

UDC 518.6  
533.6.011

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-174

Navier-Stokes 方程式に対する差分法

三 好 甫

1969 年 2 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

## 既 刊 報 告

- |        |  |          |  |
|--------|--|----------|--|
| TR-150 | 強化プラスチックの熱的物性値について<br>(輻射加熱による測定)<br>The Measurement of Thermal Properties of Reinforced Plastics at Temperatures up to 150°C (Infra-red Radiation Method) | 1968年 2月 | 小川 鉦一, 野口 義男                               |
| TR-151 | 空気力学的加熱の少ない極超音速飛しょう体<br>Minimum Heat Transfer Body at Hypersonic Speeds  | 1968年 3月 | 相原 康彦                                      |
| TR-152 | 二次元二重円弧翼列の遷音速実験<br>High Speed Tests of Compressor Cascades with Double Circular Arc Blades Sections  | 1968年 3月 | 近藤 博, 蓑田 光弘<br>山崎 紀雄, 古川 昇                 |
| TR-153 | アーク加熱衝撃波管による物体のまわりの高温気流の研究<br>Study of High Temperature Flow around Body Using an Arc-Driven Shock Tube  | 1968年 4月 | 松崎 利一, 上瀬 千春                               |
| TR-154 | フライングテストベッドの計画<br>—本体のシステムデザイナー—<br>System Design of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory                                    | 1968年 5月 | 新型航空機部                                     |
| TR-155 | 遷音速における Control-Surface Buzz に関する研究<br>An Investigation on Control-Surface Buzz at Transonic Speeds  | 1968年 5月 | 中村 泰治                                      |
| TR-156 | 二次元湾曲ジェットの相似構造と乱流混合におよぼす曲率の研究<br>Effects of Curvature on the Similar Structure and Turbulent Mixing of Two-dimensional Curved Jets                         | 1968年 5月 | 遠藤 浩                                       |
| TR-157 | 電子線密度測定法による低密度極超音速流の実験的研究<br>Experimental Study of Low Density Hypersonic Flow Using Electron-Beam Densitometry  | 1968年 6月 | 和田 勇, 曾 我国 男                               |
| TR-158 | 局所凸線形位相空間内の非線形初期値問題に対する近似について<br>On Approximations for Nonlinear Cauchy Problems in Locally Convex Spaces  | 1968年 6月 | 小島 清史                                      |
| TR-159 | T型結合板の振動<br>The Vibration of T-Shape Plates Structure  | 1968年 7月 | 塙 武敏, 築地 恒夫<br>越出 慎一                       |
| TR-160 | 梁, 板結合構造物の振動 (II)<br>On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (II)  | 1968年 8月 | 塙 武敏, 築地 恒夫<br>多田 保夫, 越出 慎一<br>林 洋一, 日下 和夫 |
| TR-161 | 宇宙飛しょう体の直接式最適誘道法<br>The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle   | 1968年 8月 | 新田 慶治, 松島 弘一<br>大坪 孔治, 志 甫 徹               |
| TR-162 | よどみ点領域での非定常空力加熱の測定<br>Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region  | 1968年 9月 | 野村 茂昭                                      |
| TR-163 | 双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関する考察<br>Investigation on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane                                  | 1968年 9月 | 別府 護郎                                      |

# Navier-Stokes 方程式に対する差分法\*

三 好 甫\*\*

## Difference Method for the Navier-Stokes Equation

By Hajime MIYOSHI

The purpose of this paper is to construct several difference schemes for the one dimensional unsteady Navier-Stokes equation and to examine their stability properties by means of V. Neumann's error analysis and numerical experiment.

It is found that the usual explicit parabolic schemes have a strong restriction for its practical use and that a mixed hyperbolic-parabolic explicit scheme has the stability properties which are a combination of the usual parabolic and hyperbolic stability criterions from the practical point of view.

In the last section of this paper, it is shown that the scheme, having non-symmetric difference approximation for the second order space derivative, has a good property with respect to the stability criterion.

### 1. 緒 言

流体の運動方程式を差分法を用いて解く場合、流れが亜音速であれば通常粘性非圧縮流の運動方程式が用いられ\*\*\*, 流れが超音速であれば通常非粘性圧縮流の運動方程式が用いられている\*\*\*\*。

しかしながら衝撃波の構造といったような粘性の影響を無視し得ないような問題に対しては流体の運動方程式として完全な Navier-Stokes 方程式を用いること

が必要になる。(以下 Navier-Stokes 方程式は N-S 方程式と略す。) L. Cracco<sup>3)</sup> は一次元定常衝撃波を求めるために一次元非定常 N-S 方程式に差分法を適用し、その漸近解により解を得ている。

流体の運動を計算するために N-S 方程式を用いることの必要性は先に述べた衝撃波の構造に関する研究だけでなく、レイノルズ数が小さい場合の超音速の流れの場を計算する問題においても生ずる\*\*\*\*\*。このような流れに差分法を適用したものに I. Yu. Brailovskaya<sup>6)</sup>, T. S. Shao<sup>6)</sup>, S.M. Scala & P. Gordon<sup>7)</sup>,<sup>8)</sup>, L.F. Fillar & H.F. Ludloff<sup>9)</sup>, J. Gary<sup>10), 11)</sup>, E. L. Rubin & S.Z. Burstein<sup>12)</sup>, H.U. Thommen<sup>13)</sup> 等がある。

I. Yu. Brailovskaya は predictor-corrector 法を用いてレイノルズ数  $10^2 \sim 10^3$  の二次元流 (マッハ数  $\leq 1$ ) の計算を行ない経験的な安定条件を示している。S.H. Scala & P. Gordon は Mixed implicit-explicit 型の差分法 (2-level の Du Fort-Frankle 型の差分法) を用いてレイノルズ数 23.4~46.8 の一次元ピストン問題および二次元流の計算を行なっているが安定条件は示していない。L.F. Fillar & H.F. Ludloff は 1 階

\* 昭和 44 年 3 月 10 日受付

\*\* 計測部

\*\*\* たとえば J. Fromm<sup>1)</sup> を参照

\*\*\*\* 流れを非粘性にすれば Navier-Stokes 方程式は双曲型となり衝撃波の厚さは 0 になる。この方程式を差分法で解く場合、計算の安定化のために人工的粘性を付け加えて計算をするのであるが、その結果、衝撃波の厚みはその強弱に関係なくほぼ一定で衝撃波の前後で Rankine-Hugoniot の関係式を満足するようになる。したがって衝撃波の前後の流れの場を計算する問題で衝撃波の厚みが無視しうるような問題に対しては非粘性圧縮流の運動方程式を用いれば十分であって Navier-Stokes 方程式のように複雑な方程式を解く必要はない。非粘性圧縮流の差分法による計算例は豊富にあるが、そのまとまった文献表としてはたとえば R. D. Richtmeyer<sup>2)</sup> を参照。

\*\*\*\*\* たとえば A.I. Tolslykh<sup>4)</sup> この場合流れに対する N-S 方程式の成立することを仮定している。

空間微分を後退差分でおきかえる explicit および implicit な二つの差分法によりそれぞれレイノルズ数 32 の弱い衝撃波を含む流れを計算し、安定条件を V. Neumann の方法により与えている。J. Gary は Lax-Wendroff の差分法を用いてレイノルズ数 1~10<sup>4</sup> の超音速流の計算を行ない安定条件を経験的に与えている。E.L. Rubin & S.Z. Burstein および H.U. Thomen は 2-Step Lax-Wendroff の差分法を用いてレイノルズ数 4.5 および 250 の超音速流の計算を行ない安定条件を V. Neumann の方法により与えている。

しかしながら N-S 方程式に差分法が応用されはじめてからの歴史は浅く、計算例も豊富でないため、上にあげた各種差分法の適用範囲およびその安定条件について十分に明らかであるとはいえないし、適用範囲に一般性がありかつ安定条件が明らかであるような差分法はまだないといってもよい。

本報告は N-S 方程式に関していくつかの新しい差分法を構成し、その数値解析的側面、主として安定性についての解析および数値実験を試み、一般的な適用範囲をもつ差分法を示し、実際問題にこれを適用する際の基礎とすることを目的としている。

## 2. 準 備

領域  $D = \{(x, t); a \leq x \leq b, t \geq 0\}$  に格子中  $\Delta X$  および  $\Delta t$  により格子領域  $D_{\Delta X}$  を次のように

$$D_{\Delta X} = \left\{ (x_i, t_j); x_i = a + i\Delta X, t_j = j\Delta t, \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, N+1, j = 1, \dots, \frac{b-a}{\Delta X} = N \right\}$$

と定義する。  $D_{\Delta X}$  上の関数  $f(x, t)$  を

$$f(a + i\Delta X, j\Delta t) = f_{i,j}$$

と表わす。各種差分商を次のように表わす。

$$\frac{1}{\Delta X} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) = (f_x)_{i,j}$$

$$\frac{1}{\Delta X} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) = (\bar{f}_x)_{i,j}$$

$$\frac{1}{2} (f_{\bar{x}} + f_x)_{i,j} = (f_{\bar{x}})_{i,j}$$

$$\frac{1}{\Delta X^2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) = (f_{x\bar{x}})_{i,j}$$

$$\frac{1}{\Delta t} (f_{i,j+1} - f_{i,j}) = (f_t)_{i,j}$$

一次元非定常 N-S 方程式は無次元形で次のように

かける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{(\gamma \rho)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho T) &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) T \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{1}{Re \rho} \gamma \\ &\times (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

上式で  $\rho, u, T$  はそれぞれ流体の密度、速度、温度であり  $Re, \sigma, \gamma$  はそれぞれレイノルズ数、プラントル数および比熱比である。

方程式 (2.1) は双曲型方程式の右辺に分母にレイノルズ数を含んだ 2 階の空間微分項が加わった形になっている。したがってこのような方程式に対する近似差分方程式は  $\Delta X$  を固定すれば  $Re$  の大小により双曲的または放物的な性質をもつものと推測される\*。

このような現象は音波と熱の方程式が組み合さった線形方程式に差分法を適用した場合にも生じたものであって\*\*、その場合、 $\Delta X$  を固定すると双曲的および放物的な二つの安定条件が生じ  $\Delta X \rightarrow 0$  においては放物的な条件が支配的であることが推測されている。N-S 方程式は非線形であるがここでもまた  $\Delta X$  を固定すれば双曲的および放物的な二つの安定条件が求まることが予想される\*\*\*。

本報告において N-S 方程式に対する差分法の安定性解析は V. Neumann の方法により行なわれるが、対象が非線形方程式であるので、これらの安定条件は数値実験によりその有効性を確かめることにする。そのための数値実験例として次の二つの問題を考える。  
数値実験 A

\* 差分方程式に対しては偏微分方程式の様に双曲型放物型といった厳密な定義はないが、ここでは安定条件が  $\Delta t / \Delta X$  の関数不等式で与えられるものを双曲的といい  $\Delta t / (\Delta X)^m$  ( $m \geq 2$ ) の関数不等式で与えられるものを放物的ということにする。

\*\* R.D. Richtmeyer<sup>2)</sup> 第十章第四節、方程式は 
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial x} (w - (\gamma - 1)e), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x},$$
 
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial x}$$

\*\*\* I. Yu. Brailovskaya<sup>5)</sup>, J. Gary<sup>10), 11)</sup>, E. L. Rubin & S.Z. Burstein<sup>12)</sup> においては経験的にこれら二つの条件のうち小さい方を安定条件として用いている。

初期条件

$$u(x, 0) = 0; 0 \leq x \leq 1$$

$$T(x, 0) = 1; 0 \leq x \leq 1$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq 0.4 \\ 0.02; & 0.4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

境界条件\*

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

数値実験 B

初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2; & 0 \leq x \leq 0.3 \\ 0; & 0.3 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$T(x, 0) = 1; 0 \leq x \leq 2$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq 0.3 \\ 0.02; & 0.3 < x \leq 2 \end{cases}$$

境界条件\*\*

$$u(0, t) = 2 \quad u(2, t) = 0$$

$$T(0, t) = T(2, t) = 1$$

$$\rho(0, t) = 1 \quad \rho(2, t) = 0.02$$

### 3. 方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に対する差分法 に基づいた N-S 方程式に対する差分法

放物型方程式に対しては explicit な差分法および implicit な差分法が同程度に好んで用いられる。explicit な差分法の利点はその計算法の容易さにあり、implicit な差分法の利点はその無条件安定性にあると考えられる。

implicit な差分法を圧縮性超音速流の運動方程式に適用した例としては J. Gary<sup>10), 11)</sup> が Crank-Nicholson 型の差分法 および その三つの変形を非粘性圧縮流の Euler 型方程式に適用したもの、J. Turner & B. Wendroff<sup>14)</sup> が非粘性圧縮流の Lagrange 型方程式に Crank-Nicholson 型の差分法を適用したものおよび L.F. Fillar & H.F. Ludloff<sup>9)</sup> が 1 階導関数を後退差分商でおきかえた差分法を粘性圧縮流の方程式に適用したものがあ

\* この境界条件が well-posed かどうかは数学的には不明であるが、これが物理的に reasonable であることについては S. M. Scala Scale & P. Gordon<sup>7), 8)</sup> 参照。

\*\* この境界条件は A の場合と異なり大いに疑問である。しかしながら数値計算上の disturbance がその両端点に伝わる以前に計算を止めれば不都合は生じない。

しかしながらここでは次の理由により implicit な差分法については考えないことにする。

i) 二次元非定常問題のように大きな系に implicit な差分法を適用した場合、それから生ずる非線形連立代数方程式の解を求めることは容易ではない。

ii) 非線形連立方程式をさけるための差分法を変形した場合、implicit な差分法の利点であった無条件安定性は必ず保持されるとは限らない。

iii) 強い衝撃波を含む問題に implicit な差分法を適用した場合、衝撃波の背後に大きな overshoot および undershoot が生じ、このことはしばしば不安定の原因となる\*\*\*。

(2.1) に対する次の差分法について考える。

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\gamma\rho}(\rho T)_x &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re\rho} u_{xx} \\ T_t + uT_x + (\gamma-1)Tu_x - \frac{4}{3} \frac{1}{Re\rho} u_x^2 &= \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re\rho} T_{xx} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

