03489	0.00651	0.04007	0.05355	0.0297	0.02594			
i (deg)	98.586	97.923	98.169	95.747	98.244	98.586	98.60870	98.123	99.097	98.853			
Ω (deg)	335.221	335.232	335.055	335.436	334.988	337.977	336.949	337.262	336.150	337.291			
ω (deg)	232.117	36.754	37.736	21.001	33.547	225.939	32.946	216.364	26.933	19.972			
M (deg)	156.451	353.868	348.874	15.553	351.257	158.114	352.489	163.795	8.967	2.772			

衛星 軌道番号		PEGASUS-3 459-5										PEGASUS-3 460-6													
EPOCH		43549.4		43548.400		43552.233		43549.599		43650.167		43650.16667		43699.166		43652.033		43650.033							
		NASA		Gauss		Double r		Herget		Laplace		改良 Herget		NASA		Gauss		Double r		Herget		Laplace		改良 Herget	
a (km)		6895.718	16807.329			17402.123	4848.423	5683.212	6895.712	5123.826	8762.220	6322.773	6204.425	4718.220											
e		0.00153	0.58135			0.59521	0.394	0.20528	0.00153	0.3268	0.20557	0.08664	0.1110	0.43118											
i (deg)		28.889	27.533			27.338	30.174	29.682	28.889	30.659	28.178	29.279	29.083	30.933											
Ω (deg)		309.394	305.599			311.585	312.535	307.627	308.930	309.052	306.579	308.661	307.335	310.856											
ω (deg)		235.916	99.324			84.931	276.976	277.089	236.667	279.406	117.690	300.704	300.123	295.519											
M (deg)		204.677	357.686			358.712	175.359	169.658	226.953	168.297	356.165	163.795	178.226	166.428											
衛星 軌道番号		PEGASUS-3 474-8										PEGASUS-3 489-11													
EPOCH		44970.167		44970.16667		44969.167		44972.433		44970.100		46391.30		46391.30		46390.300		46393.633		56390.967					
		NASA		Gauss		Double r		Herget		Laplace		改良 Herget		NASA		Gauss		Double r		Herget		Laplace		改良 Herget	
a (km)		6895.641	7383.413			8197.075	5687.840	6173.092	6895.565	8168.802	11399.990	7722.043	4923.987	7578.112											
e		0.00153	0.06354			0.1533	0.217	0.11255	0.00153	0.15135	0.3873	0.10364	0.373	0.08714											
i (deg)		28.889	28.593			28.706	28.772	29.1978	28.889	28.391	27.645	28.522	31.562	28.5394											
Ω (deg)		302.855	302.473			298.199	300.175	302.942	296.314	294.613	294.518	294.944	288.242	295.245											
ω (deg)		246.496	103.310			99.345	279.327	275.005	257.079	104.042	103.508	103.094	294.016	102.841											
M (deg)		194.652	346.777			351.567	179.583	171.757	186.109	351.017	354.868	347.520	165.248	349.331											

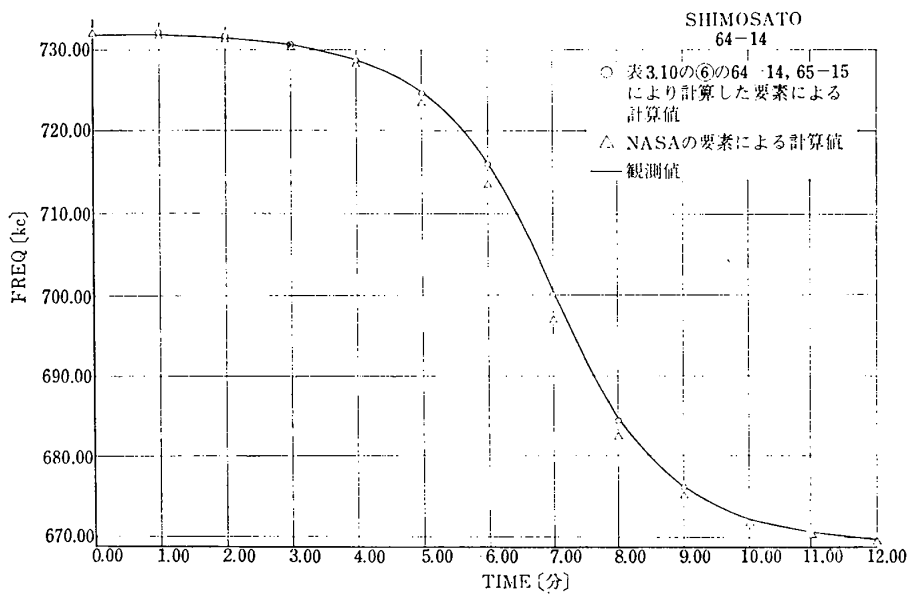
衛星 軌道番号	PEGASUS-3 505-15						PEGASUS-3 520-18					
	47914.03333	47913.033	47915.133	47913.467	49335.33333		49334.333	49335.633	49332.933			
EPOCH	NAAS	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget	NASA	Gauss	Double r	Herget	Laplace	改良 Herget
a (km)	6895.483	3176.426		4168.898	5607.855	3343.224	6895.0053	21552.974		5940.236	9397.348	7742.725
e	0.00153	0.99779		0.60420	0.223	0.93661	0.00157	0.669342		0.15457	0.2550	0.10359
i (deg)	28.889	119.179		31.336	28.045	34.7112	28.889	26.977		30.235	30.096	28.4457
Ω (deg)	289.305	85.946		298.235	296.101	308.084	281.8793	274.342		280.967	270.806	280.683
ω (deg)	268.418	223.565		295.254	286.749	287.895	275.4393	129.374		309.779	122.048	125.459
M (deg)	203.112	173.234		165.259	196.959	160.670	208.1327	0.1203		168.654	6.781	351.893



