

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-176

軸流回転機の翼の振動について

(I) 固有振動数, 振動形および振動応力分布

宮地敏雄・星谷昌二・祖父江靖
網千三郎・岩部柱相・武田克己

1969 年 7 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|--------|---|-----------|--|
| TR-155 | 遷音速における Control-Surface Buzz に関する研究
An Investigation on Control-Surface Buzz at Transonic Speeds | 1968年 5 月 | 中 村 泰 治 |
| TR-156 | 二次元湾曲ジェットの相似構造と乱流混合におよぼす曲率の研究
Effects of Curvature on the Similar Structure and Turbulent Mixing of Two-dimensional Curved Jets | 1968年 5 月 | 遠 藤 浩 |
| TR-157 | 電子線密度測定法による低密度極超音速流の実験的研究
Experimental Study of Low Density Hypersonic Flow Using Electron-Beam Densitometry | 1968年 6 月 | 和 田 勇, 曾 我 国 男 |
| TR-158 | 局所凸線形位相空間内の非線形初期値問題に対する近似について
On Approximations for Nonlinear Cauchy Problems in Locally Convex Spaces | 1968年 6 月 | 小 島 清 史 |
| TR-159 | T型結合板の振動
The Vibration of T-Shape Plates Structure | 1968年 7 月 | 埴 武 敏, 築地恒夫,
越 出 慎 一 |
| TR-160 | 梁, 板結合構造物の振動 (II)
On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (II) | 1968年 8 月 | 埴 武 敏, 築 地 恒 夫
多 田 保 夫, 越 出 慎 一
林 洋 一, 日 下 和 夫 |
| TR-161 | 宇宙飛しょう体の直接式最適誘導法
The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle | 1968年 8 月 | 新 田 慶 治, 松 島 弘 一
大 坪 孔 治, 志 甫 徹 |
| TR-162 | よどみ点領域での非定常空力加熱の測定
Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region | 1968年 9 月 | 野 村 茂 昭 |
| TR-163 | 双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関する考察
Investigatin on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane | 1968年 9 月 | 別 府 護 郎 |
| TR-164 | 熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路
Investigation of the Streamwise Heat Conduction Effect on the Transient Aerodynamic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method | 1968年10月 | 小 川 鉰 一 |
| TR-165 | 有限要素法による箱型梁の解析
Applications of the Finite Element Method to Box Beams | 1968年11月 | 三 本 木 茂 夫 |
| TR-166 | DPF バルブ を用いたジンバルエンジン駆動用油圧制御系の基礎的解析
Fundamental Analyses of Gimbal-Engine Positioning Hydraulic Control System Made Use of DPF Servovalve | 1968年11月 | 畑 山 茂 樹, 興 石 肇 |
| TR-167 | アブレーションによる空力加熱の減少の測定
Measurements of Heat Transfer Reduction by Ablation | 1968年11月 | 野 村 茂 昭 |
| TR-168 | 角度測定・ドップラ周波数測定併用のトラッキング方式の計算処理に関する研究
On the Orbit Determination Procedures for the Doppler Frequency Measurement with Angular Measurement Tracking System | 1968年11月 | 鳥 海 良 三, 松 本 一 夫
樋 口 一 雄, 戸 川 隼 人
木 村 武 雄 |

軸流回転機の翼の振動について*

(I) 固有振動数, 振動形および振動応力分布

宮地敏雄**・星谷昌二**・祖父江靖**
網干三郎**・岩部柱相**・武田克己**

On the Vibration of Axial-flow Turbomachine Blades

(I) Natural Frequency, Mode and Vibratory Stress Distribution

By Toshio MIYACHI, Shoji HOSHIYA, Yasushi SOFUE,
Saburo AMIHOSHI, Tadasuke IWABU and
Katsumi TAKEDA

Calculations of natural frequencies, mode and vibratory stress distributions of axial-flow turbomachine blades considering several root conditions, shear deflection and rotary inertia of the blade, and the effect of centrifugal force on the bending and torsional vibration are carried out by the transfer matrix method.

Calculated results of the natural frequency of a low aspect ratio turbine blade and a high aspect-ratio compressor blade show that the root condition, shear deflection and rotary inertia of the blade have considerable effect on the natural frequencies. Theoretical results also show that large changes appear in the lower mode natural bending frequencies and vibratory stress distributions of the high aspect-ratio compressor blade. However the effect of centrifugal force on the natural torsional frequency is not so significant as on the natural bending frequency.

For most cases, including the pin-fixed rotor blade, theoretical values of natural frequency agree well with experimental values when proper root condition, shear deflection and rotary inertia of the blade are taken into the calculation.

1. ま え が き

最近の軸流回転機は一方では航空エンジン用軸流圧縮機およびタービンのような極度の高速, 軽量化を要求され, また一方では大型バイパスジェットエンジンのフロントファンあるいは発電用蒸気タービンの低圧段のような非常な大型化を要求されている。このような要求を満足させるために, その空力設計においては厚さが薄く, 縦横比が大きい翼を採用しなければならなくなり, 振動応力による破損の可能性が高くなる。

振動応力による破損を未然に防止するためには, 設計に際して基本的な空力設計が一段落した時期から翼の弾性体としての振動特性の検討, 空力弾性的な面の

検討などを行ない, 常用回転速度において前後に置かれた翼列の干渉による加振力との共振, フラッタあるいは旋回失速などによって翼に危険な振動応力が発生しないことを理論的あるいは実験的な方法で確認しておくことが望ましい。現在はまだ実機の運転に先立って破損を生ずるような振動が発生しないことを理論的な方法で確実に予測することはできないが, 前後の翼列との干渉, 翼列のフラッタ, 旋回失速などの研究はかなり進歩している^{1)~3)}。これらの研究の結果を活用するためには基礎的な資料として翼の固有振動数, 固有振動形, 振動応力分布, 振動減衰率などを求めておく必要がある。特に動翼については回転中の値を求めておかなければならない。

また大きい振動応力の発生が予測される場合には翼根部の構造に工夫を加えてその部分に振動減衰作用を

* 昭和44年5月23日受付

** 原動機部

持たせるとか、隣り合う翼を翼長の中間に設けたレーシングワイヤーまたは棚、あるいは翼端のシュラウドなどによって結合して振動止めとするなどの対策を講ずることも考えなければならない。

このような軸流回転機の翼の振動については従来から多くの研究があり^{4)~8)}、また筆者らもすでにいくつかの資料を発表したが^{9)~11)}、その後さらに固有振動数と固有振動形を求めるために、曲げ振動に対する翼のせん断変形と回転慣性の影響およびねじり振動に対する遠心力の影響を考慮し、また実際の翼根部の条件に近い境界条件を与えて計算を行なった。そして長さが短い割合に曲げ剛性が高いタービン動翼 1 種と、長さが長い割合に曲げ剛性が低く、ねじれの大きい圧縮機動翼 1 種について固有振動数と固有振動形の測定を行ない、また圧縮機動翼については振動応力分布の測定と実機の運転中の振動応力の測定も行なって計算結果と比較し、計算方法の妥当性を検討したので報告する。

2. 固有振動数と固有振動形の計算法

軸流圧縮機やタービンの翼の大部分は断面形状が翼長方向に変化しているばかりでなく、ねじれて（断面主軸の向きが翼長方向に変化して）いる。また翼断面の厚さ比が小さく、そりが大きいものも多い。したが

って軸流回転機の動翼の振動は厳密には遠心力場における変厚曲面の振動として扱わなければならないと考えられるが、振動応力による破損に関係するような低次の固有振動については、はりとして扱った計算法によってかなり実際に近い結果が得られている。

従来発表されている方法には翼をねじれた変断面のはりと考えて二方向の曲げの連成振動として扱ったもの⁶⁾、レーシングワイヤで連結された翼群についてレーシングワイヤを通してねじりと曲げが連成するとしたもの⁵⁾、断面のせん断中心と重心とは一般には一致しないことを考慮して単独翼についてねじりと曲げの三重連成振動として扱ったもの⁸⁾などがある。これらのうち文献(6)を除いては翼根部の条件として剛性固定以外の場合を扱っていない。また翼のせん断変形と回転慣性についてはいずれも無視している。しかしながら長さが短い割合に曲げ剛性が大きいタービン翼などにおいてせん断変形を無視することは固有振動数をかなり高く見積ることになり、また、ねじれが大きい圧縮機動翼などにおいては回転慣性も無視できなくなることが予想される。さらに翼根部の条件は実際には剛性固定とはかなり異なる場合が多く、これによって固有振動数と振動形が変わることが考えられる。一方軸流回転機の翼型のような複雑な形の断面のねじり剛性とせん断中心位置を精度よく求めることはかなり困

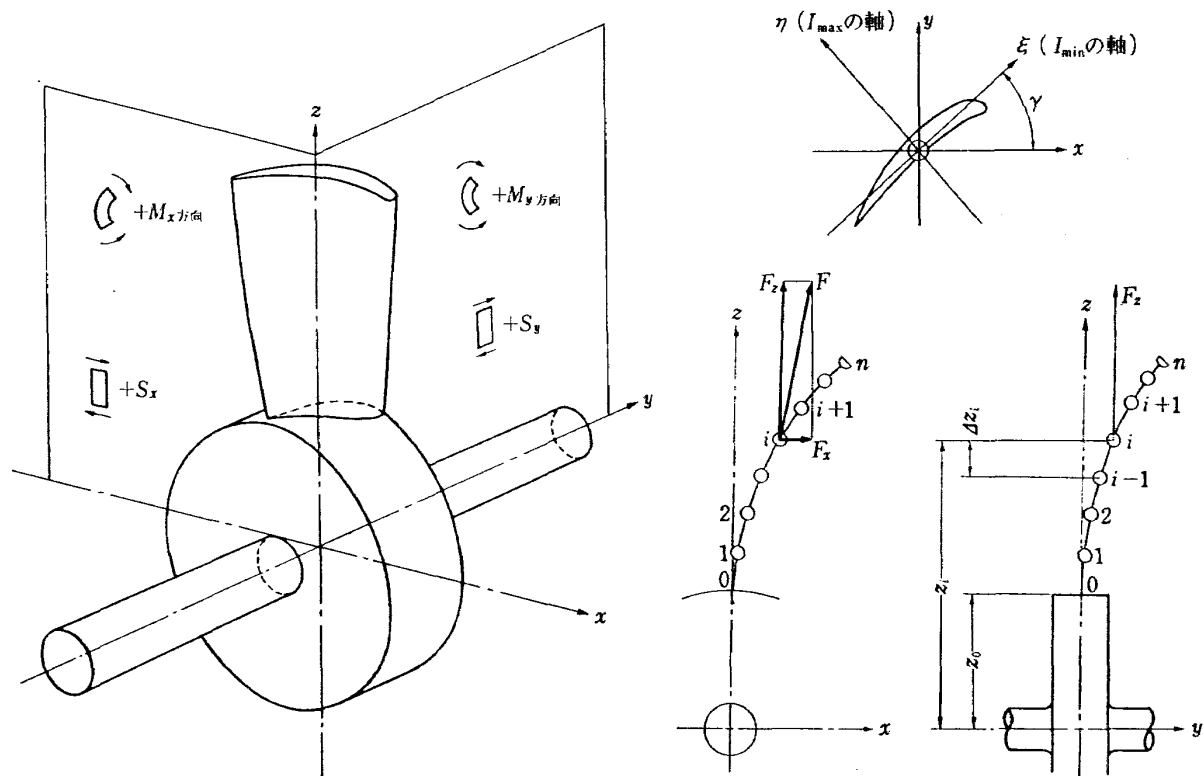


図 1 座 標 系

難であり、これらの数値のあまり精度のよくないものを用いてねじりと二方向の曲げを三重連成振動として扱うことによる計算精度の向上には多少疑問がある。

本報告では二方向の曲げについてのみ連成振動として扱い、ねじり振動は曲げ振動とは独立であるとして、それぞれに Holzer-Myklestad の方法を適用することにした。ねじり振動が独立であるとしたことはすべての翼断面において重心とせん断中心とが一致していると仮定したことに同等である。

