

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-178

測度最大の可制御領域を与える二次形式評価関数の
最適重みマトリクスに対する必要条件

川 幡 長 勝

1969 年 7 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|--------|---|----------|--|
| TR-155 | 遷音速における Control-Surface Buzz に関する研究
An Investigation on Control-Surface Buzz at Transonic Speeds | 1968年5月 | 中村 泰治 |
| TR-156 | 二次元湾曲ジェットの相似構造と乱流混合におよぼす曲率の研究
Effects of Curvature on the Similar Structure and Turbulent Mixing of Two-dimensional Curved Jets | 1968年5月 | 遠藤 浩 |
| TR-157 | 電子線密度測定法による低密度極超音速流の実験的研究
Experimental Study of Low Density Hypersonic Flow Using Electron-Beam Densitometry | 1968年6月 | 和田 勇, 曾我 國男 |
| TR-158 | 局所凸線形位相空間内の非線形初期値問題に対する近似について
On Approximations for Nonlinear Cauchy Problems in Locally Convex Spaces | 1968年6月 | 小島 清史 |
| TR-159 | T型結合板の振動
The Vibration of T-Shape Plates Structure | 1968年7月 | 塙 武敏, 築地 恒夫
越出 慎一 |
| TR-160 | 梁, 板結合構造物の振動 (II)
On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (II) | 1968年8月 | 塙 武敏, 築地 恒夫
多田 保夫, 越出 慎一
林 洋一, 日下 和夫 |
| TR-161 | 宇宙飛しょう体の直接式最適誘道法
The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle | 1968年8月 | 新田 慶治, 松島 弘一
大坪 孔治, 志 甫 徹 |
| TR-162 | よどみ点領域での非定常空力加熱の測定
Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region | 1968年9月 | 野村 茂昭 |
| TR-163 | 双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関する考察
Investigation on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane | 1968年9月 | 別府 護郎 |
| TR-164 | 熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路
Investigation of the Streamwise Heat Conduction Effect on the Transient Aerodynamic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method | 1968年10月 | 小川 鉦一 |
| TR-165 | 有限要素法による箱型梁の解析
Applications of the Finite Element Method to Box Beams | 1968年11月 | 三本木 茂夫 |
| TR-166 | DPF バルブを用いたジンバルエンジン駆動用油圧制御系の基礎的解析
Fundamental Analyses of Gimbal-Engine Positioning Hydraulic Control System Made Use of DPF Servovalves | 1968年11月 | 畑山 茂樹, 興石 肇 |
| TR-167 | アブレーションによるよどみ点空力加熱の減少の測定
Measurements of Heat Transfer Reduction by Ablation at Stagnation Region | 1968年12月 | 野村 茂昭 |
| TR-168 | 角度測定周波数測定併用のトラッキングシステムの計算処理に関する研究
On the Orbit Determination Procedures for the Doppler Frequency Measurement with Angular Measurement Tracking System | 1968年11月 | 鳥海 良三, 松本 一夫
樋口 一雄, 戸川 隼人
木村 武雄 |

測度最大の可制御領域を与える二次形式評価関数の 最適重みマトリクスに対する必要条件*

川 幡 長 勝**

Necessary Conditions for the Optimal Weighting Matrices of Quadratic Performance Index to Maximize the Measure of the Controllable Set

By Nagakatsu KAWAHATA

A set of necessary conditions is presented to determine the optimal weighting matrices of the quadratic performance index in cases where the final time of the process is specified finitely.

The feedback control system may be said to be used essentially for achieving the predetermined purpose as well as possible, even if there exist large deviations or errors in the actual state to the desired state space trajectory during the process. Such an essential use of the feedback control system is the main concept used to derive a set of necessary conditions for the optimal weighting matrices in this paper.

The controllable set is defined to consist of all of the states which fall within the given allowable error ellipsoid at the end of the process by the linear feedback control law with finite gains, although such a definition of the controllable set is somewhat different from the usual one in optimal control theory.

It is first shown that the measure of such a controllable set during the process depends on the weighting matrices. From the essential purpose of the feedback control mentioned above, it is clear that the larger the measure of the controllable set is at any time of the process, the better the system is. So, when the largest measure of the set is obtained within the bounded controls, the corresponding weighting matrices are regarded to be optimal. The necessary conditions for these matrices are derived in the same way as in the usual optimal control theory.

When the optimal weighting matrices are determined in this way, the controllable set is also evaluated automatically. Therefore, it is easily decided at any time during the process with simple calculations whether or not the present state will be able to reach the allowable neighborhood at the terminal with the stored control law.

A Zermelo's problem and an acceleration control problem in the second order are treated as an analytic and a numerical example of the applications, respectively.

1. ま え が き

本報告においては、主として Regulator 最適問題を想定する。次のような確定系

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

$$\Phi_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0} \quad (3)$$

ここに、

t ; 時刻 ($t \in [t_0, t_f]$).

$\mathbf{x}(t)$; n 次元状態ベクトル.

$\mathbf{u}(t)$; m 次元操作ベクトル.

$\mathbf{f}(\cdot)$; n 次元関数 ($\mathbf{f}(\cdot) \in C^{(1)}$).

$\Phi_f(\cdot)$; q 次元関数 ($0 \leq q \leq n$).

下添字“0”, “ f ”は、それぞれプロセスの初期および終端を意味する。

において、(1), (2), (3) 式を満足し、かつ、Regulator 設計者が望ましいと思う基準解軌道 (nominal trajectory), すなわち $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_f^*$ が何らかの方法に

* 昭和44年5月28日

** 新型航空機部

よって既知であり、かつ、このときの操作 $u^*(t)$ は開ループ形で求まっているものとする。この基準解は上記の系が何らかの意味で停留することを必要とせず任意の解軌道を考えてよい*。しかしながら、実際の問題においてはプロセス途中で種々の外乱を受け、(2) 式の初期値自身さえもランダムなことが多い。これに対し、開ループ系は外乱に対する安定性を欠くため Regulator 設計者は閉ループの制御法則を要求する。この目的のため、最適制御理論の立場から、軌道のずれ(すなわち誤差)を基準解軌道のまわりに線形化された系によって表わし、この誤差の二次形式評価関数を最小ならしめる方法が使われる。このときの(基準解に応ずる開ループ操作 $u^*(t)$ に対する補償となる)最適制御は、軌道のずれに依存するフィードバック制御法則として得られることは衆知の事実である。

二次形式評価関数は、一般に(7)式のように与えられるが、マトリクス Q, R の決定法に関する報告は極めて少ない。プロセス時間が無限の場合($t_f^* = \infty$)は、Stationary System に限り、系の遷移応答特性から重みマトリクス Q のみを定マトリクスとして決定する方法が提案されている²⁻⁴⁾。またプロセス時間が有限の場合($t_f^* < \infty$)には、状態量および操作量のオーソリティから重みマトリクス Q, R を定マトリクスとして決定するものが提案されている⁵⁾。しかしながら、後者においては、その考え方がはなはだ不明瞭であり、実際には、try-and-error に依存せねばならず、かつその指針も明確ではない。

本報告は、プロセス時間が有限の場合に、第3節以降に述べる意味での可制御集合最大という概念を基に、重みマトリクス Q, R の満すべき必要条件を示すのが主たる目的である。当然のことながら無限時間区の場合と違って、限られた操作量によって有限時間内で制御可能な状態量の全体は状態空間の部分集合とならざるを得ない。この部分集合を本報告では可制御集合ということにする**。これが有界な部分集合である

* 基準解を停留解に選んだ場合にも、本報告の方法は有効であるが、文献 [6], [7] 等に述べられているように第2変分によっても、フィードバック形の補償操作法則を構成することができる。例題1の図5に第2変分による解軌道の一例が記入してある。

** 本報告で使われる可制御集合という言葉は、通常の意味とは異り、線形フィードバック制御法則と有界な操作量によって終端の許容集合に到達可能な集合を意味し、本文に述べるように外乱による状態量の擾乱に対応する。

ことから、『外乱に対して高い安定性を得る』というフィードバック系本来の目的の一つに従って、上述の可制御集合(部分集合)を最大ならしめ、且つ、その集合内のすべての状態量に対して、許容操作量の全体を十分に機能させるように重みマトリクス Q, R を第3節以降で述べる意味で最適に決定する方法を提案する。この方法によれば、重みマトリクス Q, R が明瞭なイメージによって決定され(もし解が存在するならば)、それぞれ時間に依存する形(time dependent form)で得られることは注目に値する。

本報告で述べられる最適重みマトリクスの必要条件から、重みマトリクスを決定する方法は、系の Stationary, Nonstationary に無関係に適用される。また、最適重みマトリクスを決定する際に、フィードバックゲインおよび可制御集合も自動的に計算される。その結果、実際のプロセスの途中で簡単な On-line 計算を行なうことによって、現在の状態から、系が記憶している制御法則で、状態空間における終端の目標達成が可能か否か、刻々容易に判定できる。

最適重みマトリクスの必要条件の応用例として、解析的に解ける Zermelo の問題と数値的に解かねばならない2階の加速度制御の問題が解かれている。

本報告では、マトリクス Q は正定(Positive Definite)で最大ランクを持つように与えられたものとするが、この決定法に対する一案が付録 A に示されている。なお、簡単のために、基準解軌道に沿って状態量は、可制御集合を含む領域で Bilateral であるという前提条件を置く。

2. 擾乱方程式と二次形式評価関数

この節では、便宜上、従来からよく知られた結果を述べる。したがって何ら新しい概念の導入はない。

前節で述べた基準解軌道 $(x^*(t), u^*(t), t_f^*)$ に沿った(1)式の擾乱方程式は、

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f(t, x^*, u^*)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f(t, x^*, u^*)}{\partial u} \delta u(t) \\ = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t) \quad (4)$$

$$\delta x(t_0) = \delta x_0 \quad (5)$$

ここに、

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t); \text{ 軌道のずれ (誤差)}$$

$$\delta u(t) = u(t) - u^*(t); \text{ 修正操作量}$$

$$A(t) = \left\{ \frac{\partial f_i(\bullet)}{\partial x_j} \right\}, \quad B(t) = \left\{ \frac{\partial f_i(\bullet)}{\partial u_k} \right\}, \\ \left(\begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m \end{array} \right)$$

$$(\dot{}) \equiv \frac{d}{dt}$$

の如く書ける。基準解軌道は境界に沿うことなく、その近傍で Bilateral とする。しかしながら、 $\delta x(t)$ は以後の節で述べられる可制御集合を含む領域で Bilateral であり、 $\delta u(t)$ は工学的に定まる有界閉集合 \mathcal{U} 内で Bilateral とする。集合 \mathcal{U} については重みマトリク $R(t)$ の決定法に際して第5節で再び述べる。

$$\delta u(t) \in \mathcal{U} \quad (6)$$

上述の擾乱方程式に対して二次形式評価関数は、

$$J = \min_{\delta u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{2} \delta x^T(t_f) \mathcal{Q} \delta x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f^*} (\delta x^T(t) Q(t) \delta x(t) + \delta u^T(t) R(t) \delta u(t)) dt \right] \quad (7)$$

ここに、

\mathcal{Q} : $n \times n$ 対称マトリクス, 正定*.

$Q(t)$: $n \times n$ 対称マトリクス, 半正定.

$R(t)$: $m \times m$ 対角マトリクス, 正定.

$(\cdot)^T$: ベクトルおよびマトリクスの転置.