この差分法は N-S 方程式が保存形でかかれた場合の Fillar & Ludloff の差分法に対応するものであるが非粘性の場合の安定性の解析から  $\Delta X$  に対して  $Re$  が大きい場合  $u < 0$  で不安定になることおよび任意の  $Re \neq 0$  に対して強い衝撃波を含む問題に対して不安定になることが予想される。(3.1) を用い、数値実験 A を行なった結果は表 3.1 のとおりである。

結果は予想のとおりであって安定条件を満足していると思われる場合でも衝撃波管のような問題ではこの差分法は不安定現象を生ずる。この差分法は  $Re$  のそれほど大きくない値の場合で強い衝撃波を含まない様な問題に対しては近似解を与えられると思われる。

(2.1) に対して次の差分法を考える。

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\gamma\rho}(\rho T)_x &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re\rho} u_{xx} \\ T_t + uT_x + (\gamma-1)Tu_x - \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{Re\rho} u_x^2 &= \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re\rho} T_{xx} \end{aligned} \right\} (3.2)$$

\*\*\* 上記の i), ii), iii) の問題が生じないような問題、たとえば一次元非定常問題でレイノルズ数が小さく弱い衝撃波を含むような問題では implicit な差分法にも大きな利点があるのであって、その場合には implicit な差分法の使用はさける必要はない。

表 3.1 数值実験 A  $\Delta X=0.005$

$Re$	$10^4 \Delta t$	$10^4 \frac{3}{8\tau} Re \rho \Delta X^2$	解 の 状 況
$10^5$	5.0	133.9	$t=0.0475$ , 95 step で不安定
$10^5$	1.0	133.9	$t=0.0387$ , 387 step で不安定
$10^5$	0.1	133.9	$t=0.04145$ , 4145 step で不安定
$10^3$	5.0	1.339	$t=0.0055$ , 11 step で不安定
$10^3$	1.0	1.339	$t=0.1434$ , 1434 step で不安定
$10^3$	0.1	1.339	$t=0.13491$ , 13491 step で不安定
10	0.05	0.01339	$t=0.00008$ , 16 step で不安定
10	0.01	0.01339	$t=0.083582$ , 83582 step まで安定?

(3.2) の差分法は  $\Delta X$  を固定した時  $Re$  の大きな値に対しては不安定となることが予想される。(  $Re \rightarrow \infty$  の場合, すなわち双曲型方程式に対してこの差分法の Amplification Matrix の固有値は 1 より大となる。) この系に V. Neumann による誤差解析を行なう。

$j\Delta t$  における small perturbation をそれぞれ  $\bar{\rho}^j, \bar{u}^j, \bar{T}^j$  とし,  $(j+1)\Delta t$  におけるそれをそれぞれ  $\bar{\rho}^{j+1}, \bar{u}^{j+1}, \bar{T}^{j+1}$  とする。これらに対する (3.2) の線形化方程式は  $\sigma=0.75$  の場合,  $\lambda=\Delta t/\Delta X, \beta=i/3 Re \cdot \rho \Delta X, \sin \theta=B, (1-\cos \theta)=A$  として,

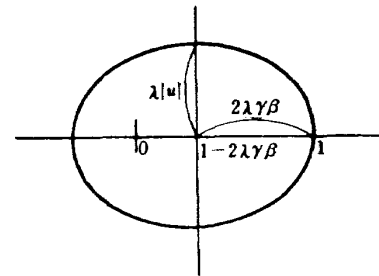


図 3.1

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}^{j+1} \\ \bar{u}^{j+1} \\ \bar{T}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i\lambda u\beta, & -i\lambda\rho B, & 0 \\ -\frac{i\lambda TB}{\gamma\rho}, & 1-i\lambda uB-2\lambda\beta A, & -\frac{i\lambda B}{\gamma} \\ 0, & -i(\gamma-1)\lambda TB, & 1-i\lambda uB-2\lambda\beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}^j \\ \bar{u}^j \\ \bar{T}^j \end{pmatrix}$$

上式において,  $1-i\lambda uB=K$ , 固有値を  $\tau$  とすると上の行列の固有多項式は

$$(K-2\lambda\beta A-\tau)\{\tau^2-2(K-\lambda\gamma\beta A)+K^2-2\lambda\gamma\beta AK+\lambda^2 TB^2\}=0$$

これより

$$\tau_1=1-i\lambda uB-2\lambda\beta A \quad (3.3)$$

$$\tau_{2,3}=1-i\lambda uB-\lambda\gamma\beta A \pm \lambda\{\gamma^2\beta^2 A^2-a^2 B^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad a^2=T \quad (3.4)$$

(3.2) の差分法が安定であるためには  $|\tau| \leq 1$  であれば良い。 $|\tau_1| \leq 1$  なるためには

$$\lambda|u| \leq \frac{8\lambda}{3 Re \rho \Delta X} \leq 1$$

これより

$$|u| \leq \frac{8}{3 Re \rho \Delta X} \quad (3.5)$$

$$\Delta t \leq \frac{3}{8} Re \rho \Delta X^2 \quad (3.6)$$

が条件となる。

次に  $|\tau_{2,3}| \leq 1$  たるための条件について考える。

$$f(\theta) = \gamma^2 \beta^2 A^2 - a^2 B^2$$

とおくと,

$$f'(\theta) = 2 \sin \theta \{\gamma^2 \beta^2 - (\gamma^2 \beta^2 + a^2) \cos \theta\}$$

$f'(\theta)=0$  の根を大きさの順に並べると  $0, \theta_0, \pi, 2\pi, -\theta_0, 2\pi, \dots$  となる。ここで  $\theta_0 = \cos^{-1} \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma^2 \beta^2 + a^2}$  である。 $f(\theta)$  の符号をしらべると

$$f(\theta) \geq 0; \theta=0 \quad \nu_1 \leq \theta \leq \nu_2$$

$$\text{ただし } \theta_0 < \nu_1 < \pi, \pi < \nu_2 < 2\pi - \theta_0$$

$$f(\theta) < 0; \nu_2 < \theta < 2\pi - \theta_0$$

$$\text{ただし } \theta=0 \text{ を除く}$$

いま,  $g(\theta) = \gamma^2 \beta^2 - a^2 \cot^2 \frac{\theta}{2}$  とおくと  $\nu_1 \leq \theta \leq \nu_2$  および  $\theta=0$  で

$$\tau_{2,3} = 1 - \lambda(1 - \cos \theta) \{\gamma\beta \pm g(\theta)\} - i\lambda u \sin \theta \quad (3.7)$$

(3.7) により  $\tau_2 = 1 - \lambda(1 - \cos \theta) \{\gamma\beta + g(\theta)\} - i\lambda u \sin \theta$  の軌跡は中心が  $1 - \lambda\{\gamma\beta + g(\theta)\}$ , 実軸の長さが  $2\lambda\{\gamma\beta + g(\theta)\}$ , 虚軸の長さが  $2\lambda|u|$  の楕円上の中心角  $\theta$  の点をとることがわかる。このことから  $|\tau_2| \leq 1$  すなわちその軌跡が単位円内にあるためには

$$\gamma\beta \geq |u| \tag{3.8}$$

$$2\lambda\gamma\beta \leq 1 \tag{3.9}$$

であればよい。同様な考察により  $\tau_3$  の軌跡が単位円内にあるためには

$$\gamma\beta \gg |u| \tag{3.10}$$

であればよい。

次に  $\nu_2 < \theta < 2\pi + \theta_0$  の場合, すなわち  $f(\theta) < 0$  の場合について考える。この場合  $h(\theta) = a^2 - \gamma^2\beta^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}$  とおくと

$$\tau_{2,3} = 1 - \lambda(1 - \cos \theta) \gamma\beta - i\lambda u \sin \theta \{u \mp h(\theta)\} \tag{3.11}$$

$\tau_{2,3}$  の軌跡は中心の座標が  $1 - \lambda\gamma\beta$ , 実軸の長さが  $2\lambda\gamma\beta$  虚軸の長さ  $2\lambda(u \mp h(\theta))$  の楕円上の中心角  $\theta$  の点を通る。したがってこの軌跡が単位円内にあるためには

$$|u| + a \leq \gamma\beta \tag{3.12}$$

$$\lambda\gamma\beta \leq 1 \tag{3.13}$$

であればよいことになる。(3.8), (3.9), (3.10), (3.12) および (3.13) をまとめると

$$2\lambda\gamma\beta \leq 1 \tag{3.14}$$

$$\gamma\beta \gg |u| + a \tag{3.15}$$

が安定のための条件となる。(3.14) および (3.15) より  $\lambda(|u| + a) \ll 1$  がでてくる。(3.14), (3.15) をかきなおすとそれぞれ

$$\Delta t \leq \frac{3}{8\gamma} Re\rho\Delta X^2 \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{|u| + a} \gg \frac{3}{4\gamma} Re\rho\Delta X \tag{3.17}$$

となる。(3.17) より明らかなようにこの条件は  $\Delta X$  を十分小さくすれば常に満足されると考えられるが計算機の手数記憶容量から  $\Delta X$  の値は常には (3.17) を満足するようにはとれない。このことからこの差分法の使用範囲は限られたものにならざるを得ない。(3.2) を数値実験 A に適用した結果は表 3.2 のとおりである。この数値実験において  $\Delta X = 0.005$  とした。

数値実験 A において  $Re \rightarrow \infty$  とすると  $\max|u| + a$  は理論的にはほぼ 2.8 となる。この値と  $\Delta X = 0.005$  より (3.17) は

$$Re \ll 6700$$

となる。数値実験の結果は  $Re \leq 1000$  でかつ  $\Delta t \leq \frac{3}{8\gamma} Re\rho\Delta X^2$  が満足された場合にのみ計算結果は近似解を与えることをしめしている。(  $\Delta X$  を固定した場合の  $Re$  の上限を求める実験を行なうことは非常に興味があることであるが, ここでは (3.17) の条件が必要であることを示すことだけにとどめる。)

安定性の解析と数値実験の結果 (3.2) の差分法は実用的にその適用範囲がかなりかぎられたものとなることが明らかとなったので, さらに適用範囲の広い差分法を構成することを考える。

(2.1) に対して次の差分法を考える。

$$\left. \begin{aligned} \rho_i + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_i + uu_x + \frac{1}{\gamma\rho} (\rho T)_x &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re\rho} u_{xx} \\ T_i + uT_x + (\gamma - 1)Tu_x - \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma - 1)}{Re\rho} u_x^2 & \\ &= \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re\rho} T_{xx} \end{aligned} \right\} \tag{3.18}$$

$u \geq 0$

表 3.2 数値実験 A  $\Delta X = 0.005$

$Re$	$10^4 \Delta t$	$10^4 \frac{3}{8\gamma} Re\rho\Delta X^2$	解 の 状 況
$10^5$	5.0	133.9	$t = 0.029$ , 58 step で不安定
$10^5$	1.0	133.9	$t = 0.1387$ , 1387 step で不安定
$10^5$	0.1	133.9	$t = 0.27994$ , 27994 step で不安定
$10^3$	5.0	1.339	$t = 0.006$ , 12 step で不安定
$10^3$	1.0	1.339	安 定
10	0.05	0.01339	$t = 0.00009$ , 18 step で不安定
10	0.01	0.01339	安 定

$$\left. \begin{aligned} \rho_i + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_i + uu_x + \frac{1}{\gamma\rho}(\rho T)_x &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re\rho} u_{xx} \\ T_i + uT_x + (\gamma-1)Tu_x - \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{Re\rho} u_x^2 &= \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re\rho} T_{xx} \end{aligned} \right\} (3.18)'$$

$u < 0$

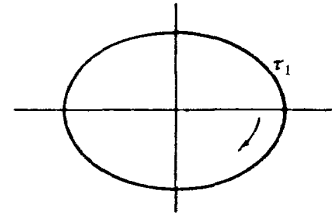


図 3.2

(3.18) の差分法は、 $Re \rightarrow \infty$ ，すなわち、双曲型方程式に対しては安定な差分法であってその安定条件は  $\lambda(|u|+a) \leq 1$  である。この系に small perturbation を導入することにより (3.2) と同様な誤差解析を行なうと  $u \geq 0$  の場合

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}^{n+1} \\ \bar{u}^{n+1} \\ \bar{T}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda u(A+iB), & -i\lambda\rho B, & 0 \\ -\frac{i\lambda TB}{\gamma\rho}, & 1-\lambda u(A+iB)-2\lambda\beta A, & -\frac{i\lambda B}{\gamma} \\ 0, & -i(\gamma-1)\lambda TB, & 1-\lambda u(A+iB)-2\lambda\gamma\beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}^n \\ \bar{u}^n \\ \bar{T}^n \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

となる。ここで  $A, B, \lambda, \beta$  等は (3.2) の場合と同じである。 $u < 0$  の場合は

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}^{n+1} \\ \bar{u}^{n+1} \\ \bar{T}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda u(-A+iB), & -i\lambda\rho B, & 0 \\ -\frac{i\lambda TB}{\gamma\rho}, & 1-\lambda u(-A+iB)-2\lambda\beta A, & -\frac{i\lambda B}{\gamma} \\ 0, & -i(\gamma-1)\lambda TB, & 1-\lambda u(-A+iB)-2\lambda\gamma\beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}^n \\ \bar{u}^n \\ \bar{T}^n \end{pmatrix} \quad (3.19)'$$

(3.19), (3.19)' の固有多項式は  $\tau$  固有値とし (3.19) の場合は  $K=1-\lambda u(A+iB)$  とおき、(3.19)' の場合は  $K=1-\lambda u(-A+iB)$  とおけば固有多項式は

$$(K-2\lambda\beta A-\tau)\{\tau^2-2(\lambda\gamma\beta A+K)\tau+K^2+2\lambda\gamma\beta AK+\lambda^2 a^2 B^2\}=0 \quad (3.20)$$

$$\tau_1 = K-2\lambda\beta A \quad (3.21)$$

$$\tau_{2,3} = K-\lambda\gamma\beta A \pm \lambda(\gamma^2\beta^2 A^2 - a^2 B^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