翼根部の境界条件としては剛性固定、弾性固定、摩擦のないピンジョイント、翼車に固定されたピンと翼のピン穴とがころがり接触を保つ場合、翼車のピン穴とピンおよびピンと翼のピン穴とがそれぞれころがり接触を保つ場合などの条件を与えた。そして曲げ振動に対するせん断変形と回転慣性の影響、ねじり振動に対する遠心力の影響も考慮した。以下にその概要を述べる。

なお、本報告ではシュラウドやレーシングワイヤはないものだけを扱う。

計算に使用する記号は次の通りである。

- A ; 翼断面面積
 - E ; 翼材料の縦弾性係数
 - F_z ; 翼断面に作用する遠心力
 - G ; 翼材料のせん断弾性係数
 - I_ξ, I_η ; 翼断面の主慣性モーメント, $I_\xi \leq I_\eta$
 - J ; 翼断面のねじり剛性定数
 - k_ξ, k_η ; せん断変形に関する断面の形状係数
 - M_x, M_y ; 曲げモーメント (図1参照)
 - M_z ; z 軸まわりのねじりモーメント
 - S_x, S_y ; せん断力
- x - y - z 軸, ξ - η 軸は図1のようにとる。

γ ; 翼断面の取付角

ϕ ; z 軸まわりのねじり振動角変位

ρ ; 翼材料の密度

Ω ; 翼車の回転角速度

ω ; 振動の円振動数

Holzer-Myklestad の方法を適用するために、翼を下端から上端まで $z_0, z_1, z_2 \dots z_n$ において z 軸に垂直な $n+1$ 個の断面で切り、 $\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1}$ の n 個の区間に分割する。各区間に分布している質量は、その区間の両端に $1/2$ ずつ集中しているものとし、各区間は質量のない一様なはりと考え、その区間の A, I_ξ, I_η, J および γ はその両端の断面におけるそれぞれの値の平均値をもつものとする。

まず、 i 番目の断面の上側における状態ベクトル Y_i を次のように定義する。

$$Y_i = \begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ M_y \\ S_y \\ \dots \\ x \\ dx/dz \\ M_x \\ S_x \\ \dots \\ \phi \\ M_z \end{pmatrix}_i \quad (1)$$

すると円振動数 ω の固有振動の状態において Y_i と Y_{i+1} とは次のような関係で結びつけることができる。

$$Y_{i+1} = (M \cdot V \cdot E \cdot V^{-1})_{i+1} \cdot Y_i \quad (2)$$

ここで E_{i+1} は $i+1$ 番目の区間の剛性を表わす行列で次のようなものである。

$$E_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z & \frac{\Delta z^2}{2EI_\xi} & \frac{-\Delta z^3}{6EI_\xi} + \frac{\Delta z}{k_\eta GA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta z}{EI_\xi} & \frac{-\Delta z^2}{2EI_\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z & \frac{\Delta z^2}{2EI_\eta} & \frac{-\Delta z^3}{6EI_\eta} + \frac{\Delta z}{k_\xi GA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\Delta z}{EI_\eta} & \frac{-\Delta z^2}{2EI_\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Delta z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\Delta z}{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{i+1} \quad (3)$$

(3) 式において 1 行 4 列および 5 行 8 列の $\frac{\Delta z}{k_\gamma GA}$, $\frac{\Delta z}{k_\xi GA}$ の項はせん断変形に関するものである。

次に, V_{i+1} は座標系を翼断面の主軸 ($\xi-\eta$ 軸) を座標軸とするものから, $x-y$ 軸に平行な座標軸に変換する行列で次式の通りのものである。

$$V_{i+1} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & & & & \sin \gamma & & & \\ & \cos \gamma & & & \sin \gamma & & & \\ & & \cos \gamma & & \sin \gamma & & & \\ & & & \cos \gamma & & \sin \gamma & & \\ -\sin \gamma & & & & \cos \gamma & & & \\ & -\sin \gamma & & & & \cos \gamma & & \\ & & -\sin \gamma & & & & \cos \gamma & \\ & & & -\sin \gamma & & & & \cos \gamma \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{i+1} \quad (4)$$

また V_{i+1}^{-1} は V_{i+1} の逆の座標変換の行列で (4) 式中の $\sin \gamma$ の符号を逆転したものに等しい。

M_{i+1} は $i+1$ 番目の断面に集中した質量による慣性力などに関する行列で, 次のような形のものである。

$$M_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & M_{32} & 1 & 0 & & 0 & & \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & M_{76} & 1 & 0 \\ & & & & -m(\Omega^2 + \omega^2) & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & & M_{109} & 1 \end{pmatrix}_{i+1} \quad (5)$$

(5) 式において, m はその断面の集中質量であり, 次の式によって求めたものである。

$$m_{i+1} = \rho A_{i+1} \cdot \frac{\Delta z_{i+1} + \Delta z_{i+2}}{2} \quad (6)$$

M_{32} および M_{76} は翼の各部分が z 軸に対して傾斜したときに遠心力によって作用する復元モーメント回転慣性に関するもので次式の通りである。

$$M_{32}_{i+1} = \left(F_{z_{i+1}} - \rho I_x \omega^2 \right) \cdot \frac{\Delta z_{i+1} + \Delta z_{i+2}}{2} \quad (7)$$

$$M_{76}_{i+1} = \left(F_{z_{i+1}} - \rho I_y \omega^2 \right) \cdot \frac{\Delta z_{i+1} + \Delta z_{i+2}}{2} \quad (8)$$

なお, 8 行 5 列の $-m(\Omega^2 + \omega^2)$ の項は集中質量の x 軸方向の変位にともなって作用する遠心力の x 軸方向成分を含んだものである。

M_{109} はねじり振動角加速度による慣性モーメントと遠心力によって作用する z 軸まわりの復元モーメントに関する項で, 次のような考察から求められる。

図 2 において i 番目の断面 (この断面には i 番目と

$i+1$ 番目の区間の質量の和の $1/2$ が集中して断面上に一様に分布していると考え。) の微小部分 dA に着目する。そして遠心力による応力が断面に一様に分布していると仮定すれば, 図 2 に示した dA に作用する力の成分は次のようになる。

$$f_z = \sigma_z dA = \frac{F_z}{A} dA$$

$$f_{bu} = \frac{f_z}{\cos \left(\tan^{-1} \left(r \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u \right) \right)}$$

$$f_{\phi u} = f_{bu} \sin \left(\tan^{-1} \left(r \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u \right) \right)$$

$$= f_z r \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u$$

$$= \sigma_z r \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u dA$$

したがって i 番目の断面に上側から作用する z 軸まわりのモーメント $T_{\phi u}$ は次のようになる。

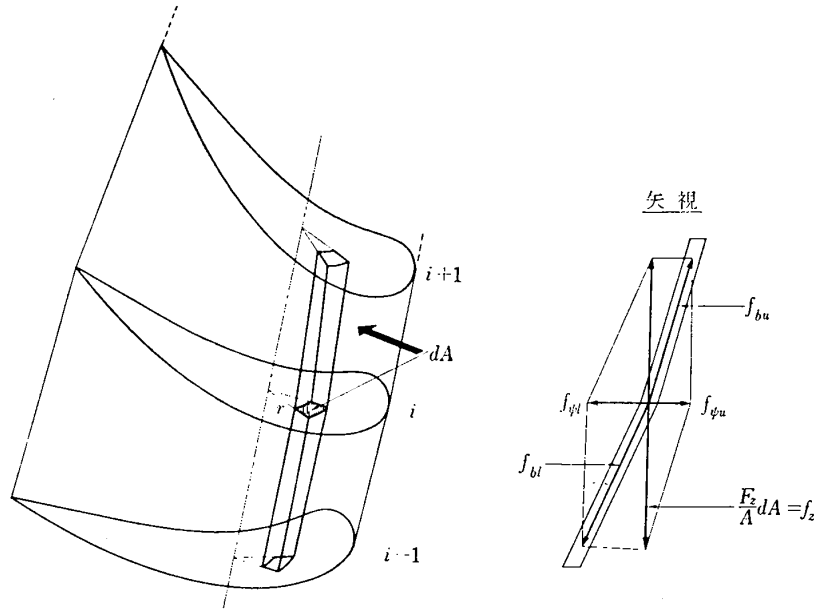


図 2 ねじり振動に対する遠心力の影響

$$\begin{aligned}
 T_{\phi u} &= \int_A \sigma_z r^2 \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u dA \\
 &= \sigma_z \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u \int_A r^2 dA \\
 &= \frac{F_z I_p}{A} \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_u
 \end{aligned}$$

ここで I_p は断面の z 軸まわりの極二次モーメントである。

同様な考察により i 番目の断面に下側から作用する z 軸まわりのモーメント $T_{\phi l}$ は次のようになる。

$$T_{\phi l} = -\frac{F_z I_p}{A} \left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \right)_l$$

したがって i 番目の断面に遠心力によって作用する z 軸まわりのモーメント T_{ϕ} は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 T_{\phi} &= T_{\phi u} + T_{\phi l} = \frac{F_z I_p}{A} \left(\left(\frac{d\gamma}{dz} \right)_u \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)_l + \left(\frac{d\phi}{dz} \right)_u - \left(\frac{d\phi}{dz} \right)_l \right)
 \end{aligned}$$

上の式において $\left(\frac{d\gamma}{dz} \right)_u - \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)_l$ の項は静的なモーメントに関するものであるから、ねじり振動角変位によって作用するモーメント $T_{\phi v}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 T_{\phi v} &= \frac{F_z I_p}{A} \left(\left(\frac{d\phi}{dz} \right)_u - \left(\frac{d\phi}{dz} \right)_l \right) \\
 &= \frac{F_z I_p}{A} \cdot \frac{T_{\phi vu} - T_{\phi vl}}{GJ}
 \end{aligned}$$

ここで $T_{\phi vu} - T_{\phi vl}$ は i 番目の断面にねじり振動角加速度を与えるモーメントで、その振幅は

$$\rho \omega^2 \phi I_p (\Delta z_i + \Delta z_{i+1}) / 2 \text{ であるから、}$$

$$T_{\phi v} = \frac{F_z I_p}{A} \cdot \frac{\rho \omega^2 \phi I_p}{GJ} \cdot \frac{\Delta z_i + \Delta z_{i+1}}{2}$$

したがって M_{109} は次のような形になる。

$$M_{109} = - \left(1 - \frac{F_z I_p}{AGJ} \right) \rho \omega^2 I_p \cdot \frac{\Delta z_i + \Delta z_{i+1}}{2} \quad (9)$$

以上のようにして E_{i+1} , M_{i+1} , V_{i+1} が求められたので Y_i が与えられれば Y_{i+1} を求めることができる。これを固定端から自由端まで順次適用して行けば固定端の Y_0 と自由端の Y_n との関係が求められる。

$$\begin{aligned}
 Y_n &= (M \cdot V \cdot E \cdot V^{-1})_n \cdots (M \cdot V \cdot E \cdot V^{-1})_1 \cdot Y_0 \\
 &= K \cdot Y_0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

次に翼根部に各種の境界条件が与えられた場合について考える。このうち (1) の剛性固定, (3) および (4) のピンジョイントの場合の取扱いとは文献 (6) と同様であるが、他の場合との関連もあるので簡単に述べる。

(1) 剛性固定の場合

この場合 (10) 式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}_n = K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \\ S_y \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ S_x \\ \cdots \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix}_0 \quad (11)$$

ここでは曲げ振動とねじり振動は非連成として扱っているので固有振動数もそれぞれ独立に二つの固有振動数方程式から求める。

曲げ振動については、

$$\begin{vmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{37} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{47} & K_{48} \\ K_{73} & K_{74} & K_{77} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{87} & K_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

ねじり振動については、

$$K_{1010} = 0 \quad (13)$$

実際の計算は ω に固有円振動数の近似値を代入して (12) 式および (13) 式の値を求め、この値が零に近づくまで試行をくり返す方法によって行なう。

次に振動形を求めるために Y_0 を求めなければならないが、それには次の方程式を解けばよい。

$$\begin{pmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{37} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{47} & K_{48} \\ K_{73} & K_{74} & K_{77} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_y \\ S_y \\ M_x \\ S_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

この方程式は斉次方程式であるから、未知数のどれか一つに任意の値を与えて他の三つを求めればよい。

またねじり振動は曲げ振動とは独立として扱っているから M_{z0} に任意の値を与えればよい。通常 S_{x0} と M_{z0} にそれぞれ単位のと単位モーメントを与えて計算する。このようにして Y_0 が求められれば (2) 式によって順次 Y_1, Y_2, \dots, Y_n が求められるが、これらの絶対値には意味はなく、相対値について考えればよい。