の如く与えられ、その最適修正操作量は、

$$\delta u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) K(t) \delta x(t) \quad (8)$$

として、軌道のずれに依存したフィードバック形で得られる。ただし、 $n \times n$ マトリクス $K(t)$ は次の Riccati 方程式を満たすものであり、対称である。

$$\dot{K}(t) + K(t) A(t) + A^T(t) K(t) - K(t) D(t) K(t) + Q(t) = 0 \quad (9)$$

$$K(t_f^*) = \mathcal{Q} \quad (10)$$

$$D(t) \triangleq B(t) R^{-1}(t) B^T(t); n \times n \text{ 対称, 半正定} \quad (11)$$

したがって、(9), (10) を満たす $K(t)$ に対して (8) 式のような制御法則を採用すれば、評価関数の最小値 J は、

$$J = \delta x^T(t_0) K(t_0) \delta x(t_0)$$

の如く得られる。以上が今までの最適制御理論の結果であり、マトリクス \mathcal{Q} , Q , R は既知としている。そしてプロセス時間が有限の場合 ($t_f^* < \infty$) には、これらのマトリクスの妥当な決定法は、ほとんどないと言ってよい。この Q , R を可制御領域最大という概念によって決定しようと試みるのが本報告である。

* 本節における議論では \mathcal{Q} が必ずしも正定でなく、半正定でもよいが、後にマトリクス R の決定に際し正定であることが必要であり、マトリクス W の逆: W^{-1} の存在を保証するために正定とした。付録 A 参照。

3. 可制御集合としての誤差楕円体 およびその測度

本報告で使われる可制御集合という言葉は、最適制御理論で普通よく使われる意味とは異なり、(8) 式のような制御法則によって到達可能な集合を意味し、以下に述べるように定義する。

工学的問題では、(3) 式で与えられる終端条件を厳密な意味で満たさなくともよい。ある程度の誤差が許される場合が多い。このような場合には終端における実際の状態量 $x(t_f^*)$ が基準解 $x^*(t_f^*)$ のまわりのある有界閉集合 \tilde{S}_{t_f} 内にあれば十分であるような許容誤差閉集合 \tilde{S}_{t_f} を終端時刻 t_f^* に考えることができる。また(4), (8) 式によって、この終端における集合を逆時間の意味で基準解に沿って任意時刻 $t \in [t_0, t_f^*]$ に移すことができ、それを \tilde{S}_t とする。言うまでもなく $K(t)$, $R^{-1}(t)$ が一意なら線形の方程式 (4), (8) の解は \tilde{S}_t , \tilde{S}_{t_f} 間に“上への一対一写像”を与える。ここで、

$$S_{t_f} = \{ \delta x(t_f^*); \delta x^T(t_f^*) \mathcal{Q} \delta x(t_f^*) \leq 1 \} \quad (12)$$

なる終端の許容誤差楕円体が上述有界閉集合 \tilde{S}_{t_f} に含まれる最大の楕円体であるように正定対称マトリクス \mathcal{Q} を選んだとする(付録 A 参照)。また、任意の $\delta x(t_f^*) \in S_{t_f}$ を前述同様に (4), (8) 式によって任意時刻 $t \in [t_0, t_f^*]$ に移したときの $\delta x(t)$ の全体からなる集合を S_t とする。この場合も、 \tilde{S} に関する前述の議論と同様に、これが線形写像であるから、 S_t と S_{t_f} の間に“上への一対一写像”が成り立っている。 S_t の作り方から、状態量はその内部にあれば、時刻 t_f^* で S_{t_f} に到り、 $S_t \subseteq \tilde{S}_t$ である。したがって \tilde{S} でなく S に関して議論すれば、上述の許容と言う意味での集合 \tilde{S} の議論に対し十分である。この誤差楕円体 S_t を可制御集合と言うことにし、評価しやすい表現を以下の如く得る。もちろん、 $\delta x(t) \in S_t$ に応ずる (8) 式の $\delta u(t)$ は (6) 式を満たすものとする。

$$S_t \subseteq \tilde{S}_t, \quad S_{t_f} \subseteq \tilde{S}_{t_f} \quad (13)$$

逆時間 $\sigma (= t_f^* - t)$ で、(4), (8) 式から求まる閉ループの式を書き、その遷移マトリクスを $\Phi(\sigma, 0)$ とすれば、すなわち、

$$\hat{\Phi}(\sigma, 0) = -[A(\sigma) - D(\sigma)K(\sigma)]\Phi(\sigma, 0), \quad (14)$$

$$0 \leq \sigma \leq t_f^* - t_0$$

$$\Phi(0, 0) = I, \text{ (単位マトリクス)} \quad (15)$$

ここに、 $(\hat{\cdot})$ は逆時間 σ による微分を意味する。とすれば、任意時刻の $\delta x(t)$ は、

$$\delta \mathbf{x}(t) = \Phi(t_f^* - t, 0) \delta \mathbf{x}(t_f^*) = \Phi(\sigma, 0) \delta \mathbf{x}(t_f^*) \quad (16)$$

の如く終端の $\delta \mathbf{x}(t_f^*)$ によって表わせるから

$$\delta \mathbf{x}^T(t_f^*) \Omega \delta \mathbf{x}(t_f^*) = \delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{W}(\sigma, 0) \delta \mathbf{x}(t) \leq 1 \quad (17)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\sigma, 0) &= (\Phi^{-1}(\sigma, 0))^T \Omega \Phi^{-1}(\sigma, 0) \\ &= \Psi(\sigma, 0) \Omega \Psi^T(\sigma, 0) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\hat{\Psi}(\sigma, 0) = [A(\sigma) - D(\sigma)K(\sigma)]^T \Psi(\sigma, 0) \quad (19)$$

$$\Psi^T(\sigma, 0) \Phi(\sigma, 0) = I \quad (20)$$

と書ける。また, $\mathbf{W}(\sigma, 0)$ は次のマトリクス微分方程式を解くことによっても容易に得られる。

$$\dot{\mathbf{W}}(\sigma, 0) = F^T(\sigma) \mathbf{W}(\sigma, 0) + \mathbf{W}(\sigma, 0) F(\sigma) \quad (21)$$

$$\mathbf{W}(0, 0) = \Omega \quad (\text{正定対称}) \quad (22)$$

$$F(\sigma) = A(\sigma) - D(\sigma)K(\sigma) \quad (23)$$

結局, 可制御集合 S_t は (17) 式から,

$$S_t = \{\delta \mathbf{x}(t); \delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{W}(\sigma, 0) \delta \mathbf{x}(t) \leq 1, \sigma = t_f^* - t\} \quad (24)$$

の如く書ける。(21), (22) 式から明らかに $\mathbf{W}(\sigma, 0)$ は任意の時刻で正定対称マトリクスとなるから (24) 式の可制御集合は, 前述の如く, n 次元楕円体の境界およびその内部を表わしている。

次に, 集合 S_t の大きさを評価するために, n 次元直積空間の部分集合の測度として, その体積を採用する。時刻 $\sigma (= t_f^* - t)$ における重みマトリクス $\mathbf{W}(\sigma, 0)$ の固有ベクトルを要素とする Modal Matrix を $\mathbf{M}(\sigma)$, また固有値を対角要素とする対角マトリクスを $\Lambda(\sigma)$ とすれば

$$\mathbf{M}(\sigma) \Lambda(\sigma) = \mathbf{W}(\sigma, 0) \mathbf{M}(\sigma) \quad (25)$$

$$\mathbf{M}^T(\sigma) \mathbf{M}(\sigma) = I \quad (26)$$

なる関係にあり, 線形変換

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{M}(\sigma) \mathbf{y}(t), \quad \sigma = t_f^* - t \quad (27)$$

によって (17) 式を変換すれば,

$$\mathbf{y}^T(t) \Lambda(t) \mathbf{y}(t) \leq 1 \quad (28)$$

ここに $\mathbf{W}(\sigma, 0)$ は正定対称であるから, マトリクス $\Lambda(\sigma)$ の対角要素 ($\mathbf{W}(\sigma, 0)$ の固有値) はすべて正の実数であり, 確かに n 次元楕円体を表わしている。線形変換によって集合の測度は不変であるから, 集合 S_t の測度は

$$\text{mes.}\{S_t\} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (29)$$

ここに, $\Gamma(\cdot)$: ガンマ関数

λ_i : $\mathbf{W}(\sigma, 0)$ の固有値 ($i=1, 2, \dots, n$)

となる。さらに固有値の積は行列式になるから

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\Lambda(\sigma)| = |\mathbf{W}(\sigma, 0)| \quad (30)$$

と書くことができ, さらに行列式 $|\mathbf{W}(\sigma, 0)|$ は次式のように解くことができる (付録 B 参照)。

$$|\mathbf{W}(\sigma, 0)| = |\Omega| \exp\left\{2 \int_0^\sigma \text{tr}[F(\tau)] d\tau\right\} \quad (31)$$

ここに,

$$\text{tr}[F(\tau)] = \text{trace}[A(\tau) - D(\tau)K(\tau)] \quad (32)$$

$$0 \leq \tau \leq \sigma \quad (\text{逆時間パラメータ})$$

したがって, (29) 式の $\text{mes.}\{S_t\}$ は

$$\begin{aligned} \text{mes.}\{S_t\} &= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \\ &\quad \times \exp\left\{-\int_0^\sigma \text{tr}[F(\tau)] d\tau\right\} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。

以上によって, 本報告における意味での可制御集合 S_t およびその測度 $\text{mes.}\{S_t\}$ の定義および表現を得た。

4. 最適重みマトリクス $\mathbf{Q}(t)$ の必要条件

まえがきで述べた如く, 外乱に対して系の安定度を高め, 大きな外乱をうけても, $t=t_f^*$ において与えられた終端の許容誤差集合に至るという制御の所期の目的を達成しうするためには, 外乱による擾乱量に対応し, かつ, そのうち許容されるものの全体からなる前節で定義された許容誤差集合 S_t の測度が大きいほどよいことは明らかである。以下 S_t の測度を最大にするためにマトリクス $\mathbf{Q}(t)$ の満たすべき必要条件を導く。

(33) 式から,

$$\max[\text{mes.}\{S_t\}] \sim \min \int_0^\sigma \text{tr}[F(\tau)] d\tau \quad (34)$$

なる同等関係にあり, $F(\tau)$ は $K(\tau)$ の関数であって, $K(\tau)$ は (9) の Riccati 方程式を満たす。したがって, $K(\tau)$ を状態量マトリクス, $\mathbf{Q}(\tau)$ を操作量マトリクスと見なせば, Riccati 方程式 (9) を非ホロノーム条件とする最適問題が構成される。ただし, マトリクス $\mathbf{R}(\tau)$ は, 何らかの方法によって既知であるか, 次節の意味で最適に選ばれているものとする*。

* 実際には, あらかじめマトリクス \mathbf{R} を本報告における意味で最適に選ぶことは, ほとんど不可能であり, 次節に述べるような必要条件を満たすように繰り返し計算によって最適化される。

ここで、誤差楕円体の測度に対する評価関数 (34) 式の Convexity を保証するために、操作マトリクス $Q(t)$ のノルムに制限を加える。この制限の妥当性は、二次形式評価関数 (7) 式における $Q(t)$, $R(t)$ の各要素は、その相対的大きさが重要な意味を持ち、マトリクス $Q(t)$ のノルムの大小に応じてマトリクス $R(t)$ のノルムが相対的に決定され得るので、マトリクス $Q(t)$ のノルムを制限し、マトリクス $R(t)$ との相対的關係はすべてマトリクス $R(t)$ において調整されると見なすことが可能なことにある。この事は、次節で述べるマトリクス $R(t)$ の決定法によって明らかになるであろう。このノルムの制限を

$$\|Q(\sigma)\| \triangleq \sqrt{\text{tr}[Q^T(\sigma)Q(\sigma)]} = 1 \quad \forall \sigma \in [0, t_f^* - t_0] \quad (35)$$

とすれば、新たに構成された最適問題は次の如くなる。

評価関数;

$$J = \min_{\|Q\|=1} \int_0^{\sigma_0} \text{tr}[A(\tau) - D(\tau)K(\tau)] d\tau \quad (36)$$