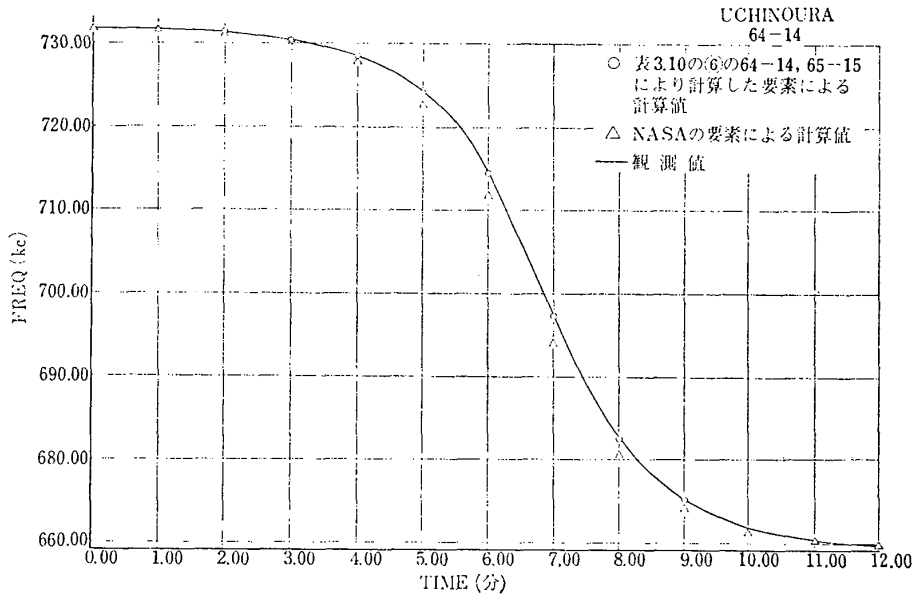
別図 1-(1) 計算値と実測値 (AZIMUTH)



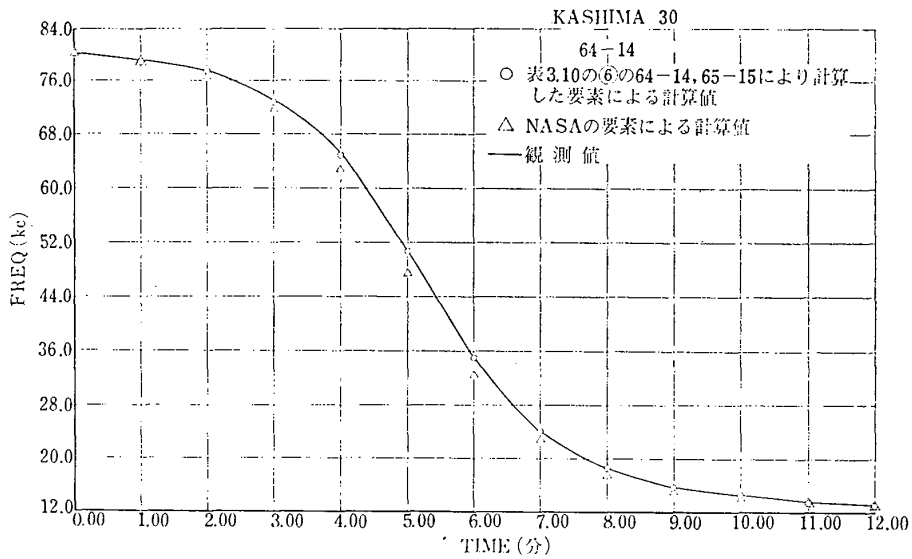
別図 1-(2) 予報値と実測値 (ELEVATION)