(2) 弾性固定の場合

翼根部 (0 番目の断面) に x および y 軸方向に単位力が作用したときの、それぞれの方向の変化を g_x, g_y , 傾斜を h_{xs}, h_{ys} とし、単位モーメントが作用したときの変位を g_{xm}, g_{ym} , 傾斜を h_x, h_y とする。また翼根部に z 軸まわりの単位モーメントが作用したときのねじれ角を h_z とすれば、(10) 式に相等する式として次の式を考えればよい。

この場合は K とその右側の翼根部の弾性に関する行列との積を K' とし、

$$Y_n = K' \cdot Y_0 \quad (16)$$

とすれば剛性固定の場合と同様にして固有振動数と振動形を求めることができる。

(3) y 軸に平行な摩擦のないピンで支持された場合

この場合は翼根部における y 軸まわりのモーメントは零となり、傾斜は零でなくなるから (10) 式は次のような形になる。

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}_n = K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \\ S_y \\ \dots \\ 0 \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix}_0 \quad (17)$$

したがって、この場合の曲げ振動に対する固有振動数方程式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{36} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{46} & K_{48} \\ K_{73} & K_{74} & K_{76} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{86} & K_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

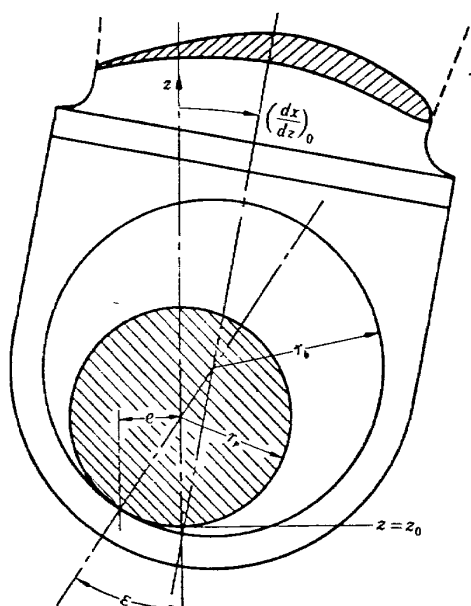
また Y_0 は次の斉次方程式から定めればよい。

$$\begin{pmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{36} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{46} & K_{48} \\ K_{73} & K_{74} & K_{76} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{86} & K_{88} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_y \\ S_y \\ dx/dz \\ S_x \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

(4) 翼車に固定された y 軸に平行なピンと翼のピン穴とがころがり接触する場合

翼車に固定された y 軸に平行なピンと翼のピン穴とが滑らずに、ころがり接触を保つと仮定すると、翼根部が微小な角 $(dx/dz)_0$ だけピンまわりに回転したと

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}_n = K \cdot \begin{pmatrix} 1 & g_{ym} & g_y & \vdots \\ & 1 & h_y & h_{ys} \\ & & 1 & \vdots \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 1 & g_{xm} & g_x \\ & & 1 & h_x & h_{xs} \\ & & & 1 & \vdots \\ & & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & h_z \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \\ S_y \\ \dots \\ 0 \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix}_0 \quad (15)$$



きの状態は図3のようになる。このとき翼根部に作用する遠心力 F_{20} による復元モーメントは eF_{20} となる。したがって、この場合の(10)式に相等するものとしては次の式を考えればよい。

(5) 翼車のピン穴とピンおよびピンと翼のピン穴とがそれぞれころがり接触を保つ場合

この場合は翼根部が x 軸方向の変位とピンまわりの回転の二つの自由度をもつことになるので、平行移動とピンまわりの回転とに分けて考える。図4(a)は翼根部が x_0 だけ平行移動した状態を示す。なお、翼車のピン穴半径 r_a と翼のピン穴半径 r_b は等しいものとする。この図において e と e' は次のようになる。

$$\varepsilon = \sin^{-1} \frac{x_0}{2(r_b - r_p)} \doteq \frac{x_0}{2(r_b - r_p)}$$

$$e \doteq \frac{r_b x_0}{2(r_b - r_p)}$$

このときに遠心力によって作用する x 軸方向の復元力とピンまわりのモーメントは、ピンに作用する遠心力を F_{zp} とするとそれぞれ次のようになる。

$$S_{x0} = F_{z0}\epsilon + \frac{F_{zp}\epsilon}{2} = \left(\frac{2F_{z0} + F_{zp}}{4(r_b - r_n)} \right) \cdot x_0$$

$$M_{x0} = F_{z0}e = \left(\frac{F_{z0}r_0}{2(r_b - r_0)} \right) \cdot x_0$$

次に図4(b)は翼根部がピンまわりに回転した状態を示す。この図において ε' と e' は次のようにな

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \hline x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \hline \phi \\ 0 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \frac{F_{z0}r_b r_p}{r_b - r_p} & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \\ S_y \\ \hline 0 \\ dx/dz \\ 0 \\ S_x \\ \hline 0 \\ M_z \end{pmatrix} \quad (20)$$

る。

$$e' \doteq \left(\frac{1}{2} + \frac{r_b}{2(r_b - r_p)} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dz} \right)_0$$

$$e' \doteq \left(\frac{r_p}{2} + \frac{r_b r_p}{2(r_b - r_p)} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dz} \right)_0$$

したがって遠心力によって作用するピンまわりの復元モーメントは次のようになる。

$$M'_{x0} = F_{z0} e' = F_{z0} \cdot \left(\frac{r_p}{2} + \frac{r_b r_p}{2(r_b - r_p)} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dz} \right)_0$$

また x 軸方向の復元力は翼車のピン穴とピンとの接点まわりのモーメントのつり合いを考えれば次のようになることがわかる。

$$S'_{x0} = \left\{ \frac{F_{z0}}{2} - F_{zp} \left(\frac{r_b}{4(r_b - r_p)} - \frac{1}{4} \right) \right\} \cdot \left(\frac{dx}{dz} \right)_0$$

以上の考察から、この場合 (10) の式に相等する式は次の通りになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}_n = \mathbf{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ R_{75} & R_{76} & 1 & & \\ R_{85} & R_{86} & & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \\ S_y \\ \cdots \\ x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ M_x \end{pmatrix}_0 \quad (20)$$

ここで、

$$R_{75} = \frac{F_{z0} r_b}{2(r_b - r_p)}$$

$$R_{76} = \frac{F_{z0}}{2} \left(r_p + \frac{r_b r_p}{r_b - r_p} \right)$$

$$R_{85} = \frac{2F_{z0} + F_{zp}}{4(r_b - r_p)}$$

$$R_{86} = \frac{F_{z0}}{2} - \frac{F_{zp}}{4} \left(\frac{r_b}{r_b - r_p} - 1 \right)$$

(20) 式中の \mathbf{K} とその右側の行列との積を \mathbf{K}' とすれば、曲げ振動に関する固有振動数方程式は

$$\begin{vmatrix} K'_{33} & K'_{34} & K'_{35} & K'_{36} \\ K'_{43} & K'_{44} & K'_{45} & K'_{46} \\ K'_{73} & K'_{74} & K'_{75} & K'_{76} \\ K'_{83} & K'_{84} & K'_{85} & K'_{86} \end{vmatrix} = 0$$

また、振動形を求めるためには次の斉次方程式から前述のものと同一方法で \mathbf{Y}_0 を定めればよい。

$$\begin{pmatrix} K'_{33} & K'_{34} & K'_{35} & K'_{36} \\ K'_{43} & K'_{44} & K'_{45} & K'_{46} \\ K'_{73} & K'_{74} & K'_{75} & K'_{76} \\ K'_{83} & K'_{84} & K'_{85} & K'_{86} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_y \\ S_y \\ x \\ dx/dz \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

3. 実験に用いた翼

実験に用いた翼は次のようなタービン動翼 1 種と圧縮機動翼 1 種である。

タービン動翼はクリスマスツリー形植込部をもつもので、その形状と要目は図 5、図 6 および表 1 に示した通りである。タービン動翼に関しては 20 枚について翼根部を取付金具に固定した状態での固有振動数と振動形の測定を行なったが、本報告には一次曲げ固有振動数が 20 枚の平均値に最も近い 1 枚についての代表的な結果を示す。表 1 と図 6 に示した断面の要目はこの代表的な翼の寸法を断面投影機 (倍率 10) によって測定した結果から求めたものである。

圧縮機動翼はピンジョイント形翼根部をもつもので、形状と要目は図 7、図 8 および表 2 に示した通り

である。圧縮機動翼に関しては 1 枚について回転していないときの、翼根部を取付金具に固定した状態での固有振動数、振動形および振動応力分布の測定を行なった。実機ではこの圧縮機動翼はピンジョイント形翼根部によって翼車に取り付けられており、翼のピン穴直径とピン直径はそれぞれ 20.0 mm, 19.6 mm であり、かなり大きいすきまをもたせてあるが、翼車のピン穴とピンは H_7/f_7 程度のはめあいとしてある。したがって実機におけるこの圧縮機動翼翼根部の状態は前章に述べた、翼車に固定されたピンと翼のピン穴とがころがり接触する場合に近いと考えられる。それにもかかわらず、回転していないときの固有振動数、振動形、振動応力分布などの測定を翼根部を取付金具に固定した状態で行なった理由は、ピンジョイント形翼根部をもつ動翼の振動特性が回転していない状態と常用回転速度では大幅に異なったものとなり、むしろ翼根部固定の条件のものに近づくことが予測されたからである。これについては後にも述べる。