非ホロノーム条件;

$$\left. \begin{aligned} \hat{K}(\sigma) &= K(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)K(\sigma) \\ &\quad - K(\sigma)D(\sigma)K(\sigma) + Q(\sigma) \\ K(0) &= Q \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここに、 $\sigma_0 = t_f^* - t_0$, $K(0)$ は $\sigma = 0$ における K を意味する。

上の問題に対して、ポントリヤギンの最小原理を適用する。すなわち、Costate Matrix $P(\sigma)$ ($n \times n$) およびラグランジ剰数 μ を導入してハミルトニアン \mathcal{H} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\triangleq \text{tr}\{P^T(\sigma)\{K(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)K(\sigma) \\ &\quad - K(\sigma)D(\sigma)K(\sigma) + Q(\sigma)\} + F(\sigma)\} \\ &\quad + \mu[\text{tr}\{Q^T(\sigma)Q(\sigma)\} - 1] \end{aligned} \quad (38)$$

これより、Riccati 方程式 (37) に応ずる Costate Matrix の方程式は、

$$\begin{aligned} \hat{P}(\sigma) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = -[A(\sigma) - D(\sigma)K(\sigma)]P(\sigma) \\ &\quad - P(\sigma)[A(\sigma) - D(\sigma)K(\sigma)]^T + D(\sigma) \end{aligned} \quad (39)$$

$$P(\sigma_0) = O \quad (40)$$

となる。ここに、マトリクスによる偏微分 $\partial(\cdot)/\partial K$ は、第 i 行 j 列目要素が $\partial(\cdot)/\partial k_{ij}$ を意味する。また、最小原理から、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = P(\sigma) + 2\mu Q(\sigma) = O \quad (41)$$

$$\therefore Q(\sigma) = -\frac{P(\sigma)}{2\mu} \quad (42)$$

の如く最適重みマトリクス $Q(\sigma)$ が得られ、 μ は (35) 式によって

$$2\mu = \sqrt{\text{tr}[P^T(\sigma)P(\sigma)]} = \|P(\sigma)\| \quad (43)$$

となり、結局; 最適重みマトリクス $Q(\sigma)$ は、

$$Q(\sigma) = -\frac{P(\sigma)}{\|P(\sigma)\|} \quad (44)$$

となる。すなわち、最適重みマトリクス $Q(\sigma)$ は、マトリクスをベクトル的に考えるなら、Costate Matrix と平行逆向きに取ればよい。しかしながら、 $\sigma = \sigma_0$ において Costate Matrix は (40) 式における如く特異となり、(44) 式は不定となる。したがって、解は半開区間 $[0, \sigma_0)$ で意味を持つが、 $\sigma = \sigma_0$ における操作マトリクス $Q(\sigma_0)$ は σ_0 の直前 (σ_{0-0}) の操作マトリクスに等しい (極限の意味で) と思ってよい。マトリクス $P(\sigma)$ は連続であるから十分小さな $1 \gg \varepsilon > 0$ に対して、平均値定理より

$$\begin{aligned} P(\sigma_{0-\varepsilon}) &= P(\sigma_0) - \hat{P}(\sigma_{0-\theta\varepsilon})\varepsilon \\ &= -\hat{P}(\sigma_{0-\theta\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < 1 \end{aligned} \quad (45)$$

したがって、

$$Q(\sigma_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Q(\sigma_{0-\varepsilon}) = \frac{D(\sigma_0)}{\|D(\sigma_0)\|} \quad (46)$$

によって $\sigma_0 (= t_f^* - t_0)$ における最適重みマトリクス $Q(\sigma_0)$ を定義する。

以上によって、誤差楕円体の測度最大なるための重みマトリクス $Q(t)$ の必要条件が通常最適問題と同様に求まった。なお、(36) 式において積分上限を σ_0 としたが、これはプロセスの初期における誤差楕円体の測度最大を意味する。しかしながら、最適性原理から任意の $\sigma < \sigma_0$ に対しても最大になっていることが容易にわかる。

5. 最適重みマトリクス $R(t)$ の必要条件

一般に修正操作量 $\delta u(t)$ は、(5) 式の如く、ある限られた閉集合 \mathcal{U} の元であることが要求される。また操作量 (m 個) は普通それぞれ独立であり、その制限領域がまた独立に与えられることが多い。したがって、ここでは閉集合 \mathcal{U} として原点を含む m 次元超直方体を仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\triangleq \{\delta u(t); |\delta u_j(t)| \leq \delta U_i, \\ &\quad i=1, 2, \dots, m; 0 \leq t \leq t_f^*\} \end{aligned} \quad (47)$$

前節までに定義された可制御領域 S_i 以外の状態量に関しては、(7) 式のような二次形式を評価関数とす

る制御法則 ((8) 式) によっては, 終端の許容集合 S_{if} への到達が不可能である。したがって, 系の機能が有効に発揮されるという意味で, 可制御領域の状態量の全体に対して, 許容コントロールの全体を利用することが好ましい。すなわち, 任意の $\delta x(t) \in S_i$ に対して, (8) 式から決定される $\delta u(t)$ が $\delta u(t) \in \mathcal{U}$ であり, かつ, $\delta x(t) \in S_i^c$ (S_i の補集合) に対して, (8) 式で決まる $\delta u(t)$ が $\delta u(t) \in \mathcal{U}^c$ となるように決定されていれば, 全体としての制御系の機能は十分に発揮されていることになる。このような考えに基づき最適重みマトリクス $R(t)$ の必要条件を求めらる。

$$\begin{aligned} \max_{\delta x \in S_i} \{\delta u(t)\} &= \max_{\delta x \in S_i} \{-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\delta x(t)\} \\ &= \delta U \end{aligned} \quad (48)$$

$$\forall t \in [t_0, t_f^*]$$

ここに,

$$\delta U \triangleq [\delta U_1, \delta U_2, \dots, \delta U_m]^T \quad (49)$$

(48) 式の第 2 辺, $\{ \}$ 内は $\delta x(t)$ に関して線形であるから, その最大値は有界閉集合 S_i の境界 (∂S_i) 上の状態量で得られる。また, 仮定により対角マトリクス $R(t)$ は正定であるから, 仮りに (48) 式を満たす最適な $R(t)$ が求まったものとすれば*, (48) 式は次のように書ける。

$$\max_{\delta x \in \partial S_i} \{-b_i^T(t)K(t)\delta x(t)\} = r_i(t)\delta U_i, \quad (50)$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad \forall t \in [t_0, t_f^*]$$

$$\partial S_i \triangleq \{\delta x(t); \delta x^T(t)W(\sigma, 0)\delta x(t) = 1, \sigma = t_f^* - t\} \quad (51)$$

ここに, $b_i(t)$ はマトリクス $B(t) (= \{\partial f_j / \partial u_i\})$ の第 i 列目の縦ベクトルであり, $r_i(t)$ は対角正定マトリクス $R(t)$ (最適) の i 行 i 列要素である。

マトリクス $W(\sigma, 0)$ は正定であるから, ラグランジ剰数 $\eta_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) の導入により, (50) 式左辺 $\{ \}$ 内は,

$$\begin{aligned} \delta x^{(i)}(t) &= -\frac{1}{2\eta_i(t)} W^{-1}(\sigma, 0)K(t)b_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad \forall t \in [t_0, t_f^*], \quad \sigma = t_f^* - t. \end{aligned} \quad (52)$$

なる $\delta x^{(i)}(t)$ において最大となり, ここに

$$2\eta_i(t) = \sqrt{b_i^T(t)K(t)W^{-1}(\sigma, 0)K(t)b_i(t)} \quad (53)$$

である。この誘導については, 付録 C に述べられている。したがって

* ここでは, マトリクス R の満たすべき必要条件を求めらるのであるから, この仮定は妥当である。

$$\begin{aligned} \max_{\delta x \in \partial S_i} \{-b_i^T(t)K(t)\delta x(t)\} \\ &= \sqrt{b_i^T(t)K(t)W^{-1}(\sigma, 0)K(t)b_i(t)} \\ &= r_i(t)\delta U_i \end{aligned} \quad (54)$$

結局, 任意の時刻における可制御集合 S_i 内の $\delta x(t)$ に応ずる修正操作量ベクトル $\delta u(t)$ のうち, 最大の操作量が各成分ごとに許容集合 \mathcal{U} の境界 ($\partial \mathcal{U}$) 上にある条件は,

$$\begin{aligned} r_i(t) &= \frac{\sqrt{b_i^T(t)K(t)W^{-1}(\sigma, 0)K(t)b_i(t)}}{\delta U_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad \forall t \in [t_0, t_f^*], \quad \sigma = t_f^* - t \end{aligned} \quad (55)$$

の如く得られる。しかしながら, マトリクス $K(t)$, $W(\sigma, 0)$ がマトリクス $R(t)$ に依存することから, (55) 式は $r_i(t)$ に関して Implicit であり, 繰り返し計算に頼らざるを得ない (次節参照)。

また, 重みマトリクス $Q(t)$ のノルムを制限することによって, 重みマトリクス $Q(t)$, $R(t)$ の各要素間の相互相対関係は, マトリクス $R(t)$ の決定課程にゆだねるという第 4 節の仮定が満たされているとは, ここにおける $R(t)$ の満たすべき必要条件 (55) 式の誘導過程から容易に想像される。

以上によって, 最適重みマトリクスに対する必要条件が導かれた。

6. 計算手順

前節までに述べられた最適重みマトリクスの必要条件に関する考察は, 基本となる系の Stationary, Non-stationary に無関係に適用され, 実際に重みマトリクスを最適に決定しようとするときの一指針を与える。

本節では, 前節までに述べた必要条件を利用して重みマトリクスを計算する手順を簡単に述べる。ここで述べる計算は, 制御系を設計する前に行なわれる計算で, いわゆる Off-line の計算である。

(37), (39), (40) および (44) で与えられるマトリクス方程式の 2 点境界値問題を, マトリクス $R(t)$ をパラメータとして解くことができ, かつ, マトリクス $R(t)$ の対角要素が (55) 式を満たすとき, 得られる $Q(t)$, $R(t)$ は可制御領域 (集合の測度) 最大という意味で最適である。

$R(t)$ の対角要素が満たすべき (55) 式を $r_i(t)$ に関して, 解析的に解けた形に表現することは不可能であり, 第 5 節で述べたように “繰り返し計算” に依らざるを得ない。第 l 回目繰り返しにおける $R(t)$ の推定 $R^{(l)}(t)$ に対して, $K^{(l)}(t)$, $[W^{-1}(\sigma, 0)]^{(l)}$ が応ずるものとすれば, $l+1$ 回目の $R(t)$ の推定 $R^{(l+1)}(t)$

は次のように選ぶ。 $R(t)$ が対角マトリクスであることを考慮すれば、

$$\bar{r}_i^{(l)}(t) \triangleq \frac{\sqrt{b_i^T(t) K^{(l)}(t) [W^{-1}(\sigma, 0)]^{(l)} K^{(l)}(t) b_i(t)}}{\delta U_i}, \quad (56)$$

$$r_i^{(l+1)}(t) = r_i^{(l)}(t) + \varepsilon (\bar{r}_i^{(l)}(t) - r_i^{(l)}(t)). \quad (57)$$

ここに、

$$0 < \varepsilon \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad \forall t \in [t_0, t_f^*] \quad (58)$$

ただし、 ε は収束を考慮して十分小さく選ぶべきである。

次に、繰り返し計算の要領を順を追ってまとめると

- (1) 第1回目の $R^{(l)}(t)$ の推定 $R_0 \equiv \text{Constant}$ を仮定する。

このときのマトリクス R_0 は、 $P(t), K(t)$ に関する初回の2点境界値問題が解き安いように仮定するのがよい。一般には、Riccati 方程式の非線形効果が少なくなるように $\|R_0\|$ を大きめに選ぶとよい。