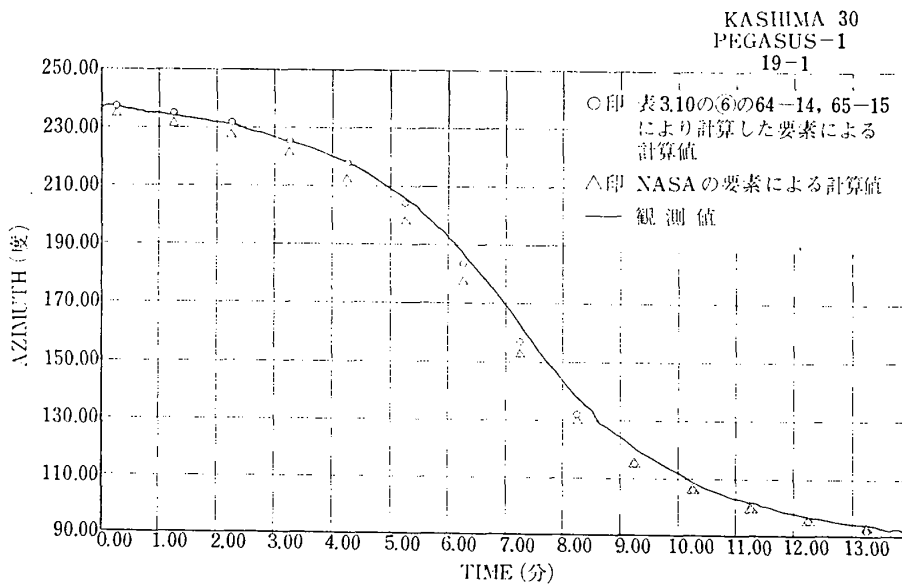
別図 1-(3) 計算値と実測値 (DOPPLER)



別図 1-(4) 計算値と実測値 (DOPPLER)

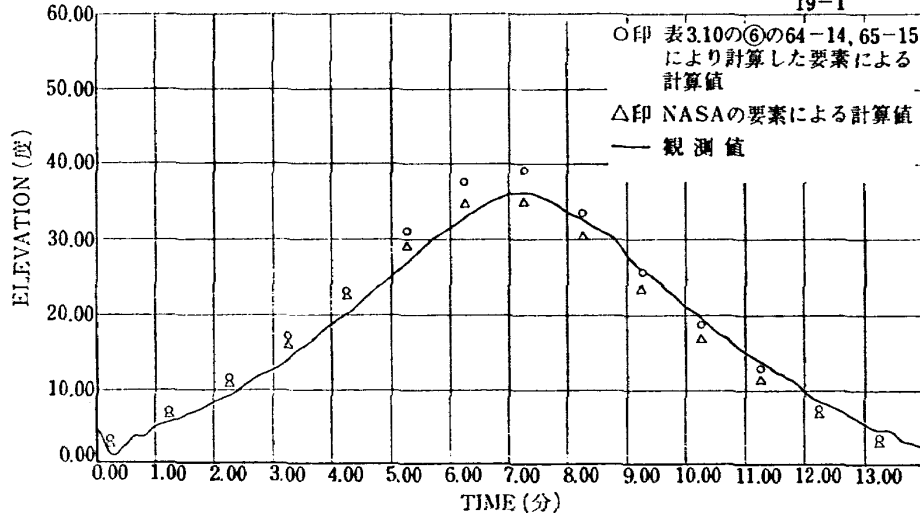


別図 1-(5) 計算値と実測値 (DOPPLER)