$|\tau_{1,2,3}| \leq 1$  なるための条件を  $u \geq 0$  の場合について考える。 $\tau_1 = 1-\lambda u(A+iB)-2\lambda\beta A$  であるから  $\tau_1$  の軌跡は 図 3.2 のように中心が  $1-\lambda(u+2\lambda\beta)$ ，実軸長  $2\lambda(u+2\lambda\beta)$ ，虚軸の長さ  $2\lambda u$  の楕円となる。この楕円が単位円の内部にあるために

$$|n| \leq (u+2\beta)$$

$$\lambda(u+2\beta) \leq 1$$

はでなければならない。 $u < 0$  の場合は  $\tau_1$  は同じ楕円上を時計回りに回転するから  $u \geq 0$  の場合と  $u < 0$  の場合をまとめて  $|\tau_1| < 1$  なるためには

$$|u| \leq (|u|+2\beta) \quad (3.23)$$

$$\lambda(|u|+2\beta) \leq 1 \quad (3.24)$$

が条件となる。

次に  $\tau_{2,3}$  について考える。(3.2) の場合と同じに  $f(\theta), g(\theta)$  および  $h(\theta)$  を定義する。

i)  $f(\theta) \geq 0$  の場合、すなわち  $\nu_1 \leq \theta \leq \nu_2$  および  $\theta = 0$  の場合

$$\tau_{2,3} = 1-\lambda(1-\cos)\{|u|+\gamma\beta \pm g(\theta)\} - i\lambda \operatorname{sgn}(u) \cdot u \sin \theta \quad (3.25)$$

この場合、 $\tau_{2,3}$  の軌跡は各  $\theta$  ごとに中心の座標、 $1-\lambda\{|u|+\gamma\beta \pm g(\theta)\}$ ，実軸長、 $2\lambda\{|u|+\gamma\beta \pm g(\theta)\}$  虚軸長  $2\lambda|u|$  の楕円の中心角  $\theta$  の点 ( $u < 0, u \geq 0$  の場合は  $-\theta$ ) の点を通る曲線である。したがって  $|\tau_{2,3}| \leq 1$  なるためには

$$\gamma\beta > 0 \quad (3.26)$$

$$\lambda(|u|+2\gamma\beta) \leq 1 \quad (3.27)$$

が条件となる。

ii)  $f(\theta) > 0$  の場合、すなわち  $\nu_2 < \theta < \nu_1 + 2\pi$   $\theta \neq 2\pi$  の場合、

$$\tau_{2,3} = 1-\lambda(1-\cos\theta)\{|u|+\lambda\beta\} - i\lambda \sin \theta \{\operatorname{sgn}(u) \cdot u \mp h(\theta)\} \quad (3.28)$$

この場合、 $\tau_{2,3}$  の軌跡は各  $\theta$  ごとに中心の座標  $1-\{|u|+\lambda\beta\}$ ，実軸長  $2\lambda(|u|+\lambda\beta)$ ，虚軸長  $2\lambda(|u| \mp h(\theta))$  の楕円の中心角  $\theta$  の点 ( $u < 0, u \geq 0$  の場合は  $-\theta$  の点) を通る曲線である。この場合  $|\tau_{2,3}| \leq 1$  なるための条件は二つに分けて考察しなければならない。



a)  $\gamma\beta \geq a$  の場合

$$\lambda(|u| + \lambda\beta) \leq 1 \quad (3.29)$$

が条件となる。

b)  $\gamma\beta < a$  の場合、 $|\tau_{2,3}| \leq 1$  なるための条件は  $\rho$ ,  $T_1$ ,  $u$ ,  $Re$ ,  $\Delta X$  ( $\Delta X$  はたんに  $\tau_{2,3}$  の軌跡だけに関係するだけでなく V. Neumann の誤差解析の性質から  $\theta$  の分割数にも関係してくる。) の複雑な関数関係で与えられ、これを (3.29) のような簡単な関係式で与えるわけにはゆかない。そこで  $|\tau_{2,3}| \leq 1$  なるための  $\Delta t$  の上限  $\Delta t_r$  を  $\Delta X$ ,  $u$ ,  $\rho$ ,  $T$  を適当に定め  $Re$  を変化させて計算するとその結果は表 3.3, 図 3.3 のようになる。

表 3.3

	$\Delta X$	$\rho$	$u$	$T$
a	0.01	0.02	1.5	1.8
b	0.01	0.002	1.5	1.8
c	0.01	0.02	0.5	1.8
d	0.01	0.02	4.5	1.8
e	0.01	0.02	1.5	0.6
f	0.01	0.02	1.5	5.4

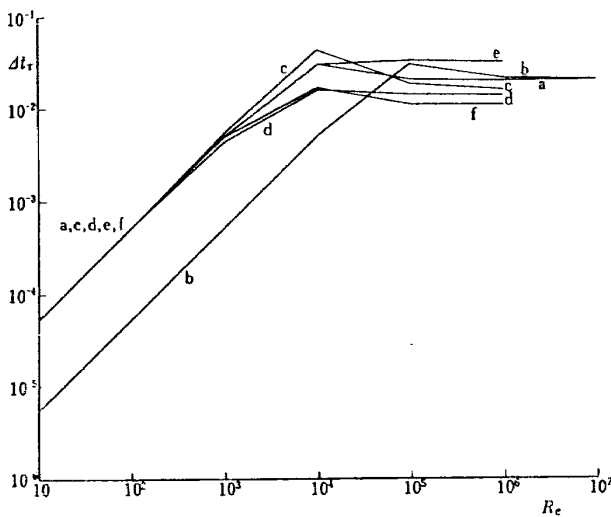


図 3.3

したがってこれまでの条件を総括すると

i)  $\lambda\beta \geq a$ , すなわち

$$\frac{4\gamma}{3Re\rho\Delta X} \geq a \quad (3.30)$$

のとき

$$\Delta t \leq \frac{\Delta X}{|u| + \frac{8\gamma}{3Re\rho\Delta X}} \quad (3.31)$$

が安定条件となる。また  $|u| \ll \frac{8\gamma}{3Re\rho\Delta X}$  ならばこの条件は次の放物的な安定条件

$$\Delta t < \frac{3}{8\gamma} Re\rho\Delta X^2 \quad (3.32)$$

でほぼ近似される。

(3.30) は次のようにかきかえられる。

$$\Delta X \leq \frac{4\gamma}{3aRe\rho} \quad (3.30)'$$

$$Re \leq \frac{4\gamma}{3a\rho\Delta X} \quad (3.30)''$$

(3.30)' より  $\Delta X$  を十分小さくとれば  $\gamma\beta \geq a$  は常に満足されその場合 (3.18) の安定条件は常に (3.31) である\*。しかしながら (3.2) の差分法の場合にも指摘したように  $\Delta X$  を常に (3.30)' を満足するようにとすることは不可能 (計算機の数値, 容量からみて) である。したがって  $\Delta X$  を固定すれば (3.31) が安定条件となるような  $Re$  の大きさは (3.30)'' で与えられ, (3.30)'' を満足しない場合の安定条件は次の ii) で与えられることになる。

ii)  $\gamma\beta > a$  の場合, すなわち  $\Delta X$  を固定し,  $Re$  をそれに比較して十分大きくとった場合,  $|\tau_{1,2,3}| \leq 1$  ならしめる  $\Delta t$  の値の上限の値  $\Delta t_r$  は確かに存在するようであるがその値は筆者の計算では  $\Delta X/(u+a)$  の値よりもかなり小さく,  $\Delta X/(u+a)$  の  $1/4 \sim 2/3$  の間であった\*\*。

ii)'  $\gamma\beta \ll a$  の場合  $\Delta t_r$  の値は  $\rho$ ,  $Re$  の値にほとんど関係しない。この場合  $\Delta t_r$  の値は  $T$  の増加とともに漸減するが  $u$  の依存性はかなり複雑である。

これまでの安定性の解析および計算により (3.18) および (3.18)' の差分法が (3.2) の差分法に対してその適用範囲においてまさっていることがわかった (任意の  $Re$  の値に対して安定な  $\Delta t_r$  が存在する)。これを数値実験によりたしかめ, 同時に計算された差

\*  $\Delta X \rightarrow 0$  では (3.31) が安定条件である。

\*\* N-S 方程式に対する差分法の安定条件として経験的に  $\Delta X$  に比較して  $Re$  が十分大きい所では安定条件として  $\Delta X/(u+a)$  が考えられてきた。この場合の安定条件というのは計算結果の妥当性を保証するということであって Neumann の誤差解析により生じた行列の固有値の絶対値を 1 より小にする  $\Delta t$  の値ということではないことに注意する必要がある。Neumann の誤差解析の条件と差分法の妥当性を保証する条件との間のギャップは非線形方程式の場合, 特に  $\Delta X$  が有限の場合それほど驚くべきことではない。

表 3.4

$Re$	$10^3 \Delta t$	$\max \tau $	$10^3 \min \frac{\Delta X}{u+a}$	$10^3 \min \frac{3}{8r} Re \rho \Delta X^2$	解 の 状 況
10	0.0053125	1.0	8.4	0.005357	安 定
10	0.00546875	1.04	9.0	0.005357	不安定 477 step
$10^2$	0.05375	1.006~1.0	5.1	0.05357	安 定
$10^2$	0.0546875	1.04	5.1	0.05357	不安定 350 step
$10^3$	0.5	1.0	3.8	0.5357	安 定
$10^3$	0.5625	1.099	3.8	0.5357	不安定 155 step
$10^4$	1.0	1.0	3.5	5.357	安 定
$10^4$	2.75	1.04	3.2	5.357	安 定
$10^4$	2.875	—	—	5.357	不安定 5 step
$10^5$	1.0	1.0	3.5	53.57	安 定
$10^5$	3.23	1.04	3.2	53.57	安 定
$10^5$	3.25	1.09	—	53.57	不安定 15 step
$10^6$	1.0	1.004	3.5	535.7	安 定
$10^6$	3.26	—	—	535.7	安 定
$10^6$	3.28	—	—	535.7	不安定 4 step

分解が妥当なものであることを保証する条件と理論的な条件, すなわち  $|\tau_{1,2,3}| \leq 1$  ならしめる条件との比較を行なう。数値実験 A に (3.18) および (3.18)' を適用して安定性実験を行なった結果は表 3.4 のとおりである。

表 3.4 において不安定というのは  $Re=10$  の場合 2,000 時間 step,  $Re=10$  の場合 1,000 時間 step,  $Re=10^3$  の場合 300 時間 step,  $Re \leq 10^4$  の場合 200 時間 step までに解に overflow が生ずるか  $\rho$  または  $T$  の値に負が生じた場合をいい\*, 安定というのは得られた差分解が妥当なものを意味する。また  $\max|\tau|$  というのは 5 時間 step ごとにいくつかの点 ( $\max|u|$ ,  $\max|T|$ ,  $\max|u|+a$ ,  $\min \rho$  となる点) において  $|\tau_{1,2,3}|$  を求め全時間 step の中で最大をとった ( $Re=10^3$  で  $\max|\tau|=1.006 \sim 1.0$  とあるのははじめの数百 step 1.006 で後ずっと 1.0 となった)。

この計算結果より  $r\beta \leq a$  においては実際計算により得られた解が妥当なものであるための条件と理論的な条件  $|\tau| \leq 1$  とは一致することが明らかとなる。 $r\beta < a$  においては実際計算における解の妥当性を保証する条件は理論値と  $\Delta t/(u+a)$  の間で  $\Delta X/(u+a)$  にかなり近い所であることがわかる。また不安定現象の発達は  $Re$  の大小により, すなわち  $\Delta X$  を固定した場合

\*  $\rho$  または  $T$  に負が生ずれば, しばらくして overflow が生ずることが経験的にわかっている。

双曲的な安定条件が支配的である場合と放物的な条件が支配的である場合とではかなり異なることは注意すべきであろう。

[注意]

非線形偏微分方程式の差分法において V. Neumann の誤差解析による安定条件と実際に計算された解が妥当であるための条件との乖離はしばしば生ずる。理論値が計算解の妥当性を保証しない例はたとえば Rubin & Burstein の N-S 方程式にたいする 2-step L-W 法にみられる。逆に理論値をこえても計算が可能な例はたとえば Lax-Friedricks の差分法で経験するところである。V. Neumann の誤差解析は数学的に厳密なものではないが, これらの現象を一括してそのせいにするのは妥当ではないように思われる。このような非線形現象の解明に対してオーソライズされた理論は現在のところ存在しない。

次に (3.18) および (3.18)' の差分法を用いて数値実験 A および B を行なった結果を示す。

図 3.4a~3.4c は数値実験 A の  $t=0.1, 0.2, 0.3$  における密度および速度分布を示したものである。 $Re$  の減少に従って衝撃波, 接触面ともかなり形がくずれており  $Re=10^3$  ではそのくずれかたはかなりいちじるしい。

図 3.5a~3.5c は数値実験 B の  $t=0.1, 0.2, 0.3$  における密度および速度分布を示したものである。こ

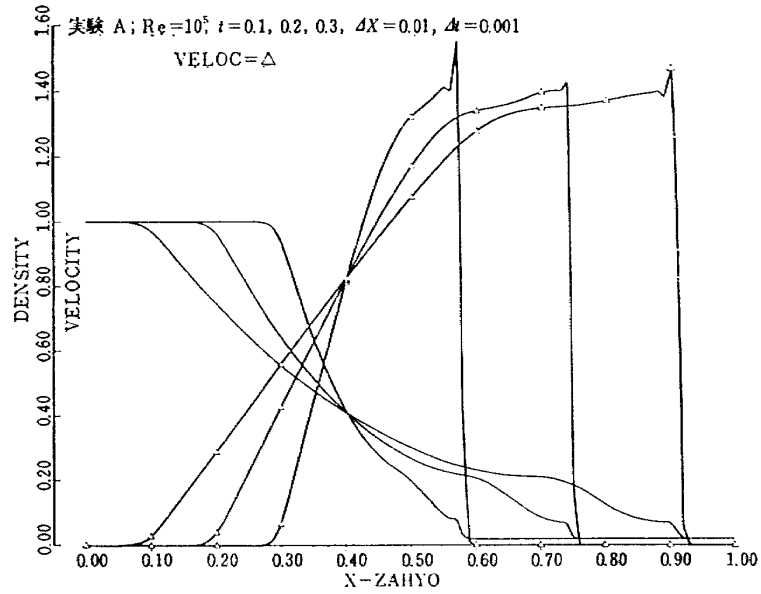


図 3.4 (a)