以後 l 回目 $R(t)$ の推定 $R^{(l)}(t)$ が得られたものとして記述する。

- (2) $R^{(l)}(t)$ に応じて、(37), (39), (40) および(44)式から $P(t), K(t)$ に関する2点境界値問題を解き、得られる結果を $P^{(l)}(t), K^{(l)}(t)$ および $Q^{(l)}(t)$ とする。

ここに、2点境界値問題を解くに当って、 $P(t), K(t)$ の対称性を利用するとよい。また、 $t=t_0$ において(44)式の $Q^{(l)}(t_0)$ が不定となることによって、計算機が“あふれ”を起さぬように(46)式を考慮する。さらに、2点境界値問題を解くための繰り返し計算に当って、端末 $K^{(l)}(t_0)$ あるいは $P^{(l)}(t_f^*)$ のための初回の推定は、 $(l-1)$ 回目の最後の結果を利用するとよい。

- (3) (2) で計算された $K^{(l)}(t)$ に対して $[W^{-1}(\sigma, 0)]^{(l)}$ を求める。これは、 $W^{(l)}(\sigma, 0)$ を求めて、その逆マトリクスを求めてもよいが、 $R(t)$ の収束のみを目的とするならば、マトリクス $W(\sigma, 0)$ を求める必要はなく、直接次式

$$\hat{W}^{-1} = -W^{-1}(\sigma, 0) F^T(\sigma) - F(\sigma) W^{-1}(\sigma, 0), \quad (59)$$

$$W^{-1}(0, 0) = Q^{-1}$$

を解く方がよい。

- (4) (2), (3) の結果 $(K^{(l)}(t), [W^{-1}(\sigma, 0)]^{(l)})$ を利用して、(56)式によって $\bar{r}_i^{(l)}(t)$ を計算する。
($i=1, 2, \dots, m$)

- (5) $\max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \{ \sup_{t \in [t_0, t_f^*]} |\bar{r}_i^{(l)}(t) - r_i^{(l)}(t)| \}$ が許容精度以内に収束したならば、マトリクス $W(\sigma, 0)$ を計算して終了する。そうでないならば、次の手順(6)を実行する。

- (6) (57)式によって $r_i^{(l+1)}(t)$, すなわち $R^{(l+1)}(t)$ を推定し、再び上の手順(2)から繰り返す。ここに、手順(2)で述べたように、2点境界値問題を解くための端末、 $K(t_0)$ あるいは $P(t_f^*)$ の最初の推定は前回の結果(ここでは、 l 回目の結果)を利用するから、2点境界値問題の収束が早いように(57)式の ε は十分小さく選ぶとよい。

以上の計算手順によって、もし解が存在するならば前節までに述べた必要条件を満たす $K(t), P(t), Q(t), R(t)$, および $W(\sigma, 0)$ が求まる。したがって、第8節で述べる系の実現に当って必要なものはすべて求まっている。さらに、この段階でフィードバックゲインに相当する $R^{-1}(t) B^T(t) K(t)$ も同時に計算出力しておくると便利である。

7. 例題

前節までに求めた可制御集合の測度を最大ならしめる二次形式評価関数における最適重みマトリクスに対する必要条件の応用例を二つに示す。最初の例題は、解析的に解ける Zermelo's Problem である。後の例題は加速度制御の二次系であり、電子計算機によって解いた。

例題 1. Zermelo's Problem は、 z および x 方向にそれぞれ u, v なる速度で流れる水に対して、一定速度 V なる船がある (図1参照)。このとき、原

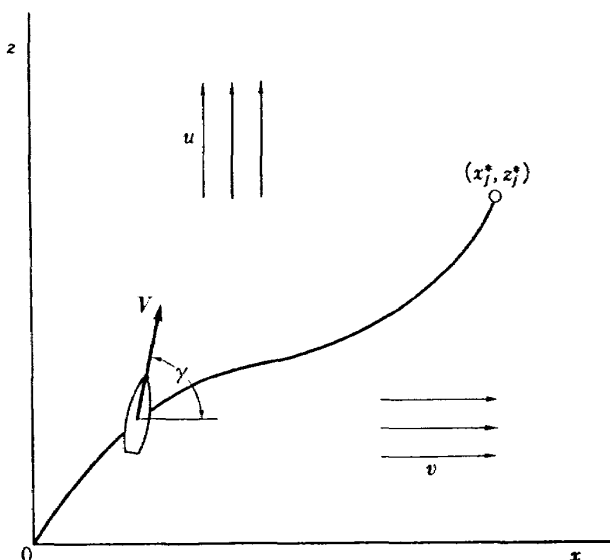


図1 Zermelo's Problem

点から目標 (x_f^*, z_f^*) に最短時間で移行する径路を求めよ』⁹⁾ というものである。これは、適当な相対座標系において、運動する標的に最短時間で命中する問題に等しい。 u, v が一定の場合のこの問題の解は、初期点と終端点を結ぶ直線になることはよく知られている。ここにおける例題としては、原点と終端を結ぶ最適解を基準解と見なし、終端にある許容誤差を置くことによって、線形フィードバック制御による可制御集合の測度を最大ならしめるように、二次形式評価関数の重みマトリクスを決定することである。基本最適問題は、次の如く書ける⁸⁾。

$$\text{運動方程式} \quad \dot{x} = V \cos \gamma + v \quad (60)$$

$$\dot{z} = V \sin \gamma + u \quad (61)$$

$$\text{Hamiltonian} \quad \mathcal{H} = \lambda_1 (V \cos \gamma + v) + \lambda_2 (V \sin \gamma + u) + 1 \quad (62)$$

$$\text{随伴方程式} \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0 \quad (63)$$

$$\text{最適 Steering 角} \quad \sin \gamma^* = -\lambda_2 / (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} \quad (64)$$

$$\cos \gamma^* = -\lambda_1 / (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} \quad (65)$$

本例題のため数値例として、

$$\left. \begin{aligned} x_0 = 0, x_f^* = 2.0, t_0 = 0, V = 1.0, u = 0.5, v = 0 \\ z_0 = 0, z_f^* = 1.0, t_f^* = 2.0, \lambda_1 = -1/V = -1, \lambda_2 = 0 \\ \sin \gamma^* = 0, \cos \gamma^* = 1, \gamma^* \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

を採用すれば、基準解としての命中する最適軌道は、

$$z^*(t) = 0.5 x^*(t) \quad (67)$$

となる。以後、本報告に述べられた記号および手順にしたがって解析を進める。

基準解に沿った擾乱方程式 ((4) 式) は、

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta \gamma \quad (68)$$

$$A = 0, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

二次形式評価関数 ((7) 式) は、

$$J = \min_{\delta \gamma \in \mathcal{Q}} \left[\frac{1}{2} (\delta x, \delta z) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f^*} \left\{ (\delta x, \delta z) Q \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + R (\delta \gamma)^2 \right\} dt \right] \quad (70)$$

ここで、付録 A にしたがって正定対称マトリクス Q を構成する。すなわち、終端における許容誤差を規定する。

終端拘束条件を、

$$\Psi_f^{(1)} = x(t_f^*) - 2.0 = 0, \quad \Psi_f^{(2)} = z(t_f^*) - 1.0 = 0 \quad (71)$$

と見なし、その許容変動の最大値を仮りに α とする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} |\delta x(t_f^*)| &\leq (d\Psi_f^{(1)})_{\max} = \alpha, \\ |\delta z(t_f^*)| &\leq (d\Psi_f^{(2)})_{\max} = \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

したがって、 $\xi_1 \alpha^2 = \xi_2 \alpha^2 = 1$ (付録 A の (A-8) 式) より

$$E = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2} I \quad (I: \text{単位マトリクス}) \quad (73)$$

また、(71) 式より、

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial x_f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi_f \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_f^{(1)}, \Psi_f^{(2)} \\ \delta x(t_f^*), \delta z(t_f^*) \end{pmatrix}^T \quad (74)$$

であるから、(A-12) 式によって

$$Q = \frac{1}{\alpha^2} I \quad (75)$$

の如く Q が決定される。この場合、(74) はすでに最大ランクを持つので付録 A におけるような $\hat{\Psi}_f$ を付け加える必要はない。逆時間 σ に対する Riccati 方程式 ((37) 式) は、

$$\hat{K}(\sigma) = -K(\sigma) D(\sigma) K(\sigma) + Q(\sigma) \quad (76)$$

$$K(0) = Q \quad (77)$$

ここに

$$D(\sigma) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Costate Matrix 方程式 ((39), (40) 式) は、

$$\hat{P}(\sigma) = P(\sigma) [D(\sigma) K(\sigma)]^T + D(\sigma) K(\sigma) P(\sigma) + D(\sigma) \quad (79)$$

$$P(\sigma_0) = 0, \quad \sigma_0 = 2.0 \quad (80)$$

最適重みマトリクス $Q(\sigma)$ は、

$$Q(\sigma) = -P(\sigma) / \|P(\sigma)\| \quad (81)$$

マトリクス $P(\sigma)$ の対称性を利用して (79) 式を書き直せば ($P(\sigma) = \{p_{ij}\}$, $K(\sigma) = \{k_{ij}\}$ として)、

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{11} &= 0 \\ \hat{p}_{12} &= (k_{12} p_{11} + k_{22} p_{12}) / R \\ \hat{p}_{22} &= (2 k_{22} p_{22} + 1) / R \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

であり、プロセス中 k_{ij} は連続有界であるから (80) によって、

$$p_{11} = p_{12} = p_{21} \equiv 0 \quad (83)$$

となるから、最適重みマトリクス $Q(\sigma)$ は (81) 式より、

$$Q(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

の如く決定される。ここにおけるようにマトリクス $Q(\sigma)$ が、(82) 式を完全に解かなくても決定されるならば、(78) 式を完全に解く必要はない。何故なら Costate 方程式は、 $Q(\sigma)$ を決定する時に限って使用されるからである。

一方, (76) 式は, (84) 式および $K(\sigma)$ の対称性によって $(Q(\sigma) = \{q_{ij}\})$ として,

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11} &= -\frac{1}{R} k_{12}^2 + q_{11} = -\frac{1}{R} k_{12}^2 \\ \hat{k}_{12} &= -\frac{1}{R} k_{12} k_{22} + q_{12} = -\frac{1}{R} k_{12} k_{22} \\ \hat{k}_{22} &= -\frac{1}{R} k_{22}^2 + q_{22} = -\frac{1}{R} k_{22}^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

の如くなり, (75), (77) 式によって,

$$k_{11} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad k_{12} = k_{21} = 0 \quad (86)$$

$$\hat{k}_{22} = -\frac{1}{R} k_{22}^2 + 1 \quad (87)$$

さらに, 可制御集合の重みマトリクス $W(\sigma)$ は (22) 式から, その対称性によって $(W(\sigma) = \{w_{ij}\})$ として,

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_{11} &= 0 \\ \hat{w}_{12} &= -\frac{1}{R} k_{22} w_{12} \\ \hat{w}_{22} &= -\frac{2}{R} k_{22} w_{22} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

となり, (22), (75) 式から

$$w_{11} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad w_{12} = 0 \quad (89)$$

$$w_{22} = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\int_0^{\sigma} \frac{2}{R} k_{22} d\tau} \quad (90)$$

の如く解ける。これから, $W(\sigma)$ の逆マトリクス $W^{-1}(\sigma)$ を求めると,

$$W^{-1}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \alpha^2 e^{\int_0^{\sigma} \frac{2}{R} k_{22} d\tau} \end{pmatrix} \quad (91)$$