圧縮機動翼は翼弦長が大きいために断面投影機によ

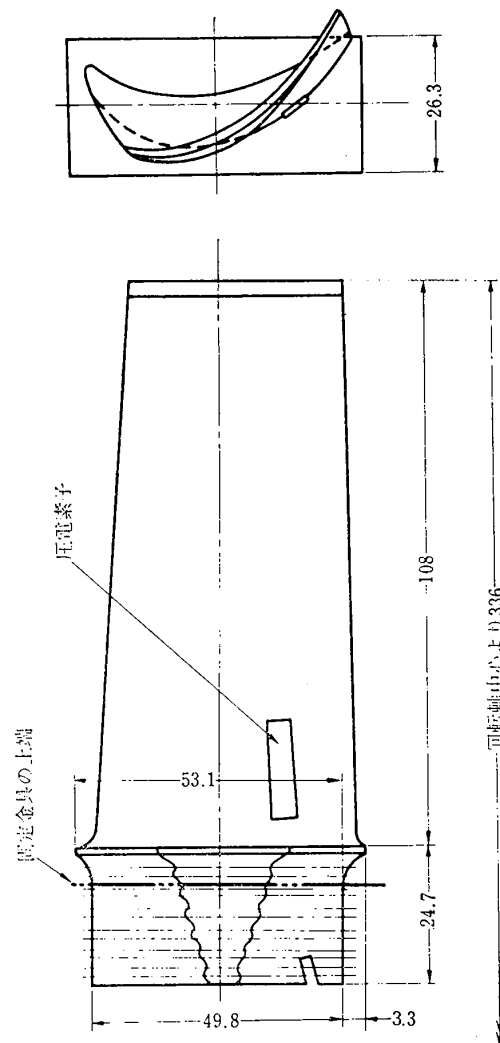


図 5 タービン動翼

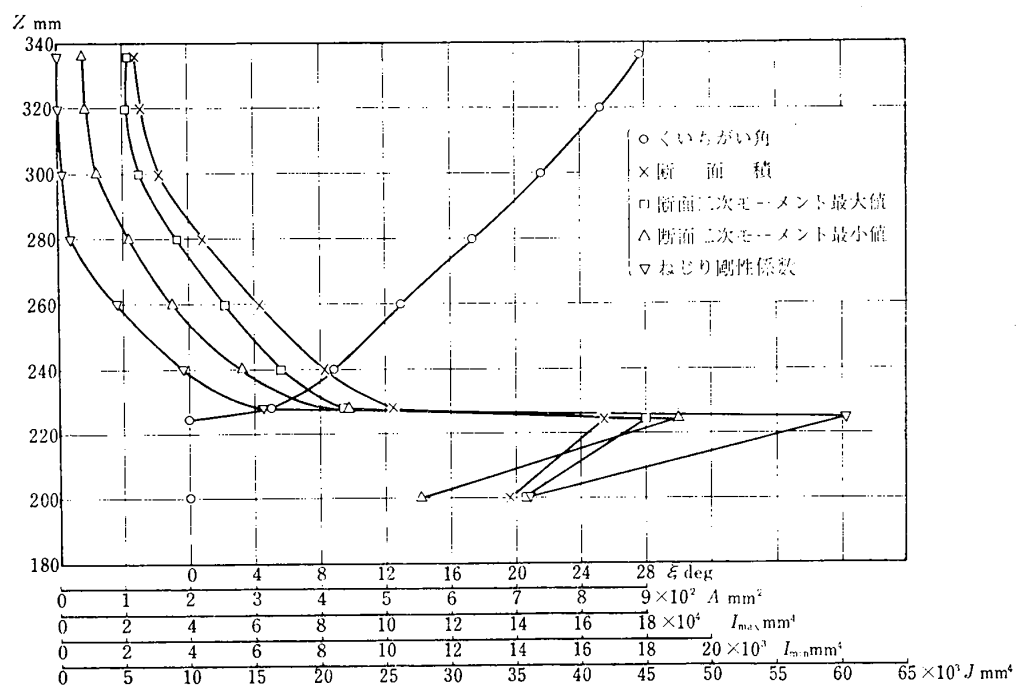


図 6 タービン動翼断面の要目

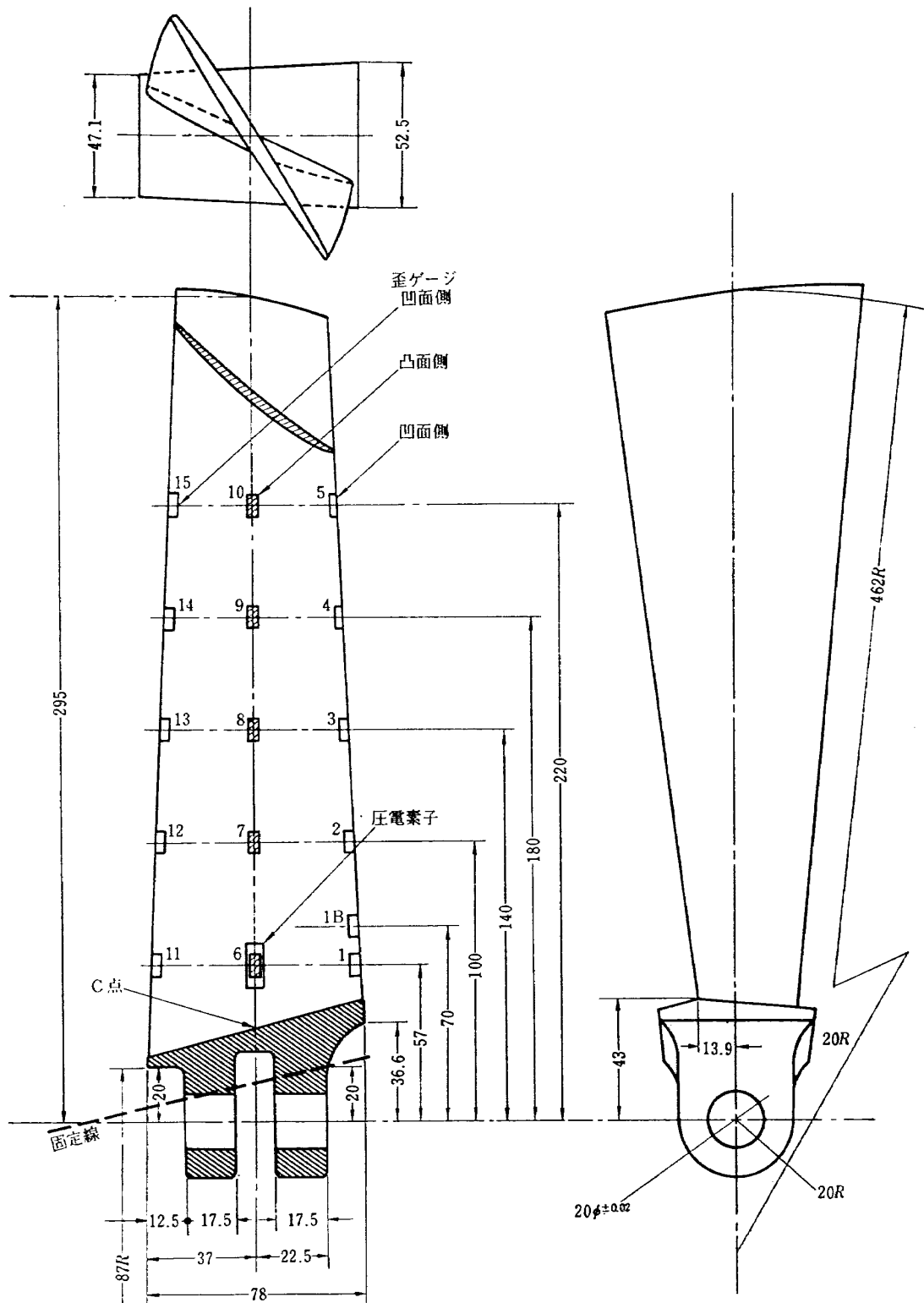


図7 圧縮機動翼

表 1 タービン動翼の要目

z (mm)	ξ (deg)	A (mm ²)	I_{\max} (mm ⁴)	I_{\min} (mm ⁴)	J (mm ⁴)
220.6	0.0	692	143,000	11,100	36,900
224.4	0.0	838	180,000	19,000	60,600
228.0	5.0	512	87,500	8,900	16,000
240	8.8	407	68,000	5,600	9,230
260	13.0	309	51,100	3,560	4,070
280	17.4	223	36,800	2,200	1,590
300	21.6	156	25,000	1,210	540
320	25.3	128	21,000	880	310
336	27.7	120	22,000	790	290

比重=8.03, $E=22,400 \text{ kg/mm}^2$, $G=8,700 \text{ kg/mm}^2$

表 2 圧縮機動翼の要目

z (mm)	ξ (deg)	A (mm ²)	I_{\max} (mm ⁴)	I_{\min} (mm ⁴)	J (mm ⁴)
157	0.0	700	191,500	163,300	195,600
182	0.0	1,400	383,000	195,000	223,500
200	26.8	493	185,600	3,443	12,370
227	30.9	411	164,700	1,795	6,880
267	38.3	332	149,200	765	3,380
307	44.2	287	141,000	416	2,080
347	48.4	267	142,400	298	1,570
387	52.1	269	155,900	283	1,480
427	56.6	277	171,200	249	1,460
462	61.2	281	185,500	203	1,415

比重=4.50, $E=11,900 \text{ kg/mm}^2$, $G=4,500 \text{ kg/mm}^2$, ピン穴直径=20.0 mm,
ピン直径=19.6 mm

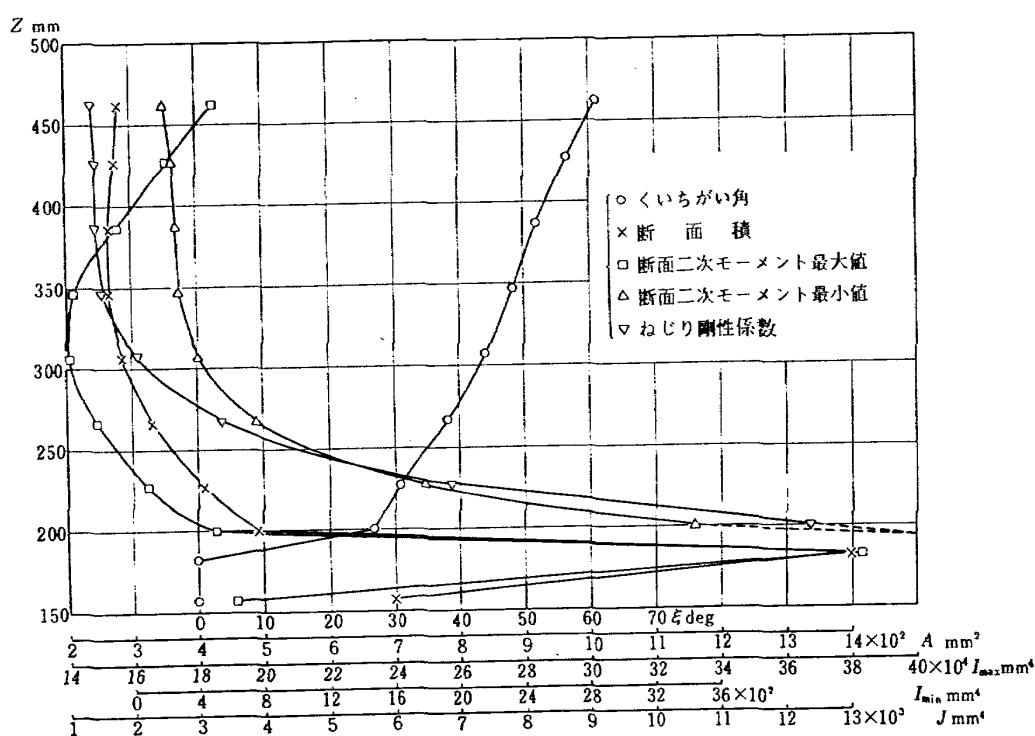


図 8 圧縮機動翼断面の要目

る測定ができなかったので、断面の要目は製作図面の寸法から求めた。

なお、翼断面のねじり剛性定数を求める計算方法には問題があるので、これについて付録に記しておいた。

4. 試験装置と試験方法

加振装置としてはタービン動翼には固有振動数約 5 kc/s の圧電型加振機を用いた。また圧縮機動翼を取付金具に固定した場合には固有振動数約 2 kc/s の動電型加振機を用いた。

固有振動数の測定を行なう場合の振動の検出はタービン動翼も圧縮機動翼もともに翼表面の根元に近い背側 (図 5 および図 7 参照) に接着した長さ 20 mm, 幅 5 mm, 厚さ 0.25 mm のチタン酸バリウム磁器圧電素子から発生する電圧を測定することによって行なった。

固有振動数は加振周波数を連続的に変化させたとき翼表面に接着した圧電素子の出力が極大になる加振周波数に等しいとする。なお、加振周波数を変化させたとき圧電型加振機では振幅はほぼ一定、動電型加振機では加速度はほぼ一定で加振している。次に固有振動数で加振しながら振動形の測定を行なった。振動形の測定は振動ピックアップの針先を翼の表面に接触させ、ピックアップの出力が極小になり位相が反転する点をいくつか求め、それらの点をつらねた線をノードラインとして記録する方法で行なった。振動形の測定は各点の振幅を二方向の成分に分けて定量的に求めることがのぞましいが、針先を接触させる形式のピックアップでは針先を当てる面がその面に垂直に振動している場合以外は正確な振幅を測定することができない。ところが軸流回転機の翼のようにねじれがあり、断面のそりが大きいものでは振動の向きがその表面に垂直である場合は少ない。また振動ピックアップの針先を翼に接触させることによって振動の状態が変化することは多かれ少なかれ避けられない場合が多い。これらの理由で振動形の定量的な測定は困難であったので上述のような定性的な測定だけに止めた。振動形の測定に使用したピックアップは圧電型加速度ピックアップ、ステレオレコード再生用ピックアップを改造したものなどである。

圧縮機動翼については翼根部を固定した場合の振動応力分布の測定も行なった。この測定の主な目的は運転中に翼の各部分に生じている振動応力の最大値を実機の翼の代表的な位置に接着した歪ゲージによって測定される振動応力から推定できるようにするためであ