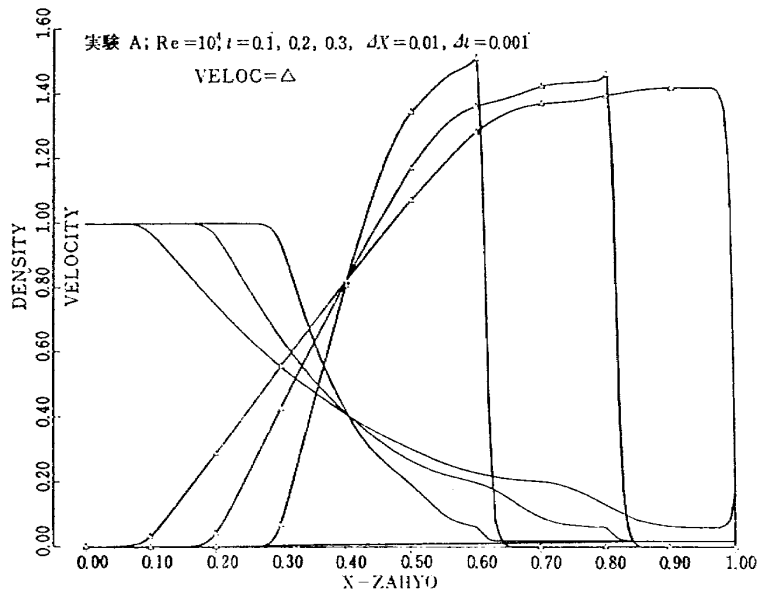


図 3.4 (b)

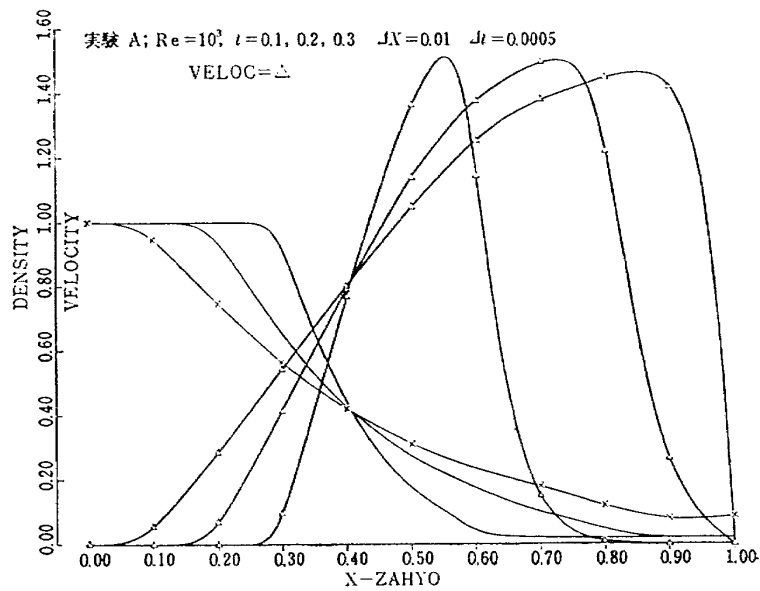
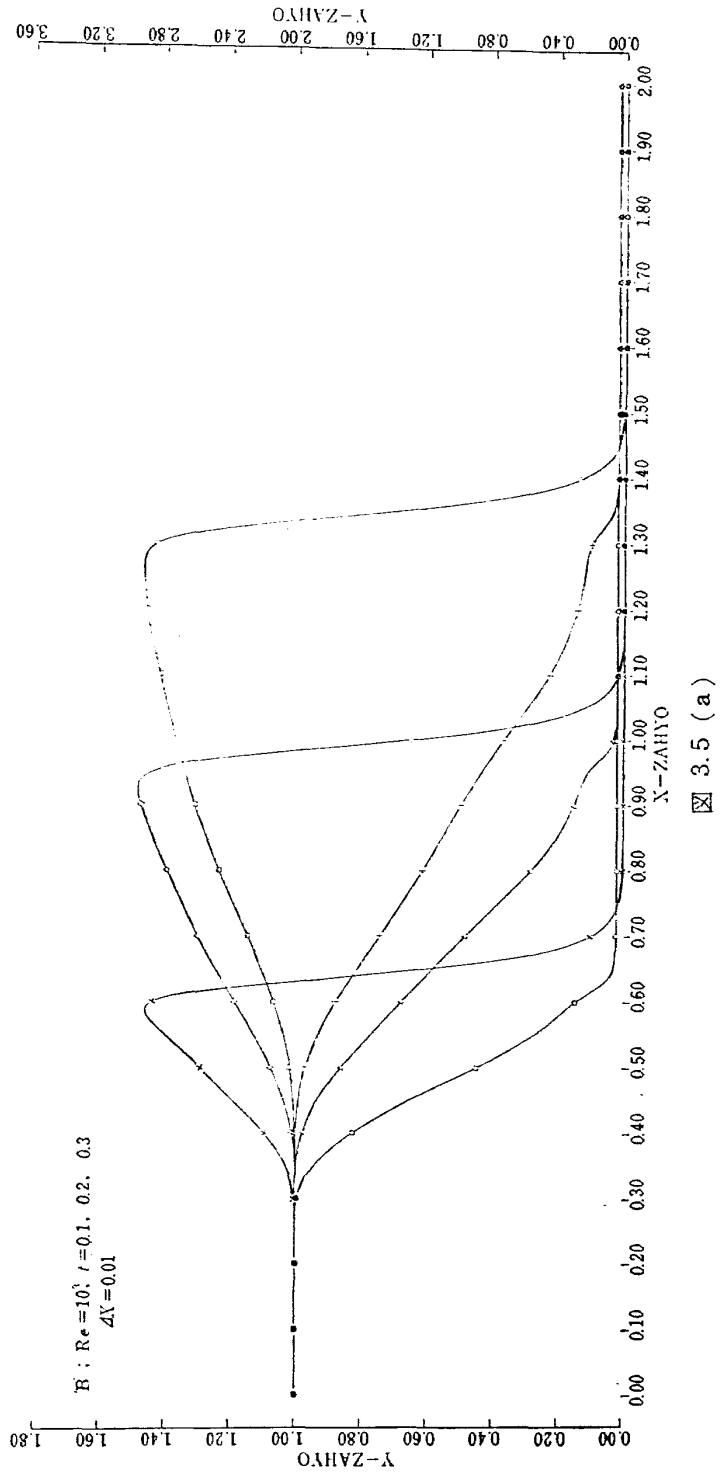


図 3.4 (c)



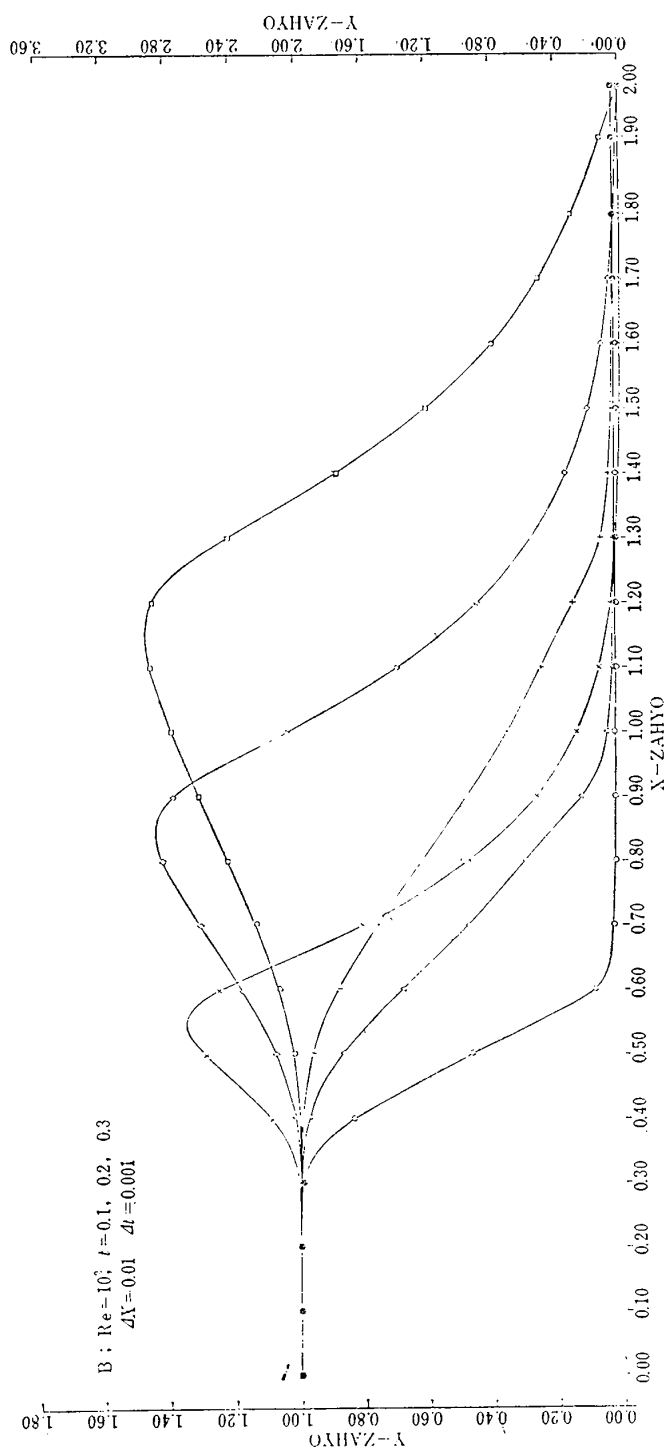
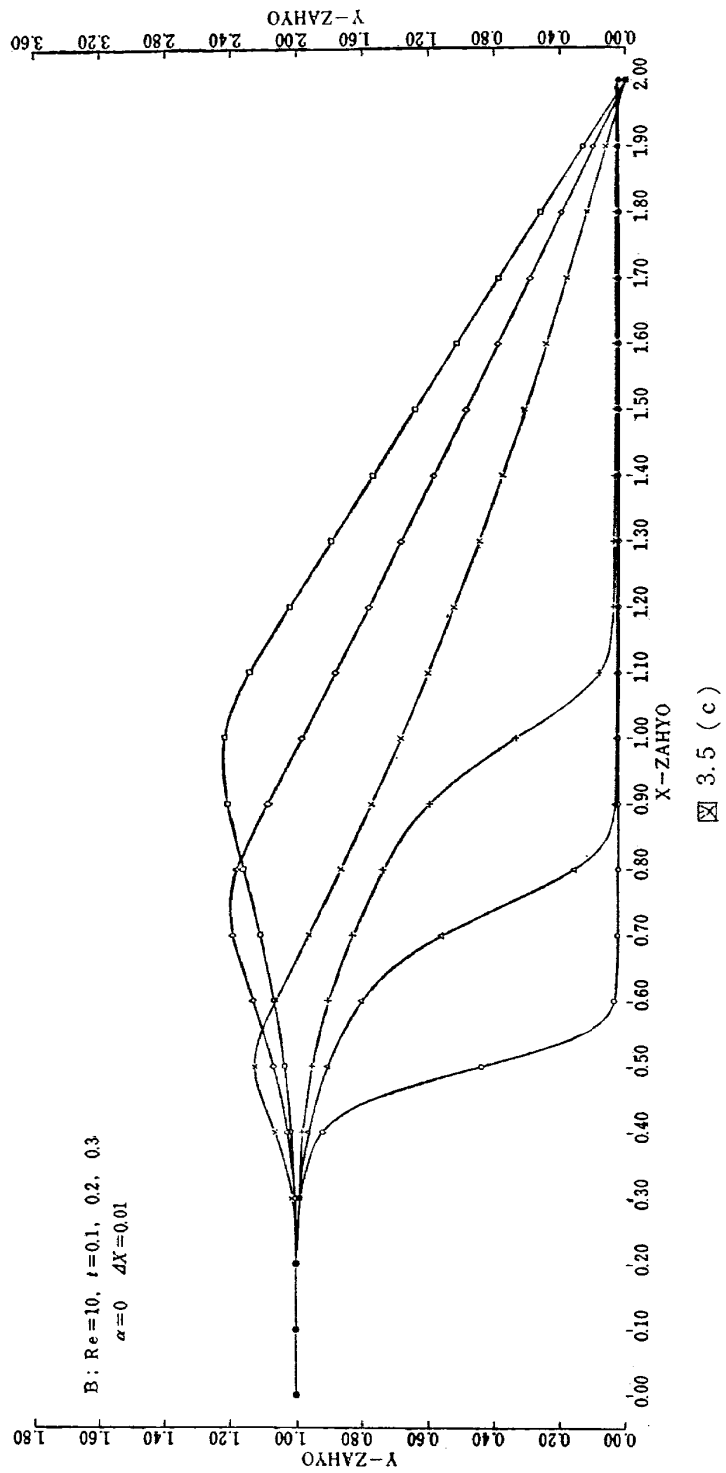


図 3.5 (b)



の場合も  $Re$  の減少につれて衝撃波の形のくずれかたはいちじるしいが  $Re=10$  の場合は  $Re=10$  の場合と比較してもその密度分布の形状に質的な変化があるようである。

図 3.6a~3.6d は数値実験 A ( $Re=10^5, 10^2$ ) を  $\Delta t/\Delta X^2$  =一定の条件のもとで  $\Delta X \rightarrow$  小とした場合の  $t=0.2$  における密度および速度分布が示されている。 $\Delta X \rightarrow$  小で解は収束して行くようである。しかしながらその収束の状況は  $Re=10^4$  の場合と  $Re=10^3$  の場合はかなりことなり  $Re=10^5$  の場合  $\Delta X \rightarrow$  小とする