したがって, ステアリング角の許容範囲を $\delta U (|\delta\gamma| \leq \delta U)$ とすれば, 最適重みマトリクス $R(\sigma)$ の必要条件 (55) 式は, この問題では R は一次元であるから,

$$R(\sigma) \delta U = \alpha k_{22}(\sigma) \cdot e^{\int_0^{\sigma} \frac{1}{R(\tau)} k_{22}(\tau) d\tau} \quad (92)$$

の如く得られる。ここで,

$$k_{22} = \frac{R\dot{y}}{y} \quad (93)$$

なる変数変換によって (87), (92) 式を連立して解けば,

$$R(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{\alpha}{\delta U} \sigma + \frac{1}{\alpha \delta U} \quad (94)$$

$$k_{22}(\sigma) = \frac{R(\sigma)}{\sigma + \frac{\alpha}{\delta U}} \quad (95)$$

の如く解ける。同様にして (90) 式から

$$w_{22}(\sigma) = \frac{1}{\delta U^2} \frac{1}{\left(\sigma + \frac{\alpha}{\delta U}\right)^2} \quad (96)$$

となり, 可制御集合の定義式 (17) は,

$$\left(\frac{\delta x(\sigma)}{\alpha}\right)^2 + \left[\frac{\delta z(\sigma)}{\delta U \left(\sigma + \frac{\alpha}{\delta U}\right)}\right]^2 \leq 1 \quad (97)$$

となる。これより, δx に関する逆時間の意味での可制御集合の“広がり”はなく, δz 方向には直線的“広がり”が見られる。また (8) 式のような修正操作は,

$$\delta\gamma(\sigma) = -\frac{k_{22}(\sigma)}{R(\sigma)} \delta z(\sigma) = \frac{-1}{\sigma + \frac{\alpha}{\delta U}} \delta z(\sigma) \quad (98)$$

となり, の問題における全体の制御法則は,

$$\gamma(t) = \gamma^*(t) - \frac{1}{(t_f^* - t) + \frac{\alpha}{\delta U}} \delta z(t), \quad (99)$$

$(\gamma^*(t) \equiv 0)$

の如く得られる。

以上のように, 最適重みマトリクスが (84), (94) 式の如く決定され, ゲインに影響するマトリクス K は (86), (95) 式の如く決定された。さらに, 可制御集合が (97) 式の如くに得られた。図 2, 図 3 は $\alpha = 0.01$, $\delta U = \pi/4$ の場合の重みマトリクスおよびマトリクス K の時間歴を示し, 図 4 はフィードバックゲインを示す。また, 図 5 は, $\delta x = 0$ における δz

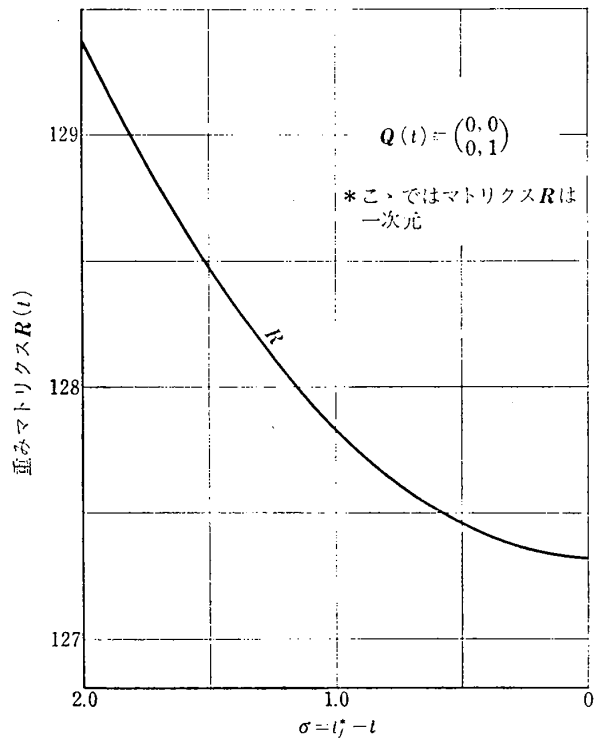


図 2 重みマトリクスの時間歴

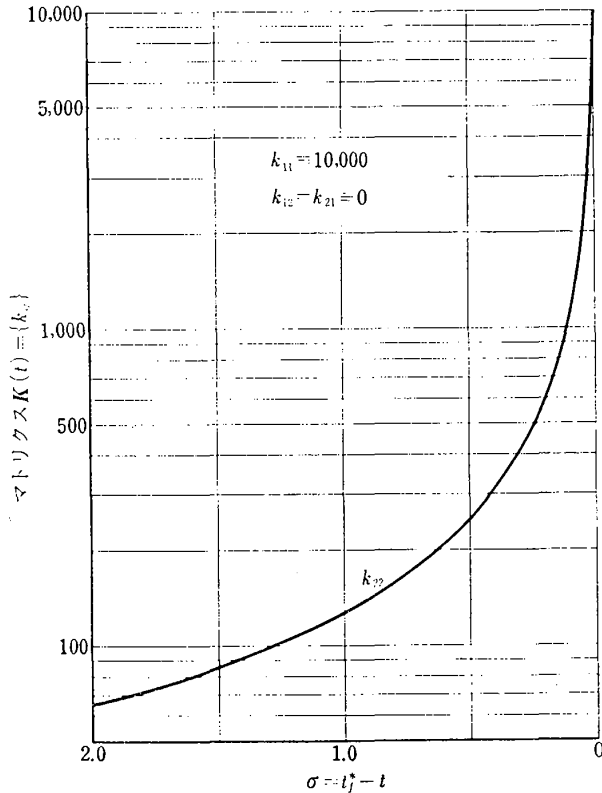


図3 マトリクス $K(t)$ の時間歴

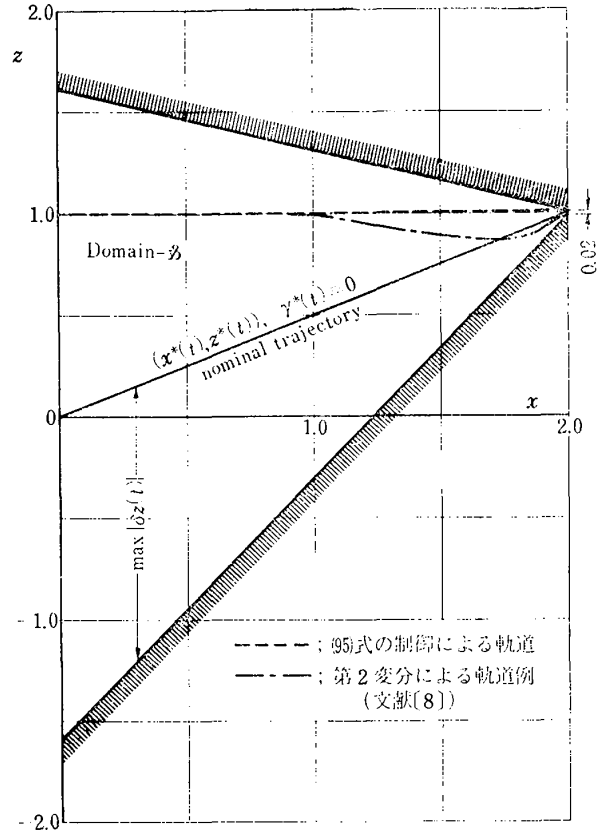


図5 $\delta_x(t) = 0$ における可制御領域

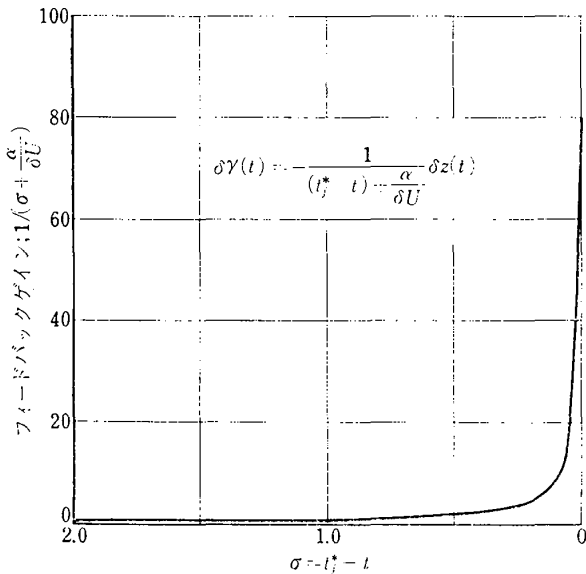


図4 フィードバックゲイン

方向の可制御範囲および擾乱軌道を示したものである。図5の領域 \mathfrak{B} 内はすべて、(99) 式によって終端の許容誤差内に到達可能であり、その時常に $|\delta\gamma| \leq \pi/4$ が満たされる。また領域 \mathfrak{B} 内の任意の点から出発する軌道は直線となり、この問題では、たまたま第2変分から求めたフィードバック制御に依存する軌道よりも真の最高軌道（終端に至る直線）に近い。

例題 2. 『加速度制御の二次系

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{100}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{101}$$

$$|u| \leq 1 \tag{102}$$

において、プロセス時間 $t_f^* - t_0 = 5 (t_0 = 0)$ 、基準軌道を $[x_1(t), x_2(t)]^T \equiv \mathbf{0}$ としたとき、二次形式評価関数における最適重みマトリクス $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ (ここでは $i, j = 1, 2$)、 $\mathbf{R} = r$ を求め、さらにゲインに影響するマトリクス $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$ および可制御集合を決定するマトリクス $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}$ を求める。ただし、終端（原点）における許容誤差を

$$\left(\frac{\delta x_1(t_f^*)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2(t_f^*)}{\alpha}\right)^2 \leq 1, \alpha = 0.05 \tag{103}$$

とする。』

擾乱方程式および補償操作量の許容集合は、

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= \delta u \end{aligned} \right\} \tag{104}$$

$$\mathcal{U} \triangleq \{\delta u; |\delta u| \leq 1\} \tag{105}$$

と表わせる。(103) 式の領域に対する内接楕円体を付録 A によって求めると、

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{106}$$

逆時間 Riccati 方程式 (37) は、その対称性を考慮

して

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11} &= -\frac{1}{r} [k_{12}(\sigma)]^2 + q_{11} \\ \hat{k}_{12} &= k_{11}(\sigma) - \frac{1}{r} k_{12}(\sigma) k_{22}(\sigma) + q_{12} \\ \hat{k}_{22} &= 2k_{12}(\sigma) - \frac{1}{r} [k_{22}(\sigma)]^2 + q_{22} \end{aligned} \right\} (107)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{11}(0) &= k_{22}(0) = 1/\alpha^2 \\ k_{12}(0) &= k_{21}(0) = 0 \end{aligned} \right\} (108)$$

Costate Matrix $P = \{p_{ij}\}$ に関する方程式 (39) もその対称性から

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{11} &= -2p_{12}(\sigma) \\ \hat{p}_{12} &= \frac{1}{r} k_{12}(\sigma) p_{11}(\sigma) + \frac{1}{r} k_{22}(\sigma) p_{12}(\sigma) - p_{22}(\sigma) \\ \hat{p}_{22} &= \frac{2}{r} k_{12}(\sigma) p_{12}(\sigma) + \frac{2}{r} k_{22}(\sigma) p_{22}(\sigma) + \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} (109)$$

$$p_{11}(\sigma_0) = p_{12}(\sigma_0) = p_{21}(\sigma_0) = p_{22}(\sigma_0) = 0 \quad (110)$$

となる。ここに、 $\sigma_0 = t_f^* - t_0 (= t_f^* = 5, \therefore t_0 = 0)$ 。

また、最適重みマトリクス Q は (44) 式で与えられ、(46) 式は、

$$Q(\sigma_0) = \frac{D(\sigma_0)}{\|D(\sigma_0)\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