る。すなわち運転中の振動応力を 1 枚の翼の多くの点について測定することは多数の歪ゲージを翼面に取り付けることの空気力学的な影響などの点から困難なので、翼根部を固定した状態でそれぞれの固有振動形の振動応力分布を測定して、代表的な位置の振動応力に対する最大振動応力の比を求めておき、運転中は代表的な位置だけの振動応力の振幅と周波数を測定すれば振動応力の最大値を推定できるようにしようとしたわけである。この測定のために図 7 に示した位置にゲージ長 5 mm の歪ゲージを 21 枚接着し、直径 0.29 mm のエナメル絶縁線を翼面に接着して翼根部まで配線した。この場合の加振方法は固有振動数測定の場合と同じであるが、固有振動数は後述するように歪ゲージ、電線、接着剤などが翼面に取り付けられたことによって、圧電素子 1 枚だけが取り付けられた場合とは変わっている。そこで振動応力分布の測定はその状態における固有振動数において行なった。このように振動応力分布を測定した振動数と前述の固有振動数は、わずかながら異なるが、ノードラインの測定を両方の場合について行なった結果にほとんど差を認められないことから、振動応力分布にも大きい差はないと考えられる。また翼根部の条件が実機と振動応力分布測定の場合と異なること、翼が回転していない場合と常用回転速度では固有振動数も振動形も変わることなどが問題であるが、これについては各種の場合の計算値を参考にして実際の値を推定することにした。

圧縮機動翼の運転中の振動応力測定と周波数分析は系統図を図 9 に示した通りの装置によって行なった。運転中の振動応力は音声による回転速度などの情報とともに一旦 7 チャンネルのデータレコーダに記録した後、再生して分析を行なう部分を分析用テープレコーダに記録し直し、そのテープを 1 周 2 秒程度の長さのエンドレステープとして連続再生し、これをレベルレコーダとそれに連動する周波数分析器によって分析する。この装置によって得られる分析周波数の精度は周波数が正確に知られた正弦波、く形波について同じ方法で予備試験を行なった結果から、最も悪い場合でも $\pm 5\%$ 以内であると推定している。

スリップリングはコインシルバ製円板と銀グラファイト刷子を用いた 12 素子の平面型 (face type) のものである。

歪ゲージはゲージ長 5 mm のものを図 7 の 1 または 1B の位置に 1 枚ずつ 12 枚の翼に接着しておき、6 枚をスリップリングを通して歪計に接続し、他の 6 枚は予備とした。

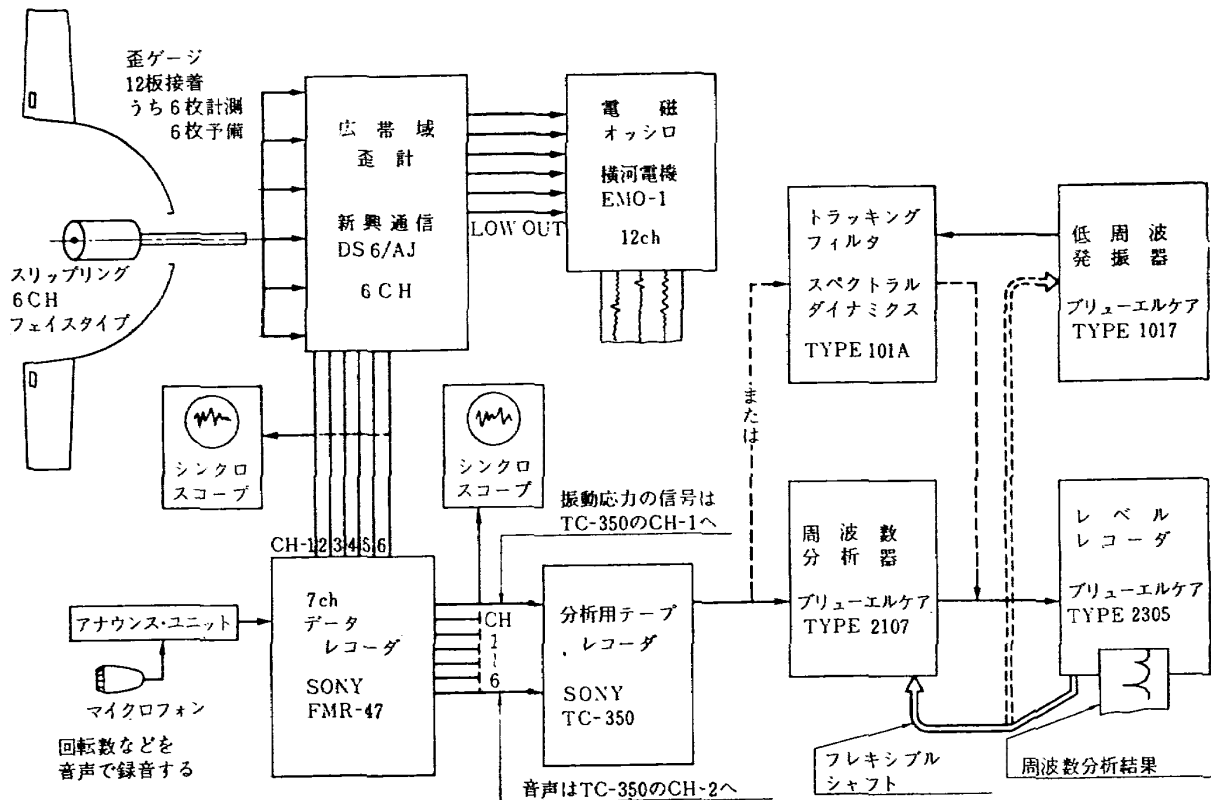


図 9 振動応力計測装置系統図

5. 試験結果と計算結果

実機の翼について計算する前に本報告に述べた計算法の精度を検討するために、本方法と文献 (12) に示された厳密な式により一様断面のはりについて、せん断変形と回転慣性を考慮した場合と無視した場合の固有振動数の計算を行なった。計算に用いたモデルは長さ 100 mm, 1 辺の長さ 12 mm の角柱で, $E=21000 \text{ kg/mm}^2$, $G=8400 \text{ kg/mm}^2$, 比重 7.8, $k_\xi=k_\eta=5/6$ である。

二つの方法による計算結果を表 3 に示す。本方法による計算値は、はりの全長を 10 等分した場合と、20 等分した場合の 2 種類を示した。この結果から本方法

によって求めた値は厳密解と、それぞれの条件において実用上十分な精度で一致していることがわかる。また分割数を増した場合の方が厳密解に近い値が得られていることがわかる。

せん断変形と回転慣性の影響は一次曲げ固有振動数に対しては約 1% であるが、二次曲げ固有振動数に対しては 5% 以上になっている。

以上に述べた結果から計算の精度は一様断面のはりの二次曲げ固有振動数程度まで、実用上十分であると考えられる。

次にタービン動翼と圧縮機動翼について述べる。図 10 と図 11 に翼根部を固定した場合の固有振動数と振動形の測定結果および計算結果を示す。固有振動数の

表 3 計算用モデルの固有振動数

計 算 法		一次曲げ (c/s)	δ (%)	δ_{SK} (%)	二次曲げ (c/s)	δ (%)	δ_{SK} (%)
せん断変形 回転慣性無視	厳密解	995.1	0	0	6,241	0	0
	10 分割	991.5	-0.36		6,146	-1.52	
	20 分割	994.9	-0.02		6,217	-0.38	
同 上 考 慮	厳密解	984.0	0	-1.11	5,911	0	-5.29
	10 分割	980.9	-0.32		5,831	-1.35	
	20 分割	984.2	0.02		5,891	-0.34	

δ ; 同じ条件の厳密解との差。

δ_{SK} ; せん断変形と回転慣性の影響による差。

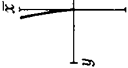


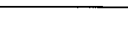

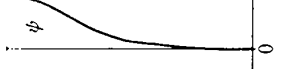
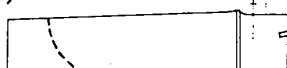

$\delta_e = \frac{f_c - f_e}{f_e} \times 100\%, \delta_c = \frac{f_c - f_{co}}{f_{co}} \times 100\%, f_{co}$ はせん断変形, 回転慣性および翼根部弾性すべて無視した計算値。																					
実測値 (f_e) %		1 0 0 3		1 8 7 9		2 5 1 8		3 6 6 4		4 3 9 7											
翼面上の破線は実測されたノードライン。																					
翼の上方の図は振動形の平面図, 右方の図は断面図 (ともに計算値) を示す。		1 次曲げ		1 次ねじり		翼弦方向 1 次曲げ		2 次曲げ		2 次ねじり											
																					
計算値	せん断変形	回転慣性	翼根部弾性	1 次曲げ		1 次ねじり		翼弦方向 1 次曲げ		2 次曲げ		2 次ねじり									
				f_c %	δ_c %	f_c %	δ_c %	f_c %	δ_c %	f_c %	δ_c %	f_c %	δ_c %								
○印は考慮, ×印は無視したことを示す。	×	×	×	1353	35	2083	11	4410	75	6028	65	4504	47								
	×	×	×	1127	12	2071	10	3360	34	5005	37	4410	03								
	×	×	×	1339	33	2083	11	4207	67	5734	56	4504	47								
	×	×	×	1340	34	2071	10	4041	60	5587	52	4504	47								
	×	×	×	1327	32	2071	10	3912	55	5339	46	4504	47								
○印は無視したことを示す。	×	×	×	1110	10	2071	10	3092	23	4566	25	4410	03								
	×	×	×	1032	3	2065	10	2873	14	4329	18	4356	01								
	×	×	×	967	-4	2059	9	2707	7	4158	13	4299	22								

図 10 タービン動翼の固有振動数と振動形

計算値は翼根部の弾性、翼のせん断変形および回転慣性を考慮したものと無視したものの組合せ 6 種類を示した。これによって固有振動数の計算値にそれぞれの要素が与える影響がわかる。比較を便利にするために実測値と計算値との差および翼根部弾性、せん断変形、回転慣性の全てを無視した計算値と、それ以外の計算値との差(%)を示した。翼根部の弾性、翼のせん断変形および回転慣性を考慮して計算するほうが、これらを無視して計算するよりも厳密であることはいうまでもなく、これらを考慮すれば固有振動数の計算値は低くなることも予想できるが、長さが短い割合に曲げ剛性が高いタービン動翼と、長い割合に曲げ剛性が低く、ねじれが大きい圧縮機動翼ではどの程度になるか明らかにしようとしたわけである。

なお、計算はタービン動翼については 17 断面、圧縮機動翼については翼根部固定の場合 17 断面、ピンジョイント型の場合 18 断面で区分して行なった。

せん断変形に関する断面の形状係数 k_ξ , k_η の値はいずれについても 0.85 とした。 k_ξ , k_η は断面の形によって変るが、翼断面についてこれを求めることが困難なので、く形断面の値(0.833)、だ円断面の値(0.9)などを参考にして上記の値を用いて計算することにしたわけである。

振動形の計算結果は翼根部の弾性、せん断変形、回転慣性の全てを考慮した場合のものだけを示した。

翼根部の弾性は取付金具の形状と材質から計算によって求めたもので、タービン動翼では $h_x=10^{-7}$, $h_y=10^{-8}$, $h_z=5 \times 10^{-8}$ (単位はいずれも $\text{rad/kg} \cdot \text{mm}$) である。圧縮機動翼では $h_x=2.5 \times 10^{-7}$, $h_y=5 \times 10^{-9}$, $h_z=10^{-8} \text{ rad/kg} \cdot \text{mm}$ である。なお、いずれの場合も取付金具に固定した状態では h_x , h_y , h_z 以外の h_{xs} , h_{ys} , g_x , g_y , g_{xm} , g_{ym} などは固有振動数にほとんど影響を与えないので、計算例としてはこれらを零としたものを示した。

図 10 に示したタービン動翼についての固有振動数の計算結果を見ると翼根部の弾性が非常に大きい影響を与えることがわかる。また、せん断変形と回転慣性も高次の曲げ振動にはかなり大きい影響を与えることがわかる。翼弦方向一次曲げおよび二次曲げ固有振動数については、これらを全て考慮することによって数 10% の低下がみられる。ねじり振動に対する翼根部弾性の影響はこの場合あまり大きくない。

次に図 11 に示した圧縮機動翼についての結果を見ると、長さが長い割合に曲げ剛性が低い圧縮機動翼ではタービン動翼に比べて翼根部の弾性とせん断変形の

影響は小さいが、高次の曲げ振動については無視できない値になっている。また、この圧縮機動翼はねじれが大きいので回転慣性の影響が大きくなり、せん断変形の影響を上まわる場合もあることがわかる。