と衝撃波の速度は大となり  $Re=10^3$  の場合  $\Delta X \rightarrow$  小とすると衝撃波の速度小となる。いずれの場合も非粘性として計算した場合の衝撃波の速度の理論値へ近づくようである\*。この近づき方の相異は差分方程式の双曲的性質および放物的性質の優劣による打ちきり誤差の符号と関係している。

図 3.7a~3.7b は数値実験 A を  $Re=10^3, 600, 200, 100, 80, 40, 30, 25, 20, 15, 10$  の場合にそれぞれ計算したものの  $t=0.2$  における密度および速度分布である。 $Re=80 \sim 40$  の所で解の形状に質的な

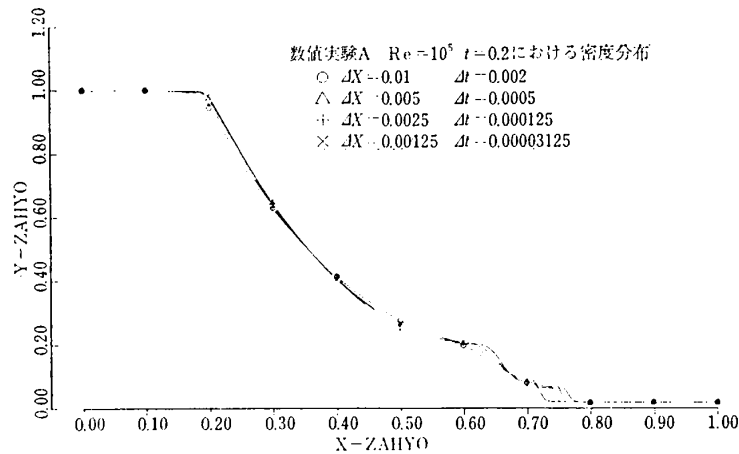


図 3.6 (a)

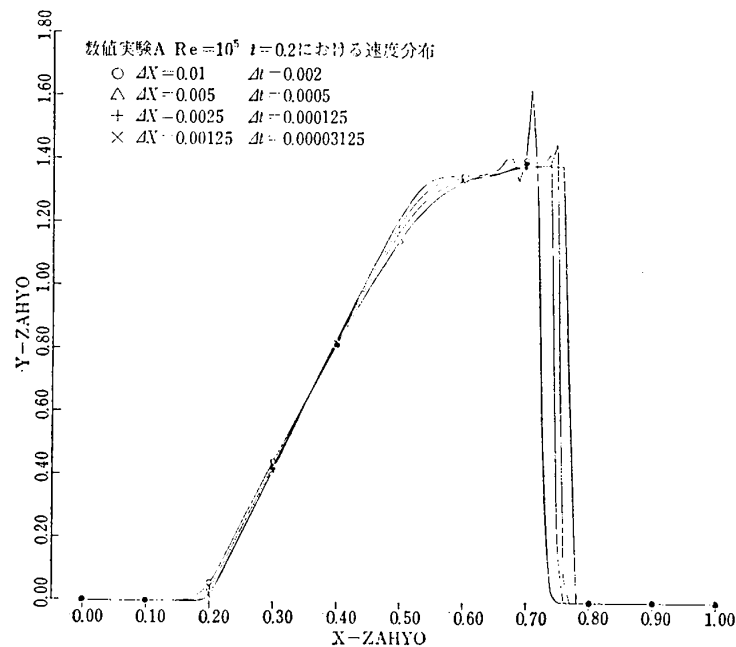


図 3.6 (b)

\*  $Re=10^3$  では密度および速度分布ともに非粘性の場合に対してかなり形状がくずれているが  $Re=10^5$  では非粘性の場合とその形状は大きな相異はない。そこで衝撃波の前後での  $u, \rho, T$  の理論値を非粘性の場合に計算し差分解と比較を行なうと  $\Delta X \rightarrow$  小に従って衝撃波の前後の差分解は非粘性の場合の理論値に近づく。

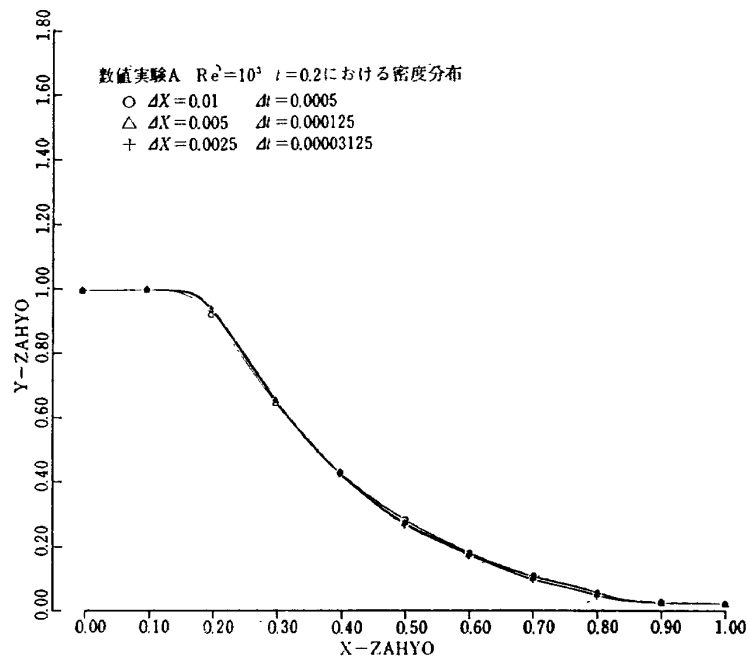


図 3.6 (c)

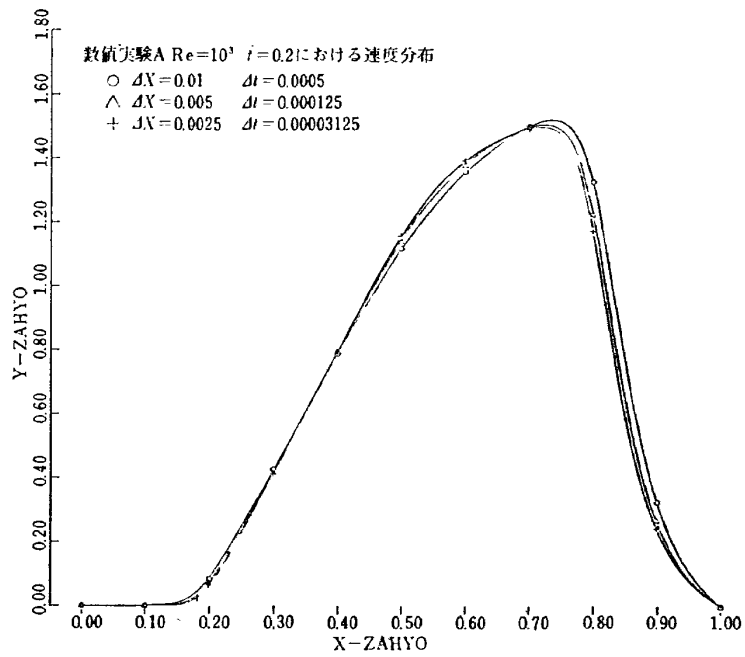


図 3.6 (d)



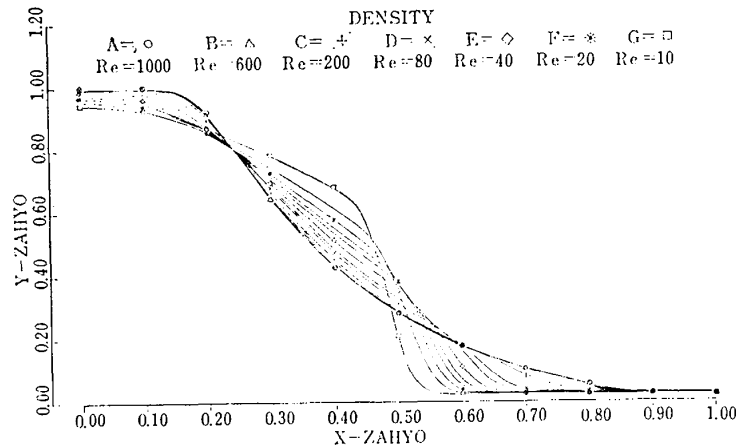


図 3.7 (a)

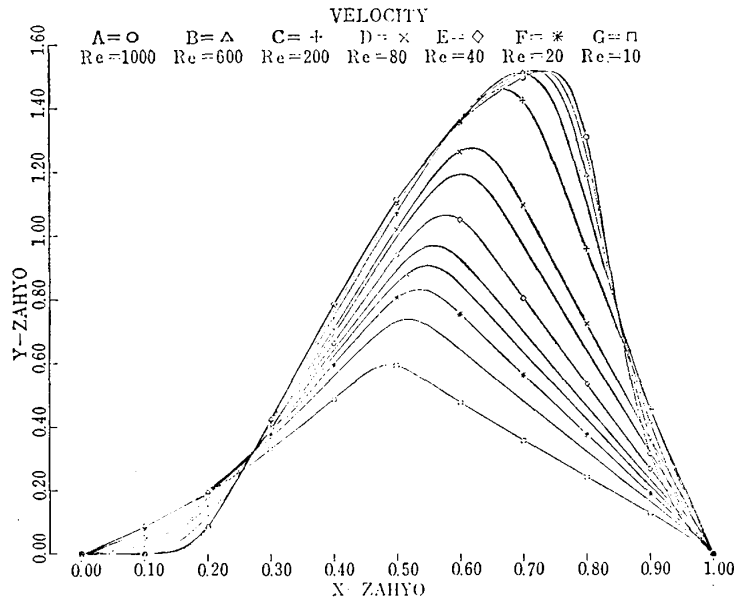


図 3.7 (b)

変化が生じているように思われる\*。

4.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に対する非対称な差分法

3. において構成された差分法の安定条件を見れば明らかなようにこれらの差分法は  $Re$  を固定して  $\Delta X \rightarrow 0$  としていった場合および  $\Delta X$  を固定して  $Re \rightarrow 小$  としていった場合に放物的な条件, すなわち  $\Delta t \leq \frac{3}{8\gamma} Re \rho \Delta X^2$  にほぼ従うことがわかる。このような場合  $\Delta t$  に関する条件は安定条件が双曲的である場合

\* 数値実験 A, B においてレイノルズ数は流体の高圧の方を基準にとって定めた。図 3.5 の場合も図 3.7 の場合も  $Re$  10<sup>2</sup>~10 の間で解の形状が変化するのにはレイノルズ数が小さすぎることに起因するのかもしれない。

に比較してはるかに厳しくなる。このことは 3. の差分法に限らずこれまで N-S 方程式に対して構成された explicit な差分法のほとんどすべてに対してあてはまることである\*\*。そこで計算の explicit 性を保持しつつ  $\Delta t$  に対する条件をゆるめることが重要な課題となる。本節はそのための基礎として  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に対する非対称な差分法を構成し, その差分法が explicit かつ無条件安定であることを示す。

まず 2 階導関数に対する差分近似を以下のように構成する。

\*\* 計算が explicit で放物的安定条件がおちていると思われるものに S. M. Scala & P. Gordon の差分法があるが, この差分法の安定性解析も実験も行なわれていない。

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \right\} + O(\Delta X^2) \\
 &= \frac{a}{\Delta X} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j+1} \right. \\
 &\quad \left. - \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j + \theta \Delta t) \right\} + O(\Delta X^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \right\} + o(\Delta X^2) \\
 &= \frac{a}{\Delta X} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \right. \\
 &\quad \left. + \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_j + \theta \Delta t) \right\} + O(\Delta X^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

(4.1) および (4.2) を中心差分で近似すると

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X^2} (u_{i+1,j} - u_{i,j} - u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\
 &\quad + O\left(\Delta X^2 - a \frac{\Delta t}{\Delta X}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X^2} (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\
 &\quad + O\left(\Delta X^2 + a \frac{\Delta t}{\Delta X^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

ここで

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \left\{ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

とおき、上式の右辺第1項に (4.3) または (4.4) を代入すれば  $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  の近似として

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X^2} \{ u_{i+1,j} + (\alpha-2)u_{i,j} - \alpha u_{i,j+1} \\
 &\quad + \alpha u_{i-2,j+1} + (1-\alpha)u_{i-1,j} \} \\
 &\quad + O\left(\Delta X^2 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta X}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a}{\Delta X^2} \{ u_{i-1,j} + (\alpha-2)u_{i,j} - \alpha u_{i,j+1} \\
 &\quad + \alpha u_{i+1,j+1} + (1-\alpha)u_{i+1,j} \} \\
 &\quad + O\left(\Delta X^2 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta X}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

が得られる。この非対称な2階導関数に対する差分近似を  $u_{x\bar{x}\alpha}$  および  $u_{\bar{x}x\alpha}$  で表わすことにする。これを用いて  $\frac{\partial a}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に対する二つの差分法

$$u_t = a u_{x\bar{x}\alpha} \tag{4.6}$$

$$u_t = a u_{\bar{x}x\alpha} \tag{4.7}$$

が構成される。(図 4.1, 4.2)

(4.6), (4.7) の差分法は  $\alpha=0$  で通常2の階の中心差分による近似を与える。 $\alpha=1$  の場合  $u_{x\bar{x}1}$  において左下の点は用いられない。 $u_{\bar{x}x1}$  においては右下の

点は用いられない。(4.6) および (4.7) の差分法の依存領域はそれぞれ図 4.3 および図 4.4 のとおりである。

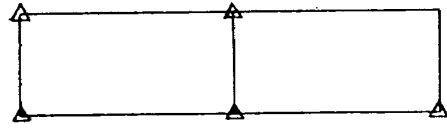


図 4.1

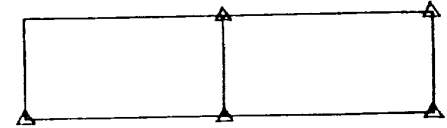


図 4.2

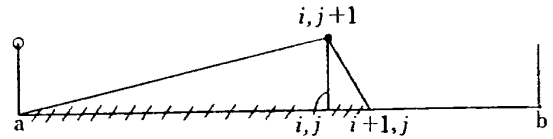


図 4.3

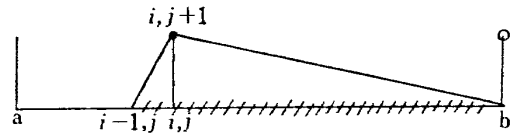


図 4.4

(4.6) および (4.7) の差分法の精度は (4.3) および (4.4) から  $O\left(\Delta X^2 + \Delta t \pm \alpha \frac{\Delta t}{\Delta X}\right)$  であって  $\alpha$  の減少とともに精度は向上し  $\alpha=0$  では通常 explicit な差分法のそれに等しい。