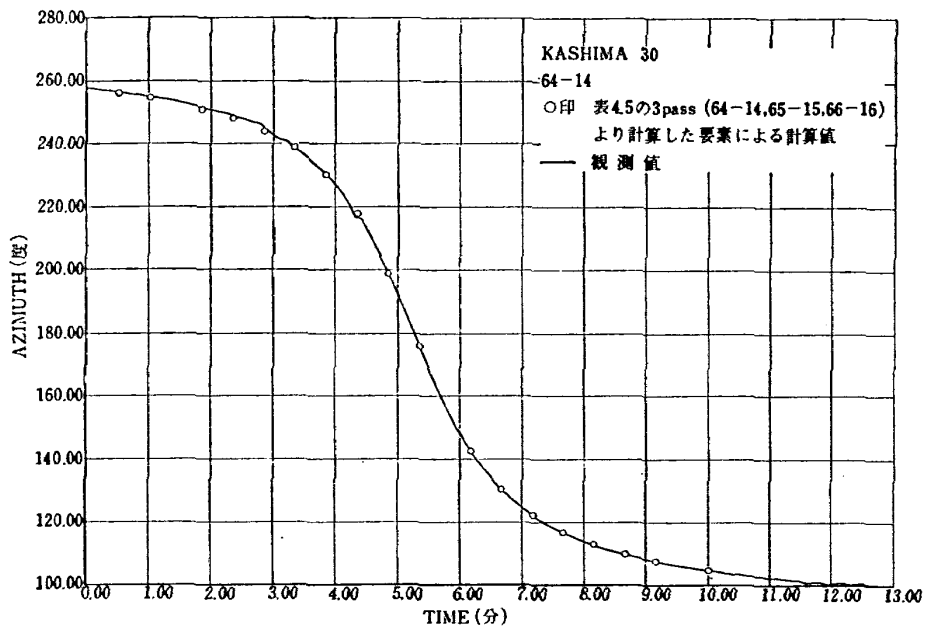


別図 2-(1) 計算値と実測値 (AZIMUTH)

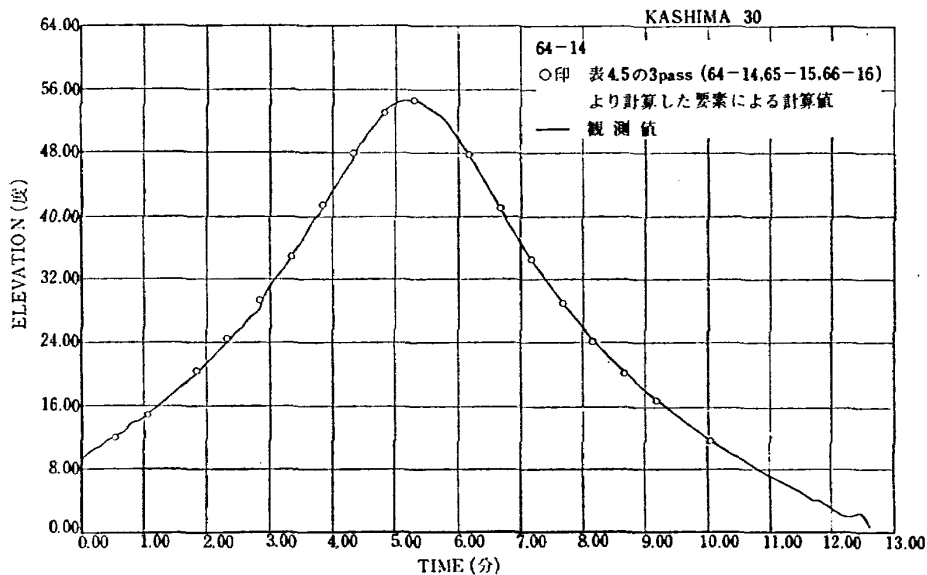
KASHIMA 30
PEGASUS-1
19-1



別図 2-(2) 計算値と実測値 (ELEVATION)



別図 3-(1) 計算値と実測値 (AZIMUTH)



別図 3-(2) 計算値と実測値 (ELEVATION)

TR-158	局所凸線形位相空間内の非線形初期値問題に 対する近似について On Approximations for Nonlinear Cauchy Problems in Locally Convex Spaces	1968年6月	小島清史
TR-159	T型結合板の振動 The Vibration of T-Shape Plates Structure	1968年7月	塙武敏, 築地恒夫, 越出慎一
TR-160	梁, 板結合構造物の振動(II) On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (II)	1968年8月	塙武敏, 築地恒夫, 多田保夫, 越出慎一, 林洋一, 日下和夫
TR-161	宇宙飛しょう体の直接式最適誘導法 The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle	1968年8月	新田慶治, 松島弘一 大坪孔治, 志甫徹
TR-162	よどみ点領域での非定常空力加熱の測定 Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region	1968年9月	野村茂昭
TR-163	双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関する 考察 Investigation on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane	1968年9月	別府護郎
TR-164	熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外 板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路 Investigation of the Streamwise Heat Conduc- tion Effect on the Transient Aerodyna- mic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method	1968年10月	小川鉦一
TR-165	有限要素法による箱型梁の解析 Applications of the Finite Element Method to Box Beams	1968年11月	三本木茂夫
TR-166	DPF バルブを用いたジンバルエンジン駆動 用油圧制御系の基礎的解析 Fundamental Analyses of Gimbal-Engine Positioning Hydraulic Control System Made use of DPF Servovalve	1968年11月	畑山茂樹, 興石肇
TR-167	アブレーションによる空力加熱の減少の測定 Measurements of Heat Transfer Reduction by Ablation	1968年11月	野村茂昭

航空宇宙技術研究所報告168号

昭和43年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