実測値と計算値を比較するとタービン動翼と圧縮機動翼のいずれの場合も翼根部の弾性、せん断変形および回転慣性の影響をすべて考慮して計算した値が、他の計算値と比べて実測値に最も近い値となっている場合が多いことがわかる。実測値と計算値との一致は圧縮機動翼についてはかなりよいが、タービン動翼については満足できる程度とはいえない。この不一致の最大の原因はクリスマスツリー型翼根部の剛性が翼根部と取付金具との理想的な接触を仮定して計算した値より実際はかなり低いことであると推定される。こころみに翼根部弾性を前述の値の 1.5 倍および 2 倍として計算した値を図 10 の最下欄に示したが、翼根部弾性を 2 倍とした場合の値は実測値に近い値となっている。

ねじり振動については実測値と計算値との一致は曲げ振動ほどよくない。この原因としては断面のねじり剛性定数の計算精度がよくないこと、ねじり振動と曲げ振動の連成を無視していることなどが考えられる。断面のねじり剛性定数の計算精度を検討するために圧縮機動翼については、その全長のねじり剛性を実測し、 $1.4^\circ/\text{kg} \cdot \text{m}$ の値を得た。これに対して各断面のねじり剛性定数の計算値と材料のせん断弾性係数から求めた値は $1.49^\circ/\text{kg} \cdot \text{m}$ である。この差は圧縮機動翼の固有ねじり振動数の計算値と実測値との不一致をある程度説明できる。タービン動翼についてはねじり剛性の実測を行なわなかったため、断面のねじり剛性定数の計算精度の確認はできていない。したがって確定的なことはいえないが、その大きいタービン動翼では断面のせん断中心と重心の距離が大きくなるため、ねじり振動と曲げ振動の連成が圧縮機動翼の場合より強くあらわれることも実測値が計算値より低くなる原因と考えられる。

振動形については定量的な測定ができていないので実測値と計算値を直接比較することはできないが、実測されたノーダルラインと振動形の計算値の曲線が z 軸を横切る位置を比べてみると両者は定性的にはかなりよく一致しており、翼断面のねじれとそりを考えあわせると図示したようなノーダルラインが実測されることを説明できる。なお、タービン動翼の翼弦方向一次曲げ振動は、ノーダルラインの形だけを見ると翼先端の後縁付近が部分的に振動しているように解釈され

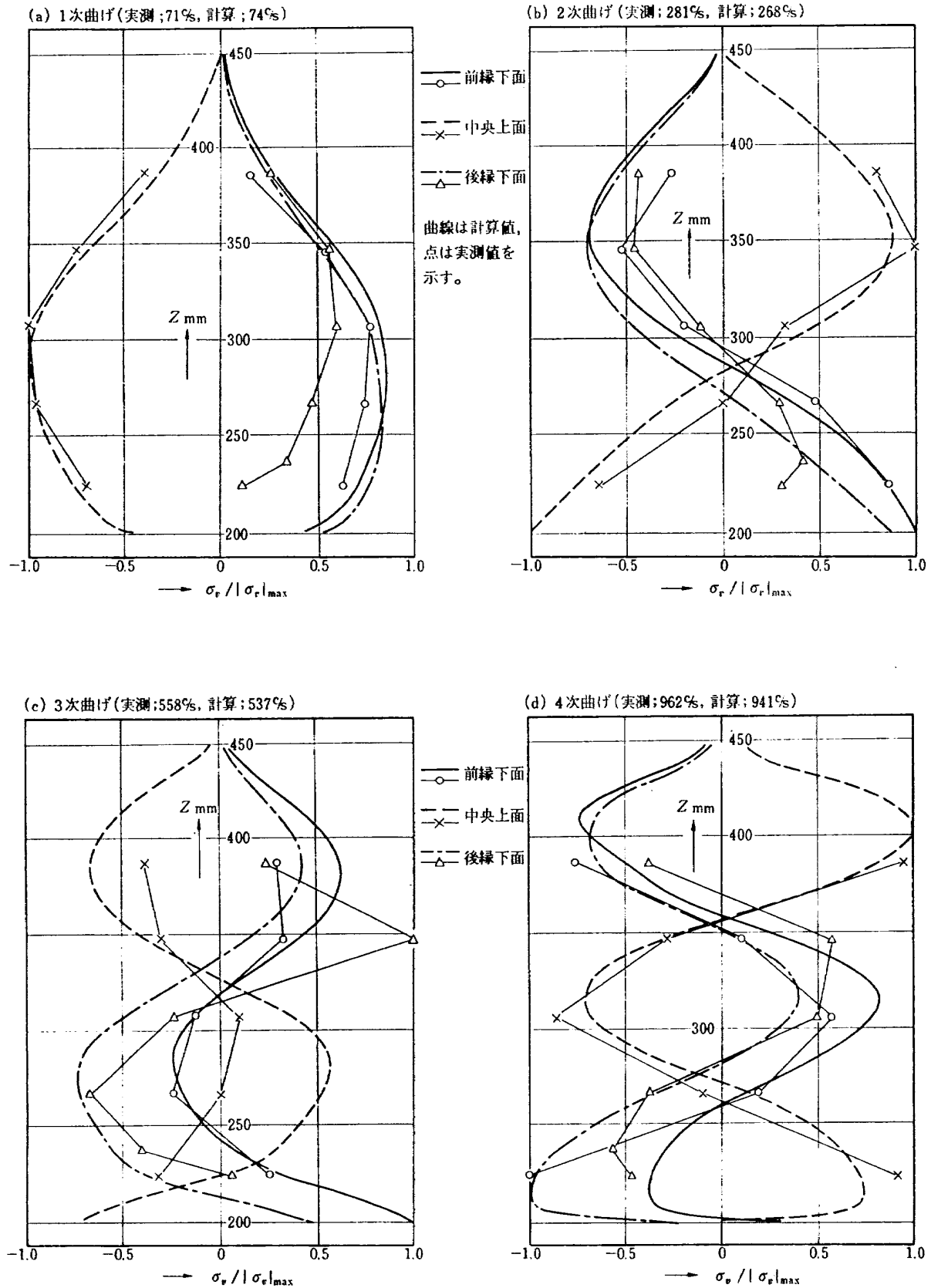


図 12 圧縮機動翼の振動応力分布

るが、実際は翼厚さ方向より翼弦方向の振幅が大きい固有振動に対しても、加振の方向はほぼ翼厚さ方向であること、振動ピックアップの針は翼表面に垂直に当てて測定することなどのためにこのようなノーダルラインが求められたものであり、振動ピックアップを翼弦方向に向けて翼に接触させると翼厚さ方向の振幅より大きい振幅が測定される。

次に圧縮機動翼の振動応力分布の測定結果と計算結果を図 12(a)～(d) に示す。図中に示した振動数は振動応力分布測定の際の固有振動数で、この値は前述のような理由で図 11 に示した値とはわずかながら異なっている。振動応力の実測値と計算値はそれぞれの絶対値最大の値で割った値として表示した。これによると一次曲げおよび二次曲げ振動については実測値と計算値との一致はかなりよいことがわかる。後縁下面の根元に近い部分での不一致が大きいのは、これは根元の傾斜を計算では無視し、図 7 の C 点を通り xy 平面に平行な平面から上は翼断面、下はプラットフォームのく形断面となっているものとしたためと考えられる。三次および四次曲げ振動については実測値と計算値との一致はあまりよいとはいえないが、定性的な傾向はほぼ一致していることを認めることができる。これは測定される振動歪の値が高次の固有振動では、せいぜい、 10^{-6} 程度の小さい値であるため測定精度が悪いこと、ねじりと曲げの連成の影響が入ることなどのためと考えられる。ねじり振動についての振動応力分布の測定も行なったが、加振方法がねじり振動に対しては不適当で、連成する曲げ振動による応力が重ね合わされて測定されるため満足な結果が得られなかった。

振動応力分布の測定を行なった主な目的は前述のように運転中の振動応力の最大値を代表的な 1 点の測定値から推定できるようにするためであるが、そのためには運転中に遠心力が作用している場合と加振機上に取付金具で固定した場合の振動応力分布の差を検討しておく必要がある。また、この圧縮機動翼は植込部がピンジョイント形であることによる相違も考慮しなければならない。これらについて検討するために翼根部弾性固定で回転速度零と 8,000 rpm の場合およびピンジョイント形翼根部で回転速度 8,000 rpm の場合の振動応力分布を計算によって求めた。代表例として翼弦中央上面のものを図 13(a)～(d) に示す。図 13 に示した応力の値は翼面に生ずる振動応力の最大値を 1 として表示したので、翼弦中央上面以外に最大値が生じている場合には図中の最大値は 1 以下になってい

るものもある。図 13 の中にそれぞれの場合の固有振動数を示したが、これによると回転速度によって固有振動数が大幅に変化する低次の曲げ振動では、振動応力分布も回転速度によってかなり変化することがわかる。また高い回転速度においては翼根部弾性固定の場合とピンジョイント形の場合の固有振動数および振動応力分布の差は非常に小さくなることがわかる。翼断面の他の部分の振動応力分布についてもこれらの傾向は同様である。このように固有振動数が回転速度によって大幅に変化するような振動形については、回転していない状態で測定した振動応力分布から高速回転中のそれを推定するとき、このような計算結果を参考にすると必要があると考えられる。

次に圧縮機動翼の運転中の振動について述べる。図 14 は運転中の振動応力の周波数分析によって得られた周波数成分を○または×印の点で、固有振動数の計算値を曲線で、縦軸に振動数、横軸に回転速度をとって示したものである。計算値としては翼根部の条件を弾性固定、摩擦のないピンジョイント、翼車に固定されたピンと翼のピン穴とがころがり接触するもの、翼車のピン穴とピン、ピンと翼のピン穴とがともころがり接触するものの 4 種類とした場合の値を示した。なお、振動応力の周波数成分には常に毎秒の回転数の整数倍のものが存在するが、これらは図 14 に示していない。これらの相対振幅はその周波数と翼の固有振動数が共振するとき以外はあまり大きくない。図 14 によると運転中に発生する振動応力の周波数成分は翼車に固定されたピンと翼のピン穴とがころがり接触するという条件を与えて計算した固有振動数とよく対応することがわかる。振動形もそれぞれ対応するものであるかどうかは確認できないが、振動数とその回転速度による変化がよく対応していることから、まずまちがいないものと考えられる。

計算値同士を比較すると、弾性固定の条件による値は翼車に固定されたピンの条件による値より高くなっているが、高い回転速度では差がきわめて小さくなっている。これは翼根部がピンまわりに回転したときに翼車に固定されたピンと翼のピン穴との接点まわりに遠心力によって生ずる復元モーメントは非常に大きく、翼根部弾性に換算すると回転速度 8,000 rpm において $h_x = 3.3 \times 10^{-7} \text{ rad/kg} \cdot \text{mm}$ となり、弾性固定の場合の $2.5 \times 10^{-7} \text{ rad/kg} \cdot \text{mm}$ に近い値となっていることを考えればうなずける。摩擦のないピンジョイントの条件による計算値は測定値より大幅に低くなっており、この条件は実際とは全くかけはなれたも