の如くなる。以上6個の方程式 ((107), (109)) からなる2点境界値問題を $r(\sigma)$ をパラメータとして解いた後、次のマトリクス W に関する微分方程式を解く。同様にその対称性を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_{11} &= -\frac{2}{r} k_{12}(\sigma) w_{12}(\sigma) \\ \hat{w}_{12} &= w_{11}(\sigma) - \frac{1}{r} k_{22}(\sigma) w_{12}(\sigma) - \frac{1}{r} k_{12}(\sigma) w_{22}(\sigma) \\ \hat{w}_{22} &= 2w_{11}(\sigma) - \frac{2}{r} k_{22}(\sigma) w_{22}(\sigma) \end{aligned} \right\} (112)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{11}(0) &= w_{22}(0) = 1/\alpha^2 \\ w_{12}(0) &= w_{21}(0) = 0 \end{aligned} \right\} (113)$$

の如く書ける。

また、マトリクス $R (= r)$ の満たすべき必要条件 (55) 式は、以上の結果に対して、 $b = [0, 1]^T$ として、

$$r(\sigma) = \frac{1}{\max \delta u} \sqrt{(0, 1) \begin{pmatrix} k_{11}(\sigma) & k_{12}(\sigma) \\ k_{21}(\sigma) & k_{22}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22}(\sigma) & -w_{21}(\sigma) \\ -w_{12}(\sigma) & w_{11}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11}(\sigma) & k_{12}(\sigma) \\ k_{21}(\sigma) & k_{22}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} / |W|}$$

$$\therefore r(\sigma) = \sqrt{\frac{w_{22}(\sigma) [k_{12}(\sigma)]^2 - 2w_{12}(\sigma) k_{12}(\sigma) k_{22}(\sigma) + w_{11}(\sigma) [k_{22}(\sigma)]^2}{w_{11}(\sigma) w_{22}(\sigma) - [w_{12}(\sigma)]^2}} \quad (114)$$

となり、これを満足するように $r(\sigma)$ を選ばねばならない。

以上の計算は極めて複雑であり、解析的に求めることは、ほとんど不可能である。したがって第6節に述べられた手順に沿って、電子計算機によって解いた。

マトリクス R が定マトリクス (すなわち $r \equiv \text{const.}$) の場合と、本報告におけるように時間変化形に取る場合の可制御領域を比較するために、二通りの解き方をした。前者 ($R = \text{定マトリクス}$) においては、(114) 式の代わりに

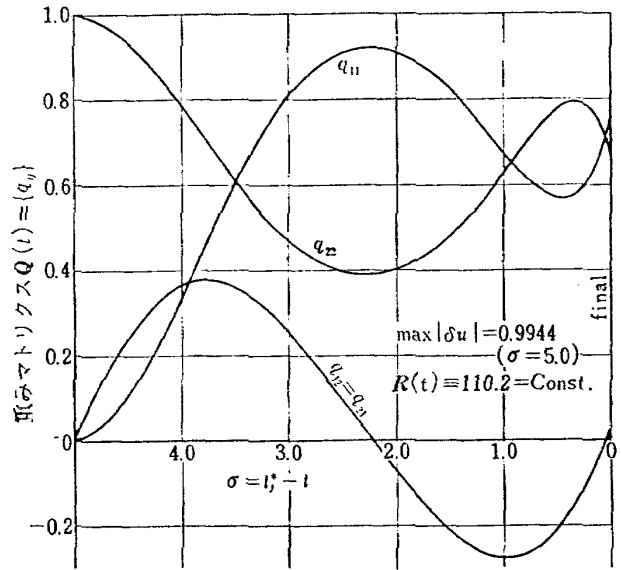


図9 重みマトリクス $Q(t)$; ただし、 $R(t) \equiv \text{const.}$

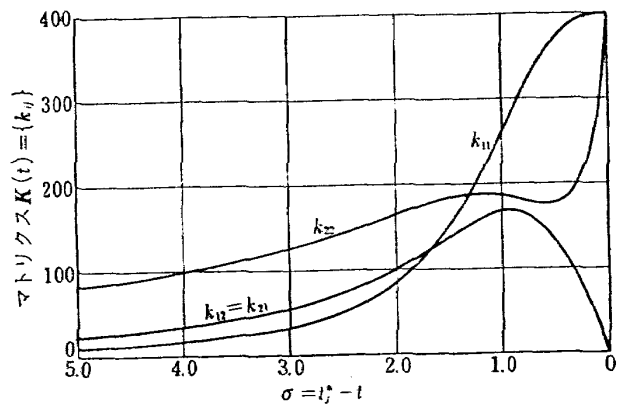


図7 マトリクス $K(t)$ の時間歴; ただし、 $R(t) \equiv \text{const.}$

$$\text{const. } r = \max_{\sigma} \sqrt{\frac{w_{22}(\sigma) [k_{12}(\sigma)]^2 - 2w_{12}(\sigma)k_{12}(\sigma)k_{22}(\sigma) + w_{11}(\sigma) [k_{22}(\sigma)]^2}{w_{11}(\sigma)w_{22}(\sigma) - [w_{12}(\sigma)]^2}} \quad (115)$$