次にこの差分法の安定性を調べることにする。(4.6) について考えるが (4.7) についても同様であって安定条件も全く同じである。

(4.6) において  $\frac{\Delta t}{\Delta X^2} = \omega$  とおき  $u_{i,j} = S j e^{k i \Delta X}$  とおけば ( $k$  は虚数単位)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\omega} + \alpha a\right) u_{i,j+1} - \alpha a u_{i-1,j+1} &= a(1-\alpha) u_{i-1,j} \\
 + \left\{ \frac{1}{\omega} + a(\alpha-2) \right\} u_{i,j} + a u_{i+1,j}
 \end{aligned}$$

から

$$S = \frac{a(\alpha-2)(1-\cos\theta) + \frac{1}{\omega} + ai \sin\theta}{a\alpha(1-\cos\theta) + \frac{1}{\omega} + ai \sin\theta} \tag{4.8}$$

(4.6) が安定であるためには  $|S| \leq 1$  であればよいが

そのためには

$$\Delta t \leq \frac{\Delta X^2}{2 \cdot a(1-\alpha)} \quad (4.9)$$

であればよい。(4.9)より  $\alpha=1$  のとき差分法は無条件安定となる。 $\alpha=0$  のときは通常の explicit 差分法の安定条件となる。 $\alpha$  を  $0 \rightarrow 1$  と変化させた場合  $\frac{\Delta t}{\Delta X^2} = \omega$  の値は図 4.5 に示される。この図から明らかに安定条件は  $\alpha \rightarrow 1$  となるに従って急激にゆるめられる。 $\alpha=0.5$  および  $\alpha=0.75$  のときの安定さ  $\Delta t$  の上限は通常の explicit な差分法のそれの 2 倍および 4 倍となる。

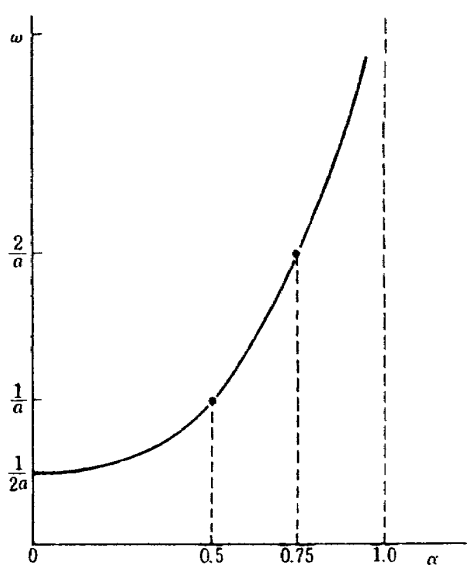


図 4.5

これまでの解析から  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に対する  $u_t = au_{x\bar{x}\alpha}$  または  $u_t = au_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$  なる差分法は解法は explicit ( $u_t = a_{x\bar{x}\alpha}$  の場合は左から右へと計算を進める。)  $u_t = u_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$  の場合は逆方向に計算を進める。) であり  $\alpha=1$  のとき無条件安定であることがわかったがその精度は通常の explicit な差分法に比較して悪くなっている。(打ちきり誤差中の  $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta X}$  の項に注意) これを改善することが次の課題となる。

(4.4) および (4.5) の打ち切り誤差項において  $\frac{\Delta X}{\Delta t}$  の係数の符号が逆になっていることから (4.6) による計算結果と (4.7) による計算結果を各時間 step ごとに平均すれば非対称な差分法の精度は改善されることが予想される。

いま、簡単のため  $\alpha=1$  とし、微分方程式の定義域を  $\{(x,t; 0 \leq x \leq 1, t \geq 0)\}$  とする。境界条件として  $x=0$  および  $x=1$  での  $u$  の値が与えられているものとする。また  $u_t = u_{x\bar{x}\alpha}$  および  $u_t = u_{\bar{x}\bar{x}\alpha}$  による

$(j+1)\Delta t$  における計算結果をそれぞれ  $u_{i,j+1}^L$  および  $u_{i,j+1}^R$  とすると平均法は次のようにかかれる。

$$\begin{aligned} u_{0,j+1}^L &= a \text{ (境界条件)} \\ u_{i,j+1}^L &= A(u_{i-1,j+1}^L + u_{i+1,j}^L) + Bu_{i,j} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ &= Au_{i+1,j} + (A^2+B) \sum_{k=2}^i A^{i-k} u_{k,j} \\ &\quad + BA^{i-1} u_{1,j} + A^i u_{0,j+1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} u_{N,j+1}^R &= b \text{ (境界条件)} \\ u_{i,j+1}^R &= A(u_{i+1,j+1}^R + u_{i-1,j}^R) + Bu_{i,j} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ &= Au_{i-1,j} + (A^2+B) \sum_{k=i}^{N-2} A^{k-i} u_{k,j} \\ &\quad + BAN^{-i-1} u_{N-1,j} + AN^{-i} u_{N,j+1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで  $A = \omega a / (1 + \omega a)$ ,  $B = 1 - \omega a / (1 + \omega a)$ ,  $N\Delta X = 1$  である。

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2} (u_{i,j+1}^L + u_{i,j+1}^R) \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.12)$$

(4.10) および (4.11) を Suffix を整理してかきなおし (4.12) に代入すると (一般性を失なうことなく  $i > N-i$  とする。)

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \frac{1}{2} (u_{i,j+1}^L + u_{i,j+1}^R) = \frac{A}{2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \\ &\quad + \frac{(A^2+B)}{2} \sum_{k=0}^{N-i-1} A^k (u_{i-k,j} + u_{i+k,j}) \\ &\quad + \frac{(A^2+B)}{2} \sum_{k=N-1-i}^{i-2} A^k u_{i-k} + \frac{BA^{i-1}}{2} u_{1,j} \\ &\quad + \frac{A^i}{2} u_{0,j+1} + \frac{BA^{N-i-1}}{2} u_{N-1,j} + \frac{A^{N-i}}{2} u_{N,j+1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.13) を  $(x_i, t_{j+1})$  の回りで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta X - \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u \right\} \\ &\quad + \frac{(A^2+B)}{2} \sum_{k=0}^{N-i-2} A^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} k \Delta X \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u + (-1)^m \left( \frac{\partial}{\partial x} k \Delta X + \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u \right\} \\ &\quad + \frac{(A^2+B)}{2} \sum_{k=N-k-1}^{i-2} A^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial}{\partial x} k \Delta X + \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u + \frac{BA^{i-1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial}{\partial x} (i-1) \Delta X + \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u \\ &\quad + \left( \frac{BA^{N-i-1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (N-i-1) \Delta X \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial t} \Delta t \right)^m u + \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial x} (i \Delta X)^m \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{A^{N-i}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} ((N-i)\Delta X)^m \frac{\partial^m}{\partial x} u \quad (4.14)^*$$

(4.14) において

$$\begin{aligned} A^2+B &= 1/(1+\omega a)^2 \\ 1/1-A &= (1+\omega a), \quad \omega, a > 0, \quad A < 1 \\ \sum_{k=u}^m A^k &= (1+\omega a)(A^n - A^{m+1}) \\ \sum_{k=n}^m k A^k &= A \frac{\partial}{\partial A} (\sum_{k=u}^m A^k) \\ &= (1+\omega a)(uA^n - (m+1)A^{m+1}) \\ &\quad + (1+\omega a)^2(A^{n+1} - A^{m+2}) \\ \sum_{k=n}^m k^2 A^k &= (1+\omega a)(n^2 A^n - (m+1)^2 A^{m+1}) \\ &\quad + (1+\omega a)^2\{(2m+1)A^{n+1} \\ &\quad - (2m+3)A^{m+2}\} + 2(1+\omega a)^3 \\ &\quad \times \{A^{n+2} - A^{m+3}\} \\ \sum_{k=u}^m k^3 A^k &= (1+\omega a)\{n^3 A^n - (m+1)^3 A^{m+1}\} \\ &\quad + (1+\omega a)^2\{(3n^2+3n+1)A^{n+1} \\ &\quad - (3m^2+9m+7)A^{m+2}\} + 6(1+\omega a)^4 \\ &\quad \times \{A^{n+3} - A^{m+4}\} \end{aligned}$$

と  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  および  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  を用いて (4.14) を整理して  $u, \Delta X \frac{\partial u}{\partial X}, \Delta X^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \Delta X^3$  の係数をしらべれば,  $u, \Delta X \frac{\partial u}{\partial X}, \Delta X^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$  の係数は全て 0,  $\Delta X^3 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3}$  の係数は

$$Y(\Delta X) = \frac{1}{2} (a\omega)^2 \left\{ \left( \frac{a\omega}{1+a\omega} \right)^i - \left( \frac{a\omega}{1+a\omega} \right)^{N-i} \right\} \quad (4.15)$$

となる。ここで  $\frac{1}{2}(a\omega)^2 = A, \frac{a\omega}{1+a\omega} = B < 1$  とおき,  $N\Delta X = 1, i\Delta X = x$  とおくと (4.15) は

$$Y(\Delta X) = AB \frac{1-x}{\Delta X} (B \frac{2x-1}{\Delta X} - 1)$$

となる。(4.16) より  $2x=1$  すなわち  $i=N-i$  とすると  $Y(\Delta X)=0$  となり  $\Delta X^3 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3}$  の係数も 0 となり, この点での打ち切り誤差は  $0(\Delta X^2)$  となる。しかしながら一般に  $i \neq N-i$  の場合  $Y(\Delta X) \neq 0$  となり, そこでの打ち切り誤差は  $0(\Delta X)$  となる。そこで  $\Delta X \rightarrow 0$  とした時の打ち切り誤差の行動を調べることにする。今,  $0 < \epsilon \leq x \leq \epsilon' < 1$  とする。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{Y(\Delta X)}{\Delta X} &= -\frac{1-x}{\Delta X} A \log B e^{\log B \frac{1-x}{\Delta X}} \\ &\quad \times \left( e^{\log B \frac{2x-1}{\Delta X}} - 1 \right) - A \log B \frac{2x-1}{\Delta X^2} \end{aligned}$$

$$\times e^{\log B \frac{2x-1}{\Delta X}} \times e^{\log B \frac{1-x}{\Delta X}}$$

ここで  $\frac{1}{\Delta X} = y$  とおくと  $c = \log B < 0$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{Y(\Delta X)}{\Delta X} &= \lim_{y \rightarrow \infty} -Ac[(1-x)y^2 e^{cxy} \\ &\quad + (1-x)y^2 e^{c(1-x)y} + (2x-1)y^2 e^{cxy}] = 0 \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{Y(\Delta X)}{\Delta X} = 0$  より  $Y(\Delta X)$  は  $\Delta X$  より高位の無限小, したがって  $\Delta X^3 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3}$  の係数は  $\Delta X \rightarrow 0$  で  $0(\Delta X)$  となる。このことから平均法の打ち切り誤差は  $\frac{\Delta t}{\Delta X^2} =$ 一定の条件のもとで  $\Delta X \rightarrow 0$  とすると  $0(\Delta X^2)$  となる。また,  $\Delta X$  を十分に小さくしてゆけば境界の  $\xi$ -近傍 ( $\epsilon$  は  $\Delta X$  に依存する。)を除いて平均法の打ち切り誤差はほとんど  $0(\Delta X^2)$  となる。すなわち通常の explicit 法の精度とほとんど変わらないといえる。

[注意]  $u_t = au_{x\bar{x}\alpha}, u_t = au_{x\bar{x}\alpha}$  および平均法の正值性について

$u_t = au_{x\bar{x}\alpha}; 0 \leq \alpha \leq 1$  について考える。 $u_t = au_{x\bar{x}\alpha}$  および平均法についても議論は全く同様であり結論も同じである。 $u_t = au_{x\bar{x}\alpha}$  は (4.4) より

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= A^i u_{0,j+1} + A^{i-1} c u_{0,k} + (A^{i-1} B + A^{i-2} C) u_{1,k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-2} (A^2 D + AB + C) A^{k-1} u_{i-k} + (AD + B) u_{i,j} \\ &\quad + D u_{i+1,j} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ここで  $A = \alpha\omega a / 1 + \alpha\omega a, B = 1 + a\omega(\alpha - z) / 1 + \alpha\omega a, C = a\omega(1 - \alpha) / 1 + \alpha\omega a, D = a\omega / 1 + \alpha\omega a,$  いま  $a\omega = R$  とすると

$$A_k \geq 0 \quad (4.18)$$

$$A_k c = (\alpha^{k-1} R^k - (\alpha R)^k) / (1 + \alpha R)^k \geq 0 \quad (0 \leq \alpha \leq 1 \text{ に注意}) \quad (4.19)$$

$$A^{k-1} B + A^{k-2} C = \alpha^{k-2} R^{k-1} (1 - \alpha R) / (1 + \alpha R)^k \quad (4.20)$$

$$A^2 D + AB + C = \frac{R}{(1 + \alpha R)^3} \geq 0 \quad (4.21)$$

$$\sum_{k=1}^{i-2} A^{k-1} = (1 + \alpha R) \left\{ 1 - \left( \frac{\alpha R}{1 + \alpha R} \right)^{i-2} \right\} \geq 0 \quad (4.22)$$

$$AD + B = \frac{1}{(1 + \alpha R)^2} \{1 + 2R(\alpha - 1) + R^2 \alpha(\alpha - 1)\} \quad (4.23)$$