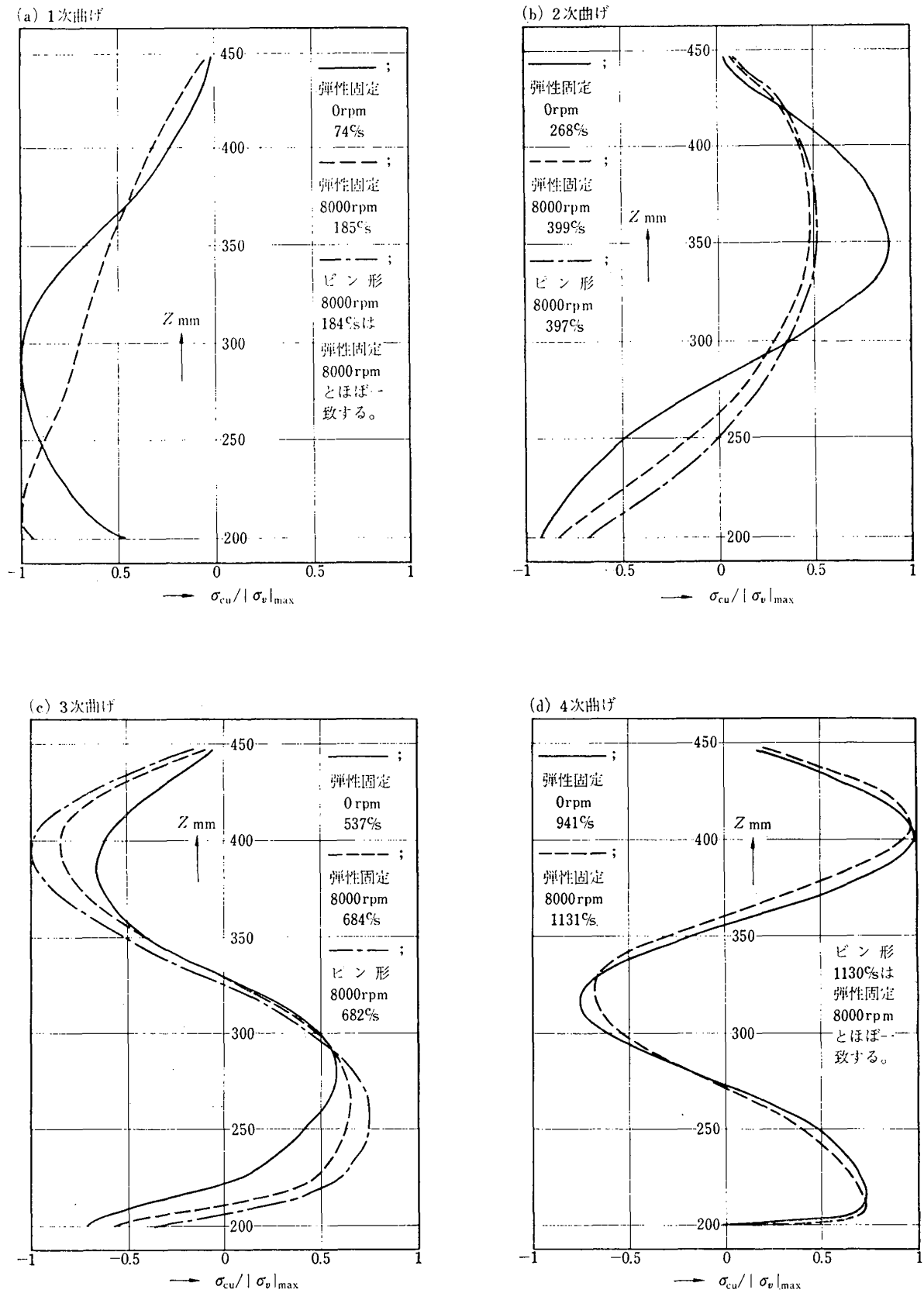


図 13 圧縮機動翼の振動応力分布

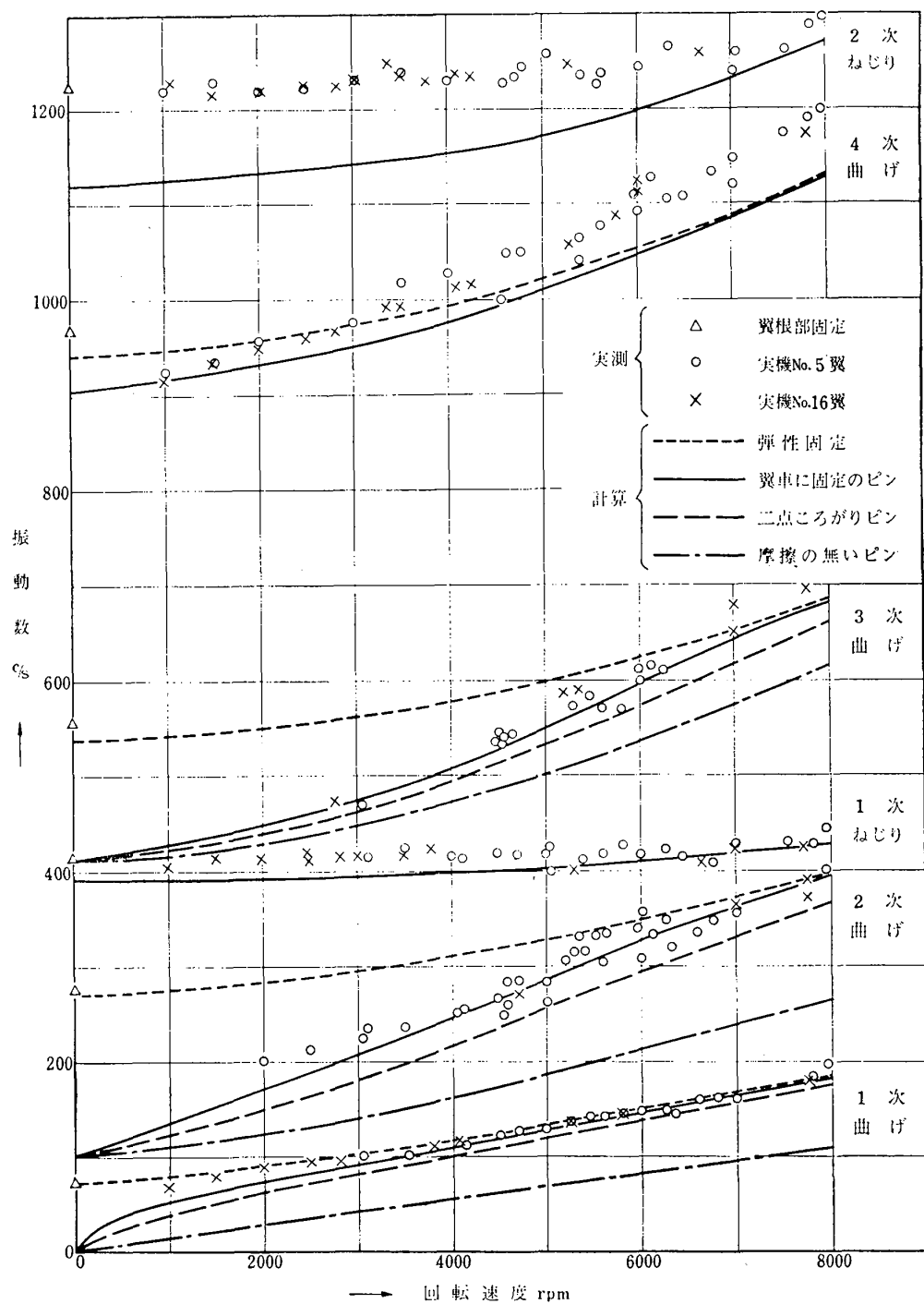


図 14 圧縮機動翼の振動応力周波数成分と固有振動数の計算値

のであることを示している。またピンが翼車のピン穴ともころがり接触する条件で、翼車のピン穴直径も20mmとした場合の計算値は翼車に固定されたピンの条件の値より少し低くなっている。2点でころがり接触する場合の計算値は1点だけでころがり接触する条件で、ピンとピン穴のすきまを2倍とした場合 ($r_0 = 10\text{ mm}$, $r_p = 9.6\text{ mm}$) の値よりわずかに高いが、図14ではこの二つはほぼ一致する曲線で表わされる程度に近い値となる。

ねじり振動に対する翼根部の条件はピンジョイント形の場合も固定端の位置を翼のピン穴とピンの接点とすること以外は弾性固定と変わらないものとして計算した。したがって翼の全長は翼根部の一部分だけ長くなるが、翼根部のねじり剛性は翼部の数十倍程度の値であるため固有ねじり振動数の計算値はほとんど変わらない。運転中の固有ねじり振動数の実測値と計算値との差は弾性固定の条件における回転速度零の場合の実測値と計算値との差と同程度である。また固有ねじり振動数に対する遠心力の影響は固有曲げ振動数に対する影響に比べれば小さいことがわかる。

次に振動応力の大きさについて述べる。翼に生ずる振動応力の振幅は回転速度と作動状態によって変化するが、サージングから十分はなれた作動範囲では流量による変化はあまり大きくない。図15に各種の周波数成分をすべて含んだ振動応力の振幅と回転速度との関係を示す。図16には一つの振動形に属する振動による応力振幅と回転速度との関係を示す。図15および図16において○印はサージングから十分はなれた作動範囲における値、●印は動翼の失速に近づいたと考えられる状態における値である。なお、ここには1枚の翼 (No. 5, 図14に○印で示したもの) についての値だけを示した。これによると通常の運転状態で

は回転数の整数倍の周波数の加振力との共振がいくつか認められる以外は、ほぼ回転速度の二乗に比例して振動応力が増加していることがわかる。また、この圧縮機動翼においては回転数の整数倍の周波数の加振力との共振による振動応力は問題になるほどの値にならないこともわかる。ところが失速に近づいた状態では回転数の整数倍の周波数とは異なる周波数の大きい振動応力が測定されている。この振動応力の周波数成分としては一次ねじり固有振動に対応するものが最大で、これ以外の周波数成分の強さは最大の成分の1/10以下で、通常の状態よりもわずかに増加しているだけである。これによって失速に近い状態では純粹の一次ねじり振動に近い振動が発生していると考えられる。また、この振動は失速フラッタによるものと推定される。

なお、この圧縮機動翼を用いた単段軸流圧縮機については詳細な報告が別に発表される予定である。

6. 結 言

ジェットエンジン用軸流回転機の翼としては長さが短い割合に曲げ剛性の高いタービン動翼1種と、長さが長い割合に曲げ剛性の低い圧縮機動翼1種について固有振動数と振動形の測定と計算を行ない。また圧縮機動翼については運転中も含む振動応力の測定と計算を行なって次のことを明らかにした。

(1) 軸流回転機の翼をはりと考えて固有振動数を計算する場合には翼根部の条件を正確に与え、また翼のせん断変形と回転慣性を考慮する必要がある。

(2) 振動形については測定方法に問題が残っているので定量的なことはいえないが、実測されたノードラインと振動形の計算値との対応、振動応力分布の実測値と計算値との対応などからみて定性的には実際と