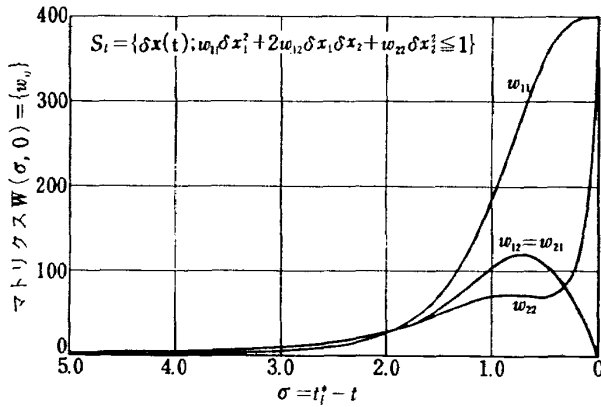


図 8 可制御集合のマトリクス $W(\sigma, 0)$;
ただし, $R(t) \equiv \text{const.}$

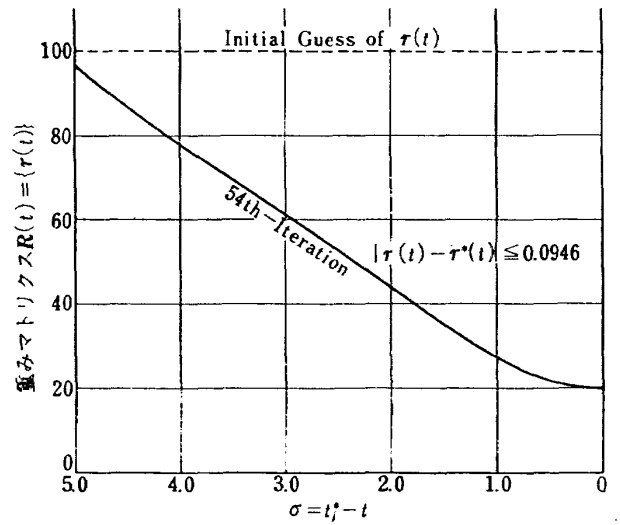


図 11 重みマトリクス $R(t)$

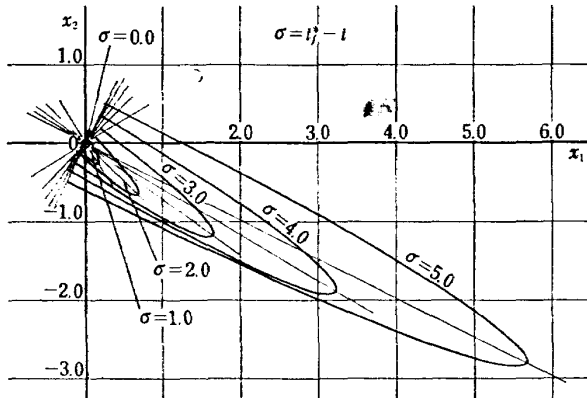


図 9 可制御集合; ただし, $R(t) \equiv \text{const.}$

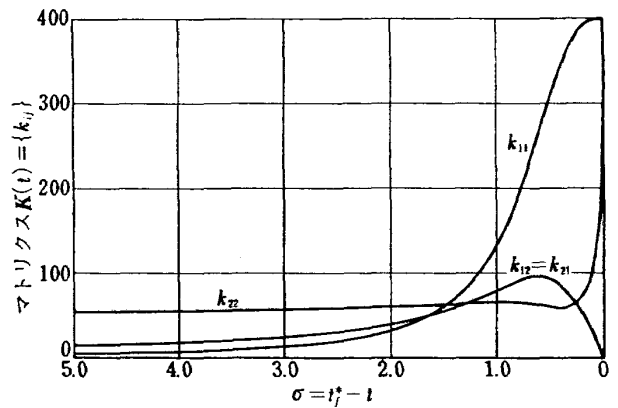


図 12 マトリクス $K(t)$; ただし,
 $R(t) = \text{variable.}$

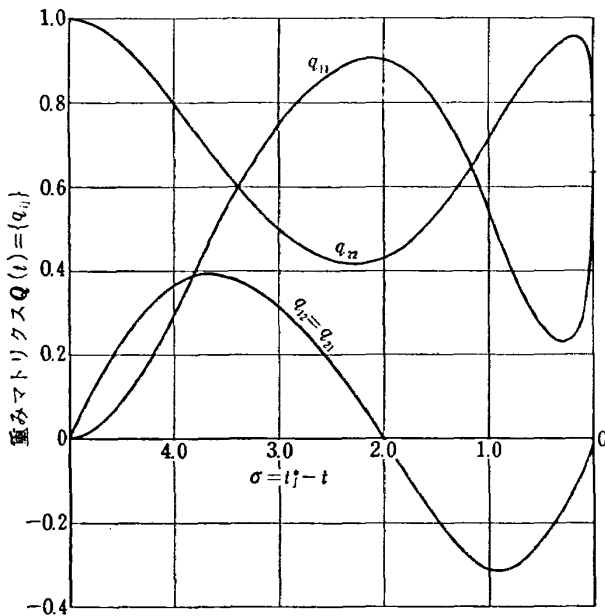


図 10 重みマトリクス $Q(t)$; ただし,
 $R(t) = \text{variable}$

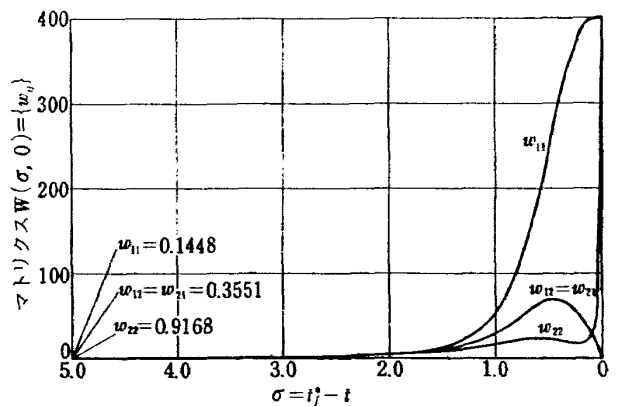


図 13 可制御集合のマトリクス $W(\sigma, 0)$
ただし, $R(t) = \text{variable}$

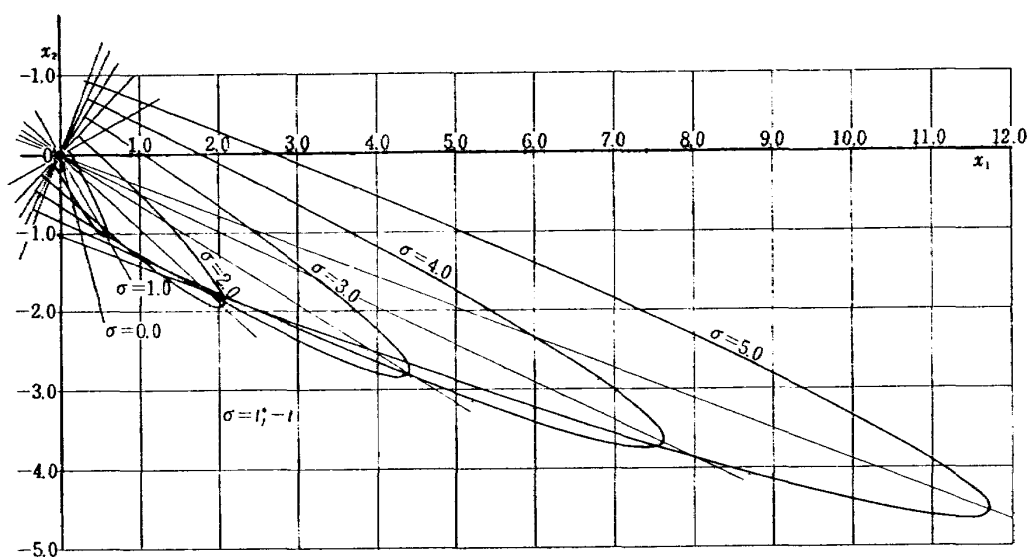


図 14 可制御集合; ただし, $R(t) = \text{variable}$

ここに, $\sigma \in [0, \sigma_0]$ を使用した。これらの計算結果を図 6~図 14 に示す。図 9 と図 14 の比較によって, 本報告における意味で可制御集合 (この問題では図の楕円の内部) を増大させるために, いかにか時間変形重みマトリクス R が寄与するかを知ることができる。すなわち, 持っている操作能力をできるだけ利用するのが好ましい。また, マトリクス $R(t)$ を定マトリクスとして決定する事は, 実際の制御系への応用において, 何ら, その制御系に要求される記憶容量の減少に寄与するわけではなく, 第 6 節で述べた Off-line の計算がわずかに簡単になるにすぎない。なぜなら, 本報告で述べた方法を応用して系を構成する場合, マトリクス $R(t)$ をそのまま記憶するのではなく, フィードバックゲインとして $R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ の形で記憶すべきだからである (次節参照)。

8. フィードバック系の実現に関すること

今までに述べたように最適重みマトリクスを決定して, 実際の制御系 (実は開ループとフィードバック補償閉ループ) を構成しようとするとき, 必要となる複雑で時間を要する繰り返し計算は, すべて, 第 5 節までに述べた必要条件から第 6 節の計算手順にしたがって最適重みマトリクスを決定する過程で完了している。

したがって, この制御系の実現に当たって必要なことは, Sensor あるいは Estimator によるできるだけ正確な状態量の On-line 測定 (たとえば Kalman Filter), いくつかの時間変化量の記憶とその出力および簡単な

計算回路である。予想される制御系のブロック図を図 15 に示す。記憶すべきものは前述のように重みマトリクスの決定過程で計算されており (Off-line), 図 15 では二重枠で示されている。これらの要素の数は状態空間の基準解軌道 $(x^*(t))$; n 個, それに対応する開ループ操作量 $(u^*(t))$; m 個, フィードバックゲインマトリクス $(R^{-1}(t)B^T(t)K(t))$; $m \times n$ 個, 可制御集合を決定する対称重みマトリクス $(W(t_f^* - t, 0))$; $n(n+1)/2$ 個の合計 $n(n+2m+3)/2$ 個である。これらの要素はすべて時間変化量であり, 相互の同期出力 (Synchronized Out Put) が重要である。しかしながら, この同期出力に対する要求は本報告における方法に特有のものではない。また, 要求される記憶容量は従来の他の方法に比べて, 一見 $n(n+1)/2$ 個 ($W(t_f^* - t, 0)$ の記憶の数) 多いように見える。しかし, これによって任意時刻における系の状態量の “はずれ” が可制御集合 $St = \{\delta x(t); \delta x^T(t)W(t_f^* - t, 0)\delta x(t) \leq 1\}$ に属するか否かを簡単な計算によってチェックでき, しかも, 本報告における重みマトリクス $Q(t), R(t)$ の決め方によって, この可制御集合の測度は最大になっている。これが本報告の方法を実際の系に応用したときの大きな特徴となる。任意時刻の状態量の基準軌道からの “はずれ” を知って終端における所期の目的を達成できるか否かを時々刻々判定 (On-line 判定) しようことの利点は, 必要記憶容量の増大を補って余りあると思われる。状態量の擾乱が可制御集合内ならプロセスを続行し, そうでないなら, あきらめてプロセスを中断するか, 最初からやり直す等の次の命令につなげることができる。

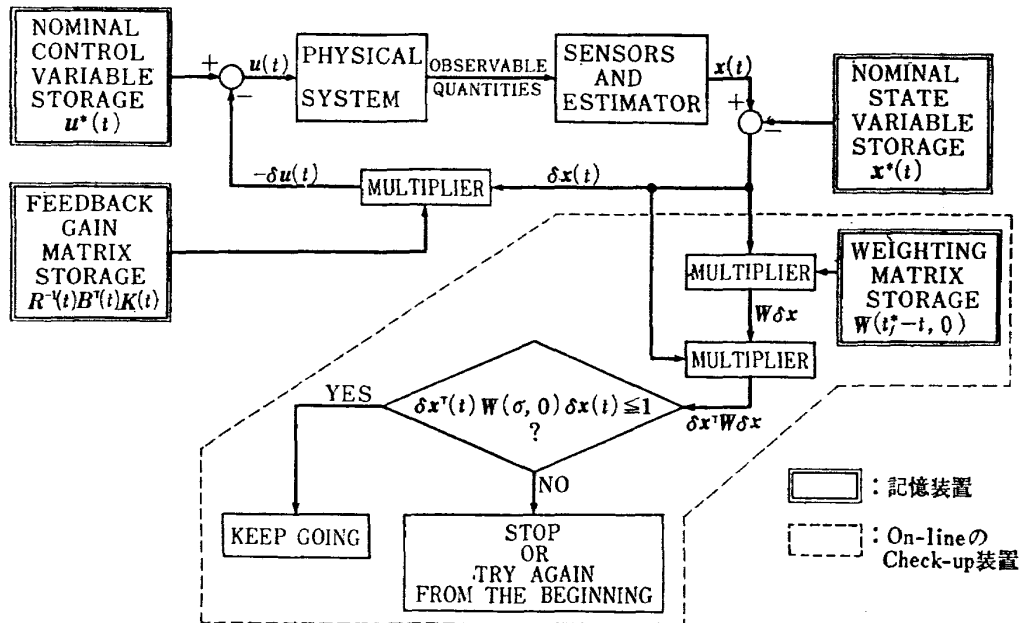


図 15 制御系のブロック図 (On-line Signal Flow)

9. 結 論

系の振舞いが微分方程式で与えられる確定系において、プロセス時間が有限で、基準解軌道およびそれに応ずる操作があらかじめ与えられている。このとき、何らかの原因（たとえば、外乱等）によって基準解軌道からはずれた状態を、なるべく基準解軌道に沿うように、誤差の二次形式評価から得られる最適制御法則によって最適修正操作を求める方法はよく知られている。しかしながら、二次形式評価関数に使われる重みマトリクスは既知とするのが普通であって、プロセス時間が有限の場合には、その決定法に関する報告は全くないといってよい。

本報告では、大きな軌道の“はずれ”にもかかわらず最後の目的をほとんど達成しようとするフィードバック制御の本質的概念の一つを基礎として、二次形式評価関数の重みマトリクスが満たすべき必要条件を求めた。それは、基準解軌道の終端にある誤差集合を許容し、限られた修正操作量と制御法則で、その終端許容誤差集合に到達可能な状態量の全体からなる集合（可制御集合）を定義し、その測度が最大になるとき、対応するマトリクスを最適であると見なすものである。

ここで述べられた必要条件から決定される最適重みマトリクスは、一般に時間変化形で得られ、従来、定マトリクスとするのが普通であったのに比べ、大きな特徴となる。例題 2 にも示された如く、時間変化の重

みマトリクスを採用することによって、可制御領域が著しく広がることになる。

本報告にしたがって、最適重みマトリクスを決定する際に、修正操作量のフィードバックゲイン $R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ と同時に、二次形式の可制御集合を定義する重みマトリクス $(W(t_f^*-t, 0))$ が必然的に計算され、これ等はすべて Precomputable であって複雑で時間を要する計算は Off-line でなされる。したがって、本報告で述べた方法によって構成される系は、大きな On-line 計算機を必要とせず、能力の割りに経済的なシステムとなる。また、重みマトリクス W を記憶することによって、状態量の基準軌道に対する誤差を時々刻々測定し、それが、可制御集合に属するか否かを調べて、内装した制御法則によって終端の目標達成が可能か否かを容易に On-line 判定できる。このことは、この系の優れた特徴である。

また、この方法は広い応用範囲を持ち、航空機の自動着陸あるいは人工衛星の再突入等の Guidance 問題が顕著な応用例として考えられ、特にプロセス時間が比較的短く、従来の Iterative Guidance 法が使えないような場合には、大きな助けとなるものと思われる。

なお、本報告におけるような重みマトリクスの決定法は、従来から行なわれているように重みマトリクスを定マトリクスとして得ようとする場合にも容易に拡張される。

付録 A. マトリクス Ω について

(3) 式で与えられる q 個の終端条件 Ψ_f は、物理的工学的見地から、ある程度の誤差が許される場合が多い。したがって、基準解の終端のまわりで

$$d\Psi_f = \frac{\partial\Psi_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \delta\mathbf{x}_f + \frac{\partial\Psi_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial t_f} \delta t_f \quad (\text{A-1})$$

と、その変動関係を書くことができる。変動は終端状態量 $\delta\mathbf{x}_f$ および終端時間 δt_f の双方について考えられるが、ここでは状態量の変動が許されると仮定する。すなわち、 $\delta t_f = 0$ とする。したがって、(A-1) 式より、

$$d\Psi_f = \frac{\partial\Psi_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \delta\mathbf{x}_f \quad (\text{A-1}')$$

(A-1)' 式は $\delta\mathbf{x}_f$ に関する q 個の一次式であり、 $\delta\mathbf{x}_f$ の n 個の要素のうち、 $n-q$ 個は任意に選ぶのが、基準解軌道に沿うことをもってよしとする解軌道群を求める問題を扱うから、その軌道群の終端は、 \mathbf{x}_f^* の有限近傍になければならない。したがって、適当な $n-q$ 個の終端条件 $\hat{\Psi}_f$ を与え、

$$d\hat{\Psi}_f = \frac{\partial\hat{\Psi}_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \delta\mathbf{x}_f, \quad (n-q \text{ 個の条件}) \quad (\text{A-2})$$

ここに、

$$\text{rank} \left[\frac{\partial\hat{\Psi}_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \right] = n-q$$

なる如く書けるとすれば、(A-1)', (A-2) から作られる正方マトリクスの rank を最大ならしめることができる。すなわち、

$$\text{rank} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial\Psi_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \right] \\ \left[\frac{\partial\hat{\Psi}_f(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)}{\partial\mathbf{x}_f} \right] \end{array} \right) = \text{rank} \left[\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right] = n \text{ (最大)} \quad (\text{A-3})$$

たとえば、 $\delta x_r(t_f^*)$, $\delta x_{r+1}(t_f^*) \dots, \delta x_{r+n-q-1}(t_f^*)$ なる $n-q$ 個の変動が (A-1)' 式で、任意に選び得るとすれば、

$$\hat{\Psi}_f = \{\hat{\Psi}_f^{(i)}\} (=0), \quad i=1, 2, \dots, n-q \quad (\text{A-4})$$

$$\hat{\Psi}_f^{(i)} = x_{r-1+i}(t_f^*) - x_{r-1+i}^*(t_f^*) \quad (\text{A-5})$$