(4.20) は  $1 - \alpha R = 1 - \alpha\omega \geq 0$  ならば

$$A^{k-1} B + A^{k-2} C \geq 0$$

(4.23) は  $\alpha = 1$  ならば

$$AD + B > 0$$

\* 実際には  $u$  の 4 階導関数まででよい。

$\alpha=0$  ならば  $1-2R \geq 0$  のとき  
 $AD+B \geq 0$

したがって  $\alpha=1$  の場合  $1-\frac{\alpha \Delta t}{\Delta X^2} \geq 0$  ならば  $u_i = au_{i\bar{x}\bar{x}\alpha}$  の係数はすべて正となり  $\alpha=0$  の場合  $1-2\alpha \times \frac{\Delta t}{\Delta X^2} \geq 0$  ならば  $u_i = au_{i\bar{x}\bar{x}\alpha}$  の係数はすべて正となる  
 係数がすべて正ならば (4.17) より

$$\begin{aligned} |u_{i,j+1}| &\leq \{A^i + A^{i-1}c + (A^{i-1}B + A^{i-2}c) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-2} (A^2D + AB + C)A^{k-1} + AD + B \\ &\quad + D\} \max_e |u_{i,j}| \\ &= \left(\frac{1+\alpha R}{1+\alpha R}\right)^2 \max_e |u_{i,j}| = \max_e |u_{i,j}| \end{aligned}$$

よって

$$\max |u_{i,j+1}| \leq \max |u_{i,j}| \quad (4.25)$$

したがって正值であることから差分法  $u_i = au_{i\bar{x}\bar{x}\alpha}$  の最大値ノルムによる安定性が証明される。 $u_i = au_{i\bar{x}\bar{x}\alpha}$  および平均法についても同様である。

この安定性の条件はノルムに最大値を用いているため  $\alpha=1$  の場合でも条件付安定となっている。(4.9) で  $\alpha=1$  の場合の無条件安定性を示したがこの場合のノルムは  $L^2$ -ノルムによる安定性であった。

### 5. 平均法の N-S 方程式への適用

4. で構成された平均法を N-S 方程式 (2.1) に適用する。 $u \geq 0$  の場合

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}_{i,j+1}^L \\ \bar{u}_{i,j+1}^L \\ \bar{T}_{i,j+1}^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda u A, & -\lambda \rho B, & 0 \\ \lambda T B, & 1-\lambda u A + D, & \lambda B \\ 0, & -(\gamma-1)\lambda T B, & 1-\lambda u A + \lambda C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}_{j,i}^L \\ \bar{u}_{i,j}^L \\ \bar{T}_{i,j}^L \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_i + u \rho_{\bar{x}} + \rho u_{\bar{x}} &= 0 \\ u_i + u u_{\bar{x}} + \frac{1}{\gamma \rho} (\rho T)_{\bar{x}} &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re \rho} u_{\bar{x}\bar{x}\alpha} \\ T_i + u T_{\bar{x}} + (\gamma-1) T u_{\bar{x}} &= \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{Re \rho} \\ &\times u_{\bar{x}}^2 + \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re \rho} T_{\bar{x}\bar{x}\alpha} \end{aligned} \right\} (5.1)$$

$$(5.1) \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{i,j+1}^L \\ u_{i,j+1}^L \\ T_{i,j+1}^L \end{pmatrix} \text{ 左から右へと計算する。}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_i + u \rho_{\bar{x}} + \rho u_{\bar{x}} &= 0 \\ u_i + u u_{\bar{x}} + \frac{1}{\gamma \rho} (\rho T)_{\bar{x}} &= \frac{4}{3} \frac{1}{Re \rho} u_{\bar{x}\bar{x}\alpha} \\ T_i + u U_{\bar{x}} + (\gamma-1) T u_{\bar{x}} &= \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{Re \rho} u_{\bar{x}}^2 \end{aligned} \right\} (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\gamma}{\sigma} \frac{1}{Re \rho} T_{\bar{x}\bar{x}\alpha} \\ &\end{aligned} \right\}$$

$$(5.2) \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{i,j+1}^R \\ u_{i,j+1}^R \\ T_{i,j+1}^R \end{pmatrix} \text{ 右から左へと計算する。}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{i,j+1} \\ u_{i,j+1} \\ T_{i,j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_{i,j+1}^L + \rho_{i,j+1}^R \\ u_{i,j+1}^L + u_{i,j+1}^R \\ T_{i,j+1}^L + T_{i,j+1}^R \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$u < 0$  の場合は (5.1) および (5.2) の後退差分商を前進差分商でおきかえる。

前節の解析から (5.1)~(5.2) の差分法は  $\Delta X$  が十分小さければその精度は境界の適当な近傍を除いては, (3.18), (3.18)' の差分法とほぼ同じであり, 安定条件はを固定して  $\Delta X \rightarrow 0$  とした場合でも  $\Delta X$  を固定して  $Re \rightarrow$  小とした場合 (§ 3 の差分法ではこのような場合は安定条件は放物的な条件に支配された。)でも双曲的な条件と同程度にとどまることが予想される。

方程式 (5.1) に Small perturbation を導入し V. Neumann の誤差解析を行なうと  $u \geq 0$  の場合  $1-e^{-i\theta} = A, i \sin \theta = B, \frac{\Delta t}{\Delta X} = \lambda, \frac{4\lambda}{3 Re \rho \Delta X} = \beta, \alpha \beta (1-e^{-i\theta}) = C, \beta \{2(\cos \theta - 1) + \alpha(1-e^{-i\theta})\} = D$  とおけば

$u < 0$  では  $e^{i\theta} - 1 = A$  とおけば (5.4) と同じになる。また,  $\alpha \beta (e^{i\theta} - 1) = C$  を (5.4) に代入すれば (5.2) に対する Small perturbation に関する線形化方程式となる。(5.4)において  $1-\lambda u A = F$  とおき,  $\tau$  を (5.4) の行列の固有値とすると (5.4) の行列の固有値は

$$\tau_1 = F + D / 1 + C \quad (5.5)$$

$$\tau_{2,3} = \frac{1}{1+\gamma C} \left[ F + \frac{\gamma}{2} (FC + D) \pm \left\{ \frac{\gamma^2}{4} (FC - D)^2 + (1+\gamma C)\lambda^2 + B^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5.6)$$

与えられる。 $\alpha=0$  とすると (5.1), (5.2) および平均法 (5.3) の差分法は (3.18) および (3.18)' の差分法に一致するが, (5.5), (5.6) において  $\alpha=0$  とすると (5.5) および (5.6) はそれぞれ (3.21) および (3.22) と一致する。

表 5.1 a~c は表 3.3 と同じ

	a		b		c	
	$\alpha=0$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0$	$\alpha=0.5$
$10^7$	$0.186 \times 10^{-2}$	$0.186 \times 10^{-2}$	$0.187 \times 10^{-2}$	$0.187 \times 10^{-2}$	—	—
$10^6$	$0.187 \times 10^{-2}$	$0.187 \times 10^{-2}$	$0.197 \times 10^{-2}$	$0.200 \times 10^{-2}$	$0.150 \times 10^{-2}$	$0.150 \times 10^{-2}$
$10^5$	$0.197 \times 10^{-2}$	$0.200 \times 10^{-2}$	$0.297 \times 10^{-2}$	$0.361 \times 10^{-2}$	$0.175 \times 10^{-2}$	$0.178 \times 10^{-2}$
$10^4$	$0.297 \times 10^{-2}$	$0.361 \times 10^{-2}$	$0.496 \times 10^{-3}$	$0.920 \times 10^{-3}$	$0.422 \times 10^{-2}$	$0.566 \times 10^{-2}$
$10^3$	$0.494 \times 10^{-3}$	$0.922 \times 10^{-3}$	$0.540 \times 10^{-4}$	$0.975 \times 10^{-4}$	$0.513 \times 10^{-3}$	$0.101 \times 10^{-2}$
$10^2$	$0.531 \times 10^{-4}$	$0.105 \times 10^{-3}$	$0.534 \times 10^{-5}$	$0.107 \times 10^{-4}$	$0.531 \times 10^{-4}$	$0.106 \times 10^{-3}$
$10^1$	$0.535 \times 10^{-5}$	$0.107 \times 10^{-4}$	$0.539 \times 10^{-6}$	$0.107 \times 10^{-5}$	$0.531 \times 10^{-5}$	$0.106 \times 10^{-4}$

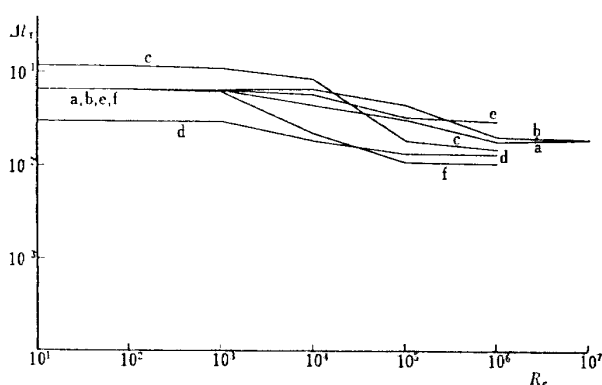


図 5.1

$\alpha=1$  とすると  $|\tau_1| \leq 1$  なるためには

$$\lambda|u|(1-\lambda|u|) + 2\beta \left( 1 + \lambda|u| \left( 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \geq 0 \quad (5.6)$$

したがって

$$\lambda|u| \leq 1 \quad (5.7)$$

が  $|\tau_1| \leq 1$  なるための条件となる。これは双曲的な条件であって放物的な条件は  $|\tau_1| \leq 1$  からはずれない。すなわち本節の初めに述べた予想のとおりである。 $|\tau_{2,3}| \leq 1$  なるための簡単な条件を (5.6) から求めることは困難である。そこで § 3 の  $\gamma\beta < a$  の場合と同様に  $\rho, u, T, \Delta X$  を適当に定めて  $Re$  に対する  $\Delta t_r$  を計算機により求める。 $(\Delta t_r$  は § 3 と同様に  $|\tau_{2,3}| \leq 1$  ならしめる  $\Delta t$  の上限の値である)。結果は図 5.1 表 5.1 のとおりである。(図 5.1 は  $\alpha=1$  の場合の  $\Delta t_r$  を示し、表 5.1 は  $\alpha=0.05$  の場合の  $\Delta t_r$  を示す)。

この計算結果から次の結論が導びかれる。

i)  $\gamma\beta \gg a$  の場合

a)  $\alpha=1$  の場合

$\Delta t_r$  はほとんど  $u$  にのみ依存し  $Re$  および  $\rho$  に依存せず放物的な条件はない。

b)  $\alpha=0.5$  の場合

$\Delta t_r$  はほとんど  $\alpha=0$  の場合の 2 倍、すなわち

(3.18) の安定条件の 2 倍であって

$$\Delta t \leq 2 \Delta X \left/ \left( |u| + \frac{8\lambda}{3 Re \rho \Delta X} \right) \right. \quad (5.8)$$

である。これは § 4 の (4.9) より予想されるところである。

ii)  $\gamma\beta \ll a$  の場合

$\alpha=0.5, 1$  に対する  $\Delta t_r$  の値は  $\alpha=0$  すなわち (3.18) の場合とほとんど同じであって無視しうるほどであるが  $\alpha=1, 0.5, 0$  の順で  $\Delta t_r$  の値は小さくなっている。いいかえると極く僅かであるが  $\alpha$  の大きい値の差分法が有利である。

iii)  $\lambda\beta$  と  $a$  が同程度の場合

i) と ii) の中間的な状況であって  $\Delta t_r$  の大きさは  $\alpha=1, 0.5, 0$  の順であるが  $\gamma\beta \rightarrow$  小にしたがって状況は ii)  $\rightarrow$  i) となる。

以上は (5.1) の差分法についての安定性の解析であるが (5.2) に関しても全く同じ結論が得られる。このことから平均法の安定性についても i), ii) および iii) の結論が該当することがわかる。

次の表 5.2 は (5.1)~(5.3) の差分法すなわち平均法を数値実験 A に適用し、安定性に関する計算を行った結果である。 $(\Delta X=0.01$  とした)

表 5.2 で不安定というのは  $\alpha=0, 0.5$  の場合は  $Re=10$  の時は 2,000 時間 step,  $Re=10^2$  の時は 1,000 時間 step,  $Re=10^3$  の時は 300 時間 step までに overflow が生ずるかまたは  $\rho, T$  の値が負になるかすることをいう。 $\alpha=1$  の場合は  $Re$  の値に関係なく 400 時間 step, までをとった。 $Re=10^4, 10^5, 10^6$  の結果は表にはないがこの場合の結果は  $\alpha$  に関係せず  $\alpha=0, 0.5, 1.0$  ともに同じであった (表 3.4 参照)。このことは安定性の解析からも予想できることである。表 (4.2) の  $Re=10, \alpha=1$  の場合に安定な  $\Delta t$  と不安定な  $\Delta t$  の間に大きな跳びがあるのはそ

表 5.2

Re	$\alpha$	安 定		不 安 定		
		$\Delta t$	$\max  \tau $	$\Delta t$	$\max  \tau $	不安定となった step 数
10	0	0.0000053125	1.0	0.00000546875	1.04	477
10	0.5	0.00001075	1.003→1.0	0.000010875	1.015→1.013	1366
10	1.0	0.01	1.0→1.002→1.0	0.0235	1.1	81
10 <sup>2</sup>	0	0.00005375	1.006→1.0	0.0000546875	1.04	350
10 <sup>2</sup>	0.5	0.0001110	1.026→1.0	0.00011125	1.04	488
10 <sup>2</sup>	1.0	0.00775	1.0→1.003→1.0	0.007875	1.01→1.5	43
10 <sup>3</sup>	0	0.00055	1.05→1.04	0.0005625	1.14	157
10 <sup>3</sup>	0.5	0.0012	1.1→1.0	0.0013	1.19	124
10 <sup>3</sup>	1.0	0.004375	1.04→1.0→ 1.03→1.0	0.0045	1.4	8