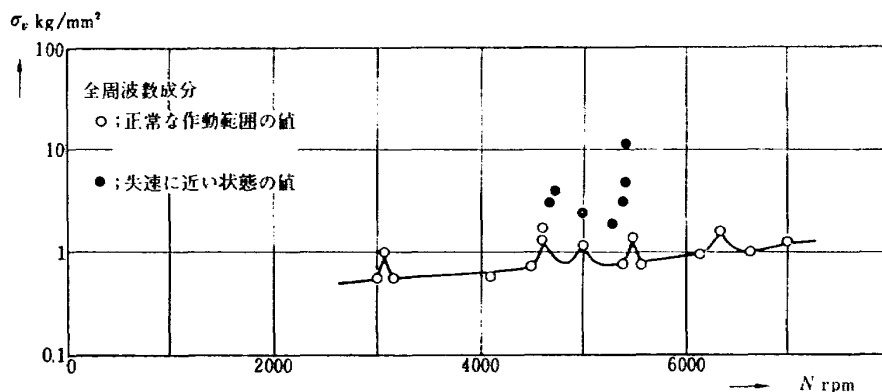


図 15 振動応力と回転速度の関係

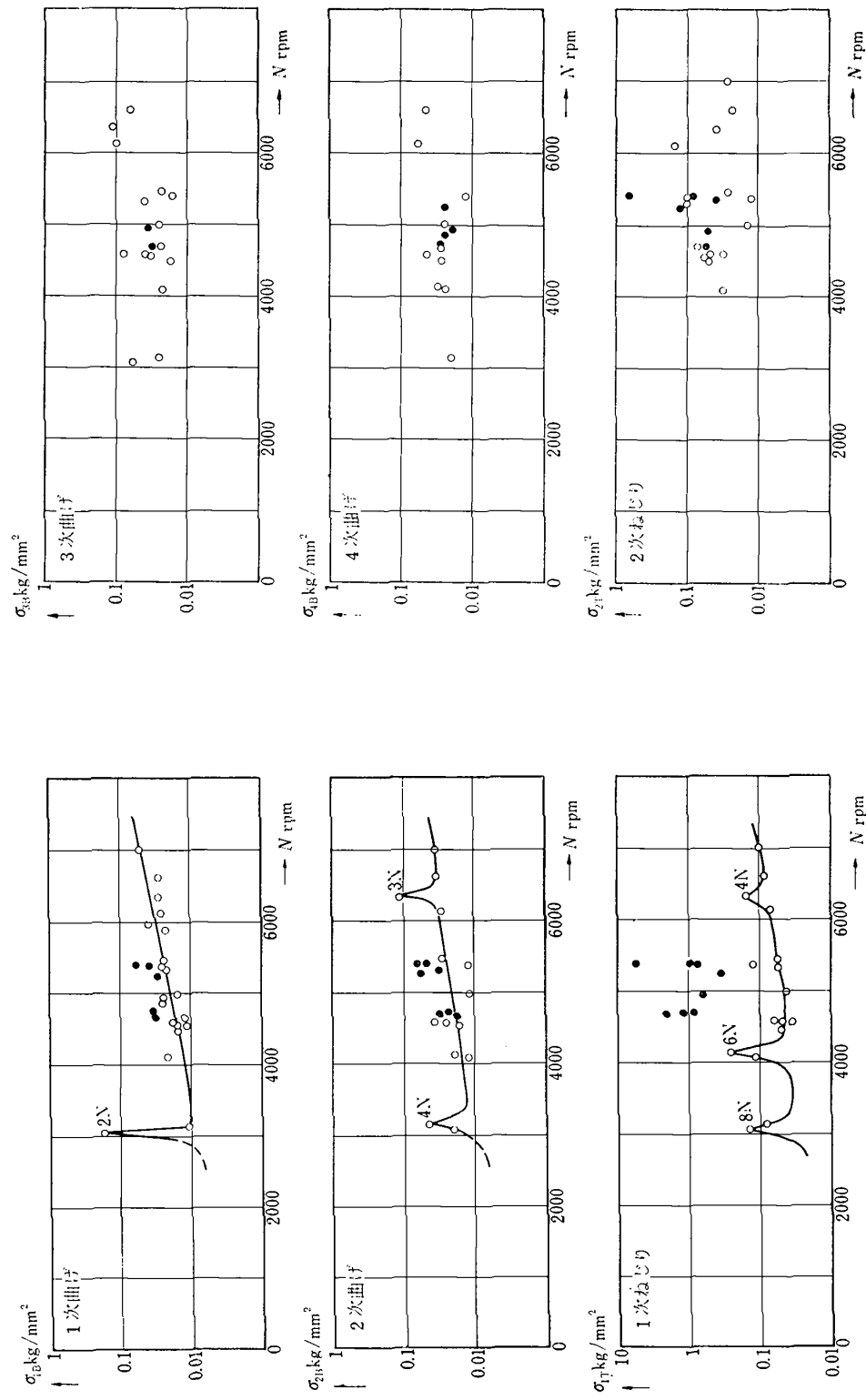


図 16 振動応力の各周波数成分の強さ

よく一致する計算値が得られることが知られた。

(3) 圧縮機動翼の低次の曲げ固有振動数は回転速度によって大幅に変化することが実験結果および計算結果から知られた。またこれにともなう振動応力分布もかなり変化することが計算結果から知られた。したがって運転中の振動応力分布について直接測定することができない場合は計算値を参考としなければならない。

(4) ピンジョイント形翼根部をもつ動翼の運転中の固有振動数については、ピンとピン穴とのところが接触を仮定して求めた計算値が実測値とよく一致する。この条件を与えて求めた固有振動数は高い回転速度においては弾性固定の条件を与えて求めた値に近くなる。この場合は振動応力分布も類似した形になる。

(5) ねじり振動についても、その小さい翼については断面のねじり剛性定数が精度よく求められれば、この方法によって実測値とかなりよく一致する固有振動数を求めることができる。

(6) ねじり固有振動数に対する遠心力の影響は曲げ振動に対する影響に比べて小さい。

以上に述べたことから本報告に述べた方法は軸流回転機の翼の固有振動数、振動形、振動応力分布などの計算法として実用に耐えるものと考えられる。

おわりに、ここに述べた試験のうち圧縮機動翼の運転中の振動応力測定は当所原動機部性能研究室との共同実験によるものであること、また圧縮機動翼の製作は石川島播磨重工業株式会社航空エンジン事業部が担当したものであることを記し、関係の方々に感謝の意を表する。

付録 中実翼断面のねじり剛性定数

上面と下面を形作る曲線が次の式で与えられる中実な翼断面については文献 (14) に示された方法がある。

図 A1 において $s=x/C$ とし、

$$y_u = a_u \varphi(s)$$

$$y_l = a_l \varphi(s)$$

$\varphi(s) = s^m (1-s^p)^q$ とすると、ねじり剛性定数は次

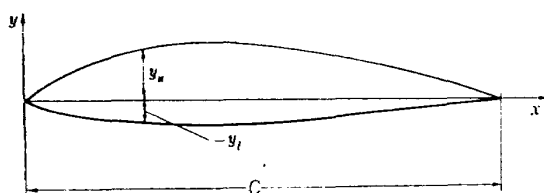


図 A1

のようになる。

$$J = \frac{\frac{1}{3} (a_u - a_l)^3 C}{1 + \frac{\alpha (a_u^2 - a_u a_l + a_l^2)}{C^2}} \cdot \int_0^1 \varphi^3 ds$$

ここに、

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \varphi^3 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds}{\int_0^1 \varphi^3 ds}$$

特別な場合として $m=1$, $p=1$, $q=1$ とすると、この曲線で表わされる断面は圧縮機翼に用いられる二重円弧翼断面に近いものとなる。この場合 J は次のように表わされる。

$$J = \frac{0.1524 (y_{ux} - y_{lx})^3 C}{1 + \frac{1.778 (y_{ux}^2 - y_{ux} y_{lx} + y_{lx}^2)}{C^2}} \quad (A1)$$

また、 $m=1/2$, $p=1$, $q=1$ とすると $C/3$ に最大厚さをもつタービン翼断面に近い形となる (図 A2)。この場合 J は次のように表わされる。

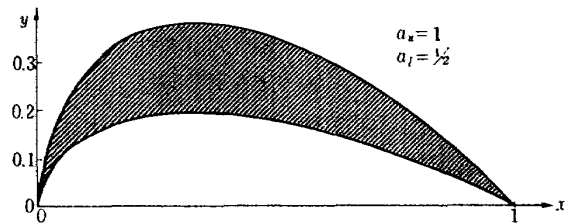


図 A2

$$J = \frac{1.291 (y_{ux} - y_{lx})^3 C}{1 + \frac{5.71 (y_{ux}^2 - y_{ux} y_{lx} + y_{lx}^2)}{C^2}} \quad (A2)$$

ここに、 y_{ux}, y_{lx} はそれぞれ最大厚さの位置の上面と下面の y 座標である。

次に一般の中実翼断面については文献 (15) に示された近似的な方法がある。図 A3 において断面の中心線の長さを U 、中心線に垂直にはかった翼の厚さを t 、断面積を A とすると、ねじり剛性定数は次の式によって求められる。

$$J = \frac{\frac{F}{3}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{AU^2}} \quad (A3)$$

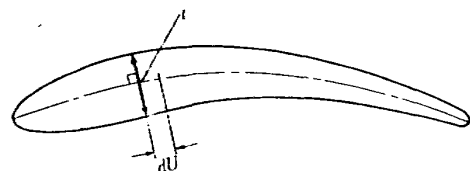


図 A3

ここに,

$$F = \int_0^U t^3 dU$$

表 1 に示したタービン動翼の J の値は (A3) 式によって求めたものである。

本報告に述べた圧縮機動翼の断面は前縁半径と後縁半径が等しい二重円弧翼断面であるが, (A1) 式は前後縁半径が零の場合にしか適用できない。そこで (A1) 式に前縁, 後縁付近の厚さの補正を加えた次の式によって J を求めた。

$$J = \frac{0.1524(y_{ux} - y_{lx} + 2r_e)^3 C}{1 + \frac{1.778(y_{ux}^2 - y_{ux}y_{lx} + y_{lx}^2)}{C^2}} \quad (A4)$$

ここに, r_e は前後縁半径である。

本文にも述べた通り, 圧縮機動翼についてはその全長の静的なねじり試験を行ない, $1.4^\circ/\text{kg}\cdot\text{m}$ の値を得た。一方 (A4) 式によって求めた各断面の J の値から得られる計算値は $1.49^\circ/\text{kg}\cdot\text{m}$ であるから, 前後縁の厚さの補正を加えても J の計算値は実際の値よりやや低くなっていることがわかる。

タービン動翼については精度のよいねじり試験を行なうことが困難だったので (A3) 式によって求めた J の値の精度は確認できないが, 厳密解が得られるいくつかの断面について比較した結果からみて $\pm 10\%$ 程度の精度はあるものと推定される。

文 献

- 1) 安陪俊一: 近接した二つの翼列の相互干渉について, 機械学会論文集, 81 巻 66 号 (昭和 27) pp. 9.
- 2) 花村庸治, 田中英穂: 翼列における 2 自由度連成フラッタ (第 1 報) 機械学会論文集, 244 号 (昭和 41.12), (第 2 報) 同 247 号 (昭和 42.3).
- 3) 高田浩之: 多段軸流圧縮機の旋回失速, 東大航空研究所集報, 2 巻 6 号 (昭和 36.6),
- 4) J.W. Jarrett, P.C. Warner: The Vibration of Rotating, Tapered-Twisted Beams, J. of App. Mech. Vol. 20, No. 2 (Sept. 1953) pp. 381-389.
- 5) A.L. Deák, R.D. Baird: A Procedure for Calculating the Packet Frequencies of Steam Turbine Exhaust Blades, Trans. A.S.M.E., J. of Eng. for Power, 85, Series A, (Oct. 1963) pp. 324-330.
- 6) B. Jäger: Die Eigenfrequenzen verwundener Schaufeln, Ingenieur-Archiv, 29. 4 (1960) pp. 280.
- 7) 白木万博, 角家義樹: タービン翼の回転振動試験, 三菱重工技報, Vol. 1, No. 3 (昭和 39)
- 8) G. Isakson, J. G. Eisley: Natural Frequencies in Coupled Bending and Torsion of Twisted Rotating and Nonrotating Blades, N.A.S.A, CR-65 (1964).
- 9) 武内澄夫, 宮地敏雄, 星谷昌二: ジェットエンジンの翼の固有振動に関する実験, 航技研資料 TM-65 (昭和 40)
- 10) 同上, J-3 ジェットエンジン用タービン動翼の固有振動特性, 航技研資料 TM-49 (昭和 41).
- 11) 同上; 超軽量軸流圧縮機動翼の固有振動特性, 航技研資料 TM-95 (昭和 41)
- 12) 戸部俊美: 回転慣性およびせん断力の影響を考慮せる均一断面はりの横振動について, 機械学会論文集, 17 巻 57 号 (昭和 26).
- 13) 白木万博, 福沢 清: タービン 調速段動翼の固有振動数におよぼす翼根部の影響について, 機械学会講演論文集, No. 200, ('68-9)
- 14) S. Timoshenko, J.N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd ed. (1951) McGraw-Hill pp. 286.
- 15) R.J. Roark: Formulas for Stress and Strain, 3rd ed. (1954) McGraw-Hill pp. 177.

TR-169	VTOL 機操縦研究設備 Design and Construcion of VTOL Fligh Simulator System	1968年12月	樋口一雄, 百名盛之 三好範子, 岡部正典 山本六郎, 川原弘靖
TR-170	STOL 機の縦の自動安定制御方式に関する 研究 (I) 姿勢制御方式の解析 System Studies on Automatic Longitudinal Stabilization Control Systems for STOL Aircraft Part 1 Automatic Attitude Control Systems	1968年12月	堀川勇壮, 森 幹彦
TR-171T	Simple Flow Characteristics Across a Strong Shock Wave	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-172	高速における円錐体および三角翼, 動安定微 係数の測定 Measurement of Dynamic Stability Deriva- tives of Cones and Delta-Wings at High Speed	1969年2月	柳沢三憲
TR-173T	Coupling Effect of Radiative Heat on Con- vective Heat Transfer	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-174	Navier-Stokes 方程式に対する差分法 Difference Method for Navier-Stokes Equation	1969年4月	三好 甫
TR-175	低レイノズル数における NACA 0012 翼型 の失速特性について —失速フラッタの研究 II— Stalling Characteristics of the NACA 0012 Aerofoil Section at Low Reynolds Num- bers	1969年6月	中村泰治, 磯貝紘二 江尻 宏

航空宇宙技術研究所報告176号

昭和44年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