のように置いて、

$$\left[\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right] = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(r-1)} & \overbrace{\begin{matrix} 1, & 0 & \dots & 0 \\ 0, & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0, & 1 \end{matrix}}^{(n-q)} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(q-r+1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

の如く書ける。ここに、(A-3) 式におけるように、

$$\hat{\Psi}_f^* = [\Psi_f^T(t_f^*, \mathbf{x}_f^*) : \hat{\Psi}_f^T(t_f^*, \mathbf{x}_f^*)]^T \quad (\text{A-7})$$

とすれば、その最大許容誤差によって、

$$|d\hat{\Psi}_f^{*(i)}| \leq (d\hat{\Psi}_f^{*(i)})_{\max}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A-8})$$

$$\left| \frac{\partial\hat{\Psi}_f^{*(i)}}{\partial\mathbf{x}_f} \delta\mathbf{x}_f \right| \leq (d\hat{\Psi}_f^{*(i)})_{\max} \quad (\text{A-9})$$

と書ける。さらに簡略化して、上記 (A-9) 式の許容誤差集合内部にあって、その境界 ($=\{(d\hat{\Psi}_f^{*(i)})_{\max}\}$) に内接する許容誤差楕円体を考慮することにすれば、 $\delta\mathbf{x}(t_f^*)$ がその楕円体内部に属すれば (A-9) 式に対して十分である。今、この内接楕円体を

$$\begin{aligned} \xi_1 (d\hat{\Psi}_f^{*(1)})_{\max}^2 &= \xi_2 (d\hat{\Psi}_f^{*(2)})_{\max}^2 = \dots \\ &= \xi_i (d\hat{\Psi}_f^{*(i)})_{\max}^2 = \dots = \xi_n (d\hat{\Psi}_f^{*(n)})_{\max}^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

なる $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ を対角要素とする正定対角マトリクス $\mathbf{E} (n \times n)$ によって求めると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i (d\hat{\Psi}_f^{*(i)})^2 &= (d\hat{\Psi}_f^*)^T \cdot \mathbf{E} \cdot (d\hat{\Psi}_f^*) \\ &= \delta\mathbf{x}_f^T \left(\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right)^T \mathbf{E} \left(\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right) \delta\mathbf{x}_f \\ &= \delta\mathbf{x}_f^T \Omega \delta\mathbf{x}_f \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

ここに

$$\Omega = \left(\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right)^T \mathbf{E} \left(\frac{\partial\hat{\Psi}_f^*}{\partial\mathbf{x}_f} \right), \quad (n \times n; \text{正定}) \quad (\text{A-12})$$

となり、正定なマトリクス Ω を決定する一方法が (A-12) 式のように得られる。

付録 B. 可制御集合の重みマトリクス $W(\sigma, 0)$ の行例式

本文中 (31) 式の表現を得るには、(18) 式第 3 辺の表現によって

$$|W(\sigma, 0)| = |\Omega| \cdot |\Psi(\sigma, 0)|^2 \quad (\text{B-1})$$

なる関係による。この時間変化は、

$$\frac{d|W(\sigma, 0)|}{d\sigma} = 2|W(\sigma, 0)| \cdot \frac{d|\Psi(\sigma, 0)|}{|\Psi(\sigma, 0)|} \quad (\text{B-2})$$

であり, $\Psi(\sigma, 0)$ の行列式の時間微分は, $\Psi = \{\phi_{ij}\}$ として,

$$\frac{d|\Psi(\sigma, 0)|}{d\sigma} = \sum_{i,j=1}^{n,n} \frac{\partial |\Psi|}{\partial \phi_{ij}} \hat{\phi}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n,n} C_{ij} \hat{\phi}_{ij} = \text{tr}[(\text{Adj}\Psi) \cdot \hat{\Psi}] \quad (\text{B-3})$$

と書け, ここに

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|; \text{マトリクス } \Psi(\sigma, 0) \text{ の Cofactor}$$

$$M_{ij}; \text{マトリクス } \Psi(\sigma, 0) \text{ の Minor}$$

である。したがって, $|\Psi| \cdot \Psi^{-1} = \text{Adj}\Psi$, および (19), (23) 式によって,

$$\frac{d|\Psi|}{d\sigma} = |\Psi| \cdot \text{tr}[\Psi^{-1} \cdot \hat{\Psi}] = |\Psi| \text{tr}[\Psi^{-1} F^T \Psi] \quad (\text{B-4})$$

$$\therefore \frac{1}{|\Psi|} \frac{d|\Psi|}{d\sigma} = \text{tr}[F] \quad (\text{B-5})$$

(\therefore 相似変換によって trace は不変)

となる。故に (B-2) 式によって,

$$\frac{d|W(\sigma, 0)|}{d\sigma} = 2|W(\sigma, 0)| \cdot \text{tr}[F(\sigma)] \quad (\text{B-6})$$

$$|W(0, 0)| = |\mathcal{Q}| \quad (\text{B-7})$$

より

$$|W(\sigma, 0)| = |\mathcal{Q}| \exp \left\{ 2 \int_0^\sigma \text{tr}[F(\tau)] d\tau \right\} \quad (\text{B-8})$$

が得られる。

付録 C. 最大操作量を与える状態量

第5節の (50) 式から (52), (53) 式の誘導は, 束縛条件下での極値問題として扱える。まず,

$$g_i(\delta \mathbf{x}) = -\mathbf{b}_i^T(t) \mathbf{K}(t) \delta \mathbf{x}(t), \quad i=1, 2, \dots, m \quad \forall t \in [t_0, t_f^*] \quad (\text{C-1})$$

とおく。 $\delta \mathbf{x}$ に (51) 式の制限があるとき (C-1) 式に最大値を与える $\delta \mathbf{x}$ をすべての時刻 $t \in [t_0, t_f^*]$ について求める。ラグランジュ剰数 $\eta_i(t)$ の導入によって

$$\bar{g}_i(\delta \mathbf{x}) = -\mathbf{b}_i^T(t) \mathbf{K}(t) \delta \mathbf{x}(t) - \eta_i(t) (\delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{W}(\sigma, 0) \delta \mathbf{x}(t) - 1) \quad \forall t \in [t_0, t_f^*], \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{C-2})$$

なる $\bar{g}_i(\delta \mathbf{x})$ を最大ならしめる。

$$\frac{\partial \bar{g}_i(\delta \mathbf{x})}{\partial (\delta \mathbf{x})} = -\mathbf{b}_i^T(t) \mathbf{K}(t) - 2\eta_i(t) \delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{W}(\sigma, 0) = 0 \quad (\text{C-3})$$

したがって,

$$\delta \mathbf{x}^{(i)}(t) = -\frac{1}{2\eta_i(t)} \mathbf{W}^{-1}(\sigma, 0) \mathbf{K}(t) \mathbf{b}_i(t), \quad i=1, 2, \dots, m \quad \forall t \in [t_0, t_f^*] \quad (\text{C-4})$$

なる $\delta \mathbf{x}^{(i)}(t)$ において, (51) 式の条件下で (C-1) 式は最大になる。ただし, この $\delta \mathbf{x}^{(i)}(t)$ は ∂S_t 上に在るから, $\eta_i(t)$ は,

$$[\delta \mathbf{x}^{(i)}(t)]^T \mathbf{W}(\sigma, 0) \delta \mathbf{x}^{(i)}(t) = \frac{1}{4(\eta_i(t))^2} [\mathbf{b}_i^T(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{W}^{-1}(\sigma, 0) \mathbf{K}(t) \mathbf{b}_i(t)] = 1$$

$$\therefore 2\eta_i(t) = \pm \sqrt{\mathbf{b}_i^T(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{W}^{-1}(\sigma, 0) \mathbf{K}(t) \mathbf{b}_i(t)} \quad (\text{C-5})$$

を満たす。 $\bar{g}_i(\delta \mathbf{x})$ に最大を与えるためには, $\eta_i(t) > 0$ であり, (C-5) 式において正符号を取る。

文 献

- 1) 市川邦彦: 最適制御理論の実用における諸問題, 新制御理論に関係したトピックス (講習会用テキスト), 計測自動制御学会, 1968.
- 2) P.M. Derusso, R.J. Roy, and C.M. Close; State Variables for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- 3) K. Ogata: State Space Analysis of Control Systems, Prentice-Hall, Inc., 1967.
- 4) F.J. Ellert: Indices for Control System Design Using Optimization Theory, Doctoral Thesis, Dept. of Electrical Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y., 1963. 未入手。
- 5) F.J. Ellert and C.W. Merriam III; Synthesis of Feedback Controls Using Optimization Theory—An Example, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, No. 2, April 1963.
- 6) J.V. Breakwell, J.L. Speyer, and A.E. Bryson: Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation, J.S.I.A. M., Control, Ser. A, Vol. 1, No. 2, 1963.
- 7) R.E. Kopp and H.G. Moyer: Trajectory Optimization Techniques, Advances in Control Systems, Vol. 4, Academic Press Inc., 1967.
- 8) H.J. Kelley: Guidance Theory and Extremal Fields, IRE Trans. Autom. Control, October 1962.
- 9) H.J. Kelley: An Optimal Guidance Approximation Theory, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-9, No. 5, October 1964.
- 10) M. Athans and E. Tse: A Direct Derivation of the Optimal Linear Filter Using the Maximum Principle, IEEE Trans. Autom. Con-

- trol, Vol. AC-12, No. 6, Dec. 1967.
- 11) D.L. Kleinman and M. Athans: The Design of Suboptimal Linear Time-Varying Systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-13, No. 2, April 1968.
 - 12) D. L. Kleinman, T. Fortmann, and M. Athans: On the Design of Linear Systems with Piecewise-Constant Feedback Gains, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-13, No. 4, August 1968.

TR-169	VTOL 機操縦研究設備 Design and Construction of VTOL Flight Simulator System	1968年12月	樋口一雄, 百名盛之 三好範子, 岡部正典 山本六郎, 川原弘靖
TR-170	STOL 機の縦の自動安定制御方式に関する研究 (I) 姿勢制御方式の解析 System Studies on Automatic Longitudinal Stabilization Control Systems for STOL Aircraft Part 1 Automatic Attitude Control Systems	1968年12月	堀川勇壮, 森 幹彦
TR-171 T	Simple Flow Characteristics Across a Strong Shock Wave	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-172	高速における円錐体および三角翼の動安定微係数の測定 Measurement of Dynamic Stability Derivatives of Cones and Delta-Wings at High Speed	1969年2月	柳沢三憲
TR-173 T	Coupling Effect of Radiative Heat on Convective Heat Transfer	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-174	Navier-Stokes 方程式に対する差分法 Difference Method for Navier-Stokes Equation	1969年6月	三好 甫
TR-175	低レイノルズ数における NACA 0012 翼型の失速特性について —失速フラッタの研究 II— Stalling Characteristics of the NACA 0012 Aerofoil Section at Low Reynolds Numbers	1969年6月	中村泰治, 磯貝紘二 江尻 宏
TR-176	軸流回転機の翼の振動について (I) 固有振動数, 振動形および振動応力分布 On the Vibration of Turbomachine Blades (I) Natural Frequency Mode and Stress Distribution	1969年7月	宮地敏雄, 星谷昌二 祖父江 靖, 網干三郎 岩部柱相, 武田克己
TR-177	固体ロケットモータの推力大きさ制御の研究 —特性と小型モータによる実験— Thrust Magnitude Control of Solid Rocket Motors —Characteristic Analysis and Small Motor Tests—	1969年7月	五代富文, 湯沢克宜 伊藤克弥, 西村久雄

航空宇宙技術研究所報告178号

昭和44年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