の間の  $\Delta t$  で計算した解は不安定ではないが実際にあるべき解と得られた解との間に大きな相異が生じたことによる。

この数値実験により  $\gamma\beta \geq a$  ( $\gamma\beta \geq a$  となる  $Re$  の値は  $\Delta X=0.01$  とすると  $Re \geq$  約 6,700 である)。において  $\alpha=0.5$  の場合は  $\alpha=0$  の場合、すなわち (3.18) の差分法に対して安定条件に関して2倍の有利さがあることがわかる。また  $\alpha=1$  の場合は放物的な安定条件は理論的な解析から予想されたように脱落しているようである。この場合の安定条件における有利さは  $\alpha=0.5, 0$  の場合に比較して  $Re=10$  の時 1,000~2,000 倍,  $Re=10^2$  の時 70 倍~150 倍,  $Re=10^3$  の時 4 倍~8 倍に及ぶ(二次元以上の問題においてこの有利さのものは明らかであろう)。

次に (5.1)~(5.3) の差分法と (3.18) の差分法の

比較を数値実験Aにより示す。

図 5.2a~b は  $Re=10^7$  の場合の  $t=0.2$  における密度および速度分布をそれぞれ示したものである。図中Aは (3.18) による解, Bは (5.1)~(5.3) による解であって両者共に  $\Delta X=0.01, \Delta t=0.001$  とおいて計算を行なった。この場合両者の精度の差は無視できる。これは N-S 方程式の形(2階の項)を見れば明らかである。図 5.3a~b は  $Re=10^3$  の場合の  $t=0.2$  における密度および速度分布をそれぞれ示したものである。図中 A は  $\alpha=1.0, \Delta X=0.01, \Delta t=0.001$ , B は  $\alpha=0.5, \Delta X=0.01, \Delta t=0.001$ , C は  $\alpha=0.5, \Delta X=0.005, \Delta t=0.0005$ , D は  $\alpha=1.0, \Delta X=0.005, \Delta t=0.0005$  として計算したものである。 $\alpha$  の相異による解の精度の差はわずかであるが  $\alpha=0.5$  の方が  $\alpha=1.0$  の場合より良くなっている。

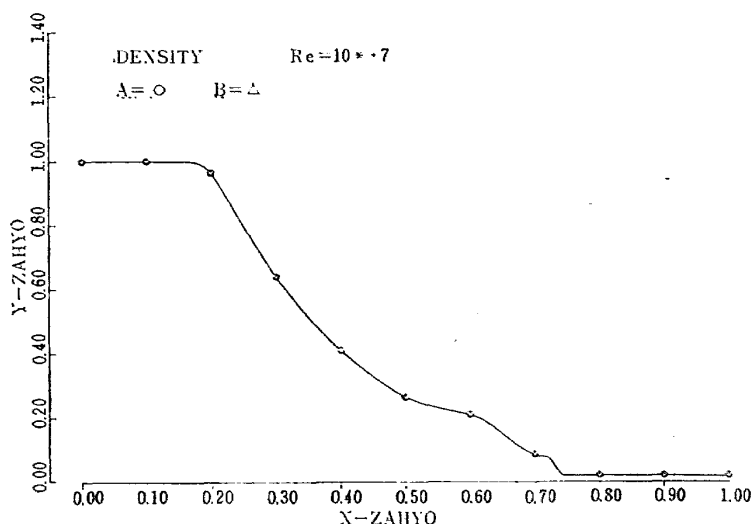


図 5.2 (a)

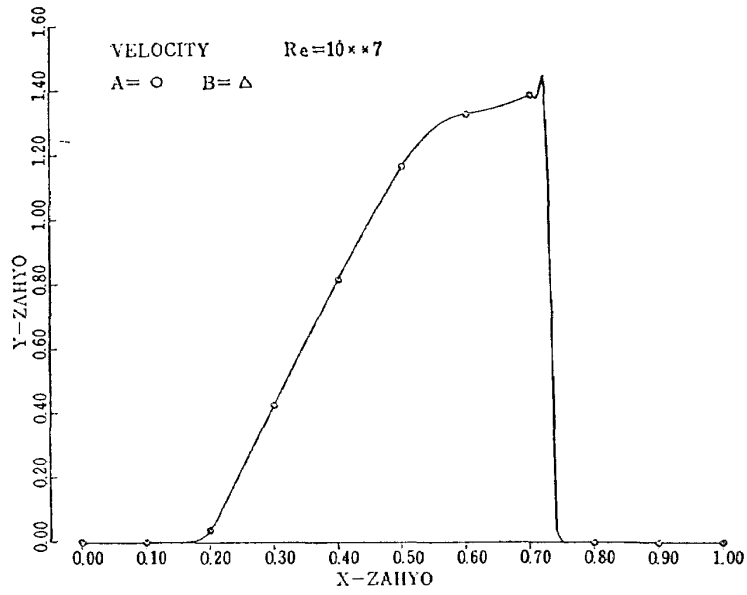


図 5.2 (b)

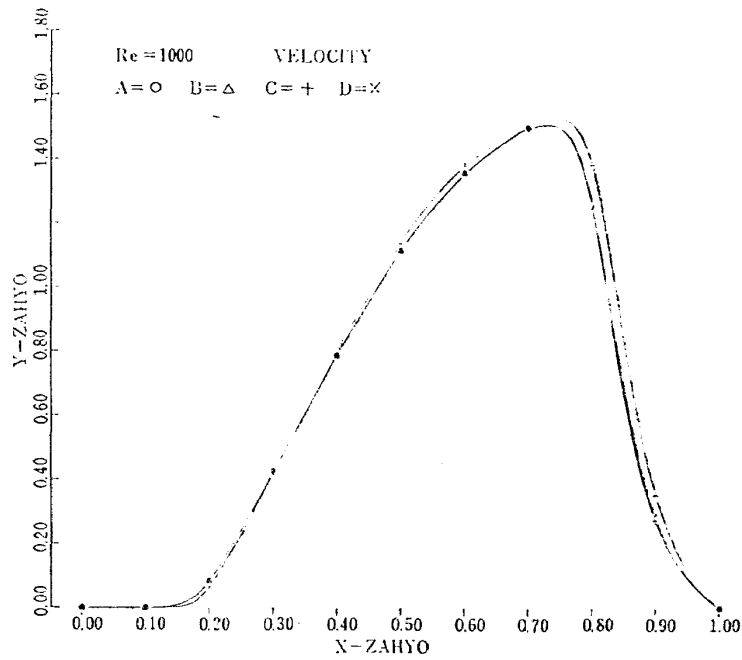


図 5.3 (a)

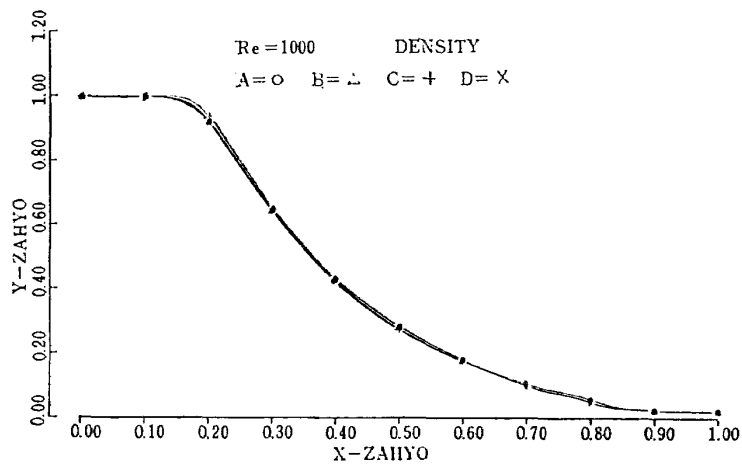


図 5.3 (b)



## 6. 結 言

## 文 献

N-S 方程式に対してこれまでいくつかの差分法が構成され、具体的な問題が解かれてきたがその歴史は浅く実際計算の例も少ない。またそれらの差分法の安定性についても十分に解析され、実際問題にあたって十分に吟味されてきたとはいえない。本報告は N-S 方程式に対するいくつかの差分法を新たに構成し、その安定性の解析を V. Neumann の方法にしたがって行ない、その結果を数値実験（対象が非線形の場合にはこれは必須である。）により吟味しなおした。その結果を簡単にとりまとめる。

i) N-S 方程式に差分法を適用した場合、 $\Delta X$  を固定して生じた差分方程式は  $\frac{4\gamma\lambda}{3Re\Delta X}$  の大小により ( $|u|+a$  または  $a$  と比較して) により双曲的または放物的な性質を示す。

ii) (3.2), (3.18) および (5.1)~(5.3) (ただし  $0 \leq \alpha \leq \delta < 1$ ) の差分法において  $\Delta X \rightarrow 0$  とすれば常に放物的な安定条件が支配的となる。

iii)  $\Delta X$  を有限に固定した場合(3.2) の差分法は任意のレイノルズ数の場合に適用ができないが、(3.18) および (5.1)~(5.3) の差分法は任意のレイノルズ数の場合に適用できる。

iv) (5.1)~(5.3) の差分法において  $\alpha=0.5$  とすると、 $\gamma\beta \gg a$  ならばその安定条件は (3.18) の差分法の安定条件の 2 倍の有利さをもつ。

v) (3.18) および (5.1)~(5.3) の差分法の安定条件は  $\gamma\beta \ll a$  の場合ほとんど等しい。

vi) (5.1)~(5.3) において  $\alpha=1$  とした差分法においては放物的な安定条件はなくなり、その安定条件は  $\frac{\Delta t}{\Delta X} \leq \text{const}$  で与えられるものと思われる。

本報告においては N-S 方程式に対する四つの差分法を構成し、これらの差分法に対し安定性の解析と数値実験を行なった。その結果、N-S 方程式の実際問題に対する差分法の適用のための出発点は固まったものとする。なお、ここで取りあげた差分法とこれまでに N-S 方程式に対して構成されてきた差分法との比較検討および (5.1)~(5.3) の差分法のいくつかの変形については稿を改ためて論ずることとする。

- 1) J. Fromm; Methods in Computational Physics, vol. 3, pp. 346~382, 1964. Academic Press
- 2) R.D. Richtmeyer; Difference Methods for Initial Value Problems, 2nd Edition 1967, John Wiley & Sons
- 3) L. Crocco; A Suggestion for the Numerical Solution of the Steady Navier-Stokes Equations, AIAA J., vol. 3, pp. 1824~1832, 1965
- 4) A.I. Tolstykh; Numerical Computation of the Supersonic Flow of a Viscous Gas round a Blunt Body, U.S.S.R. Compt, Math and Math, Phys, vol. 6, pp. 160~169, 1966
- 5) I. Yu. Brailouskaya; A Difference Scheme for Numerical Solution of the Two-dimensional, Non-steady Navier-Stokes Equations for a Compressible Gas, Soviet. Phys. Doklady vol. 10, No. 2 pp. 107~110, 1965
- 6) T.S. Shao; Numerical Solution of Plane Viscous Shock Reflections, Report No. 190, Dept of Computer Science U. of Illinois, 1965
- 7) M. Scala & P. Gordon; Reflection of a Shock Wave at a Surface, The Phys. of Fluid, pp. 1158~1166, 1966
- 8) M. Scala & P. Gordon; Solution of the Time Dependent Navier-Stokes Equations for the Flow around the Circular Cylinder, AIAA paper No. 67-221, 1967
- 9) L.F. Fillar & H.F. Ludloff; Stability Analysis and Integration of the Viscous Equation of Motion, Math of Compt. vol. 15, pp. 261~274, 1961
- 10) J. Gary; On Certain Finite Difference Equations of Hydrodynamics, N.Y.O. 9188, 1964
- 11) J. Gary; On Certain Difference Schemes for Hyperbolic Systems, Math. of Compt. vol. 18 pp. 1~18, 1964
- 12) F.L. Rubin & S.Z. Burstein; Difference Method for the Inviscid and Viscous Equations of a Compressible Gas, J. of the Compt. Phys. vol. 2, pp. 178~196, 1967
- 13) H.U. Thommen; Numerical Integration of Navier-Stokes Equations Z.A.M.P. vol. 17, pp. 369~384, 1966
- 14) J. Turner & B. Wendroff; An Unconditionally Stable Implicit Difference Scheme for the Hydrodynamical Equations LA 3007, 1964

TR-164	熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路 Investigation of the Streamwise Heat Conduction Effect on the Transient Aerodynamic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method	1968年10月	小川 敏一
TR-165	有限要素法による箱型梁の解析 Applications of the Finite Element Method to Box Beams	1968年11月	三本木茂夫
TR-166	DPF バルブを用いたジンバルエンジン駆動用油圧制御系の基礎的解析 Fundamental Analyses of Gimbal-Engine Positioning Hydraulic Control System Made Use of DPF Servovalves	1968年11月	畑山茂樹, 興石 肇
TR-167	アブレーションによるよどみ点空力加熱の減少の測定 Measurements of Heat Transfer Reduction by Ablation at Stagnation Region	1968年12月	野村茂昭
TR-168	角度測定周波数測定併用のトラッキングシステムの計算処理に関する研究 On the Orbit Determination Procedures for the Doppler Frequency Measurement with Angular Measurement Tracking System	1968年11月	鳥海良三, 松本一夫 樋口一雄, 戸川隼人 木村武雄
TR-169	VTOL 機操縦研究設備 Design and Construction of VTOL Flight Simulator System	1968年12月	樋口一雄, 百名盛之 三好範子, 岡部正典 山本六郎, 川原弘靖
TR-170	STOL 機の縦の自動安定制御方式に関する研究 (I) 姿勢制御方式の解析 System Studies on Automatic Longitudinal Stabilization Control Systems for STOL Aircraft Part 1 Automatic Attitude Control Systems	1968年12月	堀川勇壯, 森 幹彦
TR-171 T	Simple Flow Characteristics Across a Strong Shock Wave	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-172	高速における円錐体および三角翼の動安定微係数の測定 Measurement of Dynamic Stability Derivatives of Cones and Delta-Wings at High Speed	1969年2月	柳沢三憲
TR-173 T	Coupling Effect of Radiative Heat on Convective Heat Transfer	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa

---

## 航空宇宙技術研究所報告174号

昭和44年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2~27~12

---

